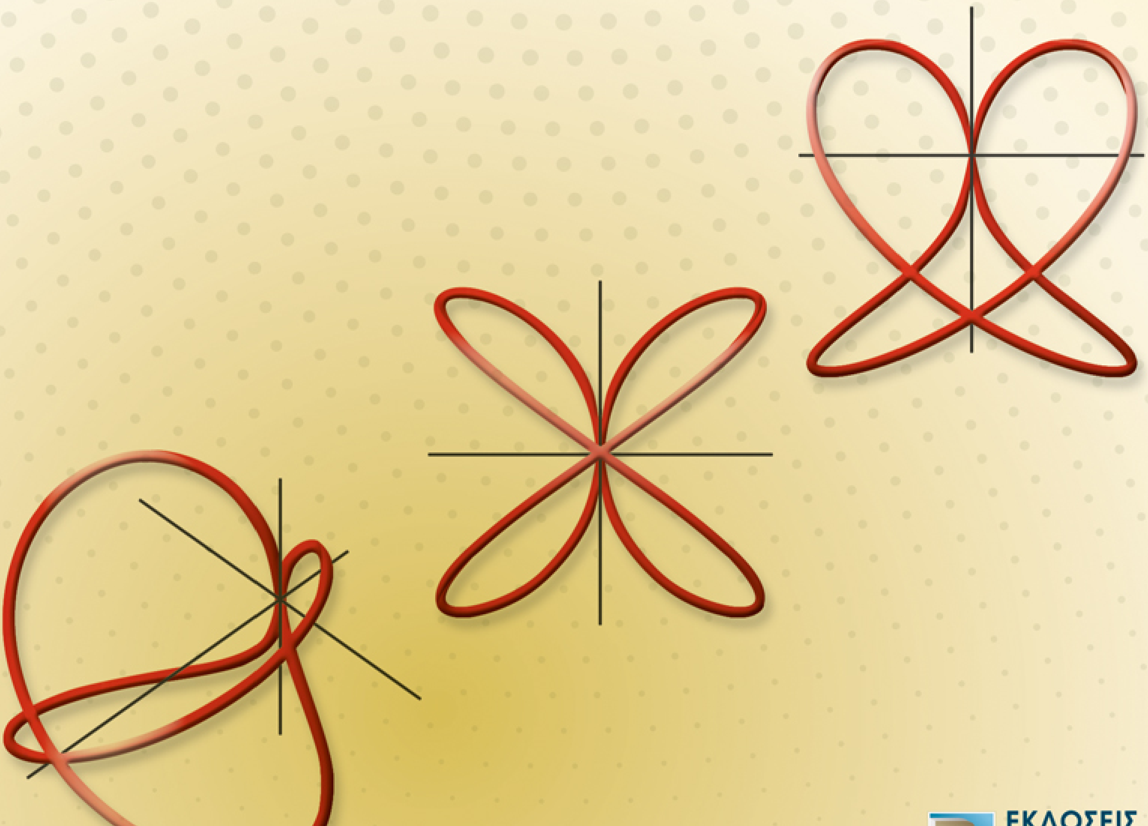
Δημήτριος Μ. Πουλάκης
Καθηγητής Τμήματος Μαθηματικών ΑΠΘ

Αλγεβρική Γεωμετρία



ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

Για επικοινωνία με το συγγραφέα
poulakis@math.auth.gr

ISBN 978-960-456-502-3

Φωτοστοιχειοθεσία
Εκτύπωση
Βιβλιοδεσία

Π. ΖΗΤΗ & Σια ΙΚΕ
18ο χλμ Θεσσαλονίκης - Περαίας
Τ.Θ. 4171 • Περαία Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19
Τηλ.: 23920 72222 - Fax: 23920 72229 • e-mail: info@ziti.gr

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
www.ziti.gr

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ:
Αρμενοπούλου 27 - 546 35 Θεσσαλονίκη • Τηλ.: 2310 203720 • Fax 2310 211305
e-mail: sales@ziti.gr

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ:
Χαριλάου Τρικούπη 22 - Τ.Κ. 106 79, Αθήνα • Τηλ.-Fax: 210 3816650
e-mail: athina@ziti.gr

ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ: www.ziti.gr

Περιεχόμενα

Πρόλογος

Η Αλγεβρική Γεωμετρία είναι σήμερα ένας από τους κεντρικούς κλάδους των Μαθηματικών με μεγάλο θεωρητικό ενδιαφέρον αλλά και πολλές σημαντικές εφαρμογές στη τεχνολογία. Ειδικότερα, η χρήση αλγεβρογεωμετρικών εργαλείων στη κρυπτογραφία, στους κώδικες διορθωτές λαθών, στη ρομποτικής, στο σχεδιασμό γραφικών για ΗΥ, κλπ., έδωσε μεγάλη ώθηση σ΄ αυτούς τους τομείς.

Αντικείμενα της Αλγεβρικής Γεωμετρίας συναντάμε στα Αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά. Αλγεβρικές Καμπύλες χρησιμοποιήθηκαν για την αντιμετώπιση διαφόρων μαθηματικών προβλημάτων. Για παράδειγμα, ας αναφέρουμε τον ''κισσοειδή'', κυβική καμπύλη που χρησιμοποιήθηκε από τον Διοκλή για την λύση του προβλήματος διπλασιασμού του κύβου, και τον ''κογχοειδή'', καμπύλη τετάρτου βαθμού, με την βοήθεια της οποίας ο Νικομήδης έλυσε το πρόβλημα της τριχοτόμησης της γωνίας. Στο σύγγραμμά μας ''Εισαγωγή στη Γεωμετρία Αλγεβρικών Καμπυλών'' [16] παρουσιάσαμε βασικά θέματα της θεωρίας των επιπέδων αλγεβρικών καμπυλών επί του σώματος των μιγαδικών αριθμών.

Το παρόν σύγγραμμα έχει ως βάση την διδασκαλία ενός εξαμηνιαίου μαθήματος με τίτλο ''Αλγεβρική Γεωμετρία'' στο Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών του Τμήματος Μαθηματικών του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης. Παρουσιάζει βασικές έννοιες και αποτελέσματα της θεωρίας των Αλγεβρικών Πολλαπλοτήτων αποτελώντας έτσι μία εισαγωγή στο αντικείμενο αυτό.

Η ύλη του συγγράμματος διαιρείται σε οκτώ κεφάλαια. Στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται μία εισαγωγή στους γενικούς τοπολογικούς χώρους και δίνονται όλες οι απαραίτητες έννοιες για την μελέτη των αλγεβρικών πολλαπλοτήτων. Το δεύτερο κεφάλαιο είναι αφιερωμένο στα αλγεβρικά σύνολα, στις θεμελιώδεις πολλαπλότητες και στο θεώρημα των ριζών του Hilbert. Στο τρίτο κεφάλαιο εισάγονται οι προβολικοί χώροι, τα προβολικά αλγεβρικά σύνολα και πολλαπλότητες και μελετάται η σχέση των θεμελιωδών πολλαπλοτήτων με τις αντίστοιχες προβολικές. Οι κανονικές συναρτήσεις επί των πολλαπλοτήτων, οι μορφισμοί πολλαπλοτήτων καθώς και οι ρητές απεικονίσεις είναι το αντικείμενο του τετάρτου κεφαλαίου. Στο πέμπτο κεφάλαιο μελετώνται τα γινόμενα πολλαπλοτήτων και ως εφαρμογή η εικόνα μίας προβολικής πολλαπλότας από ένα μορφισμό. Το έκτο κεφάλαιο διαπραγματεύεται την έννοια της διάστασης μίας πολλαπλότητας και την σχέση της με τους μορφισμούς πολλαπλοτήτων. Στο έβδομο κεφάλαιο εισάγονται και μελετώνται οι έννοιες του εφαπτομένου χώρου σ΄ ένα σημείο μίας πολλαπλότητας καθώς και των ομαλών και ανώμαλων σημείων. Επίσης αποδεικνύεται ότι κάθε καμπύλη είναι αμφιρητή με μία ομαλή. Τέλος, στο τελευταίο κεφάλαιο δίνονται μερικά θέματα προς μελέτη.

Ιανουάριος 2018 Δημήτριος Πουλάκης

Κεφάλαιο 1

Τοπολογικοί Χώροι

Σ' αυτό το κεφάλαιο γίνεται μία εισαγωγή στους τοπολογικούς χώρους και παρουσιάζονται βασικές ιδιότητές τους. Επιπλέον, εισάγονται οι έννοιες του αναγώγου συνόλου και του Νοθεριανού τοπολογικού χώρου οι οποίες θα χρησιμοποιηθούν για την μελέτη των αλγεβρικών πολλαπλοτήτων.

1.1 Ορισμοί - Παραδείγματα

Ας είναι E ένα μη κενό σύνολο και $\mathcal{T}$ μία οικογένεια υποσυνόλων του.

Ορισμός 1.1. Η οικογένεια $\mathcal{T}$ καλείται *τοπολογική δομή* ή πιό απλά *τοπολογία* επί του E, αν ισχύουν τα εξής:
(T1) Τα σύνολα $\emptyset$ και E ανήκουν στην οικογένεια $\mathcal{T}$.
(T2) Η τομή πεπερασμένου πλήθος συνόλων της $\mathcal{T}$ ανήκει στην $\mathcal{T}$.
(T3) Η ένωση μίας οικογένειας υποσυνόλων της $\mathcal{T}$ ανήκει στην $\mathcal{T}$.
Το ζεύγος $(E, \mathcal{T})$ καλείται *τοπολογικός χώρος* και τα σύνολα της $\mathcal{T}$ *ανοικτά σύνολα* του χώρου $(E, \mathcal{T})$. Επίσης, τα στοιχεία του E καλούνται *σημεία.*

Σε περιπτώσεις όπου η τοπολογία $\mathcal{T}$ υπονοείται, θα αναφερόμαστε πιό απλά στον τοπολογικό χώρο E παραλείποντας το σύνολο $\mathcal{T}$.

Παράδειγμα 1.1. Ας είναι E μη κενό σύνολο. Το σύνολο $\{\emptyset, E\}$ είναι μία τοπολογική δομή επί του E η οποία καλείται *τετριμμένη.*

Παράδειγμα 1.2. Ας είναι E μη κενό σύνολο και $\mathcal{P}(E)$ το δυναμοσύνολό του. Το σύνολο $\mathcal{P}(E)$ είναι μία τοπολογική δομή επί του E η οποία καλείται *διακριτή.* Το σύνολο E εφοδιασμένο με αυτή την τοπολογία ονομάζεται *διακριτός χώρος.*

Παράδειγμα 1.3. Ας είναι $E = \{1, 2, 3, 4\}$. Το σύνολο

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}, E\}$$

είναι μία τοπολογία επί του E.

Παράδειγμα 1.4. Ας είναι E μη κενό σύνολο. Θα δείξουμε ότι η οικογένεια συνόλων
$$\mathcal{T} = \{A \subseteq E / \, |A^c| < \infty\} \cup \{\emptyset\}$$
είναι μία τοπολογία επί του E. Πράγματι, τα σύνολα E και $\emptyset$ ανήκουν προφανώς στην $\mathcal{T}$. Αν $U_1, \dots, U_k \in \mathcal{T}$, τότε τα σύνολα $U_1^c, \dots, U_k^c$ είναι πεπερασμένα και επομένως το σύνολο

$$(U_1 \cap \cdots \cap U_k)^c = U_1^c \cup \cdots \cup U_k^c$$

είναι επίσης πεπερασμένο. Άρα $U_1 \cap \cdots \cap U_k \in \mathcal{T}$. Ας είναι $(U_i)_{i \in I}$ μία οικογένεια συνόλων της $\mathcal{T}$. Τότε, τα σύνολα U_i^c, $i \in I$, είναι πεπερασμένα και επομένως το σύνολο

$$\left(\bigcup_{i \in I} U_i \right)^c = \bigcap_{i \in I} U_i^c$$

είναι επίσης πεπερασμένο. Συνεπώς, έχουμε $\cup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$. Άρα, η οικογένεια $\mathcal{T}$ είναι μία τοπολογία επί του E.

Παράδειγμα 1.5. Ας είναι $(E_i, \mathcal{T}_i)$ $(i = 1, \dots, k)$ τοπολογικοί χώροι. Θέτουμε $E = E_1 \times \cdots \times E_k$ και θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{B}$ που αποτελείται από τα σύνολα της μορφής $U_1 \times \cdots \times U_k$, όπου $U_i \in \mathcal{T}_i$ $(i = 1, \dots, k)$. Θα δείξουμε ότι το σύνολο

$$\mathcal{T} = \{\cup_{i \in I} A_i / \ A_i \in \mathcal{B}, \ i \in I\}$$

είναι μία τοπολογία επί του E. Πράγματι, τα αξιώματα (T1) και (T3) προφανώς ισχύουν. Θα δείξουμε ότι ισχύει και το (T2). Αν $U, V \in \mathcal{B}$, τότε έχουμε $U = U_1 \times \cdots \times U_k$ και $V = V_1 \times \cdots \times V_k$, με $U_i, V_i \in \mathcal{T}_i$ $(i = 1, \dots, k)$. Έτσι, παίρνουμε:
$$U \cap V = (U_1 \cap V_1) \times \cdots \times (U_k \cap V_k),$$
με $U_i \cap V_i \in \mathcal{T}_i$ $(i = 1, \dots, k)$, και επομένως $U \cap V \in \mathcal{B}$. Ας είναι $A, B \in \mathcal{T}$. Τότε $A = \cup_{i \in I} A_i$ και $B = \cup_{j \in J} B_j$, με $A_i, B_j \in \mathcal{B}$ για κάθε $(i, j) \in I \times J$. Έτσι, έχουμε:

$$A \cap B = \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \bigcap \left(\bigcup_{j \in J} B_i \right) = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} A_i \cap B_j,$$

με $A_i \cap B_j \in \mathcal{B}$ για κάθε $(i, j) \in I \times J$, και επομένως $A \cap B \in \mathcal{T}$. Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας επαγωγή μπορούμε να δείξουμε ότι η τομή πεπερασμένου πλήθος συνόλων της $\mathcal{T}$ ανήκει στην $\mathcal{T}$.

Η τοπολογία $\mathcal{T}$ καλείται *γινόμενο* των $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_k$ και ο τοπολογικός χώρος $(E, \mathcal{T})$ *γινόμενο* των $(E_i, \mathcal{T}_i)$ $(i = 1, \dots, k)$.

Ας είναι $(E, \mathcal{T})$ ένας τοπολογικός χώρος και S ένα μη κενό υποσύνολό του. Θα δείξουμε ότι η συλλογή

$$\mathcal{T}_S = \{X \cap S / \ X \in \mathcal{T}\}$$

αποτελεί μία τοπολογία επί του S. Ας είναι $(A_i)_{i \in I}$ μία οικογένεια συνόλων της $\mathcal{T}_S$. Τότε υπάρχει μία οικογένεια συνόλων $(X_i)_{i \in I}$ της $\mathcal{T}$ με $A_i = S \cap X_i$, $i \in I$. Καθώς το σύνολο $\cup_{i \in I} X_i$ είναι ανοικτό, η ένωση

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (S \cap X_i) = S \cap (\bigcup_{i \in I} X_i)$$

ανήκει στο $\mathcal{T}_S$. Αν το σύνολο I είναι πεπερασμένο, τότε το σύνολο $\cap_{i \in I} X_i$ είναι ανοικτό και επομένως η τομή

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} (S \cap X_i) = S \cap (\bigcap_{i \in I} X_i)$$

ανήκει στο $\mathcal{T}_S$. Τέλος, τα σύνολα $\emptyset$ και $S = S \cap E$ ανήκουν στο $\mathcal{T}_S$. Άρα, η συλλογή $\mathcal{T}_S$ αποτελεί μία τοπολογία επί του S.

Ορισμός 1.2. Η τοπολογία $\mathcal{T}_S$ του συνόλου S καλείται *σχετική τοπολογία του S ως προς την $\mathcal{T}$* και ο τοπολογικός χώρος $(S, \mathcal{T}_S)$ *υποχώρος* του $(E, \mathcal{T})$.

Ένα σύνολο S είναι ανοικτό μέσα στο E, αν και μόνον αν, κάθε ανοικτό σύνολο του χώρου S είναι και ανοικτό μέσα στο E. Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι $S \in \mathcal{T}$. Τότε, για κάθε ανοικτό σύνολο A μέσα στο S υπάρχει $U \in \mathcal{T}$ με $A = S \cap U$ και, καθώς $S \in \mathcal{T}$, έχουμε $A \in \mathcal{T}$. Αντιστρόφως, ας υποθέσουμε ότι κάθε ανοικτό σύνολο του χώρου S είναι και ανοικτό μέσα στο E. Το σύνολο S είναι ανοικτό μέσα στο S. Συνεπώς, $S \in \mathcal{T}$.

Στη συνέχεια εισάγουμε μία σημαντική οικογένεια τοπολογικών χώρων.

Ορισμός 1.3. Μία απεικόνιση $d : E \times E \to \mathbb{R}$ καλείται *μετρική* αν έχει τις εξής ιδιότητες:
(M1) Για κάθε $x, y \in E$ έχουμε $d(x, y) \geq 0$ και $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
(M2) Για κάθε $x, y \in E$ έχουμε $d(x, y) = d(y, x)$.
(M3) Για κάθε $x, y, z \in E$ έχουμε $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.
Το ζεύγος (E, d) καλείται *μετρικός χώρος*.

Ας είναι (E, d) ένας μετρικός χώρος.

Ορισμός 1.4. Αν $x \in E$ και r είναι θετικός ακέραιος, τότε καλούμε *σφαιρική περιοχή κέντρου x και ακτίνας r* το σύνολο

$$B(x, r) = \{y \in E / \ d(y, x) < r\}.$$

Θεωρούμε την οικογένεια υποσυνόλων $\mathcal{T}_d$ του E που αποτελείται από το $\emptyset$ και τα σύνολα A που είναι τέτοια ώστε για κάθε $x \in A$ υπάρχει $r > 0$ έτσι, ώστε $B(x, r) \subseteq A$.

Πρόταση 1.1. *Η οικογένεια $\mathcal{T}_d$ είναι μία τοπολογία επί του E η οποία περιέχει τις σφαιρικές περιοχές.*

Απόδειξη. Τα σύνολα $\emptyset$ και E ανήκουν προφανώς στην οικογένεια $\mathcal{T}_d$. Ας υποθέσουμε ότι $U_i \in \mathcal{T}_d$, $i \in I$. Αν $x \in \cup_{i\in I} U_i$, τότε υπάρχει $j \in I$ με $x \in U_j$. Επομένως, υπάρχει $r > 0$ έτσι, ώστε $B(x,r) \subseteq U_j$ και κατά συνέπεια $B(x,r) \subseteq \cup_{i\in I} U_i$. Άρα, έχουμε $\cup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}_d$. Ας είναι $U_1, \ldots, U_k \in \mathcal{T}_d$. Αν $x \in U_1 \cap \cdots \cap U_k$, τότε $x \in U_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ και επομένως υπάρχει $r_i > 0$ έτσι, ώστε $B(x, r_i) \subseteq U_i$. Θέτουμε $r = \min\{r_1, \ldots, r_k\}$. Έτσι, έχουμε $B(x,r) \subseteq U_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ και κατά συνέπεια $B(x,r) \subseteq U_1 \cap \cdots \cap U_k$. Επομένως, ισχύει $U_1 \cap \cdots \cap U_k \in \mathcal{T}_d$. Άρα, η οικογένεια $\mathcal{T}_d$ είναι μία τοπολογία επί του E.

Ας θεωρήσουμε στη συνέχεια την σφαιρική περιοχή $B(x,r)$. Θα δείξουμε ότι $B(x,r) \in \mathcal{T}_d$. Ας είναι $y \in B(x,r)$. Θέτουμε $r_1 = r - d(x,y)$. Τότε, $r_1 > 0$ και για κάθε $z \in B(y, r_1)$ έχουμε:

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) < d(x,y) + r_1 = r.$$

Επομένως, ισχύει $z \in B(x,r)$ και κατά συνέπεια $B(y, r_1) \subseteq B(x,r)$. Άρα $B(x,r) \in \mathcal{T}_d$. □

Παράδειγμα 1.6. Θεωρούμε τον χώρο $\mathbb{R}^n$. Για κάθε ζεύγος στοιχείων του, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ και $y = (y_1, \ldots, y_n)$, θέτουμε:

$$e(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

Η αντιστοιχία $(x,y) \mapsto e(x,y)$ ορίζει μία απεικόνιση $e : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ η οποία είναι μία μετρική επί του $\mathbb{R}^n$. Πράγματι, τα αξιώματα (M1) και (M2) επαληθεύονται εύκολα. Για το (M3) θα χρειαστούμε την παρακάτω κλασική ανισότητα των Cauchy-Schwarz, σύμφωνα με την οποία, για κάθε $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \right)^{1/2}.$$

Για την απόδειξή της, θέτουμε $B = \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i|$, $A = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$, $C = \sum_{i=1}^{n} y_i^2$ και θεωρούμε την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(z) = Az^2 + 2Bz + C = (z|x_1| + |y_1|)^2 + \cdots + (z|x_n| + |y_n|)^2.$$

Αν $A = 0$, τότε $x_1 = \ldots = x_n = 0$ και επομένως η ανισότητα ισχύει. Ας υποθέσουμε ότι $A > 0$. Καθώς ισχύει $f(z) \geq 0$ για κάθε $z \in \mathbb{R}$, έχουμε $(2B)^2 - 4AC \leq 0$, απ' όπου προκύπτει η ζητουμένη ανισότητα.

Ας είναι τώρα $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ και $z = (z_1, \ldots, z_n)$ τρία στοιχεία του $\mathbb{R}^n$. Τότε, έχουμε:

$$\begin{aligned} e(x,y)^2 &= \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^{n}(|x_i - z_i| + |z_i - y_i|)^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^{n}|x_i - z_i|^2 + \sum_{i=1}^{n}|z_i - y_i|^2 + 2\sum_{i=1}^{n}|x_i - z_i||z_i - y_i|. \end{aligned}$$

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας την ανισότητα των Cauchy-Schwarz, παίρνουμε:

$$e(x,y)^2 \leq e(x,z)^2 + e(y,z)^2 + 2e(x,z)e(y,z) = (e(x,z) + e(y,z))^2,$$

απ΄ όπου προκύπτει το αξίωμα (M3):

$$e(x,y) \leq e(x,z) + e(y,z).$$

Το σύνολο $\mathbb{R}^n$ εφοδιασμένο με την παραπάνω μετρική ονομάζεται *Ευκλείδειος χώρος διάστασης* n.

Παράδειγμα 1.7. Ας είναι E ένα μη κενό σύνολο. Θεωρούμε την απεικόνιση $\rho : E \times E \to \{0,1\}$ με $\rho(x,y) = 1$ αν $x \neq y$ και $\rho(x,y) = 0$, διαφορετικά. Επαληθεύουμε εύκολα ότι η ρ είναι μία μετρική επί του E. Επίσης, παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in E$ έχουμε $B(x,1) = \{x\}$. Άρα, τα μονοσύνολα του E είναι ανοικτά σύνολα και κατά συνέπεια η τοπολογία του E που ορίζεται από την ρ είναι η διακριτή τοπολογία.

Παράδειγμα 1.8. Ας είναι $a, b \in \mathbb{R}$. Τα ανοικτά διαστήματα $]-\infty, a[$, $]a, b[$ και $]a, \infty[$ είναι ανοικτά σύνολα του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}$.

Παρατήρηση 1.1. Η τομή μίας άπειρης οικογένειας ανοικτών συνόλων δεν είναι πάντα ανοικτό σύνολο. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε τον χώρο $\mathbb{R}$ και την οικογένεια ανοικτών συνόλων του που αποτελείται από τα ανοικτά διαστήματα,

$$\left]-\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1}\right[, \ n \in \mathbb{N}.$$

Τότε, έχουμε:

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left]-\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1}\right[= \{0\}$$

και το μονοσύνολο $\{0\}$ δεν είναι ανοικτό.

1.2 Περιοχές

Ας είναι $(E, \mathcal{T})$ ένας τοπολογικός χώρος.

Ορισμός 1.5. Καλούμε *περιοχή* ενός σημείου $x \in E$ κάθε σύνολο $V \subseteq E$ το οποίο περιέχει ένα ανοικτό σύνολο U με $x \in U$. Μία περιοχή του x καλείται *ανοικτή* αν είναι ανοικτό σύνολο.

Πρόταση 1.2. *Ας είναι $(S, \mathcal{T}_S)$ ένας υποχώρος του E και $x \in S$. Τότε, κάθε περιοχή του x μέσα στο S είναι της μορφής $S \cap V$, όπου V είναι περιοχή του x μέσα στο E.*

Απόδειξη. Ας είναι V' μία περιοχή του x μέσα στο S. Τότε, υπάρχει $U' \in \mathcal{T}_S$ τέτοιο, ώστε $x \in U'$ και $U' \subseteq V'$. Επιπλέον, υπάρχει $U \in \mathcal{T}$ με $U' = U \cap S$. Θέτουμε $V = U \cup V'$. Καθώς $x \in U$ και $U \subseteq V$, το σύνολο V είναι μία περιοχή του x μέσα στο E. Επίσης, ισχύει $V \cap S = V'$. □

Πρόταση 1.3. *Ας είναι A ένα υποσύνολο του E. Το A είναι ανοικτό, αν και μόνον αν, είναι περιοχή κάθε σημείου του.*

Απόδειξη. Αν το σύνολο A είναι ανοικτό, τότε προφανώς είναι περιοχή κάθε σημείου του. Αντιστρόφως, ας υποθέσουμε ότι το A είναι περιοχή κάθε σημείου του. Τότε, για κάθε $x \in A$ υπάρχει ανοικτό σύνολο U_x με $x \in U_x$ και $U_x \subseteq A$. Τότε, έχουμε $A = \cup_{x \in A} U_x$, και καθώς τα σύνολα U_x είναι ανοικτά, παίρνουμε ότι το A είναι ανοικτό. □

Ας είναι $x \in E$ και $\mathcal{V}(x)$ το σύνολο των περιοχών του x. Τότε, έχουμε τις εξής ιδιότητες:

(Π1) Το σύνολο $\mathcal{V}(x)$ είναι μη κενό και $x \in V$ για κάθε $V \in \mathcal{V}(x)$.
(Π2) Αν $V_1, \ldots, V_k \in \mathcal{V}(x)$, τότε $V_1 \cap \cdots \cap V_k \in \mathcal{V}(x)$.
(Π3) Αν $A \subseteq E$ και υπάρχει $V \in \mathcal{V}(x)$ με $V \subseteq A$, τότε $A \in \mathcal{V}(x)$.
(Π4) Αν $V \in \mathcal{V}(x)$, τότε υπάρχει $A \in \mathcal{V}(x)$ τέτοιο, ώστε για κάθε $y \in A$ να ισχύει $V \in \mathcal{V}(y)$.

Οι ιδιότητες (Π1), (Π2) και (Π3) είναι άμεσες συνέπειες των Ορισμών 1.1 και 1.2. Θα αποδείξουμε την (Π4). Καθώς $V \in \mathcal{V}(x)$, υπάρχει ανοικτό σύνολο A με $A \subseteq V$. Τότε, το σύνολο V είναι περιοχή κάθε σημείου $y \in A$.

Σύμφωνα με την παρακάτω πρόταση είναι δυνατόν να οριστεί μία τοπολογία επί ενός συνόλου X αντιστοιχώντας σε κάθε $x \in X$ μία οικογένεια υποσυνόλων, $\mathcal{V}(x)$, του X, ώστε να ικανοποιούνται οι ιδιότητες (Π1) (Π2), (Π3) και (Π4).

Πρόταση 1.4. *Ας είναι X ένα σύνολο και για κάθε $x \in X$ υπάρχει μία οικογένεια υποσυνόλων του X, $\mathcal{V}(x)$, η οποία ικανοποιεί τις ιδιότητες (Π1), (Π2), (Π3) και (Π4). Τότε, το σύνολο*

$$\mathcal{T} = \{A \subseteq X / \, A \in \mathcal{V}(x), \ \forall x \in A\}$$

είναι η μοναδική τοπολογία επί του X έτσι, ώστε το σύνολο των περιοχών κάθε σημείου $x \in X$ να είναι η οικογένεια $\mathcal{V}(x)$.

Απόδειξη. Θα δείξουμε πρώτα ότι το σύνολο $\mathcal{T}$ είναι μία τοπολογία επί του X. Το σύνολο $\emptyset$ ανήκει προφανώς στην $\mathcal{T}$. Για κάθε $x \in X$, σύμφωνα με την (Π1), υπάρχει $A \in \mathcal{V}(x)$. Καθώς $A \subseteq X$, από την (Π3) έπεται ότι $X \in \mathcal{V}(x)$. Επομένως $X \in \mathcal{T}$. Ας είναι $U_1, \ldots, U_k \in \mathcal{T}$. Αν $x \in U_1 \cap \cdots \cap U_k$, τότε $x \in U_i$ και επομένως $U_i \in \mathcal{V}(x)$ $(i = 1, \ldots, k)$. Έτσι, από την (Π2) παίρνουμε ότι $U_1 \cap \cdots \cap U_k \in \mathcal{V}(x)$. Επομένως $U_1 \cap \cdots \cap U_k \in \mathcal{T}$. Ας είναι $(U_i)_{i \in I}$ μία οικογένεια συνόλων της $\mathcal{T}$. Αν $x \in \cup_{i \in I} U_i$, τότε υπάρχει δείκτης i με $x \in U_i$ και επομένως $U_i \in \mathcal{V}(x)$. Από την (Π3) έχουμε ότι $\cup_{i \in I} U_i \in \mathcal{V}(x)$. Άρα $\cup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$. Συνεπώς, το σύνολο $\mathcal{T}$ είναι μία τοπολογία επί του X.

Στη συνέχεια, θα δείξουμε ότι για κάθε $x \in X$ το σύνολο των περιοχών του x για την τοπολογία $\mathcal{T}$ είναι το $\mathcal{V}(x)$. Ας είναι V μία περιοχή ενός σημείου $x \in X$. Τότε, υπάρχει $U \in \mathcal{T}$ με $x \in U$ και $U \subseteq V$. Καθώς $U \in \mathcal{V}(x)$, από την (Π3) έπεται ότι $V \in \mathcal{V}(x)$. Αντιστρόφως, ας είναι $V \in \mathcal{V}(x)$. Θα δείξουμε ότι το V είναι περιοχή του x. Θεωρούμε το σύνολο $U = \{a \in X / \ V \in \mathcal{V}(a)\}$. Παρατηρούμε ότι $x \in U$. Για κάθε $a \in U$ έχουμε $V \in \mathcal{V}(a)$ και επομένως από την (Π1) έπεται ότι $a \in V$. Άρα, ισχύει $U \subseteq V$. Το σύνολο U είναι ανοικτό. Πράγματι, αν $y \in U$, τότε $V \in \mathcal{V}(y)$, και από την (Π4) έχουμε ότι υπάρχει $W \in \mathcal{V}(y)$, ώστε για κάθε $z \in W$ να ισχύει $V \in \mathcal{V}(z)$. Άρα, $z \in U$ και επομένως $W \subseteq U$. Καθώς $W \in \mathcal{V}(y)$, από την (Π3) προκύπτει $U \in \mathcal{V}(y)$. Έτσι, έχουμε $U \in \mathcal{T}$ και κατά συνέπεια το V είναι περιοχή του x.

Τέλος, από την Πρόταση 1.3 συνεπάγεται ότι η $\mathcal{T}$ είναι η μοναδική τοπολογία επί του X έτσι, ώστε το σύνολο των περιοχών κάθε $x \in X$ να είναι η οικογένεια $\mathcal{V}(x)$. □

Ορισμός 1.6. Ας είναι $\mathcal{W}$ ένα υποσύνολο του συνόλου των περιοχών $\mathcal{V}(x)$ ενός σημείου $x \in E$. Το $\mathcal{W}$ καλείται *βάση* του $\mathcal{V}(x)$, αν για κάθε $V \in \mathcal{V}(x)$ υπάρχει $W \in \mathcal{W}$ με $W \subseteq V$.

Παράδειγμα 1.9. Ας είναι E ένας διακριτός χώρος. Αν $x \in E$, τότε το σύνολο $\{x\}$ αποτελεί μία βάση για το σύνολο των περιοχών του x.

Παράδειγμα 1.10. Στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}$ η οικογένεια ανοικτών διαστημάτων,

$$\left]-\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1}\right[, \ n \in \mathbb{N}$$

είναι μία βάση για το σύνολο των περιοχών του 0.

Παράδειγμα 1.11. Σ' έναν τοπολογικό χώρο E, το σύνολο των ανοικτών συνόλων που περιέχουν ένα σημείο $x \in E$ αποτελεί μία βάση για το σύνολο των περιοχών του.

Ορισμός 1.7. Ένα υποσύνολο $\mathcal{B}$ του $\mathcal{T}$ καλείται *βάση* της τοπολογίας $\mathcal{T}$, αν κάθε σύνολο της $\mathcal{T}$ γράφεται ως ένωση συνόλων της $\mathcal{B}$.

Παράδειγμα 1.12. Σε ένα διακριτό χώρο E, το σύνολο

$$\mathcal{B} = \{\{x\} / \ x \in E\}$$

αποτελεί μία βάση για την τοπολογία του.

Παράδειγμα 1.13. Στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^n$ η οικογένεια των σφαιρικών περιοχών είναι μία βάση για την τοπολογία του.

Πρόταση 1.5. *Ένα σύνολο $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ είναι μία βάση για την τοπολογία του E, αν και μόνον αν, για κάθε $x \in E$ το σύνολο $\mathcal{W}(x)$ των συνόλων $U \in \mathcal{B}$ με $x \in U$ είναι μία βάση για το σύνολο των περιοχών του x.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι το σύνολο $\mathcal{B}$ είναι μία βάση για την τοπολογία του E. Ας είναι $x \in E$. Αν W είναι μία περιοχή του x, τότε υπάρχει ένα ανοικτό σύνολο V με $x \in V$ και $V \subseteq W$. Επειδή το $\mathcal{B}$ είναι μία βάση για την τοπολογία του E, υπάρχει ανοικτό σύνολο $U \in \mathcal{B}$ με $x \in U$ και $U \subseteq V$. Άρα $U \in \mathcal{W}(x)$ και επομένως το σύνολο $\mathcal{W}(x)$ είναι μία βάση για το σύνολο των περιοχών του x. Αντιστρόφως, ας υποθέσουμε ότι για κάθε $x \in E$ το $\mathcal{W}(x)$ είναι μία βάση για το σύνολο των περιοχών του x. Ας είναι U ένα ανοικτό σύνολο. Τότε, για κάθε $z \in U$ υπάρχει $V_z \in \mathcal{W}(z)$ με $V_z \subseteq U$. Καθώς όμως $\mathcal{W}(z) \subseteq \mathcal{B}$, έχουμε $V_z \in \mathcal{B}$. Επιπλέον, ισχύει $\cup_{z\in U} V_z = U$. Συνεπώς, το σύνολο $\mathcal{B}$ είναι μία βάση για την τοπολογία του E. □

Ορισμός 1.8. Ο χώρος E καλείται *χώρος του Hausdorff*, αν για κάθε ζεύγος σημείων $x, y \in E$ υπάρχει περιοχή U του x και V του y με $U \cap W = \emptyset$.

Παράδειγμα 1.14. Κάθε μετρικός χώρος (E, d) είναι χώρος του Hausdorff. Πράγματι, ας είναι $x, y \in E$ με $x \neq y$. Θέτουμε $\delta = d(x, y)$. Τότε, οι σφαιρικές περιοχές $B(x, \delta/2)$ και $B(y, \delta/2)$ είναι ανοικτά σύνολα με κενή τομή. Άρα, ο (E, d) είναι χώρος του Hausdorff.

Παράδειγμα 1.15. Ας είναι $(E_i, \mathcal{T}_i)$ $(i = 1, \dots, k)$ χώροι του Hausdorff. Θα δείξουμε ότι ο τοπολογικός χώρος γινόμενο $(E, \mathcal{T})$ των E_i $(i = 1, \dots, k)$ είναι επίσης χώρος του Hausdorff. Πράγματι, ας είναι $x = (x_1, \dots, x_k)$ και $y = (y_1, \dots, y_k)$ δύο διαφορετικά σημεία του E. Τότε $x_j \neq y_j$ για κάποιο δείκτη j. Τότε, υπάρχει περιοχή V_j του x_j και περιοχή W_j του y_j με $V_j \cap W_j = \emptyset$. Θέτουμε $V_i = W_i = E_i$ για $i \neq j$ και $V = \prod_{i=1}^k V_i$, $W = \prod_{i=1}^k W_i$. Τα σύνολα V και W είναι περιοχές των x και y, αντίστοιχα, και καθώς $V_j \cap W_j = \emptyset$, έχουμε $V \cap W = \emptyset$. Άρα, ο E είναι χώρος του Hausdorff.

Ορισμός 1.9. Ας είναι $A \subseteq E$. Ένα σημείο $x \in E$ καλείται *εσωτερικό* του A, αν το A είναι περιοχή του. Το σύνολο των εσωτερικών σημείων του A καλείται *εσωτερικό* του A και συμβολίζεται με A°.

Παράδειγμα 1.16. Στο χώρο $\mathbb{R}$ το εσωτερικό του κλειστού διαστήματος $[a, b]$ είναι το ανοικτό διάστημα $]a, b[$. Πράγματι, εύκολα βλέπουμε ότι κάθε σημείο του $]a, b[$ είναι εσωτερικό του $[a, b]$.

Πρόταση 1.6. *Ας είναι $A \subseteq E$. Το σύνολο A° είναι το μεγαλύτερο ανοικτό υποσύνολο του E που περιέχεται στο A.*

Απόδειξη. Συμβολίζουμε με U το μεγαλύτερο ανοικτό υποσύνολο του A. Τότε, για κάθε $x \in U$, το U είναι περιοχή του x και επομένως $x \in A^\circ$. Αντιστρόφως, αν $x \in A^\circ$, τότε υπάρχει ένα ανοικτό σύνολο $W \subseteq A$ με $x \in W$. Καθώς $W \subseteq U$, έχουμε $x \in U$. Άρα, ισχύει $U = A^\circ$. □

Πόρισμα 1.1. *Ένα υποσύνολο ενός τοπολογικού χώρου είναι ανοικτό, αν και μόνον αν, συμπίπτει με το εσωτερικό του.*

1.3 Κλειστά Σύνολα

Ας είναι $(E, \mathcal{T})$ ένας τοπολογικός χώρος.

Ορισμός 1.10. Ένα σύνολο $K \subseteq E$ καλείται *κλειστό*, αν το συμπλήρωμά του K^c είναι ανοικτό.

Αμέσως έχουμε τις εξής ιδιότητες:

(K1) Τα σύνολα $\emptyset$ και E είναι κλειστά.

(K2) Η ένωση πεπερασμένου πλήθος κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο.

(K3) Η τομή μίας οικογένειας κλειστών υποσυνόλων είναι κλειστό σύνολο.

Παράδειγμα 1.17. Σ' ένα διακριτό χώρο, κάθε υποσύνολό του είναι κλειστό.

Παράδειγμα 1.18. Στο χώρο $\mathbb{R}$, τα διαστήματα $(-\infty, a]$, $[a, b]$ και $[a, \infty)$ είναι κλειστά σύνολα.

Παράδειγμα 1.19. Στο χώρο $\mathbb{R}$, το σύνολο $\mathbb{Z}$ είναι κλειστό. Πράγματι, ισχύει:

$$\mathbb{Z} = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}}]n, n+1[\right)^c .$$

Έτσι, καθώς τα διαστήματα $]n, n+1[$, $n \in \mathbb{Z}$, είναι ανοικτά σύνολα, η ένωσή τους είναι ανοικτό σύνολο και κατά συνέπεια το $\mathbb{Z}$ είναι κλειστό σύνολο.

Παράδειγμα 1.20. Σε ένα χώρο του Hausdorff E, τα μονοσύνολα είναι κλειστά σύνολα. Πιο συγκεκριμμένα θα δείξουμε ότι για κάθε $x \in E$, το σύνολο $\{x\}^c$ είναι ανοικτό. Πράγματι, για κάθε $y \in \{x\}^c$ υπάρχει ανοικτή περιοχή $U(y)$ του y και ανοικτή περιοχή $U(x)$ του x με $U(x) \cap U(y) = \emptyset$. Έτσι, έχουμε $U(y) \subseteq \{x\}^c$ και κατά συνέπεια το σύνολο $\{x\}$ είναι κλειστό.

Πρόταση 1.7. *Ας είναι S ένας υποχώρος του E. Τότε, ισχύουν τα εξής:*

(α) Τα κλειστά σύνολα του S είναι της μορφής $K \cap S$, όπου K είναι κλειστό υποσύνολο του E.

(β) Το σύνολο S είναι κλειστό μέσα στο E, αν και μόνον αν, κάθε κλειστό σύνολο του S είναι και κλειστό μέσα στο E.

Καθώς το L_1 είναι ανάγωγο σύνολο, υπάρχει δείκτης i τέτοιος, ώστε $L_1 \subseteq Y_i$. Ομοίως, υπάρχει δείκτης j τέτοιος, ώστε $Y_i \subseteq L_j$. Άρα $L_1 \subseteq L_j$. Επομένως $1 = j$ και $Y_i = L_1$. Δίχως βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $i = 1$. Τότε, έχουμε:

$$\overline{Y \setminus Y_1} = \overline{Y_2 \setminus (Y_1 \cap Y_2)} \cup \cdots \cup \overline{Y_s \setminus (Y_1 \cap Y_s)}$$

και

$$\overline{Y \setminus Y_1} = \overline{L_2 \setminus (Y_1 \cap L_2)} \cup \cdots \cup \overline{L_t \setminus (Y_1 \cap L_t)}.$$

Το $Y_i \setminus (Y_1 \cap Y_i)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του αναγώγου συνόλου Y_i. Σύμφωνα με την Πρόταση 1.19, έχουμε $\overline{Y_i \setminus (Y_1 \cap Y_i)} = Y_i$ $(i = 2, \ldots, s)$. Ομοίως $\overline{L_i \setminus (Y_1 \cap L_i)} = L_i$ $(i = 2, \ldots, t)$. Επομένως, ισχύει:

$$Y_2 \cup \cdots \cup Y_s = L_2 \cup \cdots \cup L_t.$$

Συνεχίζοντας την προηγούμενη διαδικασία, συμπεραίνουμε ότι $s = t$ και υπάρχει μία μετάθεση σ του $\{1, \ldots, s\}$ τέτοια, ώστε να ισχύει $Y_i = L_{\sigma(i)}$ $(i = 1, \ldots, s)$. □

1.8 Ασκήσεις

1. Ας είναι E ένα μη κενό σύνολο και $k : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ μία συνάρτηση η οποία έχει τις ακόλουθες ιδιότητες (αξιώματα του καλύμματος κατά Kuratowski):
(α) $k(\emptyset) = \emptyset$,
(β) $A \subseteq k(A)$, για κάθε $A \in \mathcal{P}(E)$,
(γ) $k(k(A)) = k(A)$, για κάθε $A \in \mathcal{P}(E)$,
(δ) $k(A \cup B) = k(A) \cup k(B)$, για κάθε $A, B \in \mathcal{P}(E)$.
Να δειχθεί ότι το σύνολο

$$\mathcal{T} = \{X \subseteq E / \, k(X^c) = X^c\}$$

ορίζει μία τοπολογία επί του E τέτοια, ώστε για κάθε υποσύνολο S του E να ισχύει $k(S) = \bar{S}$.

2. Ας είναι E ένα μη κενό σύνολο και $I : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ μία συνάρτηση η οποία έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:
(α) $I(\emptyset) = \emptyset$,
(β) $A \supseteq I(A)$, για κάθε $A \in \mathcal{P}(E)$,
(γ) $I(I(A)) = I(A)$, για κάθε $A \in \mathcal{P}(E)$,
(δ) $I(A \cup B) = I(A) \cup I(B)$, για κάθε $A, B \in \mathcal{P}(E)$.
Να δειχθεί ότι το σύνολο

$$\mathcal{T} = \{X \subseteq E / \, I(X) = X\}$$

ορίζει μία τοπολογία επί του E τέτοια, ώστε για κάθε υποσύνολο S του E να ισχύει $I(S) = S^\circ$.

3. Ας είναι $(E, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος, $(A, \mathcal{T}_A)$, $(B, \mathcal{T}_B)$ δύο υπόχωροί του με $B \subseteq A$ και $\mathcal{T}'$ η σχετική τοπολογία του B ως προς την $\mathcal{T}_A$. Να δειχθεί ότι $\mathcal{T}' = \mathcal{T}_B$.

4. Ας είναι E τοπολογικός χώρος. Αν A, B είναι υποσύνολα του E και $(A_i)_{i\in I}$ μία οικογένεια υποσυνόλων του A, τότε ισχύουν τα εξής:
(α) $(A^\circ)^\circ = A^\circ$.
(β) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.
(γ) $(\cup_{i\in I} A_i)^\circ \supseteq \cup_{i\in I} A_i^\circ$.
(δ) $(\cap_{i\in I} A_i)^\circ \subseteq \cup_{i\in I} A_i^\circ$.

5. Ας είναι E τοπολογικός χώρος. Αν A, B είναι υποσύνολα του E και $(A_i)_{i\in I}$ μία οικογένεια υποσυνόλων του A, τότε ισχύουν τα εξής:
(α) $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$.
(β) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.
(γ) $\overline{\cup_{i\in I} A_i} \supseteq \cup_{i\in I} \bar{A}_i$.
(δ) $\overline{\cap_{i\in I} A_i} \subseteq \cup_{i\in I} \bar{A}_i$.

6. Ας είναι A υποσύνολο ενός τοπολογικού χώρου E. Τότε, ισχύουν τα εξής:

$$(\bar{A})^c = (A^c)^\circ \quad \text{και} \quad (A^\circ)^c = \overline{(A^c)}.$$

7. Ας είναι A και B υποσύνολα ενός τοπολογικού χώρου E. Αν το σύνολο A είναι ανοικτό, τότε ισχύει:

$$A \cap \bar{B} \subseteq \overline{A \cap B}.$$

Δείξτε με ένα αντιπαράδειγμα ότι η παραπάνω σχέση εγκλεισμού γενικά δεν ισχύει στη περίπτωση όπου το A δεν είναι ανοικτό.

8. Ας είναι E ένας τοπολογικός χώρος και $A \subseteq E$. Καλούμε *σύνορο* του A το σύνολο $A^* = \bar{A} \cap \overline{A^c}$. Να δειχθούν τα εξής:
(α) $A^* = (A \cap \overline{(A^c)}) \cup (\bar{A} \setminus A)$,
(β) $A^* = \bar{A} \setminus A^\circ$.

9. Ας είναι $(\mathcal{T}_i)_{i\in I}$ μία μη κενή οικογένεια τοπολογιών επί ενός μη κενού συνόλου E. Να δειχθεί ότι η τομή $\cap_{i\in I} \mathcal{T}_i$ είναι μία τοπολογία επί του E.

10. Ας είναι F ένα πεπερασμένο σύνολο και n θετικός ακέραιος. Για κάθε ζεύγος στοιχείων $x = (x_1, \ldots, x_n)$ και $y = (y_1, \ldots, y_n)$ του F^n συμβολίζουμε με $d(x, y)$ το πλήθος των θέσεων i με $x_i \neq y_i$. Να δειχθεί ότι η αντιστοιχία

$(x, y) \mapsto d(x, y)$ ορίζει μία μετρική $d : F^n \times F^n \to \mathbb{N}$. Η μετρική αυτή καλείται *απόσταση του* Hamming.

11. Ας είναι E ένας τοπολογικός χώρος και $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μία ακολουθία στοιχείων του. Καλούμε το στοιχείο $a \in E$ *όριο* της ακολουθίας $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ όταν το n τείνει στο $+\infty$, και το συμβολίζουμε με

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = a,$$

αν για κάθε περιοχή V του a υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο, ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $x_n \in V$. Να δειχθεί ότι αν ο E είναι χώρος του Hausdorff, τότε το όριο μίας ακολουθίας αν υπάρχει είναι μοναδικό.

12. Ας είναι S_n η σφαίρα του $\mathbb{R}^{n+1}$ που ορίζεται από την εξίσωση:

$$\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1.$$

Αν $B = (0, \ldots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$, τότε να δειχθεί ότι οι χώροι $S_n \setminus \{P\}$ και $\mathbb{R}^n$ είναι ομοιόμορφοι.

13. Ας είναι E, F τοπολογικοί χώροι και $f : E \to F$. Καλούμε *γράφημα* της f το σύνολο

$$G(f) = \{(x, y) \in E \times F / \ y = f(x)\}.$$

Να δειχθεί ότι η απεικόνιση f είναι συνεχής, αν και μόνον αν, η απεικόνιση

$$g : E \to G(f), \ x \longmapsto (x, f(x))$$

είναι ομοιομορφισμός.

14. Ας είναι E τοπολογικός χώρος. Καλούμε *διαγώνιο* του E, το σύνολο

$$\Delta_E = \{(x, x) / \, x \in E\}.$$

Να δειχθεί ότι ο χώρος E είναι ομοιόμορφος με τον Δ_E.

15. Ας είναι E τοπολογικός χώρος και $(U_i)_{i \in I}$ ένα ανοικτό κάλυμμα του E. Να δειχθεί ότι ένα υποσύνολο F του E είναι κλειστό, αν και μόνον αν, για κάθε $i \in I$ το σύνολο $F \cap U_i$ είναι κλειστό μέσα στο U_i.

16. Ας είναι X ένας τοπολογικός χώρος του Hausdorff και A, B συμπαγή υποσύνολα του X με $A \cap B = \emptyset$. Να δειχθεί ότι υπάρχουν ανοικτα σύνολα U και V τέτοια, ώστε $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ και $U \cap V = \emptyset$.

17. Ας είναι X συμπαγής τοπολογικός χώρος, Y τοπολογικος χώρος του Hausdorff και $f : X \to Y$ μία συνεχής συνάρτηση η οποία είναι αμφίεση. Να δειχθεί ότι η f είναι ομοιομορφισμός.

18. Ας είναι E ένας τοπολογικος χώρος του Hausdorff και $(A_i)_{i\in I}$ μία οικογένεια συμπαγών υποχώρων του E. Να δειχθεί ότι η τομή $\cap_{i\in I}A_i$ είναι συμπαγής υποχώρος του E.

19. Ας είναι X, Y τοπολογικοί χώροι και $f : X \to Y$ μία συνεχής συνάρτηση τέτοια, ώστε για κάθε ανοικτό υποσύνολο U του X, η εικόνα του, $f(U)$, είναι ανοικτό υποσύνολο του Y και για κάθε $y \in Y$, το σύνολο $f^{-1}(y)$ είναι ανάγωγο. Αν ο χώρος Y είναι ανάγωγος, τότε ο χώρος X είναι επίσης ανάγωγος.

20. Ας είναι E ένας τοπολογικός χώρος και $\{U_i\}_{i\in I}$ μία οικογένεια ανοικτών αναγώγων υποσυνόλων του. Ας υποθέσουμε ότι $E = \cup_{i\in I}U_i$ και $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, για κάθε ζεύγος δεικτών i, j με $i \neq j$. Δείξτε ότι ο χώρος E είναι ανάγωγος.

21. Να δειχθεί ότι αν E είναι ένας Νοθεριανός τοπολογικός χώρος του Hausdorff, τότε ο χώρος E είναι πεπερασμένος.

22. Να δειχθεί ότι ένας τοπολογικός χώρος είναι Νοθεριανός αν και μόνον αν κάθε μη κενό σύνολο $\mathcal{F}$ από κλειστά υποσύνολα του E έχει ένα τοπικά ελάχιστο στοιχείο, δηλαδή ένα στοιχείο F τέτοιο, ώστε αν $K \in \mathcal{F}$ με $K \subseteq F$, τότε $K = F$.

Κεφάλαιο 7

Τοπικές Ιδιότητες

Σ΄ αυτό το κεφάλαιο εισάγεται και μελετάται ο εφαπτόμενος χώρος σ΄ ένα σημείο μίας πολλαπλότητας και δια μέσου αυτού η έννοια του απλού σημείου. Η περίπτωση των καμπυλών μελετάται ιδιαίτερα και αποδεικνύεται ότι κάθε καμπύλη είναι αμφιρητή με μία η οποία έχει μόνο απλά σημεία.

7.1 Εφαπτόμενος χώρος

Ας είναι $F \in K[X_1, \ldots, X_n]$ και $x = (x_1, \ldots, x_n)$ ένα σημείο του $\mathbb{A}^n$. Συμβολίζουμε με $\partial F/\partial X_i$ την τυπική παράγωγο του F ως προς το X_i.

Ορισμός 7.1. Καλούμε *διαφορικό πολυώνυμο* του F στο x το πολυώνυμο

$$d_xF = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial X_i}(x)(X_i - x_i).$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι για κάθε $G, H \in K[X_1, \ldots, X_n]$ ισχύει:

$$d_x(G + H) = d_xG + d_xH, \quad d_x(GH) = G(x)d_xH + H(x)d_xG.$$

Ας είναι $x = (0, \ldots, 0)$ και $V \subseteq \mathbb{A}^n$ μία θεμελιώδης πολλαπλότητα με $x \in V$. Συμβολίζουμε με J_V το ιδεώδες που παράγεται απ΄ όλα τα διαφορικά πολυώνυμα d_xF με $F \in \mathcal{I}(V)$. Ας είναι $\mathcal{I}(V) = (F_1, \ldots, F_r)$. Αν $G \in \mathcal{I}(V)$, τότε υπάρχουν $G_1, \ldots, G_r \in K[X_1, \ldots, X_n]$, ώστε $G = G_1F_1 + \cdots + G_rF_r$ και επομένως έχουμε:

$$d_xG = G_1(x)d_xF_1 + \cdots + G_r(x)d_xF_r.$$

Συνεπώς, ισχύει $J_V = (d_xF_1, \ldots, d_xF_r)$.

Ορισμός 7.2. Το αλγεβρικό σύνολο $\mathcal{Z}(J_V)$ καλείται *εφαπτόμενος χώρος* της V στο x και συμβολίζεται με $T_x(V)$.

Παρατηρούμε ότι το σύνολο $T_x(V)$ είναι ένα υποχώρος του διανυσματικού χώρου K^n. Αν η βαθμίδα του συστήματος που παράγεται από τις εξισώσεις $d_xF_j = 0$ $(j = 1, \ldots, r)$ είναι s, τότε $\dim_K T_x(V) = n - s$.

Παράδειγμα 7.1. Ο εφαπτόμενος χώρος του θεμελιώδους χώρου $\mathbb{A}^n$ στο $(0, \ldots, 0)$ είναι ο χώρος K^n.

Παράδειγμα 7.2. Ας είναι F ένα ανάγωγο πολυώνυμο του $K[X, Y]$ με $F(0, 0) = 0$. Τότε, ο εφαπτόμενος χώρος της επίπεδης καμπύλης $\mathcal{Z}(F)$ στο $(0, 0)$ είναι η ευθεία που ορίζεται από την εξίσωση:

$$\frac{\partial F}{\partial X}(0,0)X + \frac{\partial F}{\partial Y}(0,0)Y = 0.$$

Ας είναι $G, G' \in K[X_1, \ldots, X_n]$ με $G - G' \in \mathcal{I}(V)$. Τότε, υπάρχουν πολυώνυμα $H_1, \ldots, H_r \in K[X_1, \ldots, X_n]$ τέτοια, ώστε να ισχύει:

$$G - G' = H_1F_1 + \cdots + H_rF_r.$$

Θεωρώντας τα διαφορικά πολυώνυμα στο x, παίρνουμε:

$$d_xG - d_xG' = H_1(x)d_xF_1 + \cdots + H_r(x)d_xF_r.$$

Οπότε τα πολυώνυμα d_xG και d_xG' ορίζουν την ίδια συνάρτηση επί του T_xV. Έτσι, μπορούμε να δώσουμε τον εξής ορισμό:

Ορισμός 7.3. Ας είναι $g \in K[V]$ και $G \in K[X_1, \ldots, X_n]$ ένα πολυώνυμο που αντιπροσωπεύει το g. Καλούμε *διαφορικό* του g στο x και το συμβολίζουμε με d_xg την συνάρτηση που ορίζεται από το πολυώνυμο d_xG επί του χώρου $T_x(V)$.

Όπως είδαμε παραπάνω, το διαφορικό του g είναι ανεξάρτητο από το πολυώνυμο G που το αντιπροσωπεύει. Ας είναι G, H πολυώνυμα και g, h οι εικόνες τους στο $K[V]$. Τότε, ισχύει:

$$d_x(g + h) = d_xg + d_xh, \quad d_x(gh) = G(x)d_xh + H(x)d_xg.$$

Αν W είναι ένας K-διανυσματικός χώρος, τότε θα συμβολίζουμε με W^* τον δυϊκό χώρο του W. Θεωρούμε την απεικόνιση:

$$d_x : K[V] \longrightarrow T_x(V)^*, \; f \longmapsto d_xf.$$

Από τις παραπάνω ιδιότητες του διαφορικού έπεται ότι η απεικόνιση d_x είναι γραμμική. Ας είναι M_x το τοπικά μέγιστο ιδεώδες του $K[V]$ που αντιστοιχεί στο x, δηλαδή, η εικόνα του ιδεώδους $(X_1, \ldots, X_n)$ μέσα στο $K[V]$. Το $K[V]$ ως K-διανυσματικός χώρος είναι το ευθύ άθροισμα των χώρων M_x και K. Καθώς για κάθε $k \in K$ έχουμε $d_xk = 0$, μπορούμε ν' αντικαταστήσουμε την μελέτη της απεικόνισης d_x από τον περιορισμό της επί του M_x που τον συμβολίζουμε πάλι με d_x. Έτσι, έχουμε την γραμμική απεικόνιση:

$$d_x : M_x \longrightarrow T_x(V)^*, \; f \longmapsto d_xf.$$

Κεφάλαιο 8

Θέματα Μελέτης

Το κεφάλαιο αυτό συμπληρώνει την ύλη του βιβλίου με την παρουσίαση τριών θεμάτων για μελέτη.

8.1 Φάσμα Δακτυλίου

Ας είναι A ένας αντιμεταθετικός δακτύλιος.

Ορισμός 8.1. Το σύνολο όλων των πρώτων ιδεωδών του A καλείται *φάσμα* του δακτυλίου A και συμβολίζεται με $\mathrm{Spec}A$.

Σκοπός αυτής της ενότητας είναι η μελέτη του συνόλου $\mathrm{Spec}A$.

1. Για κάθε υποσύνολο E του A, συμβολίζουμε με $\mathcal{V}(E)$ το σύνολο όλων των πρώτων ιδεωδών του A που περιέχουν το E. Ισχύουν τα εξής:

(α) Αν I είναι το ιδεώδες που παράγεται από το E, τότε έχουμε:

$$\mathcal{V}(E) = \mathcal{V}(I) = \mathcal{V}(\mathrm{Rad}I).$$

(β) $\mathcal{V}(0) = X$ και $\mathcal{V}(1) = \emptyset$.

(γ) Αν $\{E\}_{j\in J}$ είναι μία οικογένεια από υποσύνολα του A, τότε

$$\mathcal{V}(\bigcup_{j\in J} E_j) = \bigcap_{j\in J} \mathcal{V}(E_j).$$

(δ) Για κάθε ζεύγος ιδεωδών $I, J \in \mathrm{Spec}A$ έχουμε:

$$\mathcal{V}(I\cap J) = \mathcal{V}(IJ) = \mathcal{V}(I) \cup \mathcal{V}(J).$$

Οι ιδιότητες (β), (γ) και (δ) δείχνουν ότι τα συμπληρώματα των συνόλων $\mathcal{V}(E)$ ορίζουν μία τοπολογία επί του $\mathrm{Spec}A$ που καλείται *τοπολογία του Zariski*.

2. Περιγράψτε τα φάσματα των δακτυλίων $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$ και $\mathbb{Z}[X]$.

3. Ας θέσουμε $X = \mathrm{Spec}A$. Για κάθε $f \in A$, συμβολίζουμε με X_f το συμπλήρωμα του $\mathcal{V}(f)$ μέσα στο X. Δείξτε ότι τα ανοικτά σύνολα X_f αποτελούν μία βάση για την τοπολογία του Zariski και ικανοποιούν τις εξής ιδιότητες:

(α) $X_f \cap X_g = X_{fg}$.
(β) $X_f = \emptyset \Longleftrightarrow$ το στοιχείο f είναι μηδενοδύναμο.
(γ) $X_f = X \Longleftrightarrow$ το στοιχείο f είναι αντιστρέψιμο.
(δ) $X_f = X_g \Longleftrightarrow \mathrm{Rad}(f) = \mathrm{Rad}(g)$.
(ε) Ο χώρος X είναι συμπαγής.
(στ) Για κάθε $f \in A$, ο χώρος X_f είναι συμπαγής.
(ζ) Ένα ανοικτό υποσύνολο U του X είναι συμπαγές, αν και μόνον αν, το U είναι μία πεπερασμένη ένωση από σύνολα X_f.

Τα σύνολα X_f καλούνται *κύρια ανοικτά υποσύνολα* του X.

4. Ας είναι $\wp \in \mathrm{Spec}A$. Ισχύουν τα εξής:

(α) Το σύνολο $\{\wp\}$ είναι κλειστό, αν και μόνον αν, το $\wp$ είναι τοπικά μέγιστο ιδεώδες.
(β) $\overline{\{\wp\}} = \mathcal{V}(\wp)$.
(γ) $J \in \overline{\{\wp\}} \Leftrightarrow \wp \subseteq J$.

5. Ο τοπολογικός χώρος $\mathrm{Spec}A$ δεν είναι χώρος Hausdorff.

6. Ένα στοιχείο $x \in A$ καλείται *μηδενοδύναμο* αν υπάρχει θετικός ακέραιος n τέτοιος, ώστε $x^n = 0$. Συμβολίζουμε με $\mathrm{Nil}(A)$ το σύνολο των μηδενοδυνάμων στοιχείων του A. Να δειχθεί ότι ο τοπολογικός χώρος $\mathrm{Spec}A$ είναι ανάγωγος, αν και μόνον αν, το ιδεώδες $\mathrm{Nil}(A)$ είναι πρώτο.

7. Ας είναι A ένας Νοθεριανός δακτύλιος. Τότε, ένα κλειστό υποσύνολο X του $\mathrm{Spec}A$ είναι ανάγωγο, αν και μόνον αν, το ιδεώδες $\cap_{P\in X} P$ είναι πρώτο.

8. Ας είναι B ένας αντιμεταθετικός δακτύλιος με μονάδα και $\phi : A \to B$ ένας μορφισμός δακτυλίων. Καθώς για κάθε $\wp \in \mathrm{Spec}B$ έχουμε $\phi^{-1}(\wp) \in \mathrm{Spec}A$, η ϕ ορίζει την απεικόνιση

$$\phi^* : \mathrm{Spec}B \longrightarrow \mathrm{Spec}A,\ \wp \longmapsto \phi^{-1}(\wp).$$

Ισχύουν τα εξής:

(α) Αν $f \in A$, τότε $(\phi^*)^{-1}(X_f) = Y_{\phi(f)}$ και επομένως η ϕ^* είναι συνεχής.
(β) Αν το J είναι ιδεώδες του A, τότε $(\phi^*)^{-1}(\mathcal{V}(J)) = \mathcal{V}(\phi(J)B)$ ($\phi(J)B$ είναι το ιδεώδες που παράγεται από το $\phi(J)$ μέσα στο B).
(γ) Αν το I είναι ένα ιδεώδες του B, τότε $\overline{\phi^*(\mathcal{V}(I))} = \mathcal{V}(\phi^{-1}(I)$.
(δ) Αν η ϕ είναι έφεση, τότε η ϕ^* είναι ένας ομοιομορφισμός του $\mathrm{Spec}B$ επί του $\mathcal{V}(\mathrm{Ker}\phi)$.
(ε) Το σύνολο $\phi^*(\mathrm{Spec}B)$ είναι πυκνό στο $\mathrm{Spec}A$, αν και μόνον αν ισχύει $\mathrm{Ker}(\phi) \subseteq \mathrm{Nil}(A)$.

Ευρετήριο Όρων