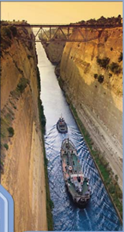
Παναγιώτης Πρίνος

Καθηγητής Υδραυλικής Μηχανικής, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών Α.Π.Θ.

ΥΔΡΑΥΛΙΚΗ ΑΝΟΙΚΤΩΝ ΑΓΩΓΩΝ



ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

Κάθε γνήσιο αντίτυπο φέρει την υπογραφή του συγγραφέα

ISBN 978-960-456-148-3

Φωτοστοιχειοθεσία
Εκτύπωση

Π. ΖΗΤΗ & Σια ΟΕ
18ο χλμ Θεσ/νίκης-Περαίας
Τ.Θ. 4171 • Περαία Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19
Τηλ.: 23920 72.222 (10 γραμ.) - Fax: 23920 72.229
e-mail: info@ziti.gr

Βιβλιοπωλείο

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
Αρμενοπούλου 27 • 546 35 Θεσσαλονίκη
Τηλ. 2310 203.720, Fax 2310 211.305
e-mail: sales@ziti.gr

www.ziti.gr

Πρόλογος

Το βιβλίο αυτό απευθύνεται πρωταρχικά στους φοιτητές Πολιτικούς Μηχανικούς και καλύπτει την ύλη των μαθημάτων «*Υδραυλική*» (μάθημα κορμού 4^{ο} εξάμηνο) και «*Υδραυλική Ανοικτών Αγωγών*» (μάθημα επιλογής, 8^{ο} εξάμηνο) που διδάσκεται στο Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών του Α.Π.Θ. Επίσης Πολιτικοί Μηχανικοί που ασχολούνται στην πράξη με θέματα όπως ο σχεδιασμός ανοικτών αγωγών, ο σχεδιασμός οχετών, οι μετρήσεις παροχής σε φυσικά υδατορεύματα μπορούν να συμβουλευτούν το βιβλίο αυτό.

Στο βιβλίο παρουσιάζονται αρχικά οι βασικές αρχές της διατήρησης μάζας, ορμής και ενέργειας και οι εφαρμογές τους σε ανοικτούς αγωγούς, θέματα που θα πρέπει να γνωρίζει ο φοιτητής Πολιτικός Μηχανικός πριν προχωρήσει σε θέματα όπως ο σχεδιασμός ανοικτών αγωγών, οχετών, αντιπλημμυρικής προστασίας ποταμών και υδατορευμάτων, λεκάνες εκτόνωσης, τα οποία αντιμετωπίζουν οι φοιτητές που ακολουθούν την κατεύθυνση της Υδραυλικής και Τεχνικής Περιβάλλοντος.

Το αντικείμενο της Υδραυλικής Ανοικτών Αγωγών θεωρείται ένα από τα κλασσικά αντικείμενα του Πολιτικού Μηχανικού και ένα από τα λίγα όπου ο Υδραυλικός Πολιτικός Μηχανικός έχει την αποκλειστικότητα σε ένα τόσο ευρύ, διεπιστημονικό τομέα όπως είναι το Νερό και το Περιβάλλον. Κλασσικά βιβλία στην διεθνή βιβλιογραφία υπάρχουν από το 1959 (V.T. Chow, Open Channel Hydraulics, McGraw Hill Co.) και το 1962 (Henderson, Open Channel Flow) αφού από την αρχαιότητα ο άνθρωπος κατασκεύαζε έργα ανοικτών αγωγών (έργα αποχέτευσης στην Μινωϊκή Κρήτη, Ρωμαϊκά Υδραγωγεία κ.λ.π).

Το βιβλίο βασίζεται στην διδακτική εμπειρία του συγγραφέα στα μαθήματα Υδραυλικής και Υδραυλικής Ανοικτών Αγωγών από το 1992 και την ερευνητική εμπειρία του σε αντίστοιχα θέματα από το 1981 οπότε και ξεκίνησε την εκπόνηση της διδακτορικής του διατριβής στο αντικείμενο της Υδραυλικής Ανοικτών αγωγών σύνθετης διατομής στο Πανεπιστήμιο Οττάβας του Καναδά.

Για την ολοκλήρωση του βιβλίου συνέβαλαν (α) η κ. Ολυμπία Καζαντζόγλου με την συγγραφή των σημειώσεων που βασίστηκε το βιβλίο αυτό (β) ο Δρ. Ζήσης Μάλλιος με την ψηφιοποίηση των διαγραμμάτων (γ) ο υποψήφιος Δρ. Αντρέας Παπατσιότσος με την επίλυση παραδειγμάτων στο EXCEL και (δ) ο εκδοτικός οίκος Ζήτη με την άψογη εκτύπωση τους οποίους και ευχαριστώ ολόθερμα.

Ο Συγγραφέας

Παναγιώτης ΠΡΙΝΟΣ
Καθηγητής Υδραυλικής Μηχ.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1: Χαρακτηριστικά της ροής σε ανοικτούς αγωγούς

Κεφάλαιο 2: Η αρχή της ενέργειας

Κεφάλαιο 3: Η αρχή της ορμής

Κεφάλαιο 4: Ομοιόμορφη ροή

Κεφάλαιο 5: Ανομοιόμορφη ροή – Βαθμιαία μεταβαλλόμενη ροή

Κεφάλαιο 6: Ειδικά θέματα

Κεφάλαιο 7: Μέθοδοι Μέτρησης της Παροχής

1ο Κεφάλαιο

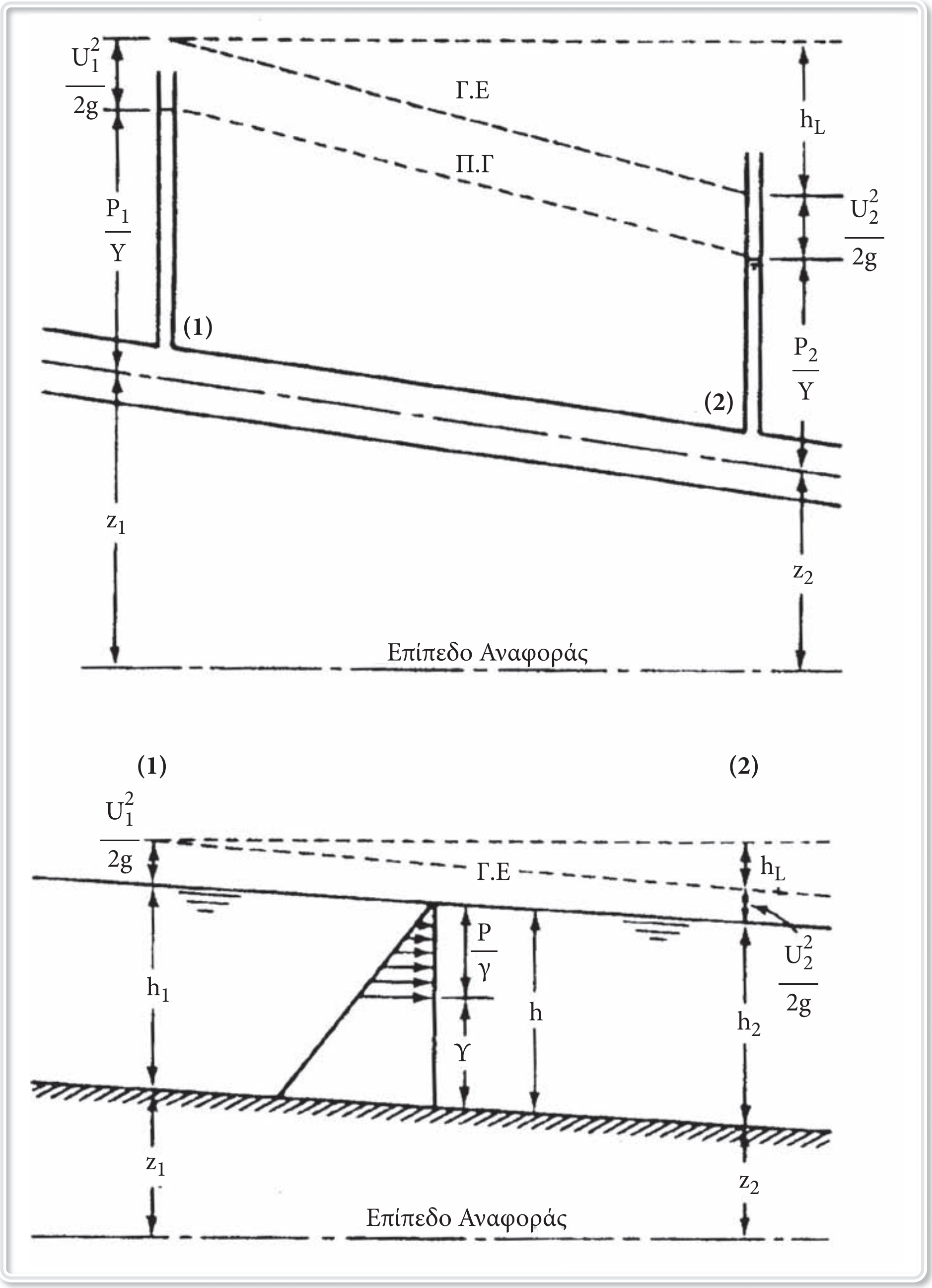
ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΤΗΣ ΡΟΗΣ ΣΕ ΑΝΟΙΚΤΟΥΣ ΑΓΩΓΟΥΣ

1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το ενδιαφέρον του ανθρώπου σε φυσικές ή τεχνητές διόδους του νερού όπου η ροή γίνεται λόγω βαρύτητας υπάρχει από πολύ παλιά χρόνια. Τα Ρωμαϊκά υδραγωγεία όπως επίσης και τα κανάλια της Αιγύπτου, Ινδίας, Ελλάδας κλπ. αποτελούν κλασσικά παραδείγματα των προσπαθειών του ανθρώπου προς αυτή τη κατεύθυνση. Τα πρακτικά παραδείγματα ροής σε ανοικτούς αγωγούς είναι πολλά. Ροή σε ποταμούς, αρδευτικά κανάλια, δίκτυα αποχέτευσης είναι μερικά από τα πιο γνωστά παραδείγματα ροών σε ανοικτούς αγωγούς. Τα πρακτικά προβλήματα ροής σε ανοικτούς αγωγούς για τα οποία ο πολιτικός μηχανικός συχνά αναζητά λύσεις είναι πολλά και με ανάλογη δυσκολία. Μερικά από αυτά είναι: ο σχεδιασμός καναλιών, ο υπολογισμός στάθμης - παροχής σε ποταμούς, ο υδραυλικός σχεδιασμός λεκανών εκτόνωσης, ο προσδιορισμός της παροχής σε εκχειλιστές και φράγματα, η κίνηση ενός πλημμυρικού κύματος σε ένα ποταμό, η διασπορά ρυπαντών σε ποταμούς κλπ.

Ένας αγωγός του οποίου το κινούμενο ρευστό δεν περιορίζεται πλήρως από στερεά τοιχώματα αλλά έχει μια ελεύθερη επιφάνεια με ατμοσφαιρική πίεση είναι γνωστός σαν **ανοικτός αγωγός**. Η ελεύθερη επιφάνεια μπορεί να θεωρηθεί σαν μια διεπιφάνεια μεταξύ του κινούμενου ρευστού και του κινούμενου ή ακίνητου αέρα. Η μορφή της ελεύθερης επιφάνειας εξαρτάται από δυνάμεις αδρανειακές, βαρύτητας ή επιφανειακές τάσεις. Στα περισσότερα πρακτικά προβλήματα, η επιφανειακή τάση δεν είναι σημαντική και επομένως η ροή σε ανοικτούς αγωγούς εξαρτάται από τη βαρύτητα, αδράνεια και ιξώδες.

Η ροή σε ανοικτούς αγωγούς διαχωρίζεται από αυτήν σε κλειστούς αγωγούς (σωλήνες) από τη παρουσία της ελεύθερης επιφάνειας. Το σχήμα 1.1 δείχνει τη



Σχήμα 1.1: *Πιεζομετρική γραμμή και γραμμή ενέργειας σε ανοικτούς και κλειστούς αγωγούς*

πιεζομετρική γραμμή και τη γραμμή ενέργειας για τις δύο αυτές ροές. Στη περίπτωση ανοικτού αγωγού η πιεζομετρική γραμμή ταυτίζεται με την ελεύθερη επιφάνεια και για το λόγο αυτό η ροή σε ανοικτό αγωγό ονομάζεται επίσης και **ροή με ελεύθερη επιφάνεια.** Η επίλυση προβλημάτων ροής σε ανοικτούς αγωγούς μπορεί να θεωρηθεί πιο δύσκολη από την επίλυση προβλημάτων ροής σε σωλήνες. Το σχήμα της διατομής και η τραχύτητα μεταβάλλονται περισσότερο στους ανοικτούς αγωγούς. Ενώ τα τεχνητά και εργαστηριακά κανάλια έχουν συνήθως διατομή με απλή γεωμετρία (ορθογωνική, τραπεζοειδής κλπ.) τα φυσικά υδατορεύματα συνήθως έχουν σύνθεση και ακανόνιστη διατομή. Επίσης ο πυθμένας ενός εργαστηριακού καναλιού είναι συνήθως λείος ενώ ο πυθμένας ενός ποταμού μπορεί να έχει μεγάλες πέτρες ή αμμοκύματα.

1.2 ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΑΝΟΙΚΤΩΝ ΑΓΩΓΩΝ

Οι ανοικτοί αγωγοί μπορούν να διαχωριστούν σαν **τεχνητοί** ή **φυσικοί** ανάλογα με το τρόπο διαμόρφωσης της διατομής τους (από τον άνθρωπο ή από φυσικές διεργασίες). Οι ποταμοί είναι ένα κλασσικό παράδειγμα φυσικών ανοικτών αγωγών ενώ τα αρδευτικά κανάλια και οι αποχετευτικοί αγωγοί (όταν η ροή δεν είναι υπό πίεση) ανήκουν στη κατηγορία των τεχνητών ανοικτών αγωγών.

Ένας αγωγός με αμετάβλητη διατομή και κλίση πυθμένα ονομάζεται **πρισματικός** ενώ αν η διατομή ή η κλίση πυθμένα μεταβάλλονται κατά μήκος του αγωγού ο αγωγός ονομάζεται **μη πρισματικός.**

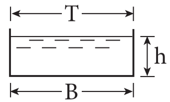
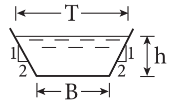
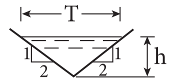
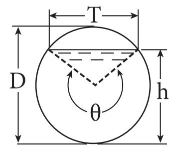
Ένας αγωγός με αμετάβλητο πυθμένα και πρανή (π.χ. αγωγός από τσιμέντο) είναι γνωστός σαν **αγωγός αμετάβλητης διατομής** ενώ όταν η διατομή αποτελείται από σωματίδια τα οποία κινούνται λόγω της δράσης του κινούμενου νερού τότε ο αγωγός ονομάζεται **αγωγός μεταβλητής διατομής**. Ένας **αλουβιακός αγωγός** είναι ένας αγωγός μεταβλητής διατομής που μεταφέρει υλικό του ιδίου τύπου με αυτόν που αποτελείται η διατομή του.

Τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά διατομών ανοικτών αγωγών φαίνονται στον Πίνακα 1.1.

1.3 ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΡΟΗΣ

Η ροή σε ανοικτούς αγωγούς μπορεί να διαχωρισθεί σε κατηγορίες με βάση διάφορα κριτήρια τα οποία παρουσιάζονται παρακάτω:

Πίνακας 1.1: *Γεωμετρικά χαρακτηριστικά διατομών ανοικτών αγωγών*

Διατομή	**Εμβαδόν, A**	**Βρεχόμενη Περίμετρος, P**	**Υδραυλική Ακτίνα R**	**Πλάτος ελεύθερης επιφάνειας, T**	**Υδραυλικό βάθος**	
Ορθογωνική	$B \cdot h$	$B+2h$	$\dfrac{B \cdot h}{B+2h}$	B	h	
Τραπεζοειδής	$(B+zh)h$	$B+2h\sqrt{1+z^2}$	$\dfrac{(B+zh)h}{B+2h\sqrt{1+z^2}}$	$B+2zh$	$\dfrac{(B+zh)h}{B+2zh}$	
Τριγωνική	zh^2	$2h\sqrt{1+z^2}$	$\dfrac{zh}{2\sqrt{1+z^2}}$	$2zh$	$0.5h$	
Κυκλική	$\dfrac{1}{8}(\theta-\sin\theta)D^2$	$\dfrac{1}{2}\theta D$	$\dfrac{1}{4}\left(1-\dfrac{\sin\theta}{\theta}\right)D$	$D\sin\dfrac{1}{2}\theta$	$\left(\dfrac{\theta-\sin\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta}\right)\dfrac{D}{8}$	

1.3.1 Στρωτή και Τυρβώδης Ροή

Στα περισσότερα πρακτικά προβλήματα ροής σε ανοικτούς αγωγούς λαμβάνονται υπόψη οι δυνάμεις λόγω αδράνειας, βαρύτητας και ιξώδους. Ο λόγος αδρανειακών δυνάμεων / συνεκτικών δυνάμεων (ανά μοναδιαίο όγκο) είναι γνωστός σαν **αριθμός Reynolds (Re)** και μπορεί να γραφεί όπως

$$\mathrm{Re} = \frac{U \cdot L}{\nu} \tag{1.1}$$

όπου U = χαρακτηριστική ταχύτητα (συνήθως η μέση ταχύτητα της διατομής), L = χαρακτηριστικό μήκος και ν = κινηματικό ιξώδες του ρευστού.

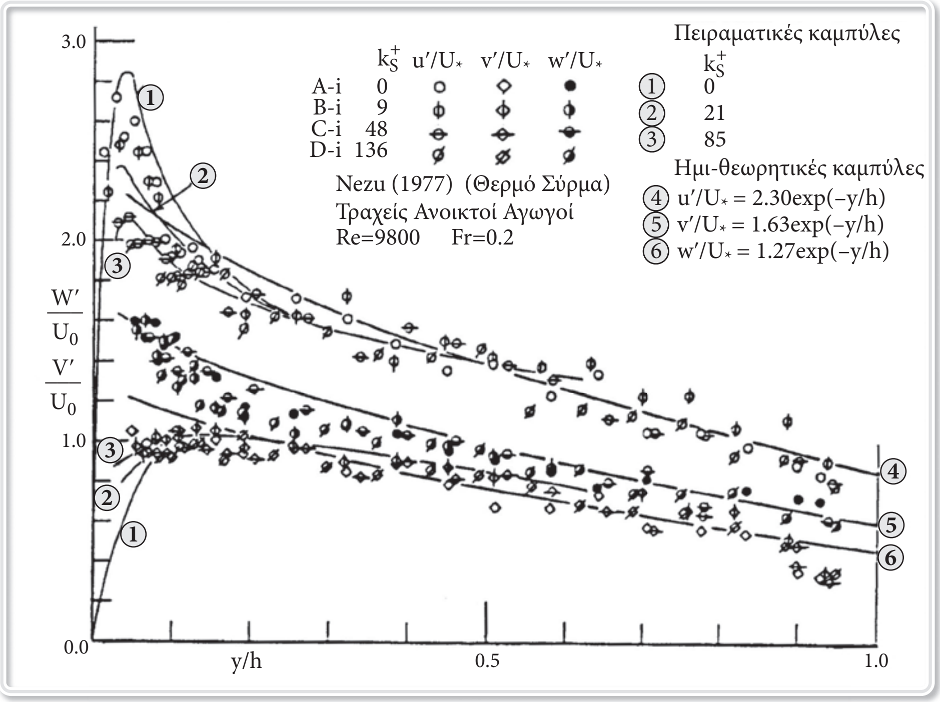
Είναι γνωστό ότι για χαμηλές τιμές του Re η ροή ακολουθεί συγκεκριμένη τροχιά και είναι γνωστή σαν **στρωτή ροή.** Για μεγαλύτερες τιμές του Re λαμβάνει χώρα ανάμιξη μεταξύ των διάφορων στοιβάδων του ρευστού η ροή δεν ακολουθεί κάποιες συγκεκριμένες τροχιές και αυτή η ροή ονομάζεται **τυρβώδης**. Στρωτή ροή σταματάει να υπάρχει σε ένα σωλήνα όταν ο λόγος UD/ν είναι μεγαλύτερος από 2000 (D = διάμετρος σωλήνα). Ορίζοντας την υδραυλική ακτίνα R σαν το λόγο εμβαδού διατομής / βρεχόμενη περίμετρο τότε για σωλήνα έχουμε $R = D/4$. Επομένως ο **κρίσιμος αριθμός Re** για τον οποίον η ροή μεταβάλλεται από στρωτή μπορεί να εκφρασθεί σαν $UR/\nu = 500$. Πειράματα σε ανοικτούς αγωγούς έχουν δείξει ότι η ροή παραμένει στρωτή για $UR/\nu \le 500$ και η ροή είναι τυρβώδης για $UR/\nu \ge 2000$. Μεταξύ των δύο αυτών ορίων η ροή βρίσκεται σε μία μεταβατική κατάσταση.

Στη τυρβώδη ροή η ταχύτητα σε ένα σημείο μεταβάλλεται με το χρόνο. Συνήθως αναλύουμε τη στιγμιαία ταχύτητα σε μία μέση-χρονικά ταχύτητα και μία διακύμανση. Επομένως αν U, V, W είναι οι στιγμιαίες συνιστώσες της ταχύτητας στις διευθύνσεις x, y, z αντίστοιχα (x = διεύθυνση της ροής, y = κάθετη διεύθυνση, z = εγκάρσια διεύθυνση) τότε έχουμε

$$\begin{aligned} U &= \bar{U} + u, \\ V &= \bar{V} + v \\ W &= \bar{W} + w \end{aligned} \tag{1.2}$$

όπου $\bar{U}, \bar{V}, \bar{W}$ = μέσες - χρονικά ταχύτητες και u, v, w = διακυμάνσεις.

Πρόσφατα έχουν γίνει μετρήσεις των διακυμάνσεων της ταχύτητας σε ανοικτούς αγωγούς με τη χρήση ανεμομετρίας θερμού φιλμ ή Laser-Doppler (Nezu & Nakagawa, 1977). Μετρήσεις των εντάσεων της τύρβης u', v', w' ($u' = \sqrt{\overline{u^2}}$) σε ανοικτούς αγωγούς φαίνονται στο σχήμα 1.2 για λείο και τραχύ πυθμένα.



Σχήμα 1.2: *Κατανομή τυρβωδών εντάσεων σε ανοικτό αγωγό με λείο και τραχύ πυθμένα*

Η επίδραση της τραχύτητας είναι σημαντική κοντά στον πυθμένα ενώ για y/h μεγαλύτερο του 0.3 δεν υπάρχει καμμία επίδραση. Οι πειραματικές τιμές συμφωνούν ικανοποιητικά με τις ημιεμπειρικές καμπύλες που έχουν προκύψει από τις εξισώσεις που φαίνονται στο σχήμα για ροή σε αγωγούς με λείο πυθμένα.

Η αυξανόμενη απώλεια ενέργειας στη τυρβώδη ροή οφείλεται στις παραπάνω τυρβώδεις διακυμάνσεις οι οποίες ευθύνονται επίσης για τα αιωρούμενα στερεά και τη διασπορά ρυπαντών σε ανοικτούς αγωγούς.

1.3.2 Υποκρίσιμη και Υπερκρίσιμη Ροή

Ο λόγος αδρανειακών δυνάμεων / δυνάμεων βαρύτητας (ανά μονάδα όγκου) είναι γνωστός σαν **αριθμός Froude (Fr)** και μπορεί να γραφεί όπως

$$\mathrm{Fr} = \frac{U}{\sqrt{gL}} \tag{1.3}$$

όπου g = επιτάχυνση λόγω βαρύτητας.

Σε ανοικτούς αγωγούς συνήθως χρησιμοποιείται το **υδραυλικό βάθος D** (που ορίζεται σαν ο λόγος εμβαδού διατομής / πλάτος ελεύθερης επιφάνειας) σαν χαρακτηριστικό μήκος.

Η ροή θεωρείται **κρίσιμη** όταν ο αριθμός Fr είναι ίσος με τη μονάδα, **υποκρίσιμη** όταν ο Fr είναι μικρότερος της μονάδας και **υπερκρίσιμη** όταν ο Fr είναι μεγαλύτερος της μονάδας. Μερικές φορές η υποκρίσιμη ροή ονομάζεται και **ποτάμια** ενώ η υπερκρίσιμη ροή ονομάζεται και **χειμαρρώδης.** Ο όρος $\sqrt{gD}$ μπορεί να θεωρηθεί σαν η ταχύτητα μετάδοσης μικρών διαταραχών (κύμα βαρύτητας) στην ελεύθερη επιφάνεια ενός ακίνητου ρευστού. Επομένως ο αριθμός Fr μπορεί να θεωρηθεί όχι μόνο σαν λόγος δυνάμεων όπως προηγούμενα αλλά και σαν λόγος ταχυτήτων (ταχύτητα ροής / ταχύτητα κύματος βαρύτητας). Το κύμα βαρύτητας σε υποκρίσιμη ροή μπορεί να διαδοθεί ανάντη και κατάντη ενώ στη περίπτωση υπερκρίσιμης ροής μπορεί να διαδοθεί μόνο στη κατάντη ροή.

Η ροή στους περισσότερους ποταμούς και κανάλια είναι υποκρίσιμη ενώ υπερκρίσιμη ροή συναντάται επάνω και κατάντη εκχειλιστών, κατάντη θυρίδων κλπ.

1.3.3 Μόνιμη και μη Μόνιμη Ροή

Η ροή μπορεί να θεωρηθεί **μόνιμη** ή **μη-μόνιμη** με βάση τη χρονική μεταβολή του βάθους και της μέσης ταχύτητας ροής.

Η ροή ονομάζεται **μόνιμη** όταν το βάθος, η παροχή Q και η μέση ταχύτητα ροής δεν μεταβάλλονται με το χρόνο, ενώ όταν οι παραπάνω ποσότητες μεταβάλλονται με το χρόνο η ροή είναι **μη-μόνιμη**. Επομένως για μόνιμη ροή θα έχουμε $\partial h/\partial t = 0$, $\partial U/\partial t = 0$ και $\partial Q/\partial t = 0$.

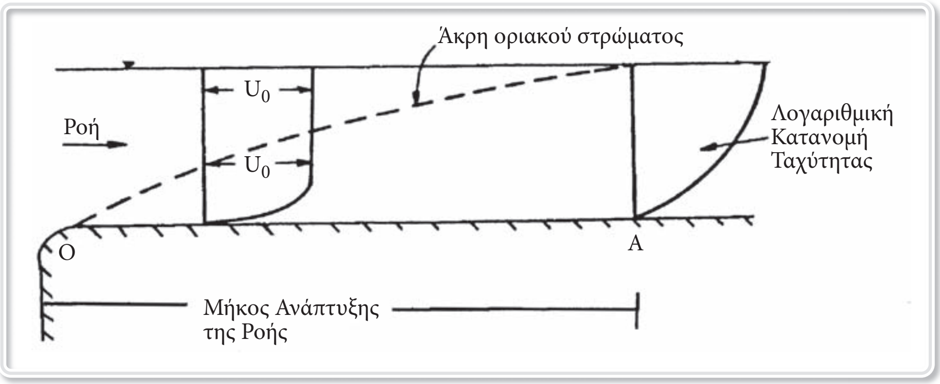
Η ροή σε αρδευτικά κανάλια μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι μόνιμη για μεγάλα χρονικά διαστήματα ενώ η ροή σε ένα ποταμό κατά τη διάρκεια μιας πλημμύρας αποτελεί κλασσικό παράδειγμα μη-μόνιμης ροής.

1.3.4 Ομοιόμορφη και Ανομοιόμορφη Ροή

Όταν το βάθος, η παροχή και η μέση ταχύτητα ροής δεν μεταβάλλονται κατά μήκος του αγωγού η ροή θεωρείται **ομοιόμορφη**, ενώ όταν τα παραπάνω μεγέθη μεταβάλλονται κατά μήκος του αγωγού η ροή είναι **ανομοιόμορφη**. Έτσι για ομοιόμορφη ροή έχουμε $\partial h/\partial x = 0$, $\partial U/\partial x = 0$ και $\partial Q/\partial x = 0$ (x = διεύθυνση κατά μήκος του αγωγού).

Μερικές φορές η ανομοιόμορφη ροή ονομάζεται και **μεταβαλλόμενη ροή** και μπορεί να χωρισθεί σε **βαθμιαία μεταβαλλόμενη** και σε **απότομα μεταβαλλόμενη** ροή ανάλογα με το πόσο εύκολα μεταβάλλονται οι παραπάνω ποσότητες (βαθμιαία ή απότομα). Ομοιόμορφες και ανομοιόμορφες ροές μπορεί να είναι μόνιμες ή μη-μόνιμες και επομένως μπορούμε να έχουμε τέσσερις διαφορετικές κατηγορίες ροών.

Για να έχουμε πραγματικά ομοιόμορφη ροή θα πρέπει επίσης η κατανομή της ταχύτητας στο βάθος ροής να είναι ίδια κατά μήκος του αγωγού. Η συνθήκη αυτή δεν ικανοποιείται στο αρχικό μήκος ενός καναλιού (συνδεδεμένου με μία δεξαμενή) όπως φαίνεται και στο σχήμα 1.3 αφού στο αρχικό αυτό μήκος το οριακό στρώμα αναπτύσσεται συνεχώς.



Σχήμα 1.3: *Ανάπτυξη της ροής σε ανοικτούς αγωγούς*

Όταν το πάχος του οριακού στρώματος γίνει ίσο με το βάθος ροής η κατανομή της ταχύτητας είναι λογαριθμική σε όλο το βάθος ροής (για τυρβώδη ροή) και το προφίλ της ταχύτητας παραμένει το ίδιο από εκείνη τη θέση και στη κατάντη ροή. Στη περίπτωση αυτή η ροή ονομάζεται **πλήρως αναπτυγμένη** και επομένως πραγματικά ομοιόμορφη όταν το βάθος είναι σταθερό κατάντη της δεξαμενής Α.

1.3.5 Μονοδιάστατη, Διδιάστατη και Τρισδιάστατη Ροή

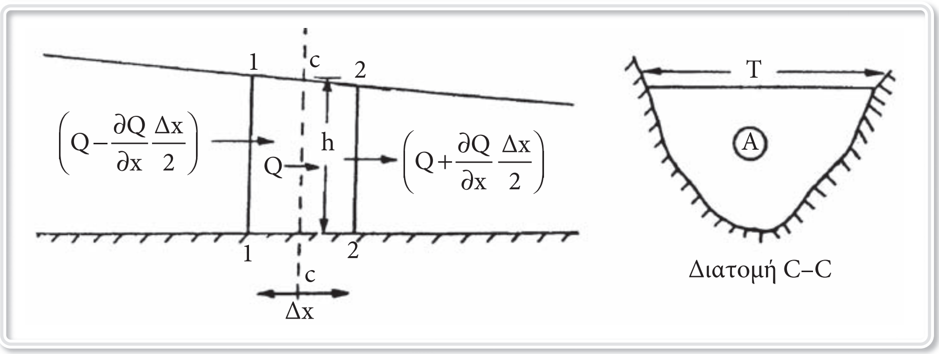
Γενικά η ταχύτητα του ρευστού σε ένα σημείο εξαρτάται από τις χωρικές συντεταγμένες x, y, z και το χρόνο t. Όταν η ροή είναι μόνιμη η ταχύτητα είναι ανεξάρτητη του χρόνου. Όταν η ταχύτητα ροής εξαρτάται από τη θέση του σημείου στη διεύθυνση της ροής όπως επίσης και από τις αποστάσεις του σημείου από το πυθμένα και τα πρανή του αγωγού η ροή θεωρείται **τρισδιάστατη**. Η ροή σε ένα στενό αγωγό είναι προφανώς τρισδιάστατη. Αν ο αγωγός είναι αρκετά πλατύς σε σχέση με το βάθος ροής ($B/h > 10$, B = πλάτος αγωγού, h = βάθος ροής) τότε η ταχύτητα σε δεδομένη απόσταση από το πυθμένα θα είναι σταθερή ανεξάρτητα από την απόσταση του σημείου από τα πρανή. Τέτοια ροή ονομάζεται **διδιάστατη**. Σε μερικές περιπτώσεις η ανάλυση των βασικών χαρακτηριστικών της ροής απλοποιείται θεωρώντας ότι μεταβολές της ταχύτητας στη διατομή του αγωγού είναι αμελητέες. Στη περίπτωση αυτή εξετάζεται η μεταβολή της μέσης ταχύτητας κατά μήκος του αγωγού και η ροή θεωρείται **μονοδιάστατη**.

1.4 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Οι τρεις βασικές εξισώσεις της ρευστομηχανικής (συνέχειας, ενέργειας και ορμής) χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν τη ροή σε ανοικτούς αγωγούς. Η εφαρμογή των εξισώσεων αυτών σε ανοικτούς αγωγούς περιγράφεται παρακάτω.

1.4.1 Εξίσωση Συνέχειας

Αν εξετάσουμε τον όγκο ελέγχου 1-2-2-1 μήκους Δx ενός ανοικτού αγωγού (σχήμα 1.4) θεωρούμε ότι η παροχή στη διατομή CC είναι Q, το βάθος ροής h σε κάθε χρονική στιγμή t, το εμβαδόν της διατομής A και το πλάτος της ελεύθερης επιφάνειας T. Η τελική εισροή στον όγκο ελέγχου σε χρόνο Δt γράφεται όπως



Σχήμα 1.4: *Εισροή και εκροή σε όγκο ελέγχου*

$$\left[\left(Q-\frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}\right)-\left(Q+\frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}\right)\right]\Delta t=-\frac{\partial Q}{\partial x}\Delta x\Delta t \tag{1.4}$$

Η αύξηση του όγκου σε χρόνο Δt είναι

$$\frac{\partial}{\partial t}(A\cdot\Delta x)\Delta t \tag{1.5}$$

Εξισώνοντας τις εξ. (1.4) και (1.5) και διαιρώντας με το $\Delta x\ \Delta t$ παίρνουμε την εξίσωση συνέχειας

$$\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{\partial A}{\partial t}=0 \tag{1.6}$$

Εκφράζοντας την παροχή σαν γινόμενο της μέσης ταχύτητας U και του εμβαδού της διατομής A έχουμε

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(A\,U\right)+\frac{\partial A}{\partial t}=0 \tag{1.7}$$

και στη περίπτωση που ο αγωγός είναι ορθογωνικής διατομής $(A = Bh)$ τότε η (1.7) γίνεται

$$U\frac{\partial h}{\partial x}+h\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial h}{\partial t}=0 \tag{1.8}$$

Αν η ροή είναι μόνιμη από την εξ. (1.7) έχουμε

$$Q=A_1U_1=A_2U_2=A_3U_3=....=\text{ σταθερή} \tag{1.9}$$

Στη περίπτωση που υπάρχει πρόσθεση ή αφαίρεση ρευστού στην εγκάρσια διεύθυνση με ρυθμό q_x (ανά μονάδα μήκους) τότε η εξ. (1.6) τροποποιείται όπως

$$\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{\partial A}{\partial t}=\pm q_x \tag{1.10}$$

όπου το θετικό πρόσημο χρησιμοποιείται στη περίπτωση εισροής (έγχυσης) ρευστού ενώ το αρνητικό στη περίπτωση εκροής (αναρρόφησης).

1.4.2 Εξίσωση Ενέργειας

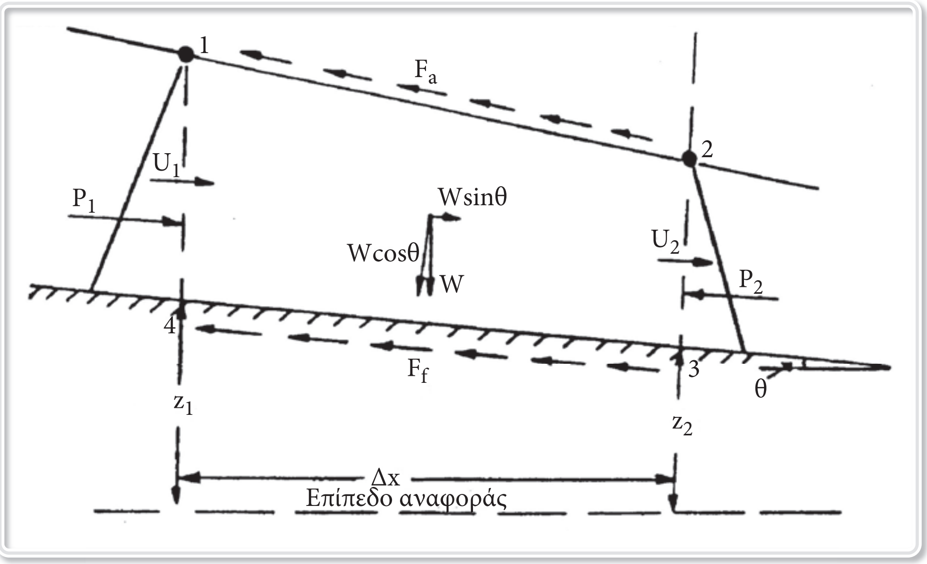
Η εξίσωση ενέργειας για ιδανικά ρευστά (εξίσωση Bernoulli) γράφεται όπως

$$\frac{p}{\gamma}+z+\frac{U^2}{2g}=\text{ σταθερό} \tag{1.11}$$

όπου p = στατική πίεση σε ένα σημείο, γ = ειδικό βάρος ρευστού ($\gamma = \rho g$), z = υψόμετρο από ένα επίπεδο αναφοράς, U = ταχύτητα ροής.

Η παραπάνω εξίσωση τροποποιείται κατάλληλα και λαμβάνει υπόψη τις απώλειες ενέργειας στη περίπτωση των πραγματικών ρευστών. Αν εξετάσουμε ανομοιόμορφη ροή σε ανοικτό αγωγό (Σχήμα 1.5) η εξίσωση (1.11) γράφεται όπως

$$h_1 + \frac{U_1^2}{2g} + z_1 = h_2 + \frac{U_2^2}{2g} + z_2 + h_L \tag{1.12}$$



Σχήμα 1.5: *Εφαρμογή της αρχής ενέργειας και ορμής σε ανοικτό αγωγό*

Οι δείκτες 1 και 2 αντιστοιχούν στα σημεία 1 και 2 αντίστοιχα και h_L = απώλεια φορτίου μεταξύ των δύο διατομών. Η απώλεια φορτίου μπορεί να οφείλεται στη τριβή του πυθμένα και των τοιχωμάτων, στη ροή γύρω από βυθισμένα σώματα ή την σημαντική τύρβη που αναπτύσσεται στη περίπτωση του υδραυλικού άλματος κλπ.

Ο προσδιορισμός της απώλειας ενέργειας h_L αποτελεί ένα από τα βασικά προβλήματα της μηχανικής ρευστών και υδραυλικής και ο μη προσδιορισμός της ποσότητας αυτής σε πολλά προβλήματα περιορίζει την εφαρμογή της εξίσωσης ενέργειας.

Η εξίσωση (1.12) μπορεί επίσης να γραφεί όπως

$$E_1 - E_2 = (z_2 - z_1) + h_L \tag{1.13}$$

όπου E = ειδική ενέργεια $(= h + U^2/2g)$.

1.4.3 Εξίσωση Ορμής

Από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα μπορούμε να εξάγουμε την εξίσωση ορμής που δηλώνει ότι το άθροισμα των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται σε ένα όγκο ελέγχου του ρευστού και σε μία δεδομένη διεύθυνση είναι ίσο με τη μεταβολή της παροχής ορμής στη διεύθυνση αυτή, δηλ.

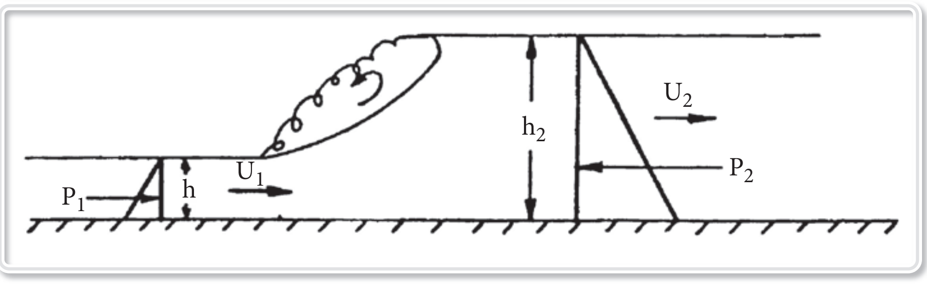
$$\sum F_x = \rho Q \Delta U \tag{1.14}$$

Η εξίσωση (1.14) μπορεί να γραφεί όπως παρακάτω για τον όγκο ελέγχου 1-2-3-4 του σχ. 1.5

$$W \sin\theta + P_1 - P_2 - F_f - F_\alpha = \rho Q (U_2 - U_1) \tag{1.15}$$

όπου W = βάρος όγκου ελέγχου, θ = κλίση πυθμένα, P_1, P_2 = υδροστατικές δυνάμεις στις διατομές 1-4 και 2-3, F_f = δύναμη λόγω τριβής στο μήκος Δx, F_α = αντίσταση αέρα στην ελεύθερη επιφάνεια.

Η εξίσωση ορμής βρίσκει αρκετές εφαρμογές σε περιπτώσεις που οι απώλειες ενέργειας δεν μπορούν να εκτιμηθούν και επομένως η εξίσωση ενέργειας δεν μπορεί να εφαρμοσθεί. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα εφαρμογής της εξίσωσης ορμής είναι η περίπτωση μετάβασης από υπερκρίσιμη σε υποκρίσιμη ροή. Τέτοια περίπτωση συχνά συναντάται σε ροή από εκχειλιστές ή μετά από θυρίδες. Η μεταβολή από υπερκρίσιμη σε υποκρίσιμη ροή λαμβάνει χώρα μέσω του **υδραυλικού άλματος.** Υπάρχει σημαντική τύρβη και μεγάλη απώλεια ενέργειας στο υδραυλικό άλμα. Αν εξετάσουμε ένα οριζόντιο ορθογωνικό αγωγό όπου εμ-



Σχήμα 1.6: *Εφαρμογή της εξίσωσης ορμής στο υδραυλικό άλμα σε οριζόντιο αγωγό*

φανίζεται υδραυλικό άλμα (Σχήμα 1.6) και θέτοντας $\theta = F_f = F_\alpha = 0$ στην εξ. (1.15) έχουμε

$$P_1 - P_2 = \rho Q\left(U_2 - U_1\right) \tag{1.16}$$

ή $$\left(\frac{1}{2}\rho g h_1^2 - \frac{1}{2}\rho g h_2^2\right)B = \rho U_1 h_1 B\left(U_2 - U_1\right)$$

$$\left(h_1 - h_2\right)\left(h_1 + h_2\right) = \frac{2U_1 h_1}{g}\left(U_2 - U_1\right) \tag{1.17}$$

Από την εξ. συνέχειας έχουμε $q = U_1 h_1 = U_2 h_2$ και επομένως η εξ. (1.16) γίνεται

$$\left(h_1 - h_2\right)\left(h_1 + h_2\right) = \frac{2U_1^2 h_1}{g h_2}\left(h_1 - h_2\right)$$

ή $$\frac{h_2}{h_1}\left(1 + \frac{h_2}{h_1}\right) = 2Fr_1^2$$

όπου $Fr_1 = \dfrac{U_1}{\sqrt{g h_1}}$.

Τελικά έχουμε

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{1 + 8Fr_1^2} - 1\right] \tag{1.18}$$

Τα βάθη h_1, h_2 είναι γνωστά σαν **συζυγή βάθη** του άλματος.

1.5 ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ ΤΑΧΥΤΗΤΑΣ

Στη περίπτωση ροής πραγματικού ρευστού η ταχύτητα μεταβάλλεται στη διατομή του αγωγού. Η ταχύτητα στο πυθμένα και στα τοιχώματα είναι μηδέν και αυξάνεται με την αύξηση της απόστασης του σημείου από τα τοιχώματα της διατομής. Τέτοιες μεταβολές της ταχύτητας θα πρέπει να ληφθούν υπόψη στον υπολογισμό της παροχής ορμής και ενέργειας σε ένα ανοικτό αγωγό και επομένως οι εξισώσεις ορμής και ενέργειας να τροποποιηθούν ανάλογα.

Η κινητική ενέργεια μιας μάζας m με ταχύτητα U είναι $mU^2/2$.

Αν θεωρήσουμε έναν αγωγό εμβαδού διατομής A στον οποίο u είναι η ταχύτητα σε ένα στοιχειώδες εμβαδόν dA μπορούμε να γράψουμε τη συνολική κινητική ενέργεια όπως:

$$KE=\int_A \rho u dA\cdot u^2/2=\frac{1}{2}\int_A \rho u^3 dA \tag{1.19}$$

Ο λόγος της κινητικής ενέργειας (που υπολογίζεται από την εξ. (1.19)) ως προς τη κινητική ενέργεια που υπολογίζεται υποθέτοντας μέση ταχύτητα U σε όλη τη διατομή ονομάζεται **συντελεστής διόρθωσης ενέργειας** και συμβολίζεται με το α.

Η κινητική ενέργεια με βάση τη μέση ταχύτητα U υπολογίζεται όπως

$$KE=\frac{1}{2}\rho U^3 A \tag{1.20}$$

και επομένως

$$\alpha=\frac{1}{A}\int_A\left(\frac{u}{U}\right)^3 dA \tag{1.21}$$

Αν έχουμε ροή διδιάστατη σε ορθογωνικό αγωγό τότε $A = Bh$ και $dA = Bdy$ (y = απόσταση από το πυθμένα) και επομένως η εξ. (1.21) γίνεται

$$\alpha=\frac{1}{h}\int_0^h (u/U)^3 dy \tag{1.22}$$

Αν τα α και U είναι γνωστά τότε μπορεί να υπολογισθεί η πραγματική κινητική ενέργεια σαν ½ $\alpha\rho U^3 A$.

Μπορούμε επίσης να ολοκληρώσουμε την εξ. (1.21) ή (1.22) και να βρούμε το α αν η ταχύτητα u είναι γνωστή συνάρτηση του y. Όταν μία τέτοια συνάρτηση δεν είναι γνωστή τότε τα αποτελέσματα πραγματικών μετρήσεων μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον υπολογισμό του α με γραφικό τρόπο. Όταν η τιμή του α είναι γνωστή η εξίσωση ενέργειας γίνεται

$$h_1+\alpha_1\frac{U_1^2}{2g}+z_1=h_2+\alpha_2\frac{U_2^2}{2g}+z_2+h_L \tag{1.23}$$

και

$$E=h+\alpha\frac{U^2}{2g} \tag{1.24}$$

Η παροχή ορμής μίας μάζας m με σταθερή ταχύτητα U είναι mU. Στη περίπτωση που η ταχύτητα μεταβάλλεται στη διατομή η παροχή ορμής υπολογίζεται όπως

$$\pi.O = \int_A (\rho u dA) u = \int_A \rho u^2 dA \tag{1.25}$$

ενώ στη περίπτωση μέσης ταχύτητας U στη διατομή έχουμε

$$\pi.O = \rho U^2 A \tag{1.26}$$

Επομένως ο **συντελεστής διόρθωσης της ορμής** β υπολογίζεται όπως

$$\beta = \frac{1}{A} \int_A \left(\frac{u}{U} \right)^2 dA \tag{1.27}$$

και για διδιάστατη ροή

$$\beta = \frac{1}{h} \int_0^h \left(\frac{u}{U} \right)^2 dy \tag{1.28}$$

Με ολοκλήρωση της εξ. (1.27) ή (1.28) για γνωστή κατανομή της ταχύτητας μπορεί να υπολογισθεί ο συντελεστής β και η εξίσωση ορμής μπορεί να γραφεί στη παρακάτω μορφή

$$\sum F_x = \beta_2 \rho Q U_2 - \beta_1 \rho Q U_1 \tag{1.29}$$

Οι παραπάνω συντελεστές α και β παίρνουν τιμές 1.10 και 1.05 αντίστοιχα για τυρβώδη ροή, αλλά μπορεί να πάρουν και τιμές μέχρι 2.0 σε αγωγούς τυχαίους, ακανόνιστης διατομής. Συνήθως και για ευκολία στα περισσότερα προβλήματα υποθέτουμε ότι οι συντελεστές αυτοί παίρνουν την τιμή 1.0.

Ασκήσεις για λύση

1.1 Η κατανομή της ταχύτητας σε βάθος ροής 120 mm δίνεται στον παρακάτω πίνακα. Υπολογίστε τη μέση ταχύτητα ροής U και τους συντελεστές α και β.

y (mm)	0.0	3.0	10.0	15.0	20.0	40.0	60.0	80.0	100.0	120.0
u (m/s)	0.0	1.25	1.75	2.05	2.2	2.55	2.75	2.85	2.9	3.0

1.2 Οι παρακάτω ταχύτητες μετρήθηκαν σε αγωγό ορθογωνικής διατομής πλάτους 80 cm και βάθους ροής 200 mm. Οι κάθετες (A έως G) χωρίζουν το πλάτος του αγωγού σε 8 ίσα τμήματα μήκους 10 cm. Υπολογίστε τις τιμές των συντελεστών α και β.

Απόσταση από πυθμένα (mm)	**Ταχύτητα (m/s)**								
	2.0	**5.0**	**8.0**	**10.0**	**20.0**	**30.0**	**50.0**	**100.0**	**195.0**
Κάθετος A	1.40	1.43	1.48	1.51	1.53	1.56	1.59	1.62	1.65
Κάθετος B	1.53	1.60	1.65	1.68	1.70	1.74	1.78	1.81	1.85
Κάθετος C	1.61	1.67	1.71	1.75	1.79	1.81	1.84	1.90	1.93
Κάθετος D	1.68	1.73	1.80	1.84	1.87	1.89	1.90	1.97	2.00
Κάθετος E	1.61	1.67	1.71	1.75	1.79	1.81	1.84	1.90	1.93
Κάθετος F	1.53	1.60	1.65	1.68	1.70	1.74	1.78	1.81	1.85
Κάθετος G	1.40	1.43	1.48	1.51	1.53	1.56	1.59	1.62	1.65

1.3 Θεωρώντας αγωγό μεγάλου πλάτους με κατανομή ταχύτητας που δίνεται από τις παρακάτω σχέσεις

$$\frac{U}{U_o} = \sin\frac{\pi y}{2y_o} \quad \text{Στρωτή ροή}$$

$$\frac{U}{U_o} = \left(\frac{y}{y_o}\right)^n \quad \text{Τυρβώδης ροή}$$

όπου y_o = βάθος ροής και U_o =ταχύτητα ροής σε απόσταση y_o από τον πυθμένα, προσδιορίστε τους συντελεστές ταχύτητας α και β. (Στη δεύτερη περίπτωση σαν συνάρτηση του n). Δείξτε ότι ο λόγος $(\alpha-1)(\beta-1)$ είναι ίσος με 2.76 για στρωτή ροή και ίσος με $(n+3)(2n+1)(3n+1)$ για τυρβώδη ροή.