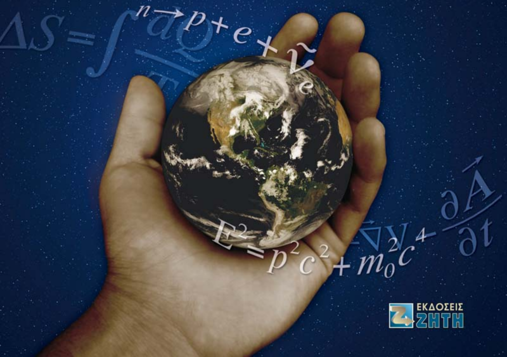
Αθανάσιος Πρίκας

Φυσική
ΓΕΝΙΚΗ & ΣΥΓΧΡΟΝΗ

• Μηχανική • Κυματική – Οπτική • Θερμοδυναμική
• Ηλεκτρομαγνητισμός • Σύγχρονη Φυσική

- **για φυσικούς, υποψηφίους ΑΣΕΠ**
- **για φοιτητές Σχολών Θετικών Επιστημών**



ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

Πρόλογος

Το βιβλίο τούτο είχε πολλαπλή στόχευση:

α) Θελήσαμε να μαζέψουμε τη φαινομενικά απέραντη ύλη της Γενικής και Σύγχρονης Φυσικής με τρόπο μεθοδικό, ευσύνοπτο και κυρίως χωρίς να παραμελήσουμε βασικά της τμήματα.

β) Θελήσαμε να αναδείξουμε τις ενοποιητικές αρχές που διέπουν όλη τη Φυσική, τις αρχές διατήρησης για παράδειγμα, στο πλαίσιο των οποίων μπορεί να ερμηνεύσει κανείς πλήθος από διαφορετικά φαινόμενα.

γ) Δε θελήσαμε να κρύψουμε τα μαθηματικά, όπως και «ό,τι είναι δύσκολο» κάτω από το χαλί ούτε να τα παραπετάξουμε. Ίσα - ίσα που επιμείναμε περισσότερο στην ανάδειξη, σχολιασμό, ερμηνεία και κατανόηση κάθε «δύσκολου» ζητήματος και πάντα βέβαια στο επίπεδο της Γενικής και Σύγχρονης Φυσικής.

Κατά τη συγγραφή του βιβλίου είχαμε στο μυαλό μας τον εκπαιδευτικό, υποψήφιο διαγωνισμών είτε όχι, το φοιτητή, τον απόφοιτο των σχολών των Θετικών και Τεχνολογικών Επιστημών, ο οποίος διδάχτηκε ή διδάσκεται Φυσική, αλλά κάπου αισθάνεται να χάνεται, είτε στην έκτασή της είτε, κυριότερα, στη «μετάφρασή» της. Με άλλα λόγια θελήσαμε να απαντήσουμε στο ερώτημα *τί* ακριβώς λέει η Φυσική και *γιατί* το λέει. Και κυρίως επιμείναμε στα ζητήματα γύρω από τα οποία υπάρχουν και οι περισσότερες δυσκολίες ή παρερμηνείες στην εφαρμογή ή την κατανόηση.

Θελήσαμε για παράδειγμα να δούμε ποια είναι η διαφορά των συντηρητικών από τις μη συντηρητικές δυνάμεις, από φυσικής πλευράς (πέρα από τους γνωστούς ορισμούς για τις κλειστές διαδρομές), ποια είναι η διαφορά ανάμεσα στη βαρυτική και την αδρανειακή μάζα στην καθημερινότητά μας, ποια η διαφορά ανάμεσα στο $\upsilon = \omega r$ της κυκλικής κίνησης και στο $\upsilon_{c.m.} = \omega R$ της κύλισης. Θελήσαμε να ξεκαθαρίσουμε το ζήτημα γύρω από τις θερμοδυναμικές μεταβολές που είναι αντιστρεπτές μόνο για το αέριο και εκείνες που είναι αντιστρεπτές και για το αέριο και για το περιβάλλον, ώστε να καταλάβουμε τί το ξεχωριστό έχει ο κύκλος Carnot και όλοι ασχολούνται μαζί του. Εφαρμόσαμε διεξοδικά σε συγκεκριμένα παραδείγματα τους νόμους των Gauss και Ampere – Maxwell και προτιμήσαμε να εισαγάγουμε το μάλλον «προχωρημένο» διανυσματικό δυναμικό στον Ηλεκτρομαγνητισμό, για να δείξουμε με ποιο «μαγικό» τρόπο το μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο παράγει ρεύμα, ακόμη και σε μεγάλες αποστάσεις από εκεί που συμβαίνει η μεταβολή. Επιμείναμε στο τί λέει η Γενική Σχετικότητα και πώς τεκμηριώνει ό,τι λέει, κι ακόμη περισσότερο επιμείναμε στο τί λέει η Κβαντική Μηχανική και στο πώς εφαρμόζεται η εξίσωση του Schrödinger σε μια πληθώρα διαφορετικών περιπτώσεων, και τέλος αναφέραμε ποια είναι εν τέλει τα στοιχειώδη σωμάτια, πότε και γιατί διασπώνται και πότε ασκούν μεταξύ τους δυνάμεις. Δεν κρύβουμε ότι φιλοδοξήσαμε να διατυπώσουμε για λογαριασμό του αναγνώστη και μετά να απαντήσουμε όλα εκείνα τα ερωτήματα τα οποία άλλοτε μας διαφεύγουν, άλλοτε δεν τολμούμε να διατυπώσουμε, άλλοτε διατυπώνουμε αλλά απαντάμε σε αυτά εσφαλμένα και άλλοτε η απάντησή τους έχει αναβληθεί επ’ αόριστον.

Οπωσδήποτε, προκειμένου να διατηρήσουμε ευσύνοπτο το ανά χείρας βιβλίο θυσιάσαμε μερικά πράγματα: Μακροσκελείς αποδείξεις σχέσεων όταν δεν είχαν φυσικό περιεχόμενο ή μεθοδολογική χρησιμότητα, τις μονάδες της μάζας, και γενικώς όλες τις γνωστές μονάδες, τη σχέση της ώρας με τα δευτερόλεπτα και όλη αυτή τη Φυσική η οποία είναι γνωστή, και κατά τη γνώμη μας μόνο τα μάτια του αναγνώστη θα κούραζε αν την προσθέταμε.

Η ύλη που καλύπτει το παρόν σύγγραμμα είναι της Γενικής και Σύγχρονης Φυσικής. Ωστόσο εντάξαμε σε αυτή την ύλη και μερικά περισσότερο προχωρημένα κομμάτια, τα οποία είναι δύσκολο να βρει κανείς σε βιβλία του ίδιου επιπέδου, όπως: Τη χρήση του $\vec{\nabla}\times\vec{F}$ για το χαρακτηρισμό μιας δύναμης ως συντηρητικής, τη διατύπωση των εξισώσεων του Maxwell σε ολοκληρωτική και διαφορική μορφή, την εισαγωγή του διανυσματικού δυναμικού, τον ορισμό των τετραδιανυσμάτων, τη βήμα προς βήμα αξιωματική διατύπωση της Κβαντικής Μηχανικής με την εισαγωγή των τελεστών και του εσωτερικού γινομένου των κυματοσυναρτήσεων.

Κάθε υπόδειξη από μέρους των συναδέλφων των θετικών επιστημών είναι ευπρόσδεκτη. Σε αυτούς ευχόμαστε να αποκομίσουν όσες περισσότερες, χρήσιμες, ευχάριστες, έως και συναρπαστικές και εξαίσιες, εμπειρίες μπορέσουν από αυτό το υπέροχο ταξίδι στο χώρο της Φυσικής.

Απρίλιος 2008

Αθανάσιος Πρίκας
athanasios_prikas@yahoo.gr

Περιεχόμενα

ΜΕΡΟΣ 1ο

ΜΗΧΑΝΙΚΗ

1.1 ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΣΕ ΜΙΑ ΔΙΑΣΤΑΣΗ

1.2 ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΣΕ ΔΥΟ ΚΑΙ ΤΡΕΙΣ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ

1.3 ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΚΑΙ ΟΙ ΝΟΜΟΙ ΤΟΥ ΝΕΥΤΩΝΑ

1.4 ΕΡΓΟ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

1.5 ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΩΜΑΤΩΝ. ΟΡΜΗ - ΚΡΟΥΣΗ

1.6 ΣΤΕΡΕΟ ΣΩΜΑ

1.7 ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΚΑΙ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ

1.8 ΒΑΡΥΤΗΤΑ

1.9 ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

1.10 ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ

ΜΕΡΟΣ 2$^{\text{o}}$

ΚΥΜΑΤΙΚΗ – ΟΠΤΙΚΗ

2.1 ΚΥΜΑΤΙΚΗ

2.2 ΑΚΟΥΣΤΙΚΗ

2.3 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΟΠΤΙΚΗ

2.4 ΚΥΜΑΤΙΚΗ ΟΠΤΙΚΗ

ΜΕΡΟΣ 3ο

ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΗ

3.1 ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑ

3.2 ΘΕΡΜΟΤΗΤΑ ΚΑΙ Ο 1ος ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΝΟΜΟΣ

3.3 Ο 2ος ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΝΟΜΟΣ. ΜΕΤΑΒΟΛΕΣ ΑΝΤΙΣΤΡΕΠΤΕΣ ΚΑΙ ΜΗ. ΕΝΤΡΟΠΙΑ

3.4 ΙΔΑΝΙΚΑ ΑΕΡΙΑ

3.5 ΘΕΡΜΙΚΕΣ ΜΗΧΑΝΕΣ

ΜΕΡΟΣ 4^{ο}

ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ

4.1 Ο ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ COULOMB

4.2 Η ΕΝΤΑΣΗ ΤΟΥ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

4.3 Ο ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ GAUSS

4.4 ΔΥΝΑΜΙΚΟ – ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

4.5 ΑΓΩΓΟΙ. ΧΩΡΗΤΙΚΟΤΗΤΑ. ΔΙΗΛΕΚΤΡΙΚΑ

4.6 ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΡΕΥΜΑ. ΑΝΤΙΣΤΑΣΗ. ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ ΣΥΝΕΧΟΥΣ

4.7 ΜΑΓΝΗΤΙΚΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ (LORENTZ ΚΑΙ LAPLACE)

4.8 ΠΗΓΕΣ ΤΟΥ ΜΑΓΝΗΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ. ΝΟΜΟΣ AMPERE

4.9 Ο ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ FARADAY ΚΑΙ ΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΟΥ MAXWELL

4.10 ΕΠΑΓΩΓΗ. ΕΝΑΛΛΑΣΣΟΜΕΝΑ ΡΕΥΜΑΤΑ

4.11 ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ

ΜΕΡΟΣ 5^{Ο}

ΣΥΓΧΡΟΝΗ ΦΥΣΙΚΗ

5.1 ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

5.2 ΤΑ ΚΥΜΑΤΑ ΩΣ ΣΩΜΑΤΙΑ ΚΑΙ ΤΑ ΣΩΜΑΤΙΑ ΩΣ ΚΥΜΑΤΑ

5.3 ΑΤΟΜΙΚΗ ΔΟΜΗ ΚΑΤΑ BOHR

5.4 ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ

5.5 ΤΟ ΑΤΟΜΟ ΤΟΥ ΥΔΡΟΓΟΝΟΥ ΣΤΗΝ ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

5.6 ΠΟΛΥΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΑ ΑΤΟΜΑ

5.7 ΜΟΡΙΑ ΚΑΙ ΣΤΕΡΕΑ

5.8 ΠΥΡΗΝΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ

5.9 ΦΥΣΙΚΗ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΩΝ ΣΩΜΑΤΙΩΝ ΚΑΙ ΚΟΣΜΟΛΟΓΙΑ

1.1 ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΣΕ ΜΙΑ ΔΙΑΣΤΑΣΗ

Στην κινηματική ασχολούμαστε με την εύρεση της θέσης, της ταχύτητας και της επιτάχυνσης ενός κινητού, όταν γνωρίζουμε ένα από αυτά τα μεγέθη.

1.1.1 Η θέση

Το βασικό μέγεθος που περιγράφει την κίνηση είναι η θέση, x. Στην κίνηση σε μια διάσταση τα διανύσματα είναι περιττά, αλλά τα μεγέθη παραμένουν διανυσματικά, απλώς δε χρειάζεται να το υποδηλώνουμε με το γνωστό βελάκι πάνω από αυτά. Η θέση είναι το διανυσματικό μέγεθος που μετράται σε μονάδες μήκους και το διάνυσμά του ξεκινά από την αρχή των συντεταγμένων και τελειώνει στο σημείο που βρίσκεται το κινητό. Θεωρούμε προς το παρόν όλα τα κινητά υλικά σημεία. Αν δεν είναι υλικά σημεία, όπως ένα τρένο, θεωρούμε ένα σταθερό σημείο πάνω σε αυτά και αναφερόμαστε πάντα στην κίνηση που εκτελεί αυτό το αντιπροσωπευτικό σημείο. Το σύστημα αναφοράς στη μονοδιάστατη περίπτωση είναι τα εξής τρία δεδομένα: Η αρχή των αξόνων, η μονάδα μέτρησης και η φορά. Συνήθως, ορίζουμε προς τα δεξιά τη θετική φορά, αλλά αν μας διευκολύνει (δηλαδή αν όλα τα κινητά κινούνται προς τα αριστερά) μπορούμε να ορίσουμε τη θετική φορά προς τα αριστερά. Η θέση είναι ένα μέγεθος σχετικό, γιατί εξαρτάται από το πού θα τοποθετήσουμε την αρχή του συστήματος αναφοράς, ποια φορά θα θεωρήσουμε θετική κλπ. Το σύστημα αναφοράς το ονομάζουμε και παρατηρητή. Γενικά, η θέση είναι συνάρτηση του χρόνου.

Παραδείγματα:

Όταν ένα σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση και τη χρονική στιγμή $t=0$ βρίσκεται στην αρχή του συστήματος αναφοράς, δηλαδή στο $x=0$, τότε η θέση του μπορεί να δίνεται από τη σχέση: $x=5t$, $x=7t$, $x=0$, $x=-3t$ (S.I.), οπότε η ταχύτητα είναι $5, 7, 0$ και $-3\ \mathrm{m/s}$.

Αν το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση, αλλά στο χρόνο μηδέν δε βρίσκεται στο $x=0$ αλλά στο $x=9m$, τότε η θέση του μπορεί να δίνεται από τη σχέση: $x=9+5t$, $x=9$, $x=9-3t$ (S.I.) κλπ.

Επίσης, η θέση μπορεί να δίνεται από τις σχέσεις $x=4t^2$, $x=5-3t^2$, οπότε έχουμε ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα, ή από τη σχέση $x=5t+6t^2$, οπότε έχουμε ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα. Αυτά θα τα δούμε αναλυτικά όταν ορίσουμε την ταχύτητα.

1.1.2 Στιγμιαία ταχύτητα

Η στιγμιαία ταχύτητα είναι η παράγωγος της θέσης ως προς το χρόνο:

$$v=\frac{dx}{dt}. \tag{1.1}$$

Παραδείγματα:

Αν $x=5\text{ m}$, δηλαδή το κινητό είναι συνέχεια ακίνητο στη θέση $5m$, τότε η παράγωγος της συνάρτησης, δηλαδή η ταχύτητα, είναι μηδέν.

Αν $x=5+2kt$ (S.I.), τότε η ταχύτητά του είναι $2k$. Στο εξής όλα τα μεγέθη θα είναι στο S.I., οπότε θα παραλείπουμε τη σχετική υπόμνηση.

Αν η θέση συναρτήσει του χρόνου δίνεται από τη σχέση: $x=A\cos\omega t$, τότε με παραγώγιση βρίσκουμε ότι $v=\omega A\sin\omega t$. Αυτή είναι η περίπτωση της απλής αρμονικής ταλάντωσης. Αν δεν τοποθετήσουμε την αρχή του συστήματος αναφοράς στο σημείο της ισορροπίας του κινητού, αλλά 8 μέτρα (για παράδειγμα) πιο αριστερά, (για ποιο λόγο; διότι μπορεί να βρίσκεται στο άλλο σημείο ένα άλλο κινητό και να εκτελεί και αυτό ταλάντωση, είτε από μαθηματική περιέργεια), τότε η θέση του δίνεται από τον τύπο $x=8+A\cos\omega t$. Αυτό το σώμα εκτελεί επίσης απλή αρμονική ταλάντωση, και η ταχύτητά του δίνεται από την ίδια σχέση.

Γενικά, δε θα πρέπει να φοβόμαστε να παραγωγίσουμε οποιαδήποτε συνάρτηση της θέσης για να βρούμε την ταχύτητα. Η θέση ενός κινητού μπορεί να δίνεται από τη σχέση: $x=t+t^5+e^{2t}$. Το σώμα αυτό εκτελεί μια πολύπλοκη κίνηση, με στιγμιαία ταχύτητα: $\upsilon = \frac{dx}{dt} = 1 + 5t^4 + 2e^{2t}$.

1.1.3 Μετατόπιση και μήκος τροχιάς

Μετατόπιση Δx λέμε το διανυσματικό μέγεθος που ορίζεται από τη σχέση:

$$\Delta x = x_{\tau\varepsilon\lambda.} - x_{\alpha\rho\chi.} \tag{1.2}$$

Η μετατόπιση είναι η διαφορά ανάμεσα στην τελική και την αρχική θέση του κινητού. Με βάση τους τύπους η μετατόπιση δίνεται από τη σχέση:

$$\Delta x = \int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} \upsilon dt = x - x_0 \, . \tag{1.3}$$

Άρα, για να βρούμε τη μετατόπιση Δx και τη θέση x από την ταχύτητα, πρέπει να ολοκληρώσουμε, ενώ, αντίστροφα, για να βρούμε την ταχύτητα από τη μετατόπιση πρέπει να παραγωγίσουμε.

Παραδείγματα:

Ένα κινητό ξεκινά από το $x_{\alpha\rho\chi.} = -5$ m , και φτάνει στο $x_{\tau\varepsilon\lambda.} = 3$ m , χωρίς «πισωγυρίσματα», δηλαδή χωρίς η ταχύτητά του να αλλάζει πρόσημο κατά τη διάρκεια της κίνησης. Τότε η μετατόπισή του είναι $\Delta x = 8$ m . Ίδιο είναι και το μήκος της τροχιάς του κινητού.

Αν το κινητό ξεκινά από τα 7 m αρχικά, φτάνει στα 11 m και μετά ξαναγυρνά στα 7 m, τότε η μετατόπιση είναι μηδέν, αλλά το μήκος της τροχιάς του είναι 4 m + 4 m = 8 m.

Πάντα, όταν η ταχύτητα αλλάζει διεύθυνση ή φορά, το μήκος της τροχιάς του κινητού είναι μεγαλύτερο από τη μετατόπισή του. Τα δύο μεγέθη είναι ίσα μόνο όταν η ταχύτητα δεν αλλάζει κατεύθυνση.

Αν $\upsilon = \upsilon_0 + at$, τότε με ολοκλήρωση προκύπτει $x - x_0 = \upsilon_0 t + \frac{1}{2} a t^2$.

Έστω ότι η ταχύτητα ενός κινητού δίνεται από τη σχέση $\upsilon = 4 - 2t$ και θέλουμε να βρούμε τη μετατόπιση και το μήκος της τροχιάς για $t = 4$ s . Για τη μετατόπιση θα πάρουμε τον τύπο:

$$\Delta x=\int_0^4(4-2t)dt=(4t-t^2)_0^4=0\,.$$

Με το μήκος της τροχιάς τα πράγματα είναι πιο πολύπλοκα. Όπως βλέπουμε, για $t=2s$ το κινητό αλλάζει κατεύθυνση κίνησης, άρα πρέπει να προσθέσουμε τη μετατόπιση από 0 μέχρι $2s$ και μετά να προσθέσουμε το μέτρο της μετατόπισης από 2 μέχρι $4\,\mathrm{s}$ που είναι αντίθετη της προηγούμενης. Για $2\,\mathrm{s}$ έχουμε τη μέγιστη μετατόπιση, που είναι $4\,\mathrm{m}$. Συνολικά το μήκος της τροχιάς είναι $8\,\mathrm{m}$.

Το μήκος της τροχιάς δίνεται από τη σχέση:

$$S=\int_{x_0}^{x}|dx|=\int_{t_0}^{t}|\upsilon|dt\,.$$

1.1.4 Μέση ταχύτητα

Η μέση ταχύτητα δίνεται από τις παρακάτω ισοδύναμες σχέσεις:

$$\upsilon_\mu=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{\int_{t_0}^{t}\upsilon dt}{\int_{t_0}^{t}dt} \tag{1.4}$$

και είναι επίσης διανυσματικό μέγεθος. Γενικά γράφουμε $t_0=0$, εκτός αν υπάρχουν περισσότερα από ένα κινητά, τα οποία δεν ξεκινούν ταυτόχρονα.

Εν γένει, η μέση τιμή ενός φυσικού μεγέθους a ως προς το χρόνο είναι:

$$a_\mu=\frac{\int_{t_0}^{t}a(t)dt}{\int_{t_0}^{t}dt}\,,$$

η μέση τιμή του ως προς τη θέση είναι:

$$a_\mu=\frac{\int_{x_0}^{x}a(x)dx}{\int_{x_0}^{x}dx}\,.$$

Με παρόμοιο τρόπο ορίζεται η μέση τιμή ενός μεγέθους ως προς ένα άλλο μέγεθος. Συνήθως, οι δύο μέσες τιμές διαφέρουν μεταξύ τους.

1.1.5 Επιτάχυνση

Η στιγμιαία επιτάχυνση είναι η παράγωγος της ταχύτητας ως προς το χρόνο:

$$a = \frac{dv}{dt} \tag{1.5}$$

και είναι διανυσματικό μέγεθος. Όταν η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας αυξάνεται (π.χ. η ταχύτητα γίνεται, από $5\ \text{m/s}$ κάποια αρχική χρονική στιγμή, $12\ \text{m/s}$ κάποια επόμενη χρονική στιγμή, ή από $-7\ \text{m/s}$ κάποια αρχική χρονική στιγμή, γίνεται $-2\ \text{m/s}$ κάποια επόμενη χρονική στιγμή), τότε η επιτάχυνση είναι θετική. Το μέτρο της ταχύτητας μειώνεται όταν είναι ετερόσημη της a και αυξάνεται όταν είναι ομόσημη αυτής. «Επιβράδυνση» σημαίνει ότι η a είναι ετερόσημη της ταχύτητας, άρα το κινητό «φρενάρει» δηλαδή μειώνεται το μέτρο της ταχύτητας, και όχι ότι η a είναι αρνητική.

Από την κινητική κατάσταση του παρατηρητή, δηλαδή από την ταχύτητα με την οποία αυτός κινείται, εξαρτάται η ταχύτητα, η μετατόπιση και η θέση των κινητών, δεν εξαρτάται όμως η επιτάχυνσή τους για παρατηρητές αδρανειακούς, δηλαδή κινούμενους με σταθερές ταχύτητες.

Παραδείγματα:

Αν $v = 5\ \text{m/s} = \text{σταθ.}$, τότε η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης ως προς το χρόνο είναι μηδέν, δηλαδή, αν η ταχύτητα είναι σταθερή, η επιτάχυνση είναι μηδέν.

Αν $v = 2 + t + 3t^4$, τότε η επιτάχυνση δίνεται από τη σχέση: $a = 1 + 12t^3$.

Γνωρίζοντας την ταχύτητα, παραγωγίζουμε για να βρούμε την επιτάχυνση.

Αντίστροφα, γνωρίζοντας την επιτάχυνση, ολοκληρώνουμε για να βρούμε την ταχύτητα: $a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = a dt \Rightarrow \int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t a dt \Rightarrow v - v_0 = \int_0^t a dt$.

1.1.6 Ευθύγραμμη ομαλή κίνηση

Είναι η κίνηση κατά την οποία:

α) $v = \text{σταθ.}$

β) Οι μετατοπίσεις είναι ανάλογες των χρόνων, δηλαδή η γραφική παράσταση της μετατόπισης συναρτήσει του χρόνου είναι ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

γ) Η θέση δεν είναι ανάλογη του χρόνου, παρά μόνο αν $x_0 = 0$, αλλά στη γενική περίπτωση ισχύει: $x = x_0 + vt$.

δ) Είναι η μόνη κίνηση στην οποία η μέση και η στιγμιαία ταχύτητα ταυτίζονται και έχουν πάντα σταθερή τιμή.

ε) Είναι η μόνη κίνηση στην οποία η επιτάχυνση είναι πάντα μηδέν.

1.1.7 Ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση

Ισχύει:

α) $a = \text{σταθ.}$

β) Η μεταβολή της ταχύτητας είναι ανάλογη του χρόνου, δηλ. $\Delta v = at$.

γ) Η ταχύτητα δεν είναι ανάλογη του χρόνου, παρά μόνο αν η αρχική ταχύτητα είναι μηδέν, αλλά γενικά ισχύει: $v = v_0 + at$.

δ) Για τη μετατόπιση και τη θέση ισχύει: $\Delta x = x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$.

Οι μετατοπίσεις είναι ανάλογες των τετραγώνων των χρόνων μόνο αν η αρχική ταχύτητα είναι μηδενική.

ε) Είναι σχεδόν η μόνη κίνηση για την οποία ισχύει το εξής: Αν η αρχική ταχύτητα είναι v_0 και η τελική είναι v, τότε η μέση ταχύτητα της 1.4 σχέσης ισούται με: $\frac{v + v_0}{2}$, δηλαδή με το μέσο όρο αρχικής και τελικής ταχύτητας.

στ) Είναι η μόνη κίνηση στην οποία η μέση και η στιγμιαία επιτάχυνση συμπίπτουν και έχουν πάντα σταθερή τιμή.

1.1.8 Ελεύθερη πτώση

Ισχύει: $g = \text{σταθ.}$, $v = gt$, $y = \frac{1}{2}gt^2$.

Κατακόρυφη βολή προς τα πάνω: $g = \text{σταθ.}$, $v = v_0 - gt$, $y = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$.

Κατακόρυφη βολή προς τα κάτω: $g = \text{σταθ.}$, $v = v_0 + gt$, $y = v_0 t + \frac{1}{2}gt^2$.

Παραδείγματα συνολικά στις κινήσεις:

Δύο οχήματα κινούνται το ένα προς το άλλο με ταχύτητες που έχουν μέτρα υ_1 και υ_2 αντίστοιχα, απέχοντας αρχική απόσταση d. Αν ένα κινητό κινείται ανάμεσα στα δύο με ταχύτητα υ_0, να βρεθεί η συνολική απόσταση που διανύει μέχρι να συναντηθούν τα οχήματα.
Να αποδειχθεί ότι σε κάθε ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση τα διαστήματα που διανύονται στο 1ο, 2ο, … ν-οστό δευτερόλεπτο είναι γραμμική συνάρτηση του συνολικού χρόνου.

Στις κινήσεις στο πεδίο βαρύτητας, αν δύο κινητά απέχουν κατακόρυφη απόσταση d, και εκτοξεύουμε το ένα προς τα πάνω με ταχύτητα μέτρου υ_1 και το άλλο προς τα κάτω με ταχύτητα μέτρου υ_2, τότε ο χρόνος συνάντησής τους δεν εξαρτάται από την επιτάχυνση της βαρύτητας.

Όταν η ταχύτητα είναι συνάρτηση όχι του χρόνου αλλά της θέσεως, δηλαδή όταν $\upsilon = f(x)$, για παράδειγμα $\upsilon = kx^n$, για να βρούμε την επιτάχυνση πρέπει να εφαρμόσουμε κανόνα πεπλεγμένης παραγώγισης, δηλ:

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d\upsilon}{dx}\,\frac{dx}{dt} = \frac{d\upsilon}{dt}\upsilon\,.$$

Αθ. Πρίκας

1.2 ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΣΕ ΔΥΟ ΚΑΙ ΤΡΕΙΣ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ

1.2.1 Θέση και μετατόπιση

Είναι και οι δύο διανυσματικά μεγέθη και μετρώνται σε μέτρα. Το διάνυσμα της θέσης έχει αρχή την αρχή του συστήματος συντεταγμένων και τέλος το σημείο στο οποίο βρίσκεται το κινητό. Η θέση συμβολίζεται με $\vec{r}$. Ό,τι γράψουμε στις δύο διαστάσεις ισχύει και στις τρεις. Γράφουμε:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} = (x, y) \tag{1.6}$$

με $\hat{i}$ και $\hat{j}$ τα μοναδιαία διανύσματα κατά μήκος των αξόνων. Τα x, y, άρα και το $\vec{r}$, είναι γενικά συναρτήσεις του χρόνου. Τα x και y είναι οι συνιστώσες του διανύσματος θέσης, που διαφορετικά καλούνται συντεταγμένες. Η απόσταση του κινητού από την αρχή των αξόνων είναι $\sqrt{x^2 + y^2}$, με εφαρμογή του πυθαγορείου θεωρήματος.

Η μετατόπιση του κινητού είναι:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_{τελ.} - \vec{r}_{αρχ.} = (x_{τελ.} - x_{αρχ.})\hat{i} + (y_{τελ.} - y_{αρχ.})\hat{j} \tag{1.7}$$

Η μετατόπιση είναι διάνυσμα με αρχή την αρχική θέση του κινητού και τέλος την τελική του θέση. Το μέτρο της μετατόπισης είναι μικρότερο από το μήκος της τροχιάς του κινητού, εκτός αν αυτό κινείται σε ευθεία γραμμή χωρίς η ταχύτητα να αλλάζει φορά, οπότε το μήκος της τροχιάς και το μέτρο της μετατόπισης είναι ίσα.

Παράδειγμα

Όταν ένα κινητό κινείται σε κύκλο, ανεξάρτητα από το αν είναι ισοταχής η κίνησή του, τότε, σε μια πλήρη περιστροφή, το μήκος της τροχιάς είναι $2\pi R$ αλλά η μετατόπιση είναι μηδέν, αφού η αρχική θέση ταυτίζεται με την τελική. Όταν έχει διαγράψει ημικύκλιο, το μήκος της τροχιάς είναι όσο και το μήκος του ημικυκλίου, ενώ η μετατόπιση είναι το διάνυσμα που ξεκινά από την αρχική θέση και καταλήγει στην τελική, και το μέτρο της είναι $2R$, δηλαδή μικρότερο του μήκους της τροχιάς.

1.2.2 Στιγμιαία ταχύτητα

Η στιγμιαία ταχύτητα ορίζεται ως η παράγωγος του διανύσματος θέσης:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j}, \tag{1.8}$$

με $v_x = \dfrac{dx}{dt}$ και $v_y = \dfrac{dy}{dt}$ τις συνιστώσες της ταχύτητας, οπότε γράφουμε:

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} = (v_x, v_y).$$

Τα προηγούμενα είναι διαφορετικοί τρόποι για να γράψουμε ένα διάνυσμα. Το μέτρο της ταχύτητας δίνεται από τη σχέση $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ και η γωνία που σχηματίζει με το x άξονα βρίσκεται από την εφαπτομένη: $\tan\theta = \dfrac{v_y}{v_x}$. Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε και το μέτρο της δυνάμεως και κάθε άλλου διανυσματικού μεγέθους στις 2 διαστάσεις από τις συνιστώσες του.

Η στιγμιαία ταχύτητα είναι, για κάθε είδος κίνησης, εφαπτόμενη της τροχιάς. Η στιγμιαία επιτάχυνση δεν είναι εφαπτόμενη της τροχιάς, παρά μόνο όταν το επιταχυνόμενο σώμα κινείται σε ευθεία. Αν το σώμα κινείται σε καμπύλη, τότε υποχρεωτικά υπάρχει μία συνιστώσα της επιτάχυνσης, η κεντρομόλος που θα δούμε πιο κάτω, η οποία είναι υποχρεωτικά κάθετη στην τροχιά και την ταχύτητα.

1.2.3 Μέση ταχύτητα

Η μέση ταχύτητα ορίζεται όπως και στην ευθύγραμμη κίνηση:

$$\vec{v}_\mu = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j} \tag{1.9}$$

Το μέτρο της είναι η τετραγωνική ρίζα του αθροίσματος των τετραγώνων των συνιστωσών, δηλαδή:

$$v_\mu = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}.$$

1.2.4 Επιτάχυνση

Η επιτάχυνση είναι η παράγωγος της ταχύτητας ως προς το χρόνο:

$$\vec{a}=\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=\frac{d\upsilon_x}{dt}\hat{i}+\frac{d\upsilon_y}{dt}\hat{j}=a_x\hat{i}+a_y\hat{j}=(a_x,\ a_y) \qquad (1.10)$$

Το μέτρο της επιτάχυνσης δίνεται ξανά από τη σχέση: $a=\sqrt{a_x^2+a_y^2}$ και η γωνία που σχηματίζει με τον x άξονα από την εφαπτομένη: $\tan\theta=\dfrac{a_y}{a_x}$. Βλέπουμε ότι αν παραγωγίσουμε μια φορά ως προς το χρόνο τη x συνιστώσα της θέσης (δηλαδή το x) τότε παίρνουμε τη x συνιστώσα της ταχύτητας, δηλαδή το υ_x. Αν παραγωγίσουμε τη x συνιστώσα της ταχύτητας ως προς το χρόνο, τότε παίρνουμε τη x συνιστώσα της επιτάχυνσης, δηλαδή το a_x.

Παράδειγμα

Ενός κινητού η θέση είναι: $\vec{r}=(3+1.5t)\hat{i}+(4+t^2)\hat{j}$.
Να βρεθούν η θέση και η απόστασή του από την αρχή των αξόνων στο χρόνο 0, η θέση και η απόστασή του από την αρχή των αξόνων για $t=2$, η ταχύτητά του ως συνάρτηση του χρόνου (το διάνυσμα και το μέτρο της) και η επιτάχυνσή του, διάνυσμα και μέτρο, ως συνάρτηση του χρόνου.

Απάντηση:

Για $t=0$, το σώμα βρίσκεται στη θέση $\vec{r}=3\hat{i}+4\hat{j}=(3,\ 4)$ και η απόστασή του από την αρχή των αξόνων, είναι, με εφαρμογή του πυθαγορείου θεωρήματος: $r=\sqrt{x^2+y^2}=5$. Για $t=2$, η θέση του κινητού με αντικατάσταση στον παραπάνω τύπο είναι: $\vec{r}=6\hat{i}+8\hat{j}=(6,\ 8)$ και η απόστασή του από την αρχή των αξόνων πάλι με εφαρμογή του πυθαγόρειου θεωρήματος είναι 10. Η ταχύτητα βρίσκεται με παραγώγιση του διανύσματος θέσης: $\vec{\upsilon}=1.5\hat{i}+2t\hat{j}$. Όπως βλέπουμε στο x άξονα το κινητό εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με ταχύτητα $\upsilon_x=1.5$ και στον y άξονα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη χωρίς αρχική ταχύτητα αλλά με επιτάχυνση. Το μέτρο της ταχύτητας ως συνάρτηση του χρόνου είναι: $\upsilon(t)=\sqrt{\upsilon_x^2+\upsilon_y^2}=\sqrt{1.5^2+4t^2}$. Η επιτάχυνση συναρτήσει του χρόνου προκύπτει με παραγώγιση της ταχύτητας: $a=2\hat{j}$. Το μέτρο της είναι σταθερό και ίσο με 2. Όσο αφηρημένο και «μαθηματικό» και αν ακούγεται το συγκεκριμένο παράδειγμα, δεν είναι καθόλου στην πραγματικότητα. Περιγράφει ένα κινητό που ξεκινά από τη θέση (3, 4) τη χρονική στιγμή μηδέν και μετά κινείται στο x άξονα με σταθερή ταχύτητα και στον y άξονα με σταθερή θετική επιτάχυνση και μηδενική αρχική ταχύτητα. Έτσι κινείται ένα κινητό που εκτελεί οριζόντια βολή σε πλανήτη με $g = 2\ \mathrm{m/s^2}$.

1.2.5 Ομαλή κυκλική κίνηση

Περίοδος T είναι ο χρόνος που χρειάζεται ένα κινητό για να εκτελέσει μια πλήρη περιστροφή. Συχνότητα f είναι ο αριθμός των περιστροφών στη μονάδα του χρόνου. Ισχύει:

$$f = \frac{N}{t} = \frac{1}{T}. \tag{1.11}$$

Στην κυκλική κίνηση ορίζουμε τη (στιγμιαία) γωνιακή ταχύτητα, με μέτρο:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \tag{1.12}$$

όπου $d\theta$ είναι η στοιχειώδης (μικρή) γωνία που διαγράφει το κινητό σε χρόνο dt .

Η μέση γωνιακή ταχύτητα είναι:

$$\omega_\mu = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \tag{1.13}$$

Η γωνιακή ταχύτητα είναι διάνυσμα κάθετο στο κύκλο που διαγράφει το κινητό με φορά που δίνεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού: Τα τέσσερα δάχτυλα του δεξιού χεριού δείχνουν τη φορά περιστροφής του σώματος, οπότε ο αντίχειρας δείχνει την κατεύθυνση της γωνιακής ταχύτητας. Η κατεύθυνση αυτή θεωρείται θετική αν το κινητό κινείται αντίθετα από τους δείκτες του ρολογιού (δεξιόστροφα) και αρνητική αν κινείται αριστερόστροφα. Σε κινήσεις στο επίπεδο, η γωνιακή ταχύτητα έχει σταθερή διεύθυνση. Στην ομαλή κυκλική κίνηση, το κινητό σε ίσους χρόνους διαγράφει ίσες γωνίες και άρα η γωνιακή ταχύτητα έχει σταθερή αλγεβρική τιμή. Επίσης, η ομαλή κυκλική κίνηση είναι η μόνη κίνηση στην οποία η μέση και η στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα ταυτίζονται κάθε στιγμή. Στην ομαλή κυκλική κίνηση η γωνιακή ταχύτητα αποδεικνύεται εύκολα ότι:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \tag{1.14}$$

Αν μια κυκλική κίνηση δεν είναι ομαλή, τότε κατά πάσα πιθανότητα δεν είναι και περιοδική, οπότε δεν έχει νόημα να μιλάμε για την περίοδο.

Η ταχύτητα στην ομαλή κυκλική κίνηση (την οποία ενίοτε ονομάζουμε και γραμμική ταχύτητα για να την αντιδιαστείλουμε από τη γωνιακή) έχει σταθερό μέτρο ίσο με:

$$v=\frac{S}{t}=\frac{2\pi R}{T} \tag{1.15}$$

αλλά η διεύθυνσή της αλλάζει διαρκώς, ώστε να παραμένει εφαπτόμενη στην κυκλική τροχιά.

Για τη μέση ταχύτητα ούτε το μέτρο ούτε η κατεύθυνση είναι σταθερά, ακόμη και για την ομαλή κυκλική κίνηση, διότι η μέση ταχύτητα δεν είναι γενικά ο μέσος όρος των στιγμιαίων ταχυτήτων. Για παράδειγμα, όταν το κινητό εκτελεί έναν πλήρη κύκλο, η μέση του ταχύτητα είναι μηδέν. Όταν το κινητό κάνει μισό κύκλο τότε η μέση ταχύτητα έχει μέτρο $\frac{2R}{T/2}$.

Η γραμμική και η γωνιακή ταχύτητα συνδέονται με τη σχέση:

$$\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{R} \tag{1.16}$$

Το σύμβολο $\times$ παριστάνει το εξωτερικό γινόμενο. Το εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{b}$ βρίσκεται ως εξής:

$$\vec{k}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}, \tag{1.17}$$

όπου στην πρώτη γραμμή υπάρχουν τα μοναδιαία στους άξονες, στη $2^{η}$ οι συνιστώσες του $1^{ου}$ διανύσματος του εξωτερικού γινομένου και στην $3^{η}$ οι συνιστώσες του $2^{ου}$ διανύσματος. Αναπτύσσουμε πάντα τέτοιες ορίζουσες ως προς τη γραμμή των διανυσμάτων. Εναλλακτικά, το μέτρο του εξωτερικού γινομένου δίνεται από τη σχέση:

$$|\vec{k}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi \tag{1.18}$$

όπου φ είναι η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{b}$, ενώ η διεύθυνση είναι κάθετη στο επίπεδο που σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ και η φορά καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού: Ο αντίχειρας δείχνει το $\vec{a}$, δηλαδή το πρώτο διάνυσμα του εξωτερικού γινομένου, ο δείκτης το $\vec{b}$, δηλαδή το δεύτερο διάνυσμα του εξωτερικού γινομένου, και ο μέσος το $\vec{k}$, δηλαδή το αποτέλεσμα της πράξης.

Αποδεικνύεται μαθηματικά ότι για να κινείται το κινητό σε κύκλο, με σταθερό είτε όχι μέτρο ταχύτητας, πρέπει να υπάρχει μια συνιστώσα επιτάχυνσης, η οποία καλείται κεντρομόλος, είναι ίση με:

$$a_k = \frac{\upsilon^2}{R} = \omega^2 R \tag{1.19}$$

και είναι πάντα κάθετη στην ταχύτητα.

Για την κεντρομόλο επιτάχυνση δε χρειάζεται καμία αναφορά στην κεντρομόλο δύναμη και στο 2ο νόμο του Νεύτωνα: Η κεντρομόλος επιτάχυνση υπάρχει επειδή το κινητό κινείται σε κύκλο. Το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης στην ομαλή κυκλική κίνηση είναι σταθερό, γιατί η ταχύτητα είναι σταθερή. Αν η κυκλική κίνηση δεν είναι ομαλή, τότε και η κεντρομόλος επιτάχυνση δεν έχει σταθερό μέτρο. Η κεντρομόλος επιτάχυνση δεν έχει σταθερή κατεύθυνση ούτε στην ομαλή κυκλική κίνηση, γιατί δείχνει πάντα προς το κέντρο του κύκλου, άρα ως διάνυσμα δεν είναι ποτέ σταθερή.

1.2.6 Ομαλή κυκλική κίνηση και αρμονικά μεταβαλλόμενα μεγέθη

Θα εφαρμόσουμε στην κυκλική κίνηση ό,τι είδαμε στις 1.2.1-1.2.4. Ένας άλλος τρόπος για να παραστήσουμε το διάνυσμα θέσης ενός κινητού που κάνει ομαλή κυκλική κίνηση είναι μέσω των συντεταγμένων του, αντί περιγραφικά να λέμε ότι κινείται σε κύκλο ακτίνας *R*. Έστω κύκλος με κέντρο την αρχή του συστήματος συντεταγμένων. Αν το κινητό τη χρονική στιγμή μηδέν βρίσκεται στο σημείο που ο κύκλος τέμνει τον Ox ημιάξονα και κινείται στην κατεύθυνση των θετικών *y*, τότε η θέση του κινητού δίνεται από τις εξισώσεις:

$$x = R\cos\omega t \quad \text{και} \quad y = R\sin\omega t\,,$$

δηλαδή ισχύει: $\vec{r} = R\cos\omega t\hat{i} + R\sin\omega t\hat{j}$. Βλέπουμε ότι, όταν ένα σώμα κάνει κυκλική κίνηση, και οι δύο προβολές του πάνω στους άξονες εκτελούν απλή αρμονική ταλάντωση με διαφορά φάσης $\pi/2$.

Θα αναπαραγάγουμε τώρα από την παραπάνω σχέση τα χαρακτηριστικά της ομαλής κυκλικής κίνησης. Η απόσταση από την αρχή των αξόνων είναι: $r = \sqrt{x^2 + y^2} = R$, δηλαδή σταθερή και άρα όντως το σώμα κινείται σε κύκλο με ακτίνα *R*. Οι συνιστώσες της ταχύτητάς του είναι: $\upsilon_x = -\omega R\sin\omega t$ και

$v_y = \omega R\cos\omega t$. Το μέτρο της ταχύτητάς του είναι: $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \omega R$, δηλαδή σταθερό. Παραγωγίζοντας τις συνιστώσες της ταχύτητας ως προς το χρόνο βρίσκουμε τις συνιστώσες της επιτάχυνσης: $a_x = -\omega^2 R\cos\omega t$ και $a_y = -\omega^2 R\sin\omega t$.

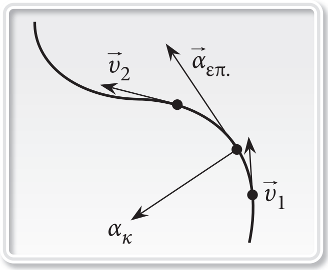
Το μέτρο της επιταχύνσεως είναι: $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \omega^2 R$, ενώ (επειδή $x = R\cos\omega t$, $y = R\sin\omega t$) $\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} = -\omega^2(x\hat{i} + y\hat{j}) = -\omega^2\vec{r}$, δηλαδή η επιτάχυνση έχει τη διεύθυνση της ακτίνας και φορά αντίθετη από αυτή, άρα η επιτάχυνση δείχνει προς το κέντρο του κύκλου. Πρόκειται λοιπόν για την κεντρομόλο επιτάχυνση.

Η κυκλική κίνηση μπορεί να παρασταθεί και από τις δύο παρακάτω εξισώσεις: $x = R\cos(\omega t + \varphi)$, $y = R\sin(\omega t + \varphi)$, μόνο που το κινητό τη χρονική στιγμή μηδέν δε βρίσκεται στο σημείο που τέμνει ο κύκλος τον Ox ημιάξονα, αλλά σε κάποιο άλλο σημείο του κύκλου.

Στην ομαλή κυκλική κίνηση, στην ευθύγραμμη ομαλή, και σε όλες τις κινήσεις που διατηρούν σταθερό το μέτρο της ταχύτητας, η επιτρόχια επιτάχυνση για την οποία θα μιλήσουμε πιο κάτω είναι μηδέν.

1.2.7 Κεντρομόλος και επιτρόχια επιτάχυνση

Για μια γενική κίνηση στο επίπεδο ή στο χώρο, σε μια τυχαία καμπύλη γραμμή και όχι απαραίτητα σε κύκλο, κεντρομόλο λέμε τη συνιστώσα της επιτάχυνσης, η οποία προκαλεί μεταβολή μόνο της κατεύθυνσης της ταχύτητας και είναι πάντα κάθετη στην ταχύτητα, και επιτρόχια λέμε τη συνιστώσα της επιτάχυνσης η οποία προκαλεί μεταβολή μόνο του μέτρου της ταχύτητας και η διεύθυνσή της είναι παράλληλη στην ταχύτητα. Αν το μέτρο της ταχύτητας αυξάνει, η επιτρόχια επιτάχυνση έχει την ίδια φορά με την ταχύτητα, αν το μέτρο της ταχύτητας μειώνεται, η επιτρόχια επιτάχυνση έχει αντίθετη φορά από την ταχύτητα.



Σχήμα 1.1:
Η επιτρόχια και κεντρομόλος επιτάχυνση για ένα κινητό που εκτελεί μια τυχαία κίνηση στο επίπεδο.

Η ολική επιτάχυνση μπορεί να δοθεί από τη σχέση:

$$\vec{a}_{o\lambda.} = \vec{a}_{\varepsilon\pi.} + \vec{a}_\kappa = \frac{d|v|}{dt}\hat{\theta} - \frac{v^2}{r}\hat{r}, \tag{1.20}$$

όπου το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{\theta}$ είναι εφαπτόμενο στην καμπύλη που διαγράφει το κινητό με κατεύθυνση αυτή της κίνησης του σώματος και το μοναδιαίο $\hat{r}$ δείχνει από το κέντρο του εφαπτόμενου κύκλου προς τα έξω, δηλαδή δείχνει προς το μέρος που η καμπύλη είναι «κοίλη». Το r είναι η ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς, η ακτίνα δηλαδή του κύκλου που είναι εφαπτόμενος στην τροχιά στο σημείο που βρίσκεται το κινητό. Την ακτίνα καμπυλότητας γενικά δεν την ξέρουμε. Εκείνο που ξέρουμε είναι η ταχύτητα και η ολική επιτάχυνση, οπότε βρίσκουμε τη συνιστώσα της επιτάχυνσης που είναι κάθετη στην ταχύτητα. Από αυτή τη συνιστώσα και την τιμή της ταχύτητας, βρίσκουμε την ακτίνα καμπυλότητας.

1.2.8 Σχετική ταχύτητα και επιτάχυνση, Μετασχηματισμοί Γαλιλαίου

Ας υποθέσουμε για ευκολία ότι όλα τα σώματα κινούνται προς τα δεξιά (και ότι σε χρόνο 0 συμπίπτουν τα δύο συστήματα συντεταγμένων). Ένα αυτοκίνητο έχει ταχύτητα υ ως προς τη γη και ένα ποδήλατο κινείται με ταχύτητα υ_0 ως προς τη γη. Αν x είναι η θέση του αυτοκινήτου ως προς τη γη και η θέση και η ταχύτητά του ως προς το ποδήλατο είναι x' και υ' αντίστοιχα, τότε πώς μπορούμε να γράψουμε κάποιες σχέσεις για τα τονούμενα μεγέθη, γνωρίζοντας τη θέση και την ταχύτητα ως προς τη γη; Καταλαβαίνουμε ότι:

$$\upsilon' = \upsilon - \upsilon_0 \quad \text{και} \quad x' = x - \upsilon_0 t \,.$$

Γενικά όταν ένα σώμα έχει $\vec{r}$, $\vec{\upsilon}$ και $\vec{a}$, ως προς ένα σύστημα αναφοράς και έχει $\vec{r}\,'$, $\vec{\upsilon}\,'$ και $\vec{a}\,'$ ως προς ένα άλλο σύστημα αναφοράς και αν το τονούμενο σύστημα αναφοράς κινείται ως προς το άτονο με $\vec{\upsilon}_0$ σταθερή, τότε ισχύει για τα τονούμενα και τα άτονα μεγέθη:

$$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{\upsilon}_0 t \,, \tag{1.21}$$

οπότε με διαδοχικές παραγωγίσεις αυτής έπεται:

$$\vec{\upsilon}\,' = \vec{\upsilon} - \vec{\upsilon}_0 \,, \quad \vec{a}\,' = \vec{a} \,. \tag{1.22}$$

Οι 1.21 σχέσεις αποτελούν τους μετασχηματισμούς του Γαλιλαίου, οι οποίοι τροποποιούνται στο πλαίσιο της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας.

Συνήθως, οι κινήσεις γίνονται όλες στο x άξονα οπότε μπορούμε να γράψουμε:

$$x' = x - \upsilon_0 t \,, \quad y' = y \,, \quad z' = z \,. \tag{1.23}$$

Μια άλλη εξίσωση, η οποία στην Κλασική Μηχανική είναι αυτονόητη, αλλά στη

Θεωρία της Σχετικότητας δεν ισχύει, είναι η: $t' = t$. Η σχέση αυτή μας λέει ότι, αν οι παρατηρητές έχουν συγχρονίσει τα ρολόγια τους κάποια χρονική στιγμή, αυτά θα παραμείνουν συγχρονισμένα και σε κάθε άλλη χρονική στιγμή.

1.2.9 Περιπτώσεις σύνθετης κίνησης

Όταν μια βάρκα είναι μέσα σε ένα ποτάμι, ή ένα αεροπλάνο σε άνεμο, ή ένας άνθρωπος κινείται μέσα σε ένα πλοίο ή τρένο, τότε η ταχύτητα του σώματος ως προς τη γη είναι η ταχύτητα του σώματος ως προς το άλλο σώμα (τρένο, νερό, άνεμο) συν την ταχύτητα του άλλου σώματος ως προς τη γη. Επίσης, η επιτάχυνσή του ως προς τη γη είναι το άθροισμα της επιτάχυνσής του ως προς το άλλο σώμα και της επιτάχυνσης του άλλου σώματος ως προς τη γη. Αυτές τις κινήσεις τις λέμε συνήθως σύνθετες. Αν τα άτονα μεγέθη αναφέρονται στην ταχύτητα και την επιτάχυνση του ανθρώπου, για παράδειγμα, ως προς τη γη και τα τονούμενα αναφέρονται στην ταχύτητα και την επιτάχυνση του ανθρώπου ως προς το τρένο, και αν η ταχύτητα και η επιτάχυνση του τρένου ως προς τη γη είναι $\vec{v}_{τρ.}$ και $\vec{a}_{τρ.}$, τότε ισχύουν: $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_{τρ.}$ και $\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_{τρ.}$.

1.2.10 Πλάγια βολή στο κενό

Όταν ένα σώμα βάλλεται πλάγια υπό γωνία θ με αρχική ταχύτητα v_0 μέσα σε ομογενές βαρυτικό πεδίο με επιτάχυνση g, τότε ισχύουν:

$$v_x = v_0 \cos\theta , \quad x = v_0 \cos\theta \cdot t , \quad v_y = v_0 \sin\theta - gt , \quad y = v_0 \sin\theta \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 . \tag{1.24}$$

Και οι 4 αυτές σχέσεις μπορούν να γραφούν σε 2:

$$\vec{r} = \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{g} t^2 , \quad \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g} t , \quad \text{με} \quad \vec{g} = -g\hat{j} \quad \text{και} \quad \vec{v}_0 = v_0 \cos\theta \hat{i} + v_0 \sin\theta \hat{j} . \tag{1.25}$$

Η τροχιά που διαγράφει ένα σώμα το οποίο εκτελεί πλάγια βολή στο κενό είναι παραβολή. Οι προηγούμενες σχέσεις ισχύουν σε ομογενές βαρυτικό πεδίο, δηλαδή για σταθερή επιτάχυνση της βαρύτητας και κατά το μέτρο (πράγμα που αναιρείται σε βολές με μεγάλο ύψος) και κατά την κατεύθυνση (πράγμα που αναιρείται σε βολές με βεληνεκές μεγάλο, συγκρινόμενο με την ακτίνα της γης, όπως στις βολές διηπειρωτικών πυραύλων). Η αντίσταση του αέρα σε ένα σώμα οδηγεί στη μείωση του βεληνεκούς, του μέγιστου ύψους και της ταχύτητας με την οποία επιστρέφει το σώμα.

Αθ. Πρίκας

1.3 ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΚΑΙ ΟΙ ΝΟΜΟΙ ΤΟΥ ΝΕΥΤΩΝΑ

Στη δυναμική ασχολούμαστε με τον προσδιορισμό του αποτελέσματος (κίνηση του σώματος, δηλαδή επιτάχυνσή του), όταν είναι γνωστό το αίτιο, δηλαδή η συνολική δύναμη.

1.3.1 Ο 1ος νόμος του Νεύτωνα

Ο πρώτος νόμος του Νεύτωνα δε λέει απλώς ότι αν $\Sigma F = 0$ τότε και $a = 0$ γιατί αυτό το λέει και ο 2ος. Θα ήταν τουλάχιστον ανόητα διατυπωμένη μια θεωρία η οποία επαναλαμβάνει τα αξιώματά της. Ο 1ος νόμος του Νεύτωνα είναι ένα σύνολο από αξιώματα και ορισμούς σύμφωνα με τα οποία:

α) *Αξίωμα*: Όταν ένα σώμα βρίσκεται αρκετά μακριά από άλλα σώματα, τότε δεν ασκούνται σε αυτό δυνάμεις (γιατί οποιαδήποτε δύναμη στο σύμπαν είναι λογικό να μειώνεται με την απόσταση, και σε πολύ μεγάλες αποστάσεις να μηδενίζεται).

β) *Ορισμός*: Τα συστήματα συντεταγμένων (ή συστήματα αναφοράς) που προσδένονται σε σώματα που βρίσκονται μακριά από οποιοδήποτε άλλο σώμα καλούνται αδρανειακά.

γ) *Αξίωμα*: Τα σώματα που κουβαλούν τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς κινούνται με σταθερές ταχύτητες το ένα ως προς το άλλο, δηλαδή χωρίς επιταχύνσεις.

δ) *Αξίωμα*: Οι λοιποί δύο νόμοι του Νεύτωνα ισχύουν μόνο σε αδρανειακά συστήματα αναφοράς.

1.3.2 Ισορροπία, σύνθεση και ανάλυση δυνάμεων

Όταν η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται σε ένα υλικό σημείο είναι μηδέν, τότε το σημείο είτε παραμένει ακίνητο, είτε κινείται ευθύγραμμα και ομαλά ως προς τα αδρανειακά συστήματα συντεταγμένων. Σε μη αδρανειακά, δηλαδή επιταχυνόμενα, συστήματα αναφοράς, τα σώματα που ισορροπούν φαίνονται να επιταχύνονται.

Έστω δύο δυνάμεις με μέτρα F_1 και F_2, οι οποίες σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία θ. Η συνισταμένη τους, σύμφωνα με το νόμο των συνημιτόνων είναι:

$$\Sigma F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\theta}\,. \tag{1.26}$$

Η γωνία που σχηματίζει η συνισταμένη με την F_1 είναι:

$$\tan\varphi = \frac{F_2\sin\theta}{F_2\cos\theta + F_1}\,. \tag{1.27}$$

Για περισσότερες από δύο δυνάμεις, η μέθοδος είναι ασύμφορη. Οπότε, αναλύουμε όλες τις δυνάμεις σε συνιστώσες, σε ένα όσο πιο βολικό γίνεται σύστημα συντεταγμένων, κατόπιν προσθέτουμε τις x συνιστώσες, επίσης τις y συνιστώσες και βρίσκουμε τελικά τη συνισταμένη με το πυθαγόρειο θεώρημα.

Αν πρέπει να προσθέσουμε δυνάμεις όχι στις 2 αλλά στις 3 διαστάσεις, τότε εφαρμόζουμε το γενικευμένο πυθαγόρειο θεώρημα.

Παραδείγματα

Έστω $\vec{F}_1 = 3\hat{i}$, $\vec{F}_2 = 5\hat{j}$ και $\vec{F}_3 = -6\hat{k}$, τότε η συνισταμένη δύναμη είναι: $\vec{F}_{ολ.} = 3\hat{i} + 5\hat{j} - 6\hat{k}$ και το μέτρο της είναι $F_{ολ.} = \sqrt{3^2 + 5^2 + 6^2}$.

Είναι πολύ πιο συμφέρον να μας δίνουν τις δυνάμεις με συνιστώσες όπως σε αυτό αλλά και στο επόμενο παράδειγμα, παρά να μας δίνουν τις δυνάμεις με μέτρα και γωνίες διεύθυνσης ως προς κάποιον άξονα, γιατί τότε πρέπει να αναλύσουμε την κάθε δύναμη σε συνιστώσες και μετά να τις προσθέσουμε. Τώρα οι δυνάμεις είναι ήδη αναλυμένες σε συνιστώσες, εμείς απλώς προσθέτουμε τις συνιστώσες.

Αν $\vec{F}_1 = (2,\ 4,\ 0)$, $\vec{F}_2 = (1,\ -2,\ 3)$ και $\vec{F}_3 = (3,\ 0,\ 3)$, τότε η συνισταμένη είναι $\vec{F}_{ολ.} = (6,\ 2,\ 6)$ και το μέτρο της: $F_{ολ.} = \sqrt{6^2 + 2^2 + 6^2}$.

1.3.3 Ο 2ος νόμος του Νεύτωνα

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \Leftrightarrow \begin{cases} \Sigma F_x = ma_x \\ \Sigma F_y = ma_y \\ \Sigma F_z = ma_z \end{cases}. \tag{1.28}$$

Παραδείγματα

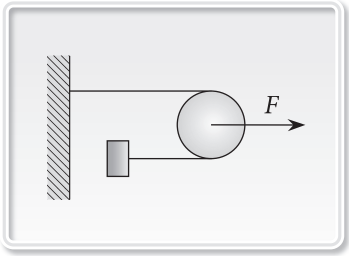
Ένα σώμα μάζας $m=2$ Kg κινείται με επιτάχυνση που είναι συνάρτηση του χρόνου και δίνεται από τη σχέση: $\vec{a}=(2,\ 3t,\ -t^2)$. Να βρεθεί το μέτρο της δύναμης συναρτήσει του χρόνου.

Βρίσκουμε πρώτα τη δύναμη σε διανυσματική μορφή: $\vec{F}=m\vec{a}=(4,\ 6t,\ -2t^2)$. Άρα το μέτρο της συναρτήσει του χρόνου είναι: $F=\sqrt{4^2+(6t)^2+(2t^2)^2}$.

Γενικά, όταν ξέρουμε την επιτάχυνση και τη μάζα βρίσκουμε σε πολλές περιπτώσεις τη δύναμη. Για παράδειγμα στην ομαλή κυκλική κίνηση, ξέροντας τον τύπο της κεντρομόλου επιτάχυνσης, $a_k=\dfrac{\upsilon^2}{R}$, βρίσκουμε τον τύπο της δύναμης, $F_k=m\dfrac{\upsilon^2}{R}$. Σε αυτή την περίπτωση η συνισταμένη δύναμη δίνεται με απόλυτη βεβαιότητα από αυτό τον τύπο, γιατί ο τύπος της κεντρομόλου επιτάχυνσης αποδείχθηκε μαθηματικώς. Γι' αυτό λέμε ότι η κεντρομόλος δύναμη δεν είναι μια καινούρια δύναμη με καινούριο τύπο. Τώρα, αν αυτό το $m\dfrac{\upsilon^2}{R}$ (που είναι σίγουρα η συνισταμένη στην ομαλή κυκλική κίνηση και, χάριν συντομίας, το ονομάζουμε F_k) είναι όσο προβλέπει ο νόμος της παγκόσμιας έλξης για τους δορυφόρους, ή όσο προβλέπει ο νόμος του Hooke για τις περιστρεφόμενες πετονιές, ή ο νόμος της τριβής για τα αυτοκίνητα που κινούνται σε κύκλο, είναι εντελώς άλλο ζήτημα. Την ισχύ του νόμου της παγκόσμιας έλξης, ή του νόμου του Hooke για τα ελαστικά σώματα, ή οποιουδήποτε άλλου νόμου μόνο τα πείραμα μπορεί να αποφασίσει. Το ότι όμως ένα σώμα που κινείται σε κύκλο δέχεται συνισταμένη που δίνεται από τον παραπάνω τύπο δεν το αποφασίζει το πείραμα, το έχουν προαποφασίσει τα μαθηματικά.

Όταν ένα σώμα το θεωρούμε άμαζο, συνήθως επειδή η μάζα του είναι πολύ μικρότερη των μαζών των λοιπών σωμάτων που εμπλέκονται στο φυσικό σύστημα, τότε η συνισταμένη δύναμη που ασκείται σε αυτό είναι μηδενική, διαφορετικά, η επιτάχυνσή του θα ήταν άπειρη. Άμαζα θεωρούμε τα σχοινιά και συνήθως τα ελατήρια, ώστε να αποθηκεύουν μόνο δυναμική και όχι και κινητική ενέργεια.

Επίσης, θεωρούμε ότι τα σχοινιά δεν είναι εκτατά, δηλαδή δεν αλλάζει το μήκος τους. Αν το μήκος τους άλλαζε σημαντικά, τότε ένα απλό πρόβλημα δυναμικής θα ήταν εξαιρετικά πολύπλοκο, ενώ το σχοινί θα αποθήκευε δυναμική ενέργεια, όπως ένα λάστιχο που τεντώνει. Σε μερικά προβλήματα όπως στο σχήμα, πρέπει, προκειμένου το σχοινί να έχει σταθερό μήκος, το σώμα να κινείται με επιτάχυνση διπλάσια από αυτή της τροχαλίας και να έχει διπλάσια ταχύτητα από αυτή κάθε χρονική στιγμή. Αν η τροχαλία κινείται προς τα δεξιά κατά x, τότε το πάνω μέρος του σχοινιού μεγαλώνει κατά x. Αυτό το x, όμως, το πάνω μέρος του σχοινιού το παίρνει από το κάτω, άρα το σώμα στο κάτω μέρος του σχοινιού έχει μετακινηθεί κατά x επειδή μετακινήθηκε η τροχαλία, «συν» x, επειδή αυτό το μήκος μεταφέρθηκε στο πάνω μέρος του σχοινιού.



Σχήμα 1.2:
Ένα σώμα δεμένο με αβαρή σχοινιά και μια αβαρή τροχαλία.

1.3.4 Ο 3ος νόμος του Νεύτωνα

Τα σώματα ασκούν μεταξύ τους δυνάμεις κατά ζεύγη δράσης - αντίδρασης, δηλαδή κατά ζεύγη δυνάμεων ίσων στο μέτρο και με αντίθετες κατευθύνσεις.

Υπάρχουν δυνάμεις και μάλιστα πολύ γνωστές οι οποίες δεν υπακούουν στον 3ο νόμο του Νεύτωνα, όπως οι μαγνητικές δυνάμεις μεταξύ κινούμενων ηλεκτρικών φορτίων, αλλά αυτές θα τις δούμε στον Ηλεκτρομαγνητισμό.

Ενίοτε υπερτονίζεται ότι δεν είναι σωστό να λέμε ότι η συνισταμένη της δράσης και της αντίδρασης είναι μηδέν, γιατί ασκούνται σε διαφορετικά σώματα. Όταν εξετάζουμε την κίνηση του κάθε σώματος ξεχωριστά, είναι αυτονόητο ότι θα μιλήσουμε για συνισταμένη σε κάθε σώμα ξεχωριστά. Ωστόσο, η έννοια της συνολικής δύναμης που ασκείται όχι μόνο σε δύο, αλλά και σε πολλά διαφορετικά σώματα, έχει νόημα και με το παραπάνω. Αλλιώς, δε θα μπορούσαμε να γράψουμε ούτε μισή σχέση για το στερεό σώμα ή για ένα ρευστό, τα οποία αποτελούνται από πάμπολλα μόρια.

Παραδείγματα

Όταν ένα σώμα πέφτει προς τη γη ή βρίσκεται σε τροχιά γύρω της, τότε στο σύστημα εμφανίζονται δύο δυνάμεις, η βαρυτική έλξη που ασκεί η γη στο σώμα και η βαρυτική έλξη που ασκεί το σώμα στη γη και αυτές έχουν σχέση δράσης αντίδρασης.

Όταν ένα σώμα ακουμπά στο δάπεδο, τότε στο σύστημα υπάρχουν 4 δυνάμεις: Η βαρυτική έλξη που ασκεί η γη στο σώμα (από το κέντρο της γης στο κέντρο μάζας του σώματος), η βαρυτική έλξη που ασκεί το σώμα στη γη (από το κέντρο μάζας του σώματος στο κέντρο μάζας της γης) και οι οποίες έχουν σχέση δράσης – αντίδρασης, και άλλες δύο ακόμη: Η δύναμη στήριξης από το πάτωμα στην κάτω επιφάνεια του σώματος και η δύναμη που ασκεί η κάτω επιφάνεια του σώματος στο πάτωμα, οι οποίες επίσης έχουν σχέση δράσης – αντίδρασης. Είναι λάθος να λέμε ότι η αντίδραση από το πάτωμα είναι ίση με το βάρος ως δράση και αντίδραση, αυτές είναι ίσες μόνο επειδή το σώμα ισορροπεί, ενώ δε θα ήταν ίσες αν το σώμα βρισκόταν μέσα σε ένα ασανσέρ κινούμενο με επιτάχυνση.
Όταν δύο σώματα δένονται με ένα αβαρές σχοινί, δεν είναι καν σωστό να λέμε ότι τα σώματα ασκούν δυνάμεις το ένα στο άλλο. Άρα, δεν είναι σωστό να λέμε ότι αυτές οι δυνάμεις είναι ίσες γιατί έχουν σχέση δράσης - αντίδρασης. Σχέση δράσης αντίδρασης έχει η δύναμη που ασκεί το ένα σώμα στο σχοινί και η δύναμη που ασκεί το σχοινί στο ίδιο σώμα. Οι δυνάμεις που ασκούνται στα δύο άκρα του σχοινιού είναι ίσες, μόνο αν το σχοινί είναι άμαζο. Αν έχει μη μηδενική μάζα, οι δυνάμεις στα άκρα του δεν είναι ίσες. Τα σχοινιά «μεταφέρουν» δυνάμεις, μόνο αν θεωρηθούν άμαζα.

1.3.5 Η τριβή

Υπάρχουν τρία είδη τριβής: Η στατική τριβή, η τριβή ολίσθησης και η τριβή κύλισης, η οποία δεν είναι δύναμη αλλά ροπή και με την οποία δε θα ασχοληθούμε εφεξής. Η τριβή δεν εξαρτάται γενικά από το εμβαδό της επιφάνειας επαφής ούτε από τη σχετική ταχύτητα κίνησης των δύο σωμάτων, αν και σε αυτούς τους κανόνες υπάρχουν μικρές εξαιρέσεις. Η στατική τριβή δεν έχει σταθερή τιμή, ξεκινά από το μηδέν και φτάνει μέχρι μια μέγιστη τιμή, που ονομάζουμε οριακή τριβή, για την οποία βρίσκουμε πειραματικά ότι ισχύει:

$$T = \mu_s N , \tag{1.29}$$

με N την κάθετη αντίδραση. Όταν η μία επιφάνεια κινείται ως προς την άλλη, τότε έχουμε την τριβή ολίσθησης, για την οποία βρίσκεται πάλι πειραματικά ότι ισχύει:

$$T = \mu N \tag{1.30}$$

με μ συνήθως ελαφρά μικρότερο από το μ_s, το πολύ ίσο με αυτό, αλλά ποτέ μεγαλύτερο. (Σε διαφορετική περίπτωση θα προέκυπτε τριβή ολίσθησης που θα μετατόπιζε από μόνη της το σώμα). Το ότι ο συντελεστής στατικής τριβής είναι πάντα μεγαλύτερος ή ίσος από το συντελεστή τριβής ολίσθησης είναι κάτι που δε χρειάζεται πειραματική επιβεβαίωση, είναι μια αλήθεια που ισχύει «εξ ορισμού» και στο πλαίσιο οποιασδήποτε θεωρίας. Υπάρχουν και στη Φυσική τέτοιες προτάσεις, οι οποίες δεν εξαρτώνται από οποιαδήποτε εμπειρική επαλήθευση, ενώ δεν είναι δυνατό να διαψευστούν. Οι συντελεστές τριβής μπορεί να είναι και μεγαλύτεροι της μονάδας.

Είναι εσφαλμένο να λέγεται ότι η στατική τριβή δεν παράγει σε καμιά περίπτωση έργο και ότι η τριβή ολίσθησης παράγει πάντα αρνητικό έργο. Και τούτο διότι, αφενός το έργο είναι σχετικό, όπως θα δούμε, και εξαρτάται από τον παρατηρητή, και επιπλέον, μπορούμε να φανταστούμε την περίπτωση στην οποία τραβάμε ένα τραπεζομάντιλο με τα ποτήρια πάνω του ακίνητα ως προς αυτό. Η στατική τριβή (είναι στατική γιατί τα ποτήρια είναι ακίνητα ως προς το τραπεζομάντιλο) είναι αυτή που επιταχύνει και ταυτόχρονα παράγει έργο.

Αθ. Πρίκας

1.4 ΕΡΓΟ – ΕΝΕΡΓΕΙΑ

Σε αυτό και στο επόμενο κεφάλαιο, ουσιαστικά επαναδιατυπώνουμε τους νόμους του Νεύτωνα. Ενώ όμως η διατήρηση της ενέργειας και της ορμής, που μας βοηθούν να λύνουμε τα προβλήματα της δυναμικής όταν η χρήση της δύναμης είναι δύσκολη ή ανέφικτη (έκρηξη), αποδεικνύονται εδώ από τους νόμους του Νεύτωνα στην ειδική περίπτωση της Κλασικής Μηχανικής, ωστόσο ισχύουν γενικότερα, σε θεωρίες όπως η Σχετικότητα στην οποία δεν ισχύουν οι νόμοι του Νεύτωνα, αλλά και σε άλλες περιοχές της Φυσικής, πέραν της Μηχανικής.

1.4.1 Έργο

Στοιχειώδες έργο δύναμης $\vec{F}$, το σημείο εφαρμογής της οποίας μετατοπίζεται κατά $d\vec{s}$ (ανεξάρτητα από το αν το μετατοπίζει μόνο η δύναμη $\vec{F}$, ή αν ασκούνται και άλλες δυνάμεις) ορίζεται το μέγεθος:

$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{s}\ . \tag{1.31}$$

Το έργο είναι το ολοκλήρωμα:

$$W = \int \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int F_x dx + F_y dy + F_z dz\ . \tag{1.32}$$

Το παραπάνω ολοκλήρωμα είναι ορισμένο από την αρχή μέχρι το τέλος της διαδρομής. Αν η δύναμη είναι σταθερή και το σώμα κινείται ευθύγραμμα τότε:

$$W = \vec{F}\cdot\vec{s}\ . \tag{1.33}$$

Το εσωτερικό γινόμενο μπορεί να οριστεί με δύο τρόπους:

$$\vec{F}\cdot\vec{s} = F_x x + F_y y + F_z z \tag{1.34}$$

είτε:

$$\vec{F}\cdot\vec{s} = Fs\cos\theta \tag{1.35}$$

όπου θ η γωνία μεταξύ των δύο διανυσμάτων. Τα F και s είναι τα μέτρα των αντίστοιχων διανυσμάτων.

Το έργο είναι σχετικό, δηλαδή εξαρτάται από τον παρατηρητή, διότι μπορεί η δύναμη να είναι ίδια για όλους τους παρατηρητές, δεν είναι ίδια όμως η απόσταση που διανύει ένα σώμα.

Παράδειγμα

Μια μονοδιάστατη δύναμη δίνεται από τη σχέση: $F = 5x - x^2$ και έχει τη διεύθυνση του x άξονα. Να βρεθεί το έργο της για τη μετακίνηση του σώματος από το σημείο $x = -2$ ως το σημείο $x = 3$.

Απάντηση:
Η μόνη συνιστώσα της δύναμης είναι η F_x και η κίνηση γίνεται μόνο στο x άξονα οπότε $ds = dx$. Ολοκληρώνοντας έπεται:

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int F_x dx = \int_{-2}^{3} (5x - x^2) dx = \left(\frac{5}{2} x^2 - \frac{x^3}{3} \right)_{-2}^{3} .$$

Αν η δύναμη δινόταν από την ίδια σχέση αλλά η διεύθυνσή της ήταν ο y ή ο z άξονας, τότε το έργο σε μετακίνηση του σώματος στο x άξονα θα ήταν μηδενικό.

Παράδειγμα

Μια δύναμη δίνεται από τον τύπο $F = -kx$. Να βρεθεί το έργο της για τη μετακίνηση του σώματος από το x_1 στο x_2. Η δύναμη έχει τη διεύθυνση του x άξονα.

Απάντηση: $W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{x_1}^{x_2} (-kx) dx = \frac{1}{2} k x_1^2 - \frac{1}{2} k x_2^2$.

Παράδειγμα

Έστω ότι έχουμε μια σταθερή δύναμη $\vec{F} = (2,\ 1,\ -3)$ και ένα σώμα μετακινείται κατά τον εξής τρόπο: 3 m προς τα δεξιά στο x άξονα, 4 m προς την αρνητική κατεύθυνση του y άξονα και 2 m προς τη θετική κατεύθυνση του z άξονα. Να βρεθεί το έργο της δυνάμεως σε αυτή τη μετακίνηση.

Απάντηση:
Για τη σταθερή δύναμη χρησιμοποιούμε τη σχέση $\vec{F}\cdot\vec{s}=F_x x+F_y y+F_z z$, είτε τη σχέση $\vec{F}\cdot\vec{s}=Fs\cos\theta$. Δεν ξέρουμε όμως τη γωνία μεταξύ των διανυσμάτων, αντίθετα ξέρουμε τις συνιστώσες και της δύναμης ($F_x=2$, $F_y=1$, $F_z=-3$) και τις συνιστώσες του $\vec{s}$, οπότε χρησιμοποιούμε τον πρώτο τύπο.
Αν μια δύναμη σταθερού μέτρου είναι εφαπτόμενη σε μια καμπύλη τροχιά, τότε το έργο της είναι ίσο με το μέτρο της δύναμης επί το μήκος της καμπύλης τροχιάς, $\times\cos 0$, αν η δύναμη έχει την ίδια φορά με την ταχύτητα, ή $\times\cos\pi$, αν έχει αντίθετη φορά από αυτή. Για παράδειγμα, ένα κιβώτιο κινείται σε κύκλο ακτίνας *R* υπάρχει τριβή σταθερού μέτρου ίση με *T*, ενώ ταυτόχρονα ένα παιδί σπρώχνει το κιβώτιο με δύναμη μέτρου *F*, παράλληλη στην ταχύτητα. Το έργο της δυνάμεως σε μια πλήρη περιστροφή είναι $2\pi RF$ και το έργο της τριβής είναι $-2\pi RT$ (αφού η τριβή και η μετατόπιση είναι αντιπαράλληλες, έπεται: $dW=Tds\cos\pi$. Ολοκληρώνουμε, οπότε προκύπτει το συνολικό μήκος της καμπυλόγραμμης τροχιάς που διανύθηκε).

1.4.2 Κινητική ενέργεια

Για ένα σώμα μάζας m που κινείται με ταχύτητα υ, η κινητική του ενέργεια ορίζεται από τη σχέση:

$$K=\frac{1}{2}m\upsilon^2. \tag{1.36}$$

Για περισσότερα από ένα σώματα, με μάζες m_1, m_2… και ταχύτητες υ_1, υ_2 …, η ολική κινητική ενέργεια του συστήματος είναι:

$$K=\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2+\frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2+\ldots \tag{1.37}$$

Η κινητική ενέργεια είναι θετική πάντα και μηδενική όταν όλα τα σώματα είναι ακίνητα.

Η κινητική ενέργεια είναι σχετική, δηλαδή εξαρτάται από τον παρατηρητή. Μπορεί στη Νευτώνεια Μηχανική, σε αντίθεση με τη Θεωρία της Σχετικότητας, η μάζα να μην εξαρτάται από τον παρατηρητή, εξαρτάται όμως η ταχύτητα και άρα η κινητική ενέργεια.

1.4.3 Θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας. Η διατήρηση της ενέργειας.

Από τους νόμους του Νεύτωνα αποδεικνύεται ότι:

$$W_{ολ.}=\int_{\vec{r}_{αρχ.}}^{\vec{r}_{τελ.}}\vec{F}_{ολ.}\cdot d\vec{r}=\int_{t_{αρχ.}}^{t_{τελ.}}m\frac{d\vec{υ}}{dt}\cdot\vec{υ}dt=\int_{\vec{υ}_{αρχ.}}^{\vec{υ}_{τελ.}}m\vec{υ}\cdot d\vec{υ}\Rightarrow$$

$$W_{ολ.}=K_{τελ.}-K_{αρχ.}\,. \tag{1.38}$$

Το θεώρημα της μεταβολής της κινητικής ενέργειας είναι ένας διαφορετικός τρόπος να εκφραστεί η διατήρηση της ολικής ενέργειας και ουσιαστικά μας λέει ότι η τελική κινητική ενέργεια ενός σώματος είναι αυτή που αρχικά είχε συν αυτή που απέκτησε από τις εξωτερικές δυνάμεις. Μας λέει επίσης ότι μέσω του έργου της τριβής η κινητική ενέργεια ενός σώματος μπορεί να μετατραπεί σε θερμική ενέργεια. Μπορεί να αποδείξαμε το θ.μ.κ.ε. στη Μηχανική χρησιμοποιώντας τους νόμους του Νεύτωνα, ωστόσο η διατήρηση της ενέργειας ισχύει σε κάθε περιοχή της Φυσικής. Από μία πιο αφηρημένη σκοπιά, η διατήρηση της ενέργειας είναι συνέπεια της ομοιογένειας του χρόνου, του ότι δηλαδή κάθε χρονική στιγμή δεν έχει τίποτε το ιδιαίτερο συγκριτικά με οποιαδήποτε άλλη. Μπορεί και το έργο και η κινητική ενέργεια να εξαρτώνται από το σύστημα των συντεταγμένων, το θεώρημα όμως ισχύει για κάθε αδρανειακό παρατηρητή, όπως ισχύουν και όλοι οι νόμοι της Φυσικής για κάθε αδρανειακό παρατηρητή. Το μόνο που αλλάζει από τον ένα παρατηρητή στον άλλο είναι οι αριθμητικές τιμές των ανωτέρω μεγεθών.

1.4.4 Ισχύς

Η στιγμιαία ισχύς δίνεται από τον τύπο:

$$P=\frac{dW}{dt}=\frac{\vec{F}\cdot d\vec{s}}{dt}=\vec{F}\cdot\vec{υ}=Fυ\cos\theta\,. \tag{1.39}$$

Η μέση ισχύς είναι το πηλίκο:

$$P_{μ}=\frac{ΔW}{Δt}\,. \tag{1.40}$$

1.4.5 Συντηρητικές και μη δυνάμεις

Συντηρητικές λέμε τις δυνάμεις, των οποίων το έργο κατά μήκος οποιασδήποτε κλειστής διαδρομής (και όχι μόνο μερικών κλειστών διαδρομών) είναι μηδέν. Ισοδύναμα, συντηρητικές είναι οι δυνάμεις των οποίων το έργο σε οποιαδήποτε μετακίνηση από ένα αρχικό σε ένα τελικό σημείο εξαρτάται μόνο από αυτά τα σημεία και όχι από τη διαδρομή που ακολουθήθηκε, την ταχύτητα του σώματος κλπ. Αυτό θα πρέπει να ισχύει για οποιοδήποτε αρχικό και τελικό σημείο και όχι μόνο για συγκεκριμένα τέτοια.

Για τις συντηρητικές δυνάμεις και μόνο μπορούμε να γράψουμε το μέγεθος της δυναμικής ενέργειας. Συντηρητικές είναι οι δυνάμεις βαρύτητας, οι ηλεκτροστατικές και οι δυνάμεις ελαστικότητας (δυνάμεις ελατηρίων, σχοινιών που δεν έχουν θερμικές απώλειες όταν τεντώνονται κλπ.) Αντίθετα, για την τριβή, την αντίσταση του αέρα, τη δύναμη των μυών μας όταν σπρώχνουμε ένα αντικείμενο, τις δυνάμεις που αναπτύσσονται σε μια σύγκρουση ή έκρηξη, δε μπορούμε να ορίσουμε δυναμική ενέργεια. Γενικά, στις μη συντηρητικές δυνάμεις ένα μακροσκοπικό είδος ενέργειας (κινητική ή δυναμική) μετατρέπεται σε κάποιο μικροσκοπικό είδος ενέργειας (θερμότητα, ενέργεια παραμόρφωσης μη ιδανικών ελατηρίων), ή κάποιο μικροσκοπικό είδος ενέργειας μετατρέπεται σε κινητική είτε δυναμική ενέργεια. Για παράδειγμα, σε μια έκρηξη, η χημική ενέργεια του εκρηκτικού (μικροσκοπική ενέργεια) μετατρέπεται σε μακροσκοπική κινητική ενέργεια. Όταν σπρώχνουμε ένα αντικείμενο, η χημική ενέργεια που παίρνουμε από τις τροφές μας μετατρέπεται σε κινητική.

Στη φύση δεν υπάρχει διάκριση ανάμεσα σε συντηρητικές και μη δυνάμεις. Όλες οι δυνάμεις είναι συντηρητικές σε μικροσκοπικό επίπεδο. Ακόμη και η τριβή μετατρέπει την οργανωμένη κινητική ενέργεια των σωμάτων σε ανοργάνωτη κινητική ενέργεια των μορίων, δηλαδή θερμική ενέργεια. Η διάκριση ανάμεσα σε συντηρητικές και μη δυνάμεις γίνεται για λόγους δικής μας διευκόλυνσης και παιδαγωγικούς.

Οποιαδήποτε δύναμη είναι σταθερή κατά μέτρο και κατεύθυνση, (όχι όπως η τριβή της οποίας η κατεύθυνση εξαρτάται από την κατεύθυνση της κίνησης του σώματος) είναι συντηρητική.

Το έργο των συντηρητικών δυνάμεων, όταν το σώμα εκτελεί μια διαδρομή προς μία κατεύθυνση, είναι αντίθετο του έργου όταν το σώμα εκτελεί την ίδια διαδρομή στην αντίθετη κατεύθυνση. Αυτό δε συμβαίνει στην περίπτωση της τριβής, στην οποία το έργο είναι ίδιο και στις δύο κατευθύνσεις.

Ένα πεδίο το οποίο ασκεί συντηρητικές δυνάμεις το λέμε συντηρητικό πεδίο δυνάμεων.