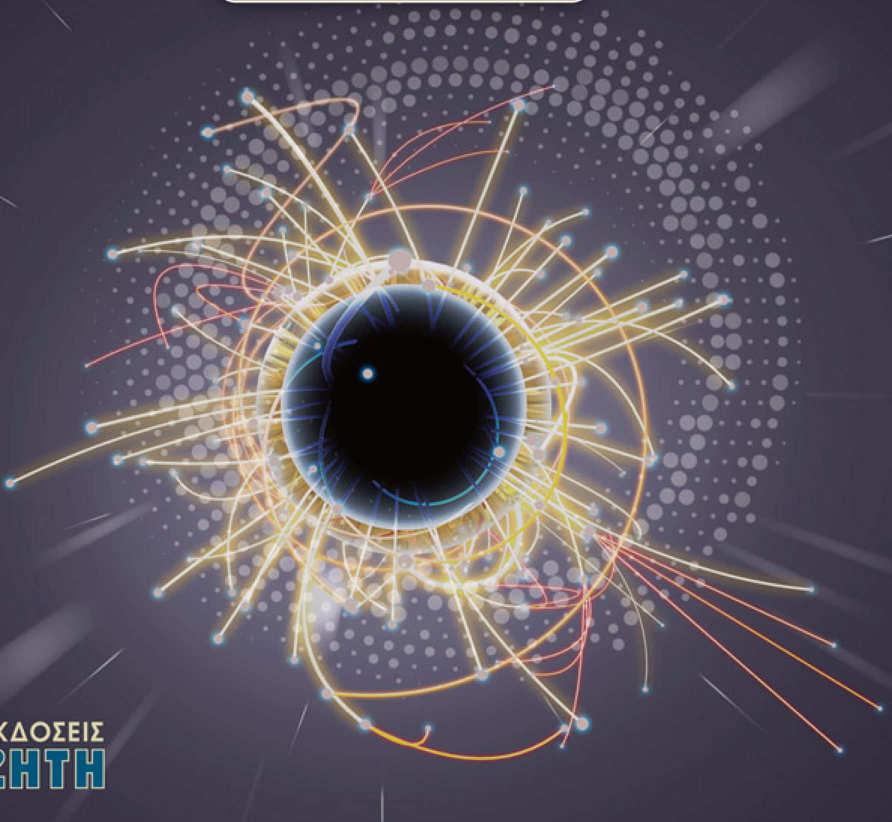
Αθανάσιος Πρίκας

ΑΣΚΗΣΕΙΣ & ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

ΦΥΣΙΚΗ

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Ομάδα προσανατολισμού
ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ



ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

ISBN 978-960-456-461-3

Φωτοστοιχειοθεσία
Εκτύπωση
Βιβλιοδεσία

Π. ΖΗΤΗ & Σια ΟΕ
18ο χλμ Θεσ/νίκης-Περαίας
Τ.Θ. 4171 • Περαία Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19
Τηλ.: 2392.072.222 - Fax: 2392.072.229 • e-mail: info@ziti.gr

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
www.ziti.gr

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ - ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΔΙΑΘΕΣΗ:
Αρμενοπούλου 27, 546 35 Θεσσαλονίκη
Τηλ.: 2310.203.720, Fax: 2310.211.305 • e-mail: sales@ziti.gr

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΑΘΗΝΩΝ - ΠΩΛΗΣΗ ΛΙΑΝΙΚΗ-ΧΟΝΔΡΙΚΗ:
Χαριλάου Τρικούπη 22, 106 79 Αθήνα
Τηλ.-Fax: 210.3816.650 • e-mail: athina@ziti.gr

ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ: www.ziti.gr

Πρόλογος

Στο βιβλίο τούτο περιλαμβάνονται περισσότερες από 600 ασκήσεις και προβλήματα Φυσικής από όλη την ύλη της Γ′ Λυκείου για το μάθημα της Φυσικής προσανατολισμού θετικών σπουδών. Παράλληλα, υπάρχουν και μεθοδολογικά σχόλια, όπου χρειάζεται, ειδικότερα για τις δυσκολότερες περιπτώσεις προβλημάτων.

Στο τέλος του βιβλίου περιέχονται οι απαντήσεις στις ασκήσεις. Στις πιο εύκολες έχει δοθεί η αριθμητική απάντηση μόνο. Σε περισσότερες δύσκολες, παραθέτουμε αναλυτικότερες λύσεις και σχόλια για να κατανοήσουμε περισσότερο τον τρόπο αντιμετώπισής τους, και σε ακόμη δυσκολότερες υπάρχουν γενικότερα σχόλια για το πώς λύνονται παρόμοιες ασκήσεις ή για σφάλματα τα οποία πρέπει να αποφεύγουμε.

Προσπαθήσαμε να κατηγοριοποιήσουμε τις ασκήσεις σε ένα αποδοτικό, κατανοητό και κατά το δυνατό πλήρες σύστημα κατηγοριοποίησης. Προσπαθήσαμε επίσης να αποφύγουμε την εκτεταμένη παράθεση αριθμητικών εφαρμογών και γενικώς την εκτεταμένη παράθεση εύκολων ασκήσεων, διότι απλώς κουράζουν το μαθητή, δεν προσφέρουν επιπλέουν γνώση και κατανόηση, ενώ δίνουν μια ψευδή αίσθηση επάρκειας. Μας απασχόλησε ιδιαίτερα η διαβάθμιση, το να ξεκινούμε δηλαδή με εύκολες αριθμητικές εφαρμογές και να επεκτεινόμαστε βαθμιαία σε δυσκολότερες ασκήσεις. Προσπαθήσαμε ώστε κάθε άσκηση να έχει να προσφέρει κάτι καινούριο στο μαθητή, επεκτείνοντας με αυτό τον τρόπο την κατανόησή του στις έννοιες της Φυσικής και στην εφαρμογή τους στον πραγματικό κόσμο των φυσικών προβλημάτων, κάποιων ιδιαίτερα απαιτητικών. Δεν το κρύβουμε ότι φιλοδοξήσαμε να καλύψουμε οσεσδήποτε περισσότερες εφαρμογές, οσεσδήποτε περισσότερες κατηγορίες ασκήσεων. Εννοείται ότι το πεδίο της Φυσικής, ακόμη και του επιπέδου του Λυκείου (φαίνεται να) είναι απεριόριστο, αυτό όμως δε μας αποθάρρυνε, και κανένα δεν πρέπει να αποθαρρύνει, από την προσπάθεια να το εμπεδώσουμε και κατακτήσουμε.

Ευχόμαστε καλή περιπλάνηση στις περιοχές της Φυσικής σε συναδέλφους και μαθητές, και καλή επιτυχία σε κάθε είδους εξεταστικές δοκιμασίες.

Ιούνιος 2015

Αθανάσιος Πρίκας,

Φυσικός, διδάκτωρ Φυσικής[*]

[*] athanasios_prikas@yahoo.gr

Περιεχόμενα

1ο κεφάλαιο Κρούσεις

2ο κεφάλαιο Ταλαντώσεις

3ο κεφάλαιο Κύματα

Απαντήσεις & Λύσεις των ασκήσεων

1ο
ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Κρούσεις

Α1 Κρούσεις

Α1.1. Κεντρικές ελαστικές κρούσεις

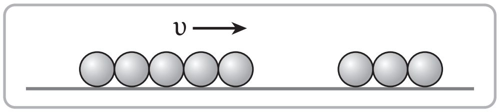
Α1.1.1 Σώματα με μάζες $m_1 = 1Kg$ και $m_2 = 3Kg$ κινούνται με αντίρροπες ταχύτητες μέτρων $\upsilon_1 = 10\,m/s$ και $\upsilon_2 = 2\,m/s$ και συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά. **α)** Να βρεθούν οι τελικές τους ταχύτητες. **β)** Να βρεθεί το έργο της κάθε δύναμης που ασκεί το ένα σώμα στο άλλο. Το ότι καταλήξατε σε μια σχέση εδώ, σημαίνει ότι η ίδια σχέση θα ισχύει πάντα; **γ)** Αν η μέση διάρκεια της κρούσης είναι $\Delta t = 0{,}1s$, να βρείτε τη μέση δύναμη που ασκεί το ένα σώμα στο άλλο κατά τη διάρκεια της κρούσεως. Το συμπέρασμα στο οποίο καταλήγετε σε αυτό το ερώτημα είναι γενικό ή όχι; **δ)** Να βρεθεί το ποσοστό της μεταβολής της κινητικής ενέργειας κάθε σώματος κατά τη σύγκρουση.

Α1.1.2 Να αποδείξετε σε μια κεντρική ελαστική κρούση ότι: **α)** Οι μεταβολές των ορμών των σωμάτων είναι αντίθετες. **β)** Το έργο που παράγει η δύναμη που ασκείται από το ένα σώμα στο άλλο είναι αντίθετο του έργου που παράγει η αντίδρασή της.

Α1.1.3 Ένα σώμα μάζας m_1 κινείται με ταχύτητα υ_1 και συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με ένα άλλο σώμα μάζας $m_2 >> m_1$ που κινείται με ταχύτητα υ_2. Ποιες είναι προσεγγιστικά οι ταχύτητες των σωμάτων μετά την κρούση; Αναπαράγονται τα γνωστά αποτελέσματα για την περίπτωση που το μεγάλο σώμα είναι ακίνητο πριν τη σύγκρουση;

Α1.1.4 Αν ένα σώμα m_2 είναι αρχικά ακίνητο, πόση θα πρέπει να είναι η μάζα ενός σώματος m_1, το οποίο εκτελεί κεντρική ελαστική κρούση με το m_2, ώστε να μεταφερθεί στο m_2 το παρακάτω ποσοστό κινητικής ενέργειας: **α)** 100%, **β)** 50%, **γ)** 0%; Εκφράστε τη μάζα m_1 ως συνάρτηση της m_2.

Α1.1.5 Στο διπλανό σχήμα έχουμε κάποιες σφαίρες, οι οποίες εκτελούν μόνο μεταφορική κίνηση με ίδια ταχύτητα πάνω στη διάκεντρό τους και πέφτουν πάνω σε άλλες όμοιες, ακίνητες. Τα κέντρα όλων των σφαιρών βρίσκονται πάνω στο φορέα της ταχύτητας. Αν οι κρούσεις είναι κεντρικές και ελαστικές, ποιες σφαίρες θα κινηθούν τελικά και με τί ταχύτητα; Επιβεβαιώστε ότι κάποιες άλλες λύσεις που φαίνονται να ικανοποιούν τη διατήρηση της ορμής, δεν ικανοποιούν τη διατήρηση της ενέργειας, που σημαίνει ότι η κρούση θα έπαυε σε αυτή την υποθετική περίπτωση να είναι ελαστική.



Α1.1.6 Μέσα σε ένα δωμάτιο δεν υπάρχει τίποτε άλλο (ούτε βαρύτητα), εκτός από $N = 6$ όμοια ελαστικά σώματα μάζας m το καθένα, τα οποία μπορούν να εκτελούν ελαστικές κρούσεις μεταξύ τους ή με τους τοίχους του δωματίου. Προσανατολίζουμε έτσι τα σώματα ώστε ανά δύο να πέφτουν πάνω σε παράλληλα τοιχώματα, κάθετα σε αυτά, να ανακλώνται από αυτά, και να συγκρούονται ξανά με τα τοιχώματα, και ξανά να ανακλώνται κτλ. Όλες οι ταχύτητές τους έχουν μέτρο $υ$. Το δωμάτιο έχει διαστάσεις $l \times l \times l$. Μπορείτε να βρείτε την πίεση που ασκείται μέσα στο δωμάτιο, εξαιτίας της πρόσκρουσης των ελαστικών σωμάτων στα τοιχώματά του; Σας θυμίζει κάτι το αποτέλεσμά σας; Θυμίζουμε ότι η πίεση είναι το πηλίκο της κάθετης δύναμης που ασκείται σε κάποια επιφάνεια διά το εμβαδό αυτής της επιφάνειας. Αν οι ταχύτητες δεν ήσαν κάθετες στις επιφάνειες, πιστεύετε ότι θα παίρναμε το ίδιο αποτέλεσμα; Μπορείτε να αιτιολογήσετε την απάντησή σας από φυσικής πλευράς;

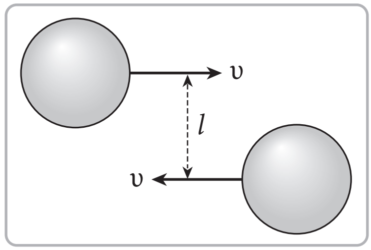
Α1.2. Ελαστική κρούση σε δύο διαστάσεις

Α1.2.1 Ένα σώμα πέφτει με κάποια ταχύτητα υπό γωνία σε ένα λείο αντικείμενο με πολύ μεγαλύτερη μάζα. Με βάση τις αρχές διατήρησης, να αποδείξετε το «νόμο της ανάκλασης», ότι δηλαδή το σώμα που πέφτει απομακρύνεται με ίδια γωνία και με ίδιο μέτρο ταχύτητας.

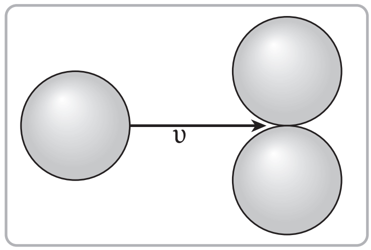
Α1.2.2 Ένα σώμα πέφτει σε ένα άλλο ακίνητο ίσης μάζας και εκτελεί ελαστική κρούση με αυτό. Να αποδείξετε ότι οι ταχύτητες των σωμάτων μετά την κρούση είναι μεταξύ τους κάθετες.

Α1.2.3 Ένα σώμα μάζας m_1 που κινείται με ταχύτητα $υ_1$ προσπίπτει πάνω σε ακίνητο σώμα μάζας m_2 και εκτελεί όχι κεντρική ελαστική κρούση στο επίπεδο με αυτό. Το μόνο που γνωρίζουμε είναι ότι η κατεύθυνση της τελικής ταχύτητας του m_1 σχηματίζει γωνία $45°$ με την αρχική ταχύτητά του. Να γράψετε τις εξισώσεις με τη βοήθεια των οποίων θα βρούμε τις τελικές ταχύτητες των σωμάτων.

*** **A1.2.4** Δύο όμοιες σφαίρες πραγματοποιούν έκκεντρη ελαστική κρούση με ταχύτητες ίδιου μέτρου και αντίθετων κατευθύνσεων. Έστω R η ακτίνα τους και l η απόσταση ανάμεσα στις διευθύνσεις των ταχυτήτων των δύο σφαιρών. Να βρεθούν οι τελικές ταχύτητες των σφαιρών, αν:
α) $l = R\sqrt{3}$, **β)** $l = R$.



A1.2.5 Στο διπλανό σχήμα βλέπουμε μία σφαίρα η οποία πέφτει πάνω σε δύο άλλες ακίνητες. Και οι τρεις σφαίρες είναι όμοιες. Δίνεται η ταχύτητα υ της σφαίρας η οποία βρίσκεται στη μεσοκάθετο της διακέντρου των δύο άλλων σφαιρών. Να βρεθούν οι ταχύτητες των σφαιρών μετά τη σύγκρουση, αν αυτή είναι ελαστική. (Εννοείται ότι τριβές μεταξύ των επιφανειών των σφαιρών δεν υπάρχουν, διότι τότε δε θα ήταν ελαστική η κρούση.)



A1.3. Ανελαστικές κρούσεις, εκρήξεις και άλλες εφαρμογές της διατήρησης της ορμής

A1.3.1 Μία σφαίρα μάζας $100\ \mathrm{g}$ και ταχύτητας $200\ \mathrm{m/s}$ πέφτει πάνω σε ακίνητο ξύλινο στόχο που ζυγίζει $10\ \mathrm{Kg}$ και εξέρχεται από αυτόν με ταχύτητα $50\ \mathrm{m/s}$, ομόρροπη της αρχικής. **α)** Ποιο ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας της σφαίρας έγινε θερμότητα; **β)** Πόση θα ήταν η ταχύτητα της σφαίρας αν η κινητική της ενέργεια μειωνόταν στο 36% της αρχικής της και ποια θα ήταν τότε η ταχύτητα του ξύλινου στόχου; **γ)** Ποιο είναι το μέγιστο ποσό της κινητικής ενέργειας που μπορεί να μετατραπεί σε θερμότητα;

A1.3.2 Δύο σώματα με μάζες $m_1 = 3\ \mathrm{Kg}$ και $m_2 = 3{,}5\ \mathrm{Kg}$ κινούνται με ταχύτητες $\upsilon_1 = 5/3\ \mathrm{m/s}$ και $\upsilon_2 = 24/7\ \mathrm{m/s}$, σε κάθετες μεταξύ τους διευθύνσεις. Κάποια στιγμή συγκρούονται πλαστικά. Ποιο είναι το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος;

5°

ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Στερεό σώμα

Ε1 Κινηματική

Ε1.1. Περιστροφική κίνηση

Ε1.1.1 Ένας δίσκος με ακτίνα $r = 0{,}2\,\text{m}$ περιστρέφεται περί άξονα που διέρχεται από το γεωμετρικό του κέντρο και είναι κάθετος σε αυτόν, με γωνιακή ταχύτητα $\omega_0 = 10\,\text{rad/s}$. Ο δίσκος έχει σταθερή γωνιακή επιβράδυνση μέτρου $a_\gamma = 2\,\text{rad/s}^2$. Να βρεθούν τη χρονική στιγμή 0:

α) Το μέτρο της γωνιακής και της γραμμικής ταχύτητας ενός σημείου της περιφέρειας του δίσκου.

β) Το μέτρο της γωνιακής και της γραμμικής ταχύτητας ενός σημείου που απέχει $r' = 0{,}1\,\text{m}$ από το κέντρο του δίσκου.

γ) Το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης, της κεντρομόλου επιτάχυνσης, της επιτρόχιας επιτάχυνσης και της συνολικής επιτάχυνσης ενός σημείου της περιφέρειας του δίσκου.

δ) Το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης, της κεντρομόλου επιτάχυνσης, της επιτρόχιας επιτάχυνσης και της συνολικής επιτάχυνσης ενός σημείου που απέχει $r' = 0{,}1\,\text{m}$ από το κέντρο του δίσκου.

ε) Ποιες από τις επιταχύνσεις των προηγούμενων ερωτημάτων εξαρτώνται από την απόσταση του σημείου από τον άξονα περιστροφής;

στ) Ποιες από τις επιταχύνσεις των σημείων θα μεταβληθούν με το χρόνο;

Ε1.1.2 Ένα στερεό σώμα έχει αρχική γωνιακή ταχύτητα ω_0 και γωνιακή επιτάχυνση a_γ (ομόρροπη της γωνιακής ταχύτητας). Θεωρούμε ένα σημείο που απέχει απόσταση r από τον άξονα περιστροφής του σώματος. Να γίνουν ποιοτικές γραφικές παραστάσεις συναρτήσει του χρόνου:

α) Της γωνιακής επιτάχυνσης.

β) Της γωνιακής ταχύτητας.

γ) Της γωνίας που διαγράφει η επιβατική ακτίνα του σημείου.

δ) Της ταχύτητας του σημείου.

ε) Της επιτρόχιας επιτάχυνσης του σημείου.

στ) Του μήκους του τόξου που διαγράφει το σημείο.

ζ) Της κεντρομόλου επιτάχυνσης του σημείου.

η) Της συνολικής επιτάχυνσης του σημείου.

θ) Της απόστασης του σημείου από την αρχική του θέση (εννοείται ευθύγραμμη απόσταση, αλλιώς θα ρωτούσαμε για το μήκος του τόξου).

Ε1.1.3 Ένα στερεό σώμα έχει αρχική γωνιακή ταχύτητα ω_0 και γωνιακή επιτάχυνση a_γ (ομόρροπη της γωνιακής ταχύτητας). Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις για τη δεδομένη χρονική στιγμή (0) των παρακάτω μεγεθών, συναρτήσει της απόστασης του σημείου του στερεού σώματος από τον άξονα περιστροφής του:

α) Της γωνιακής ταχύτητας.

β) Της γωνιακής επιτάχυνσης.

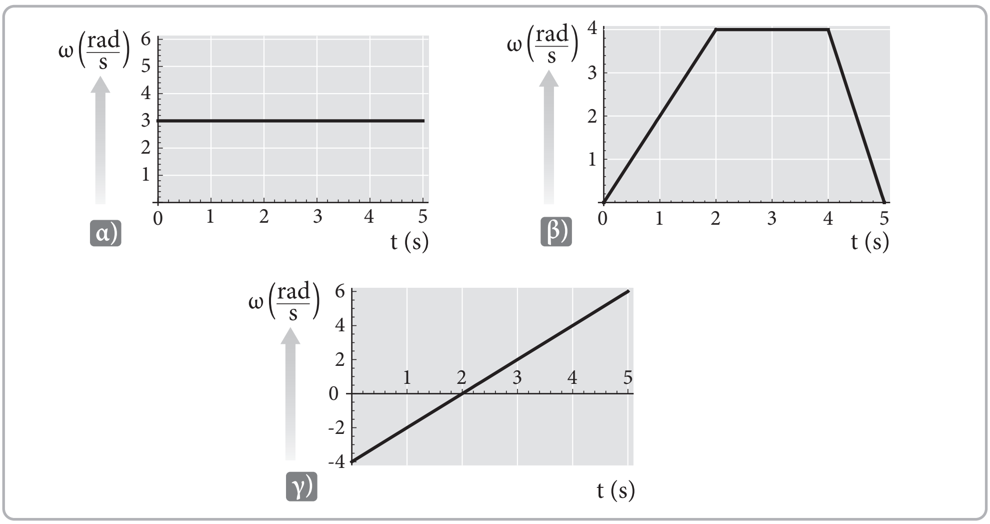
γ) Της ταχύτητας.

δ) Της επιτρόχιας επιτάχυνσης.

ε) Της κεντρομόλου επιτάχυνσης.

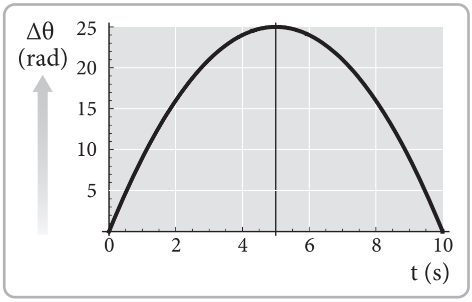
στ) Της συνολικής επιτάχυνσης.

Ε1.1.4 Τα παρακάτω διαγράμματα απεικονίζουν τη γωνιακή ταχύτητα ενός στερεού σώματος συναρτήσει του χρόνου. Να χαρακτηριστούν οι κινήσεις και να γίνουν τα αντίστοιχα διαγράμματα γωνιακής επιτάχυνσης-χρόνου και γωνιακής μετατόπισης-χρόνου.



Ε1.1.5 Θεωρήστε ότι τα παραπάνω διαγράμματα παριστάνουν τη γωνιακή επιτάχυνση συναρτήσει του χρόνου. Όπου δηλαδή γράφει γωνιακή ταχύτητα, αντικαταστήστε τη με τη γωνιακή επιτάχυνση αφήνοντας ίδια τα νούμερα και αλλάζοντας τις μονάδες. Να βρείτε τις γραφικές παραστάσεις της γωνιακής ταχύτητας συναρτήσει του χρόνου, υποθέτοντας ότι η αρχική γωνιακή ταχύτητα είναι 0. Μπορείτε να χαρακτηρίσετε το κάθε είδος κίνησης; (Επιταχυνόμενη με σταθερή επιτάχυνση, επιταχυνόμενη με επιτάχυνση που αυξάνεται ή που μειώνεται, επιβραδυνόμενη, κτλ).

E1.1.6 Στο διπλανό διάγραμμα δίνεται η γωνία που διαγράφει ένα στερεό συναρτήσει του χρόνου. Μπορείτε με βάση το διάγραμμα να βρείτε την αρχική γωνιακή ταχύτητα και τη γωνιακή επιτάχυνση του σώματος;



E1.1.7 Σε ένα στερεό σώμα ισχύει: $\omega_0 = 10\,\text{rad/s}$, $a_\gamma = -2\,\text{rad/s}^2$. Να βρεθούν:

α) Η γωνιακή ταχύτητα και η γωνία που έχει διαγράψει το στερεό σε χρόνο $t = 2\,\text{s}$.

β) Ο χρόνος για να μεγιστοποιηθεί η γωνία που έχει διαγράψει το στερεό και η τιμή της μέγιστης γωνιακής του μετατόπισης.

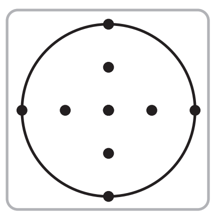
γ) Ο χρόνος ή οι χρόνοι κατά τους οποίους το στερεό έχει διαγράψει μηδενική γωνία και η γωνιακή ταχύτητα που έχει τότε. Ποια η φυσική σημασία κάθε μίας από τις τιμές που βρίσκουμε;

δ) Οι χρονικές στιγμές κατά τις οποίες το στερεό έχει διαγράψει γωνία ίση με $21\,\text{rad}$, και η τιμή που έχει τότε η γωνιακή ταχύτητα. Έχει φυσική σημασία το ότι οι ταχύτητες έχουν ίσα μέτρα;

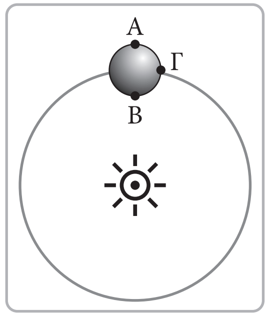
ε) Η χρονική στιγμή κατά την οποία το στερεό έχει διαγράψει γωνία $\Delta\theta = -39\,\text{rad}$. Γιατί έχει προκύψει αρνητικός χρόνος; Θα μπορούσε να έχει κάποιο φυσικό νόημα, ή απλώς τα μαθηματικά κάνουν και κανένα λάθος πότε-πότε;

E1.2. Σύνθετη κίνηση – Κύλιση

E1.2.1 Ένας δίσκος με $R = 1\,\text{m}$ εκτελεί κύλιση με $\upsilon_{c.m.} = 1\,\text{m/s}$ και $a_{c.m.} = 1\,\text{m/s}^2$. Να βρεθεί η ταχύτητα και η επιτάχυνση των σημείων που σημειώνονται στο σχήμα. Όσα σημεία δεν είναι στην περιφέρεια ή στο κέντρο μάζας βρίσκονται σε απόσταση $r = R/2$ από το κέντρο μάζας.



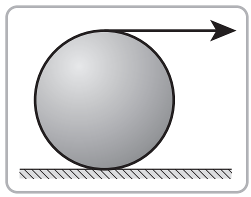
Ε1.2.2 Ένας πλανήτης, όπως αυτός που σημειώνεται στο σχήμα, περιστρέφεται περί τον ήλιο και περί τον εαυτό του. Έστω ότι ολοκληρώνει μια περιστροφή σε ένα χρονικό διάστημα T_y, ενώ η περίοδος περιστροφής περί τον εαυτό του είναι T. Να βρεθεί η ταχύτητα και η επιτάχυνση των σημείων του πλανήτη που σημειώνονται στο σχήμα, αν ο πλανήτης περιστρέφεται γύρω από τον ήλιο και τον εαυτό του:



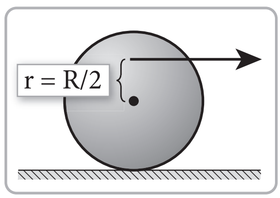
α) Με ίδιες φορές περιστροφής.

β) Με αντίθετες φορές περιστροφής. Δίνονται η ακτίνα του πλανήτη R και η ακτίνα περιστροφής γύρω από τον ήλιο του R_y (από το κέντρο του ήλιου δηλαδή μέχρι το κέντρο του πλανήτη). Θα μπορούσε υπό κάποιες συνθήκες (και ποιες ακριβώς;) η ανωτέρω κίνηση να θεωρηθεί «κύλιση»; Ποια είναι η θεμελιώδης διαφορά ανάμεσα στην κύλιση και σε αυτή το είδος κινήσεως; Θα μπορούσατε να βρείτε την επιτάχυνση του κάθε σημείου;

Ε1.2.3 Σε ένα σώμα που εκτελεί κύλιση ξετυλίγεται ένα σκοινί που περνάει από το ανώτατο σημείο του σώματος, όπως στο σχήμα. Αν ο ρυθμός αύξησης του μήκους του σκοινιού είναι 3m/s, ποια είναι η ταχύτητα του κέντρου μάζας του σώματος; Ποια είναι η ταχύτητα με την οποία μετατοπίζεται το άκρο του σκοινιού στο οποίο εφαρμόζεται η δύναμη;



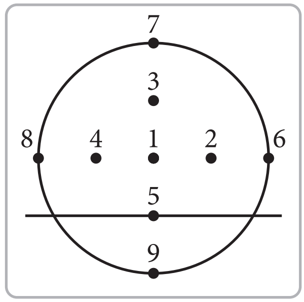
Ε1.2.4 Στο παραπάνω σχήμα ξετυλίγουμε το σχοινί από ένα αυλάκι που βρίσκεται σε απόσταση $r = R/2$ από το κέντρο του κύκλου, όπου R η ακτίνα του παραπάνω σώματος. Αν το σκοινί ξετυλίγεται με ρυθμό 3m/s, ποια είναι η ταχύτητα του κέντρου μάζας του σώματος και ποια η ταχύτητα του σημείου εφαρμογής της δυνάμεως;



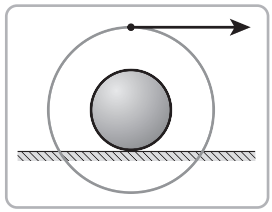
Ε1.2.5 Υποθέστε τώρα ότι το σώμα του σχήματος έχει μεν κυκλικές διατομές παντού, αλλά μοιάζει με τα βαράκια (που ενίοτε τα λέμε και διπλό κύλινδρο ή όπως αλλιώς). Αυτό σημαίνει ότι μπορεί να εκτελεί «κύλιση[19]» αλλά το ακίνητο σημείο δε βρίσκεται σε $r = R$, αλλά στο $r = R/2$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

19. Τώρα αν θα ονομάσουμε κύλιση, «κύλιση», ή κάπως αλλιώς το είδος της κινήσεως ουδόλως ενδιαφέρει όποιον ενδιαφέρει η Φυσική ή οι εξετάσεις ή και τα δύο μαζί.

Θεωρήστε γνωστό το μέτρο της μεταφορικής ταχύτητας του σώματος $\upsilon_{c.m.}$ και το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας $a_{c.m.}$, και υπολογίστε τα μέτρα των ταχυτήτων και των επιταχύνσεων όλων των σημείων που σημειώνονται στο σχήμα. Όσα σημεία δε βρίσκονται στην περιφέρεια του μεγάλου κυλίνδρου ή στο κέντρο μάζας, βρίσκονται στην περιφέρεια του εσωτερικού κυλίνδρου, ακτίνας $R/2$.



E1.2.6 Θεωρήστε ότι ένα σώμα, όπως ένα βαράκι, έχει σκοινί γύρω του, το οποίο ξετυλίγεται από το ανώτατο σημείο, ενώ το βαράκι ακουμπά σε ένα ενδιάμεσο σημείο, όπως στο προηγούμενο πρόβλημα, σε $r = R/2$. Εάν το σκοινί ξετυλίγεται με ρυθμό $3\,\text{m/s}$, ποια είναι η ταχύτητα του κέντρου μάζας, η ταχύτητα με την οποία κινείται το σημείο εφαρμογής της δυνάμεως, και η ταχύτητα του ανώτατου σημείου;



E1.2.7 Για ένα σημείο στην περιφέρεια σώματος που εκτελεί κύλιση, βρείτε τις συντεταγμένες του, δηλαδή βρείτε το x και το y συναρτήσει του χρόνου. Δίνονται η γωνιακή ταχύτητα ω και η ακτίνα R του σώματος.

E2 Ροπή - Ισορροπία

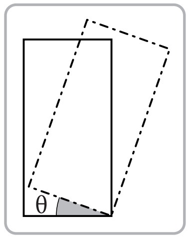
E2.1. Απλές ασκήσεις, χωρίς ανάλυση δυνάμεων

E2.1.1 Έστω μια οριζόντια δοκός με μάζα $M = 80\,\text{Kg}$ και μήκος $L = 4\,\text{m}$. Η δοκός στηρίζεται σε δύο υποστηρίγματα, καθένα από τα οποία απέχει απόσταση $L/4$ από τα άκρα της. Άνθρωπος μάζας $m = 60\,\text{Kg}$ περπατά πάνω στη ράβδο.

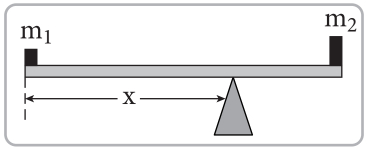
α) Να βρεθούν οι δυνάμεις που ασκούνται από τα υποστηρίγματα Α και Β συναρτήσει της απόστασης x του ανθρώπου από το άκρο της ράβδου που βρίσκεται κοντινότερα στο Α. Δίνεται $g = 10\,\text{m/s}^2$.

β) Πόση θα έπρεπε να είναι η μάζα του ανθρώπου όταν αυτός βρεθεί σε κάποιο άκρο της δοκού, ώστε αυτή να κινδυνεύει να ανατραπεί;

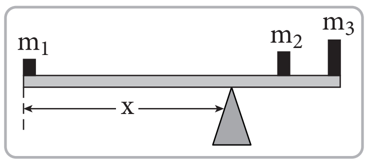
γ) Οι σχέσεις στις οποίες καταλήξατε στο α ερώτημα μοιάζουν να μην είναι συμμετρικές. Δε θα έπρεπε να είναι, εφόσον δεν έχει σημασία από ποιο άκρο μετράμε τις αποστάσεις; Για να πειστείτε ότι είναι συμμετρικές, κάντε τη γραφική παράσταση συναρτήσει της απόστασης και των δύο δυνάμεων από τα υποστηρίγματα, σε κοινό διάγραμμα.



Ε2.1.2 Ποια είναι η μεγαλύτερη γωνία θ στην οποία μπορεί να στραφεί ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, με διαστάσεις της όψης του $15\,\text{cm} \times 30\,\text{cm}$, χωρίς να ανατραπεί;



Ε2.1.3 Ας δούμε τώρα και μια ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα άσκηση, η οποία ουσιαστικά περιγράφει το πώς λειτουργούν οι μοχλοί και πώς μπορούμε με λίγη δύναμη, όπως αυτή που ασκεί το ελαφρύτερο σώμα στη ράβδο, και μια σχετικά ελαφριά αλλά ανθεκτική ράβδο, να μετακινήσουμε μεγαλύτερα βάρη:[20] Στα άκρα μιας αβαρούς ράβδου, μήκους $L = 6\,\text{m}$, τοποθετούμε δύο σημειακά σώματα με μάζες $m_1 = 1\,\text{Kg}$ και $m_2 = 2\,\text{Kg}$. Θέλουμε να τοποθετήσουμε ένα υποστήριγμα κάτω από τη ράβδο, ώστε αυτή να ισορροπήσει. Σε ποια απόσταση x πρέπει να τοποθετήσουμε το υποστήριγμα; Το ίδιο θα απαντούσαμε, αν μας ρωτούσε κανείς από ποιο σημείο θα έπρεπε να κρεμάσουμε τη ράβδο ώστε να ισορροπεί.



Ε2.1.4 Σε μια αβαρή ράβδο μήκους $L = 6\,\text{m}$ τοποθετούμε τρία σώματα με μάζες $m_1 = 1\,\text{Kg}$ στο αριστερό της άκρο, $m_2 = 2\,\text{Kg}$ σε απόσταση $1\,\text{m}$ από το δεξιό της άκρο, και $m_3 = 3\,\text{Kg}$ στο δεξιό της άκρο. Σε ποιο σημείο πρέπει να τοποθετηθεί ένα υποστήριγμα, ώστε να ισορροπήσει η ράβδος; Υπάρχει περίπτωση να υπάρχουν περισσότερα τέτοια σημεία στα οποία να ισορροπεί η ράβδος;

20. Ασκήσεις όπως η παρούσα, και πολλές άλλες, και από το παρόν αρχείο και γενικότερα, είναι: α) Ενδιαφέρουσες. β) Μετρίας δυσκολίας έως εύκολες, άρα διδακτικά κατάλληλες. γ) Συνδεδεμένες με τη φυσική πραγματικότητα πολύ περισσότερο από άλλες, άρα τρις κατάλληλες διδακτικώς. Για ποιο λόγο έχουν τόσο μικρό βάρος και έκταση στην εξεταστική βιβλιογραφία, δεν το γνωρίζουμε, εικασίες μόνο μπορούμε να κάνουμε και να εκφράσουμε τη θλίψη μας που ένα μεγάλο μέρος της παλιάς, κατά την άποψή μας και προσγειωμένης και διδακτικής Φυσικής έχει περιοριστεί έως εξοβελιστεί, εν ονόματι κάποιας (διδακτικής) νεωτερικότητας.

Κεφάλαιο 1 Κρούσεις

Α1. Κρούσεις σελ. 11

Α1.1.1 **α)** Λαμβάνοντας θετική την φορά της υ_1, $\upsilon_1' = -8\ m/s$, $\upsilon_2' = 4\ m/s$.

β) Το έργο που ασκείται στο σώμα m_1 είναι $W_1 = -18\,J$ και το έργο που ασκείται στο σώμα m_2 είναι $W_2 = 18\,J$. Στις ελαστικές κρούσεις τα έργα είναι αντίθετα. Στις πλαστικές και στις εκρήξεις όχι.

γ) $F_1 = -180\,N$, $F_2 = 180\,N$. Το ότι οι δύο δυνάμεις είναι αντίθετες εκφράζει τον 3ο νόμο του Νεύτωνα, και άρα για όλες τις απλές περιπτώσεις με τις οποίες ασχολούμαστε στο σχολείο ισχύει πάντα.[1]

δ) -36% για τη σφαίρα μάζας m_1 και 300% για τη σφαίρα μάζας m_2.

Α1.1.3 $\upsilon_1' = -\upsilon_1 + 2\upsilon_2$, $\upsilon_2' = \upsilon_2$.

Α1.1.4 **α)** $m_1 = m_2$. **β)** $m_1 = \left(3 \pm 2\sqrt{2}\right)m_2$.
γ) $m_1 << m_2$ ή $m_1 >> m_2$.

Α1.1.5 Θα κινηθούν οι τρεις ακίνητες σφαίρες και οι δύο μπροστινές από όσες κινούνται στην ίδια κατεύθυνση με την αρχική.

Α1.1.6 $P = \dfrac{1}{3}\dfrac{Nm\upsilon^2}{l^3}$. Το αποτέλεσμά μας αναπαράγει τον τύπο για την πίεση ιδανικού αερίου με την πυκνότητα $\rho = \dfrac{m_{ολ.}}{V} = \dfrac{Nm}{l^3}$.

Υπάρχει βέβαια μια διαφορά, ότι τότε είχαμε μέση τιμή των τετραγώνων των ταχυτήτων και όχι απλώς ταχύτητα στο τετράγωνο, και δικαιολογημένα, γιατί τα μόρια δεν έχουν ίδιες ταχύτητες όλα. Ωστόσο, αυτό δεν επηρεάζει ουσιαστικά τη συζήτησή μας. Το ίδιο αποτέλεσμα θα παίρνουμε και αν οι ταχύτητες δεν ήσαν κάθετες στις επιφάνειες. Διότι μπορεί το μέτρο του $\Delta p/\Delta t$ εξαιτίας της κρούσης μιας σφαίρας σε μια επιφάνεια να είναι μικρότερο, λόγω της πλάγιας πρόσκρουσης, ωστόσο οι σφαίρες θα προσκρούουν και σε άλλους τοίχους τότε. Οπότε, η μείωση της πίεσης λόγω της πλάγιας πρόσκρουσης μια σφαίρας σε ένα τοίχο, αντισταθμίζεται από μια αντίστοιχη αύξηση λόγω της πρόσκρουσης και άλλων σφαιρών στον ίδιο τοίχο.

Α1.2.3 Έστω ότι ο x-άξονας είναι ο φορέας της ταχύτητας υ_1. Από τη διατήρηση της ορμής στον άξονα αυτό έπεται: $m_1\upsilon_1 = m_1\upsilon_1'συν45° + m_2\upsilon_{2x}$.
Από τη διατήρηση της ορμής στον κάθετο άξονα έπεται: $m_1\upsilon_1'ημ45° = m_2\upsilon_{2y}$.
Από τη διατήρηση της ενέργειας έχουμε:
$\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 + \frac{1}{2}m_2(\upsilon_{2x}^2 + \upsilon_{2y}^2)$.

Α1.2.4 Οι ταχύτητες τελικά έχουν το ίδιο μέτρο με τις αρχικές και σχηματίζουν με αυτές γωνία:
α) $60°$. **β)** $120°$.

Α1.2.5 Για να βοηθηθείτε στην επίλυση της άσκησης, σκεφτείτε ότι απουσία τριβών σημαίνει ότι η δύναμη που ασκείται από τη σφαίρα που πέφτει σε κάποια από τις δύο ακίνητες σφαίρες είναι πάνω στη διάκεντρο αυτών των δύο σφαιρών. Η σφαίρα που έπεσε στις άλλες δύο κινείται με ταχύτητα μέτρου υ/5 και αντίθετης κατεύθυνσης από την αρχική κατεύθυνση κίνησης και οι άλλες δύο σφαίρες κινούνται με ταχύτητες μέτρου $2\sqrt{3}\,\upsilon/5$, σε διευθύνσεις που σχηματίζουν γωνίες $30°$ με τη διεύθυνση κίνησης της προσπίπτουσας σφαίρας.

Α1.3.1 **α)** 93%. **β)** $\upsilon_1' = 120\,m/s$, $\upsilon_2' = 0{,}8\,m/s$.
γ) $Q_{max} \cong 1980\,J$.

Α1.3.2 $\upsilon = 2\,m/s$.

Α1.3.3 $l = 5\,m$.

Α1.3.4 **α)** $\upsilon_2 = 6\,m/s$. **β)** $720\,J$. **γ)** Το έργο της δύναμης που ασκεί το κανόνι στο βλήμα είναι $1008\,J$. Το έργο της δύναμης που ασκεί το βλήμα στο κανόνι είναι $-288\,J$. Το άθροισμα των δύο έργων μας δίνει τη χημική ενέργεια που ελευθερώθηκε από το εκρηκτικό.[2]

---

1. Όχι, δεν ισχύει πάντα ο τρίτος νόμος του Νεύτωνα. Σε πλαίσια μάλιστα Σχετικότητας δεν ισχύει σχεδόν ποτέ. Και κάποια φαινόμενα, σε ένα μεγάλο ποσοστό των οποίων, δεν ισχύει ο τρίτος νόμος του Νεύτωνα είναι τα μαγνητικά. Σε κάποιες περιπτώσεις ισχύει ο τρίτος νόμος μέσα σε μαγνητικό πεδίο, όπως όταν έχουμε παράλληλους, ευθύγραμμους ρευματοφόρους αγωγούς πολύ μεγάλου μήκους ή μόνιμους μαγνήτες. Η ορμή, όμως, παρά τη μη ισχύ του νόμου, καταφέρνει και διατηρείται. Φαίνεται ότι η διατήρηση κάποιων φυσικών μεγεθών είναι πολύ πιο σημαντική από τους νόμους της εκάστοτε θεωρίας, έστω κι αν αυτές οι αρχές διατήρησης εκφράζονται μέσα από τους νόμους των θεωριών.

2. Ούτε είναι απαραίτητο στην πλαστική κρούση ή στην έκρηξη το ένα έργο να είναι θετικό και το άλλο αρνητικό. Μπορεί και τα δύο έργα να είναι θετικά σε μια έκρηξη, όπως θα συνέβαινε αν είχαμε ένα σώμα

Α1.3.5 **α)** $\upsilon_2 = 77/9$ m/s .

β) Ναι, στο συγκεκριμένο πρόβλημα θα μπορούσε. Για να γίνει σαφές, απαντήστε στο επόμενο ερώτημα.

γ) Πάντως το βάρος δεν φταίει που δεν διατηρείται η ορμή στον κατακόρυφο άξονα.

Α1.3.6 Κατά την αρχική διεύθυνση κίνησης έχει μια συνιστώσα ταχύτητας $\upsilon_{2x} = 77/9$ m/s, ενώ σε διεύθυνση κάθετη στην αρχική και προς ανατολάς έχει μια συνιστώσα ταχύτητας $\upsilon_{2y} = 23\sqrt{3}/9$ m/s .

Α1.3.7 **α)** $\upsilon_1 = 25/3$ m/s κατά μέτρο και διεύθυνση που σχηματίζει γωνία θ με $\varepsilon\varphi\theta = 4/3$ με τη διεύθυνση κίνησης του αρχικού σώματος.

β) 1090/3 J .

Κεφάλαιο 2 Ταλαντώσεις

Β1. Κινηματική των ταλαντώσεων σελ. 17

Β1.1.6 **α)** $x = 1\,\text{m}$, $\upsilon = \frac{\sqrt{3}}{4}\pi\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $a = -\frac{\pi^2}{16}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

β) $x = 0$, $\upsilon = \frac{\pi}{2}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $a = 0$.

Β1.1.7 **α)** $x = \sqrt{3}\,\text{m}$, $\upsilon = \frac{\pi}{4}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $a = -\frac{\sqrt{3}\pi^2}{16}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

β) $x = 1\text{m}$, $\upsilon = \frac{\sqrt{3}\pi}{4}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $a = -\frac{\pi^2}{16}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Β1.2.1 $a = -3\ \text{m/s}^2$.

Β1.2.3 $T = 2\pi$ s .

Β1.2.4 $T = 2\pi\text{s}$, $A = 13\text{m}$.

Β1.2.5 $\upsilon = \pm 12$ m/s, $a = -32\ \text{m/s}^2$.

Β1.2.6 $\upsilon = \pm\sqrt{14}$ m/s .

Β1.3.1 $\varphi_0 = \frac{\pi}{3}$rad .

Β1.3.2 $\varphi_0 = \pi$rad .

Β1.3.3 **α)** $\varphi_0 = \pi/2$ rad, **β)** $\varphi_0 = 3\pi/2$ rad .

αρχικά ακίνητο, το οποίο υφίστατο έκρηξη και διεσπάτο σε δύο τμήματα. Μπορεί και τα δύο έργα να είναι αρνητικά, όπως συχνά συμβαίνει σε πλαστικές ή εν γένει ανελαστικές κρούσεις. Ούτε είναι απαραίτητο σε μια έκρηξη τα δύο σώματα να κινούνται τελικά σε αντίθετες κατευθύνσεις, τουλάχιστον σε αυτό το πρόβλημα, με τα νούμερα που επιλέξαμε, τούτο έγινε προφανές –και γι' αυτό τα επιλέξαμε.

Β1.3.4 **α)** $\varphi_0 = \pi/6$ rad, **β)** $\varphi_0 = 5\pi/6$ rad .

Β1.3.5 $\varphi_0 = \pi/2$ rad ή $\varphi_0 = 3\pi/2$ rad .

Β1.3.6 $\varphi_0 = \pi/3$ rad με $x = A\sqrt{3}/2$ ή
$\varphi_0 = 5\pi/3$ rad με $x = -A\sqrt{3}/2$.

Β1.3.7 **α)** $\varphi_0 = \frac{5\pi}{3}$rad . **β)** $\varphi_0 = \frac{2\pi}{3}$rad .

γ) $\varphi_0 = \frac{\pi}{6}$rad . **δ)** $\varphi_0 = \frac{23\pi}{12}$rad .

ε) $\varphi_0 = \frac{5\pi}{12}$rad .

Β1.3.8 **α)** $\varphi_0 = \pi + \varphi_1$ ή $\varphi_0 = \varphi_1 - \pi$,
ώστε να ισχύει $0 \le \varphi_0 < 2\pi$.

β) $\varphi_0 = \frac{\pi}{2} + \varphi_1$ ή $\varphi_0 = \varphi_1 - \frac{3\pi}{2}$.

Β1.3.9 Για να λύσετε την άσκηση, θα πρέπει να προσδιορίσετε σε ποιες περιπτώσεις η ταχύτητα είναι θετική και σε ποιες αρνητική. π rad, π/6 rad, 5π/6 rad, π/2 rad, 3π/2 rad.

Β1.3.10 **α)** $x = 2\eta\mu\left(10\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$.

β) $x = 0{,}4\eta\mu\left(2\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$. **γ)** $x = 2\eta\mu\left(4\pi t + \pi\right)$.

Β1.3.12 $A = 0{,}4\frac{\sqrt{3}}{3}$ m .

Β1.3.13 $A = 0{,}4$ m .

Β1.3.14 $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ rad, $T = 0{,}2$ s .

Β1.4.1 **α)** kT . **β)** $kT + \frac{T}{2}$. **γ)** $kT + \frac{T}{4}$.

δ) $kT + \frac{3T}{4}$, $k = 0,1,2,\ldots$ σε όλες τις περιπτώσεις.

Β1.4.2 **α)** kT . **β)** $kT + \frac{T}{2}$.

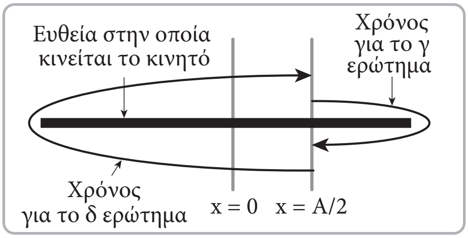
γ) $kT + \frac{T}{4}$ ή $kT + \frac{3T}{4}$, $k = 0,1,2,\ldots$ σε όλες τις περιπτώσεις.

Β1.4.3 $t_1 = \frac{T}{12}$, $t_2 = \frac{5T}{12}$, $t_3 = \frac{13T}{12}$, $t_4 = \frac{17T}{12}$.

Β1.4.4 **α)** $t = \left(2k + \frac{1}{6}\right)\frac{T}{2}$, $k = 0,1,2,\ldots$.

β) $t = \left(2k + \frac{5}{6}\right)\frac{T}{2}$, $k = 0,1,2,\ldots$. **γ)** $\frac{T}{3}$.

δ) $\frac{2T}{3}$. Το πρόχειρο σχήμα είναι το παρακάτω:



Προφανώς και δεν έχει καμιά σημασία αν έχει ή όχι αρχική φάση το κινητό[3].

Β1.4.5 **α)** $t=\left(2k-\frac{1}{3}\right)\frac{T}{2}$, $k=1,2,\ldots$

β) $t=\left(2k+\frac{2}{3}\right)\frac{T}{2}$, $k=0,1,2,\ldots$

γ) $t=\left(2k+\frac{1}{6}\right)\frac{T}{2}$, $k=0,1,2,\ldots$

δ) $t=\left(2k+\frac{7}{6}\right)\frac{T}{2}$, $k=0,1,2,\ldots$

ε) $t=\left(2k-\frac{1}{6}\right)\frac{T}{2}$, $k=1,2,\ldots$

στ) $t=\left(2k+\frac{1}{2}\right)\frac{T}{2}$, $k=0,1,2,\ldots$

Β1.4.6 $t=4\left(2k+\frac{1}{6}\right)$ (S.I.), $k=0,1,2,\ldots$.

Β1.5.1 $T=0{,}1\ s$, $f=10\ Hz$, $\omega=20\pi\ \frac{rad}{s}$.

Β1.5.2 $x=\eta\mu 2\pi t$, $\upsilon=2\pi\sigma\upsilon\nu 2\pi t$, $a=-4\pi^2\eta\mu 2\pi t$ (S.I.).

Β1.5.3 Είναι μια δύσκολη άσκηση. Από το $x=A/2$ περνάει μια φορά, είτε με θετική είτε με αρνητική ταχύτητα, και μετά φτάνει στο $x=A$. Αν κινείται με θετική ταχύτητα, τότε το k είναι ίδιο και για $x=A/2$ και για $x=A$. Αν κινείται με αρνητική ταχύτητα, τότε θέτουμε k για το $x=A/2$ αλλά $k+1$ για το $x=A$, διότι έχουμε μπει στην επόμενη περίοδο. $T=60\ s$ ή $T=12\ s$. Ως συνήθως η αρχική φάση δεν παίζει κανένα ρόλο. Αυτό έλειπε να εξαρτώνται τα βασικά χαρακτηριστικά της ταλάντωσης από τη χρονική στιγμή στην οποία εμείς πατήσαμε το χρονόμετρο για να χρονομετρήσουμε την κίνηση του σώματος. Ουσιαστικά η αρχική φάση αυτό μας δείχνει: Το αν ξεχάσαμε να ενεργοποιήσουμε το χρονόμετρο τη χρονική στιγμή που το σώμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του κινούμενο με θετική ταχύτητα, και το ενεργοποιήσαμε κάποια στιγμή αργότερα. Όταν βέβαια έχουμε δύο ή περισσότερες διαφορετικές ταλαντώσεις, τότε ασφαλώς παίζει ρόλο η αρχική φάση της κάθε μίας ταλάντωσης.

3. Γεγονός που για μια ακόμα φορά αποδεικνύει ότι η αρχική φάση δεν είναι και το χρησιμότερο και σημαντικότερο μέγεθος στη Φυσική…

Β1.5.4 $T=60\ s$ ή $T=12\ s$.

Β1.5.5 $T=30\ s$ ή $T=15\ s$.

Β1.5.6 Και αυτή είναι μια δύσκολη άσκηση. Πρέπει να προσέξουμε με τα k τι θα κάνουμε, και κυρίως να καταλάβουμε με ένα πρόχειρο σχήμα γιατί το κάνουμε. $T=30\ s$ ή $T=15\ s$.

Β1.5.7 $x=0{,}1\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}t\right)$. (S.I.).

Β1.5.8 $x=0{,}4\eta\mu\left(\frac{2\pi}{9}t+\frac{\pi}{6}\right)$ (S.I.).

Β1.5.9 $T=12\ s$.

Β1.5.10 $A=0{,}5m$

α) $\varphi_0=0$, $T=\frac{4t_1}{1+4k}$, $k=0,1,2\ldots$

β) $\varphi_0=\pi\ rad$, $T=\frac{4t_1}{4k-1}$, $k=1,2,3\ldots$.

γ) $\varphi_0=\frac{\pi}{6}\ rad$, $T=\frac{6t_1}{1+6k}$, $k=0,1,2\ldots$

δ) $\varphi_0=\frac{5\pi}{6}\ rad$, $T=\frac{6t_1}{6k-1}$, $k=1,2\ldots$

Β1.6.1 **α)** $2\ m$.

β) $t=k\pi+\frac{\pi}{4}$ (S.I.). Τις ταχύτητες με αντικατάσταση στον τύπο που τις δίνει.

Β1.6.2 **α)** Όταν $t=k\pi$ ή $t=\frac{2k+1}{8}\pi$.

β) Κάθε τρεις μισές περιόδους του πρώτου κινητού που είναι ίσες με πέντε μισές περιόδους του δεύτερου.

Β2. Η δύναμη και η ενέργεια στην α.α.τ. σελ. 26

Β2.1.1 $m'=15m$. **Β2.1.2** 21%.

Β2.1.3 $T=0{,}2\pi\ s$. **Β2.1.4** $T=0{,}4\pi\ s$.

Β2.1.5 **α)** $T=\frac{2\pi}{3}$ s. **β)** $T=\frac{\pi}{3}$ s, αν αφαιρεθεί η F_2.

Β2.2.1 $T=\frac{\pi}{5}\ s$. **Β2.2.2** $T=\frac{\pi}{5}\ s$. $\Delta l=0{,}1\ m$.

Β2.2.3 $T=\frac{\pi}{5}\ s$.