ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ

Τόμος Α

ΒΑΣ. ΠΕΤΡΙΔΗ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το βιβλίο αυτό ασχολείται με τον αυτόματο έλεγχο και κατά το μεγαλύτερο μέρος με γραμμικά συστήματα αυτομάτου ελέγχου. Κύριος στόχος του είναι η παρουσίαση κατά συστηματικό τρόπο των βασικών μεθόδων ανάλυσης και σχεδίασης συστημάτων αυτομάτου ελέγχου. Είναι προσανατολισμένο προς την εφαρμογή αλλά παρουσιάζει και την θεωρία. Έτσι απευθύνεται τόσο σε μηχανικούς όσο και σε πιο θεωρητικούς επιστήμονες. Τα μαθηματικά εργαλεία παρουσιάζονται έτσι ώστε να διευκολύνουν τη κατανόηση του προς μάθηση υλικού. Γενικά, έγινε προσπάθεια να διατηρηθεί ο εφαρμοσμένος χαρακτήρας του βιβλίου με μία ισορροπημένη παρουσίαση της θεωρίας και των προβλημάτων εφαρμογής.

Κατά κύριο λόγο το βιβλίο αυτό αναφέρεται σε συστήματα που έχουν μία είσοδο και μία έξοδο εκτός από την παράσταση συστημάτων με εξισώσεις κατάστασης όπου περιγράφονται και συστήματα που έχουν πολλές εισόδους και πολλές εξόδους.

Ένας από τους στόχους αυτού του βιβλίου, πέρα από την εισαγωγή στην ανάλυση και σχεδίαση συστημάτων αυτομάτου ελέγχου, είναι η εισαγωγή του αναγνώστη στη συστημική προσέγγιση.

Καταβλήθηκε προσπάθεια να παρουσιαστούν οι έννοιες όσο γίνεται με ποιό κατανοητό τρόπο. Δίνεται κυρίως έμφαση στις έννοιες και στις μεθόδους και λιγότερο σε τρόπους υπολογισμού. Επίσης δίνονται πολλά παραδείγματα έτσι ώστε να διευκολύνεται η κατανόηση της ύλης αλλά και να συνδέεται περισσότερο με πρακτικές εφαρμογές.

Αντιμετωπίζονται και πρακτικά προβλήματα που ανακύπτουν κατά τη σχεδίαση συστημάτων αυτομάτου ελέγχου όπως, θόρυβος, διαταραχές, περιορισμοί στις μεταβλητές κ.λ.π.. Σε αρκετά παραδείγματα γίνεται χρήση λογισμικού ανάλυσης και σχεδίασης συστημάτων αυτομάτου ελέγχου όπως το MATLAB. Με αυτόν τον τρόπο επιδιώκεται η εξοικείωση του αναγνώστη με αυτό το περιβάλλον. Συνιστάται όμως στους αναγνώστες αυτού του βιβλίου απλές και βασικές ασκήσεις να λύνονται με το χέρι και η χρήση του MATLAB να γίνεται για περίπλοκες και σύνθετες ασκήσεις ή για εκτεταμένη διερεύνηση μεθόδων.

Οι προδιαγραφές σχεδίασης εισάγονται μία προς μία στα διάφορα κεφάλαια και τελικά αναλύονται και παρουσιάζονται συνολικά στο κεφάλαιο 8.

Στο Κεφάλαιο 2 περιγράφονται οι τρόποι παράστασης συστημάτων και τα μοντέλα που σχετίζονται με αυτούς καθώς και τρόποι μετάβασης από ένα μοντέλο σε ένα άλλο. Επίσης δίνονται και τα βασικά μαθηματικά εργαλεία που αφορούν τον Μ/Τ Laplace και την επίλυση γραμμικών διαφορικών εξισώσεων.

Στο Κεφάλαιο 3 υπολογίζονται τα μοντέλα διαφόρων φυσικών συστημάτων όπως ηλεκτρικά, μηχανικά, θερμικά, ηλεκτρονικά, ηλεκτρομηχανικά συστήματα κ.α.. Ο στόχος αυτού του κεφαλαίου είναι ο υπολογισμός μοντέλων για τα παραπάνω συστήματα αλλά και η εξοικείωση του αναγνώστη με τη μεθοδολογία ανάπτυξης μοντέλων συστημάτων.

Το Κεφάλαιο 4 αναφέρεται στην απόκριση συστημάτων στο χρόνο και στα σφάλματα.

Το Κεφάλαιο 5 αναφέρεται στην απόκριση στο πεδίο συχνότητας και στα διαγράμματα Bode.

Στο Κεφάλαιο 6 γίνεται μία πρώτη προσπάθεια σχεδίασης με τριπλό σκοπό: α) να αποκτήσει ο αναγνώστης μία πρώτη επαφή με τους στόχους και τις μεθόδους σχεδίασης, β) να αντιληφθεί ο αναγνώστης για ποιό σκοπό χρειάζονται τα αναλυτικά εργαλεία που παρουσιάζονται στα κεφάλαια αυτού του βιβλίου, και γ) να έρθει ο αναγνώστης σε επαφή με ορισμένα πρακτικά προβλήματα που παρουσιάζονται κατά τη σχεδίαση συστημάτων αυτομάτου ελέγχου.

Το Κεφάλαιο 7 αναφέρεται στην ευστάθεια συστημάτων και παρουσιάζονται τα κριτήρια Routh και Hurwitz , τα διαγράμματα και το κριτήριο Nyquist και ο Γεωμετρικός Τόπος των Ριζών.

Το Κεφάλαιο 8 αναφέρεται στο γενικό πρόβλημα ελέγχου. Επίσης αναλύονται και παρουσιάζονται συνολικά οι προδιαγραφές σχεδίασης. Το Κεφάλαιο 9 αναφέρεται στη σχεδίαση με PID. Τέλος στο Παράρτημα Ι δίνονται τα βασικά στοιχεία του Μ/Τ Laplace και στο Παράρτημα ΙΙ δίνονται τρόποι υλοποίησης ενός συστήματος σε αναλογικό υπολογιστή.

Θέλω να ευχαριστήσω τις κυρίες Ε. Καουνά, Σ. Ξανθοπούλου, Β. Ακριτίδου καθώς και τους κυρίους Β. Καμπουρλάζο και Σ. Καζαρλή για τη βοήθεια που προσέφεραν. Τέλος θέλω να ευχαριστήσω τον Αναπληρωτή Καθηγητή κύριο Ι. Θεοχάρη και τον κύριο Γ. Σταμούλη για την ανάγνωση τμημάτων αυτού του βιβλίου.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΜΕΡΟΣ ΙΙ: ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΙ ΣΧΕΔΙΑΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ

6. ΜΙΑ ΠΡΩΤΗ ΠΡΟΣΠΑΘΕΙΑ ΣΧΕΔΙΑΣΗΣ

7. ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ

8. ΤΟ ΓΕΝΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΕΛΕΓΧΟΥ

9. ΣΧΕΔΙΑΣΗ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΙΙ

1
ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 ΓΕΝΙΚΑ

Μία θεμελιώδης έννοια της οποίας η σημασία πρέπει να διευκρινισθεί από την αρχή είναι η έννοια του συστήματος.

Σύστημα είναι ένα σύνολο στοιχείων που λειτουργούν σε συνεργασία για την επίτευξη κάποιου σκοπού. Επίσης μπορούμε να πούμε ότι σύστημα είναι ένα τμήμα του κόσμου που μας ενδιαφέρει ή διαλέξαμε να παρατηρήσουμε.

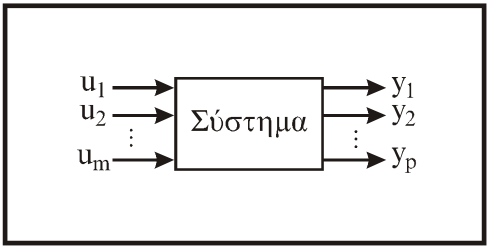
Ποιό ειδικά από την σκοπιά του μηχανικού ορίζεται ως σύστημα ένα οργανωμένο σύνολο αλληλεπιδρώντων στοιχείων (μέσα στο οποίο πιθανόν να υπάρχουν και μηχανές και άνθρωποι) σχεδιασμένο να εκπληρώσει ένα σύνολο αντικειμενικών σκοπών μέσω ελέγχου υλικών, ενεργείας και πληροφοριών.

Ο μηχανικός συστημάτων ασχολείται με τον συντονισμό της λειτουργίας όλων των επί μέρους στοιχείων και έτσι το αντικείμενό του είναι το σύνολο και η λειτουργία του και όχι τα επί μέρους στοιχεία.

Η επίδραση του περιβάλλοντος επάνω σε ένα σύστημα εμφανίζεται μέσω των **εισόδων** του συστήματος. Η δε επίδραση του συστήματος στο περιβάλλον συντελείται μέσω των **εξόδων** του συστήματος.

Ένα σύστημα συνήθως απεικονίζεται με ένα ορθογώνιο. Οι είσοδοι σημειώνονται στην αριστερή πλευρά και οι έξοδοι στην δεξιά πλευρά του ορθογωνίου (Σχ. 1.1.1).

Οι είσοδοι και οι έξοδοι του συστήματος είναι στην πραγματικότητα ποσότητες οι οποίες περιγράφονται από συναρτήσεις του χρόνου. Έτσι μιλάμε για μεταβλητές εισόδου και εξόδου.

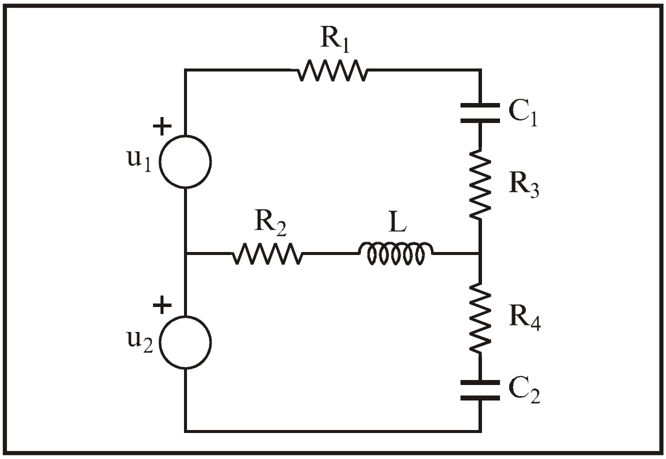


Σχήμα 1.1.1

΄Ολες οι μεταβλητές εισόδου αποτελούν το άνυσμα εισόδου, **U**, ενώ όλες οι μεταβλητές εξόδου αποτελούν το άνυσμα εξόδου, **Y**.

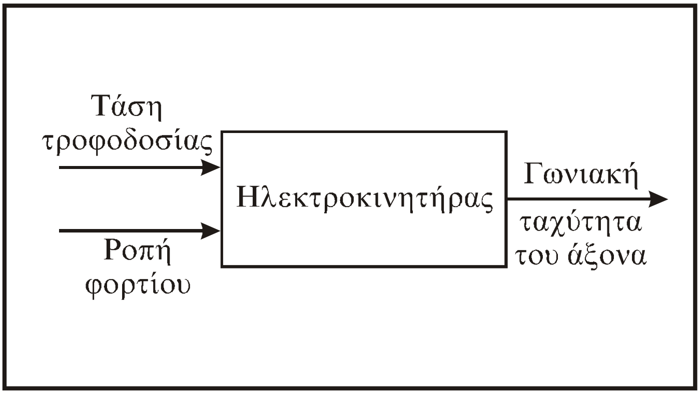
$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \qquad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix} \tag{1.1.1}$$

Στο Σχ. 1.1.2 φαίνεται ένα ηλεκτρικό κύκλωμα το οποίο είναι ένα σύστημα με εισόδους τις ηλεκτρεγερτικές δυνάμεις των πηγών. Ως έξοδοι μπορούν να ληφθούν, για παράδειγμα, οι τάσεις των πυκνωτών.



Σχήμα 1.1.2

Ένας ηλεκτροκινητήρας μπορεί να θεωρηθεί ως σύστημα με εισόδους την τάση τροφοδοσίας και την ροπή φορτίου και έξοδο τη γωνιακή ταχύτητα του άξονα (Σχ. 1.1.3).



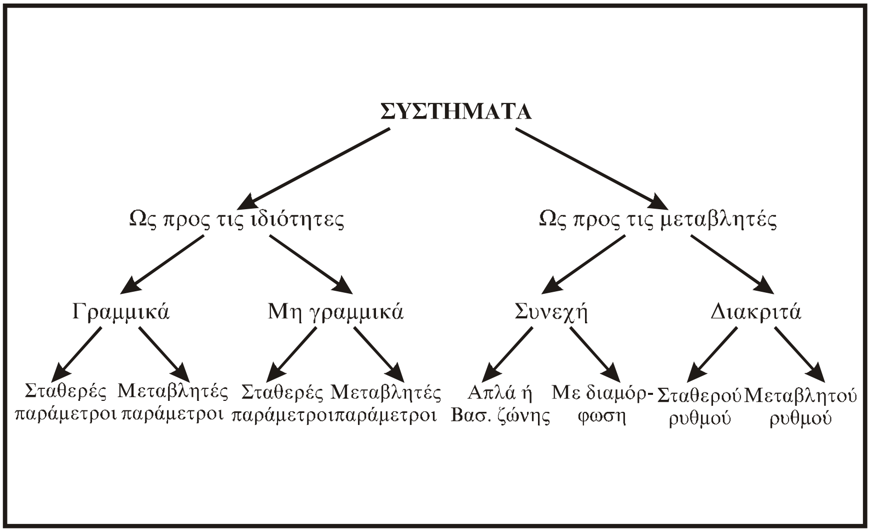
Σχήμα 1.1.3

Γενικά η επίδραση ενός συστήματος επάνω στο άνυσμα εισόδου περιγράφεται από ένα μετασχηματισμό, **L**, ο οποίος μετασχηματίζει το άνυσμα εισόδου, **U**, στο άνυσμα εξόδου, **Y**,

$$\mathbf{Y}=\mathbf{L}\mathbf{U} \tag{1.1.2}$$

1.2 ΕΙΔΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Τα συστήματα χωρίζονται ανάλογα με τις ιδιότητες των στοιχείων τους σε **γραμμικά** και **μη γραμμικά**. Τόσο τα γραμμικά όσο και τα μη γραμμικά συστήματα χωρίζονται σε συστήματα με **σταθερές** και σε συστήματα με **μεταβλητές παραμέτρους**. Επίσης τα συστήματα χωρίζονται σε **συνεχή** και **διακριτά.** Τα συνεχή συστήματα χωρίζονται σε **απλά ή** σε **συνεχή** και **διακριτά.** Τα συνεχή συστήματα χωρίζονται σε **απλά ή βασικής ζώνης** και σε συστήματα με **διαμόρφωση**. Τα διακριτά συστήματα χωρίζονται σε εκείνα με **σταθερό** και **μεταβλητό ρυθμό.** Η παραπάνω κατάταξη φαίνεται στο Σχ. 1.2.1.



Σχήμα 1.2.1

Γραμμικά λέγονται τα συστήματα που διέπονται από γραμμικές εξισώσεις. Για τα γραμμικά συστήματα ισχύει η αρχή της επαλληλίας. Δηλαδή αν για είσοδο u_1 προκύπτει η έξοδος y_1 και για είσοδο u_2, προκύπτει η έξοδος y_2 , τότε για είσοδο u_1+u_2 θα προκύψει η έξοδος y_1+y_2 .

Μη γραμμικά λέγονται τα συστήματα που διέπονται από μη γραμμικές εξισώσεις.

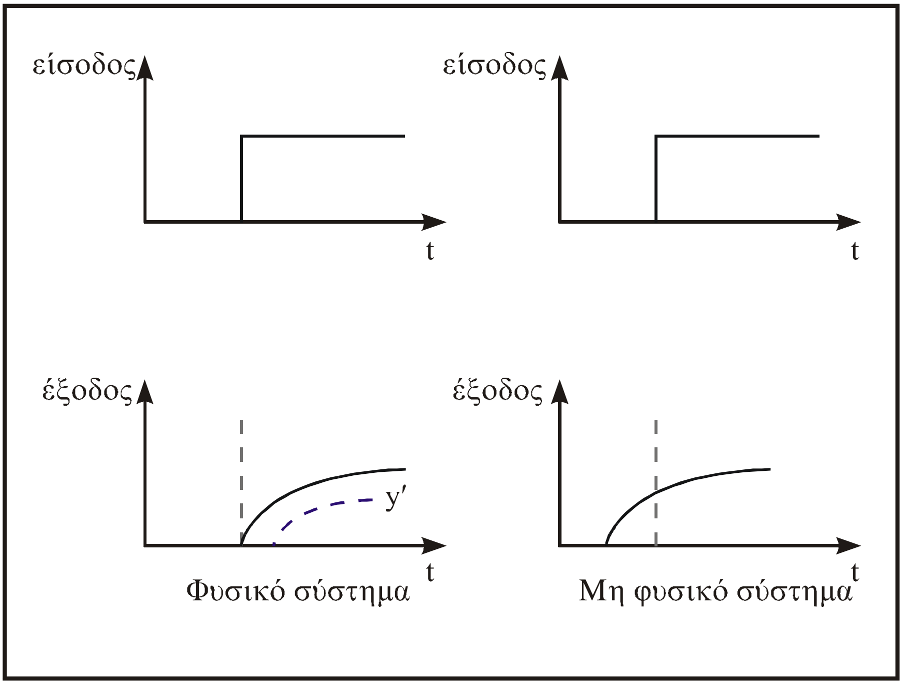
Αν οι παράμετροι των εξισώσεων ενός συστήματος είναι ανεξάρτητοι του χρόνου (σταθεροί) μιλάμε για συστήματα με **σταθερές παραμέτρους.** Αν οι παράμετροι των εξισώσεων εξαρτώνται από το χρόνο, μιλάμε για συστήματα με **μεταβλητές παραμέτρους.**

Συνεχή λέγονται τα συστήματα στα οποία ο χρόνος μεταβάλλεται κατά συνεχή τρόπο. Ενώ **διακριτά** λέγονται τα συστήματα για τα οποία ο χρόνος μεταβάλλεται κατά διαστήματα. Για τα διακριτά συστήματα αν η μεταβολή του χρόνου γίνεται κατά ίσα διαστήματα, τότε τα συστήματα λέγονται **σταθερού ρυθμού,** ενώ αν ο χρόνος δεν μεταβάλλεται κατά ίσα χρονικά διαστήματα, τότε τα συστήματα λέγονται **μεταβλητού ρυθμού.**

Ένα συνεχές σύστημα λέγεται **απλό ή βασικής ζώνης** αν όλα τα σήματα περιέχουν συχνότητες που κείνται γύρω από τη μηδενική συχνότητα. Αντίθετα αν υπάρχουν σήματα που περιέχουν συχνότητες που κείνται γύρω από κάποια μη μηδενική συχνότητα, τότε το σύστημα δεν είναι βασικής ζώνης. Επειδή συνήθως τα σήματα αυτά είναι διαμορφωμένα, μιλάμε για **σύστημα με διαμόρφωση.**

Πέρα από αυτό το διαχωρισμό τα συστήματα διακρίνονται σε **φυσικά** και **μη φυσικά** συστήματα. Φυσικά συστήματα είναι εκείνα που οι έξοδοι τους δεν εξαρτώνται από μελλοντικές τιμές των εισόδων.

Τα συστήματα που συναντώνται στην πράξη είναι φυσικά. Η διαφορά μεταξύ φυσικών και μη φυσικών συστημάτων δίνεται γραφικά στο Σχ. 1.2.2.



Σχήμα 1.2.2

Από πλευράς δυναμικής τα συστήματα χωρίζονται σε :
- Δυναμικά συστήματα, και
- Στιγμιαία συστήματα.

Από πλευράς τυχαίων ή προσδιοριστικών σημάτων τα συστήματα χωρίζονται σε:
- προσδιοριστικά συστήματα, και
- στοχαστικά συστήματα,

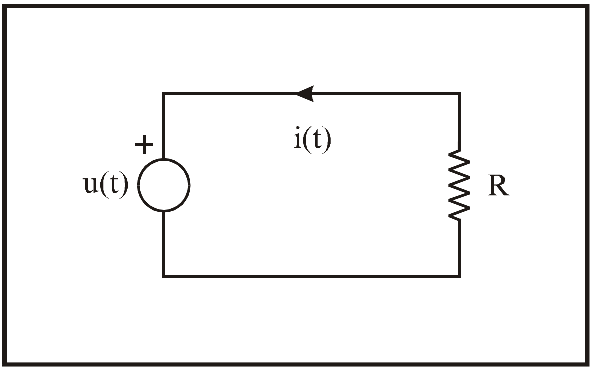
Από πλευράς συγκεντρωμένων ή διανεμημένων στοιχείων τα συστήματα χωρίζονται σε :
- συγκεντρωμένων παραμέτρων, και
- διανεμημένων παραμέτρων.

Δυναμικά συστήματα λέγονται τα συστήματα που περιγράφονται από ολοκληροδιαφορικές εξισώσεις. Με άλλα λόγια τα συστήματα αυτά περιέχουν στοιχεία που αποθηκεύουν ενέργεια. Ένα παράδειγμα δυναμικού συστήματος είναι το κύκλωμα του Σχ. 1.1.2.

Στιγμιαία συστήματα λέγονται εκείνα που δεν έχουν δυναμική. Δηλαδή οι τιμές των εξόδων σε μία χρονική στιγμή εξαρτάται μόνο από τις τιμές των εισόδων την ίδια χρονική στιγμή.

Ένα παράδειγμα στιγμιαίου συστήματος είναι το κύκλωμα του Σχ. 1.2.3 με είσοδο την ηλεκτρεγερτική δύναμη της πηγής και έξοδο το ρεύμα της αντίστασης, i(t). Η σχέση που συνδέει την είσοδο με την έξοδο αυτού του συστήματος είναι,

$$i(t) = \frac{1}{R} u(t) \tag{1.2.1}$$



Σχήμα 1.2.3

Προσδιοριστικά λέγονται εκείνα τα συστήματα των οποίων όλες οι είσοδοι είναι προσδιοριστικές (όχι τυχαίες).

Στοχαστικά λέγονται εκείνα τα συστήματα των οποίων μερικές είσοδοι είναι τυχαίες μεταβλητές.

Συστήματα με **διανεμημένες παραμέτρους** είναι τα συστήματα των οποίων οι παράμετροι είναι διανεμημένοι ως προς κάποια άλλη μεταβλητή (εκτός του χρόνου). Για παράδειγμα μία γραμμή μεταφοράς είναι ένα σύστημα με διανεμημένες παραμέτρους.

Σε αυτό το βιβλίο θα ασχοληθούμε με συστήματα φυσικά, γραμμικά και προσδιοριστικά.

Για τη μελέτη των συστημάτων απαιτούνται **μοντέλα.** Το μοντέλο ενός φυσικού συστήματος είναι μία απεικόνιση των κυριοτέρων χαρακτηριστικών του κατά τρόπο που να εξυπηρετεί την ανάλυση ή τη σχεδίαση. Ανάλογα με τους στόχους της μελέτης ή ανάλογα με την περιοχή παραμέτρων ένα φυσικό σύστημα μπορεί να έχει διαφορετικά μοντέλα. Για παράδειγμα ένα αεροπλάνο μπορεί να θεωρηθεί ως υλικό σημείο για τη μελέτη της κίνησης του επάνω σε μία τροχιά, ενώ δεν μπορεί να θεωρηθεί ως υλικό σημείο για τη μελέτη της αεροδυναμικής του συμπεριφοράς. Το τρανζίστορ έχει διαφορετικό μοντέλο για χαμηλές και υψηλές συχνότητες.

Σε περίπτωση που το μοντέλο είναι μαθηματικής μορφής μιλάμε για **μαθηματικά μοντέλα.**

Με τον όρο **φυσικό σύστημα** ή **σύστημα** αναφερόμαστε στο μαθηματικό του μοντέλο και ειδικότερα στη συνάρτηση (ή πίνακα) μεταφοράς του η οποία είναι μοναδική για ένα δεδομένο φυσικό σύστημα. Οι όροι αυτοί θα εξηγηθούν καλύτερα παρακάτω.

1.3 ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ

Σύστημα αυτομάτου ελέγχου είναι ένα σύστημα του οποίου η έξοδος ελέγχεται, σύμφωνα με ορισμένα κριτήρια ή προδιαγραφές, από την είσοδο ελέγχου. Στόχος ενός συστήματος ελέγχου είναι η αλλαγή συμπεριφοράς ενός συστήματος ώστε να γίνει η επιθυμητή.

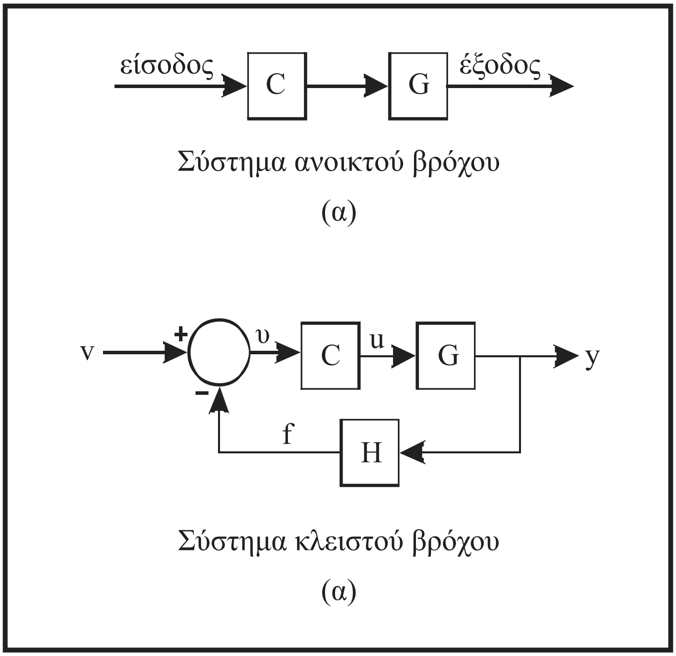
Διακρίνονται δύο βασικές κατηγορίες συστημάτων αυτομάτου ελέγχου.

α) συστήματα ανοικτού βρόχου (Σχ.1.3.1α), και

β) συστήματα κλειστού βρόχου (Σχ.1.3.1β).

Στο Σχ. 1.3.1 τα μοντέλα των συστημάτων παριστάνονται γραφικά με βαθμίδες. Η βαθμίδα είναι ένα ορθογώνιο μέσα στο οποίο γράφεται το μοντέλο του υποσυστήματος. Το Σχ. 1.3.1β είναι πολύ γενικό. Υπάρχουν δε διάφορες παραλλαγές του γενικού διαγράμματος συστήματος αυτομάτου ελέγχου κλειστού βρόχου. Το διάγραμμα όμως του Σχ. 1.3.1β είναι το απλούστερο.

Το ελεγχόμενο σύστημα, G, μπορεί να είναι στην πιο απλή περίπτωση ένας περιστρεφόμενος άξονας, τις στροφές του οποίου θέλουμε να ελέγξουμε και στην πιο γενική ένα εργοστάσιο ή ένας βιολογικός οργανισμός. Το σύστημα ελέγχου, C, μπορεί να είναι στην πιο απλή περίπτωση ένα ηλεκτρικό φορτίο και στην πιο γενική ένας ηλεκτρονικός υπολογιστής. Ο κύκλος συμβολίζει έναν αθροιστή ο οποίος μερικές φορές λέγεται και συγκριτής γιατί συγκρίνει το f με το v.



Σχήμα 1.3.1

v είναι η είσοδος αναφοράς.
υ είναι η έξοδος του συγκριτή.
u είναι η είσοδος του ελεγχόμενου συστήματος και λέγεται σήμα ή είσοδος ενεργοποίησης.

y είναι η έξοδος.
f είναι το σήμα ανάδρασης.
C είναι ο ελεγκτής ή σύστημα ελέγχου.
G είναι το ελεγχόμενο σύστημα και
H είναι το σύστημα ανάδρασης όπου περιλαμβάνονται και τα μετρητικά όργανα.

Στα συστήματα ανοικτού βρόχου η είσοδος ελέγχου προϋπολογίζεται έτσι ώστε να επιτευχθεί η επιθυμητή έξοδος, με την παραδοχή ότι η κατάσταση του συστήματος αλλάζει με προσδιοριστικό τρόπο. Για παράδειγμα θα πάρουμε την περίπτωση ενός συστήματος που ελέγχει τη θέση ενός κοπτικού εργαλείου μιας εργαλειομηχανής. Ο έλεγχος της θέσης μπορεί να είναι ανοικτού βρόχου. Σε αυτή την περίπτωση προϋπολογίζεται η είσοδος ελέγχου ώστε το κοπτικό εργαλείο να ακολουθήσει μία τροχιά και να καταλήξει στην επιθυμητή θέση. Αν όμως συμβεί κάποιο τυχαίο γεγονός το οποίο δεν μπορούσε να ληφθεί υπόψη στους υπολογισμούς (όπως π.χ. μία τυχαία αύξηση της τριβής σε κάποιο άξονα) η τελική θέση του κοπτικού εργαλείου θα διαφέρει από την επιθυμητή. Φαίνεται λοιπόν ότι ένα τέτοιο σύστημα επηρεάζεται πολύ από εξωτερικές επιδράσεις. Αντίθετα αν το σύστημα ελέγχου είναι κλειστού βρόχου, τότε η οποιαδήποτε τυχαία επίδραση γίνεται αντιληπτή από το σύστημα ανάδρασης και μπορεί να μειωθεί ή να ελαχιστοποιηθεί.

Επίσης ένα άλλο σημαντικό πλεονέκτημα της ανάδρασης είναι η μείωση της επίδρασης στην έξοδο που προέρχεται από μεταβολές στις τιμές των παραμέτρων του συστήματος. Υπάρχουν βέβαια και μειονεκτήματα της ανάδρασης. Αυξάνεται η πολυπλοκότητα του συστήματος γιατί απαιτείται η χρήση ελεγκτών και συστημάτων μέτρησης και κατά συνέπεια αυξάνεται το κόστος και ενδεχομένως μειώνεται η αξιοπιστία του τελικού συστήματος. Ένα άλλο μειονέκτημα είναι η πιθανή εμφάνιση αστάθειας. Δηλαδή, ακόμη και αν το αρχικό σύστημα είναι ευσταθές, το τελικό σύστημα κλειστού βρόχου, αν δεν γίνει σωστή σχεδίαση, μπορεί να είναι ασταθές.

Για το είδος ελέγχου που μας ενδιαφέρει εδώ ο σκοπός του ελέγχου είναι η έξοδος να παρακολουθεί την είσοδο αναφοράς όσο καλύτερα γίνεται. Μπορούμε να διακρίνουμε δύο υποπεριπτώσεις:

- ο έλεγχος ώστε η έξοδος να παραμένει σταθερή και
- ο έλεγχος ώστε η έξοδος να ακολουθεί μία δεδομένη τροχιά.

Στην πρώτη περίπτωση ο σκοπός είναι να κρατηθεί η έξοδος σταθερή ανεξάρτητα από εξωτερικές επιδράσεις. Για παράδειγμα αναφέρουμε τον έλεγχο θέσης ενός κοπτικού εργαλείου όπου η θέση, δηλαδή η έξοδος του συστήματος, πρέπει να κρατηθεί σταθερή ανεξάρτητα από εξωτερικές επιδράσεις. Ένα άλλο παράδειγμα είναι η ρύθμιση της ταχύτητας περιστροφής ενός κινητήρα. Σε αυτή την περίπτωση η ταχύτητα περιστροφής πρέπει να κρατηθεί σταθερή ανεξάρτητα από π.χ. μεταβολές στη ροπή φορτίου.

Στη δεύτερη περίπτωση η έξοδος πρέπει να μεταβάλλεται κατά προδιαγεγραμμένο τρόπο. Για παράδειγμα ένα κοπτικό εργαλείο μιας εργαλειομηχανής πρέπει να ακολουθήσει μία δεδομένη τροχιά (δηλαδή η θέση του να μεταβάλλεται κατά προδιαγεγραμμένο τρόπο).

Ο κλασικός όρος **σερβομηχανισμοί** αναφέρεται σε συστήματα που χρησιμοποιούν τη διαφορά της πραγματικής τιμής μίας μεταβλητής από την επιθυμητή τιμή της για να οδηγήσουν την πραγματική τιμή σε αντιστοιχία με την επιθυμητή τιμή.

Από πλευράς είδους ελεγκτή διακρίνουμε,
- τον ψηφιακό,
- τον αναλογικό, και
- τον υβριδικό έλεγχο.

Το κύριο χαρακτηριστικό των συστημάτων αυτομάτου ελέγχου είναι η ανάδραση. Ο δε κύριος λόγος για τη χρησιμοποίηση ανάδρασης είναι η ύπαρξη αβεβαιότητας όσον αφορά τις παραμέτρους του συστήματος, τις επιδράσεις στην έξοδο κ.λ.π.

Σήμερα η θεωρία συστημάτων αυτομάτου ελέγχου αποτελεί ένα τεράστιο πεδίο. Ήδη η θεωρία των γραμμικών συστημάτων αυτομάτου ελέγχου αποτελεί ένα αντικείμενο πολύ μεγάλο και συνέχεια αυξανόμενο. Παράλληλα τα μη γραμμικά συστήματα αυτομάτου ελέγχου αποτελούν ένα άλλο τεράστιο αντικείμενο, η θεωρητική αντιμετώπιση του οποίου, σε σύγκριση με τα γραμμικά συστήματα, απέχει πολύ από το να είναι ολοκληρωμένη.

Από την άλλη πλευρά οι εφαρμογές του αυτομάτου ελέγχου, αν και υπολείπονται της θεωρίας, είναι πολλές και συνέχεια γίνονται πιο περίπλοκες. Η αεροδιαστημική, η ρομποτική, η βιοτεχνολογία κ.λ.π. έχουν συνεχώς αυξανόμενες απαιτήσεις για συστήματα αυτομάτου ελέγχου.

1.4 ΠΡΟΣΘΕΤΕΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΕΣ

1.4.1 Συστημική θεώρηση

Βασικές έννοιες στις οποίες στηρίζεται η θεωρία συστημάτων αυτόματου ελέγχου είναι:

- Σύστημα
- Μοντέλο
- Προσομοίωση
- Σχεδίαση

Κατά τη συστημική θεώρηση η έμφαση είναι στην οργάνωση ή αλληλεπίδραση των στοιχείων ενός συστήματος και όχι στην περιγραφή ή ανάλυση των στοιχείων.

Φυσικό σύστημα είναι ένα τμήμα του φυσικού κόσμου: φυσικού ή κατασκευασμένου (π.χ. ένα αυτοκίνητο) ή ακόμη υλικού ή νοητού. Για την περιγραφή ενός φυσικού συστήματος επιλέγονται ορισμένα χαρακτηριστικά του (ή στοιχεία) που λέγονται **μεταβλητές**. Το σύνολο των μεταβλητών λέγεται **μοντέλο ή σύστημα** που περιγράφει το φυσικό σύστημα. Δηλαδή το σύστημα είναι μία αφαίρεση ή ένας τρόπος θεώρησης του φυσικού συστήματος.

Για παράδειγμα ας εξετάσουμε ένα πυκνωτή. Ο πραγματικός πυκνωτής έχει μάζα, είναι κατασκευασμένος από ορισμένα υλικά, βρίσκεται σε ορισμένη θερμοκρασία, έχει όγκο, έχει κάποια μικρή αντίσταση και αυτεπαγωγή κ.λ.π. Αν θέλουμε να εξετάσουμε τον πυκνωτή ως θερμικό σύστημα πρέπει να επιλέξουμε μεταβλητές όπως, θερμοκρασία, ροή θερμότητας κ.λ.π. Αν θέλουμε όμως να τον εξετάσουμε ως ηλεκτρικό σύστημα πρέπει να επιλέξουμε μεταβλητές όπως ρεύμα, τάση, χωρητικότητα κ.λ.π. Για περισσότερες πληροφορίες μπορεί ο αναγνώστης να συμβουλευτεί την παραπομπή [Ashby].

1.4.2 Μερικές σημαντικές ημερομηνίες στην ανάπτυξη των συστημάτων αυτομάτου ελέγχου.

2000 π.Χ.: Οι Βαβυλώνιοι ανέπτυξαν ένα αυτόματο σύστημα άρδευσης.

3ο αιώνα π.Χ.: Κτησίβιος, Έζησε στην Αλεξάνδρεια. Υδραυλικό ρολόϊ και υδραυλικό μουσικό όργανο.

3ος ή 2ος αιώνας π.Χ.: Φίλων ο Βυζάντιος. Αυτόματος νιπτήρας.

1ος αιώνας π.Χ. (περίπου): Αυτόματα του Ήρωνα. Αυτόματα θέατρα. Αυτόματες πύλες ναού [Καλλιγερόπουλου].

1788 μ.Χ.: Ρυθμιστής του Watt.

1868: Μαθηματική αντιμετώπιση της ευστάθειας από τον Maxwell [Maxwell].

1877-1895: Κριτήρια ευστάθειας Routh και Hurwitz [Routh, Hurwitz].

1892: Ευστάθεια Liapounov [Liapounov].

1932: Κριτήριο Nyquist [Nyquist].

1945-1947: Διαγράμματα Bode. Εφαρμογές διαγραμμάτων Bode και Nyquist στην ανάλυση και σύνθεση συστημάτων αυτομάτου ελέγχου [Bode, James et al].

1948: Γεωμετρικός τόπος ριζών από τον Evans [Evans].

Από το 1950 και μετά η ανάπτυξη της θεωρίας και των εφαρμογών των συστημάτων αυτομάτου ελέγχου υπήρξε ραγδαία. Περισσότερες πληροφορίες για την ιστορική εξέλιξη των συστημάτων αυτομάτου ελέγχου μπορεί να βρει κανείς στο βιβλίο του Mayr [Mayr].

7
ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ

7.1 ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ

7.1.1 Ορισμός

Η έννοια της ευστάθειας είναι στενά συνδεδεμένη με την έννοια της αλλαγής συμπεριφοράς ενός συστήματος. Ο μαθηματικός ορισμός της ευστάθειας είναι: **ένα σύστημα είναι ευσταθές όταν και μόνον όταν η έξοδος είναι φραγμένη για κάθε φραγμένη είσοδο.** Στην πράξη όμως η έξοδος ενός μη ευσταθούς συστήματος δεν μπορεί να αυξάνεται απεριόριστα αλλά αλλάζει η συμπεριφορά του συστήματος. Αν π.χ. εξετάσουμε ένα ενισχυτή ο οποίος παρουσιάζει αστάθεια η έξοδός του αυξάνει μέχρι ενός ορίου οπότε περιορίζεται το μέγεθός της από μη γραμμικά φαινόμενα, η δε αλλαγή συμπεριφοράς συνίσταται στην εμφάνιση ταλαντώσεων.

Ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ευστάθεια ενός συστήματος είναι οι ρίζες, ρ_i, της χαρακτηριστικής εξίσωσης να κείνται στο ανοικτό αριστερό ημιεπίπεδο (ανοικτό ΑΗΠ) του μιγαδικού επιπέδου, δηλαδή $\mathrm{Re}(\rho_i) < 0$ για όλα τα i.

Απόδειξη

Θα εξετάσουμε αυτή τη συνθήκη μέσω της συνάρτησης μεταφοράς

$$H(s) = \frac{\beta_m s^m + \ldots + \beta_2 s^2 + \beta_1 s + \beta_0}{s^n + \ldots + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0}, \; m<n \tag{7.1.1.1}$$

Αυτή μπορεί να γραφεί

$$H(s) = \frac{A_1}{s-\rho_1} + \frac{A_2}{s-\rho_2} + ... + \frac{A_n}{s-\rho_n} \quad (7.1.1.2)$$

όπου ρ_1, ρ_2, …, ρ_n είναι οι ρίζες του παρανομαστή και θεωρούνται πραγματικές.

Ο αντίστροφος Μ/Τ Laplace της H(s) της Εξ. (7.1.1.2) είναι:

$$h(t) = A_1 e^{\rho_1 t} + A_2 e^{\rho_2 t} + ... A_n e^{\rho_n t} \quad (7.1.1.3)$$

Από εδώ φαίνεται ότι αν όλες οι ρίζες κείνται στο ανοικτό ΑΗΠ τότε τα πραγματικά τους μέρη είναι αρνητικά και η h(t) είναι φραγμένη και μάλιστα $h(t) \to 0$ όταν $t \to \infty$. Δηλαδή μπορούμε να γράψουμε:

$$\int_0^\infty |h(t)|\, dt \le k < \infty \quad (7.1.1.4)$$

και η έξοδος y(t) για μία είσοδο u(t) δίνεται από την εξίσωση

$$y(t) = \int_0^t h(\tau) u(t-\tau) d\tau \quad (7.1.1.5)$$

από όπου προκύπτει

$$|y(t)| \le \int_0^\infty |h(\tau)||u(t-\tau)|\, d\tau \quad (7.1.1.6)$$

ή

$$|y(t)| \le k\Lambda \quad (7.1.1.7)$$

αν $|u(t)| \le \Lambda$ για κάθε t.

Αν m=n στην Εξ. (7.1.1.1) τότε θα προκύψει ένας σταθερός όρος στην Εξ. (7.1.1.2) αλλά η απόδειξη παραμένει η ίδια. Τέλος αν οι ρίζες ρ_1, …, ρ_n δεν είναι πραγματικές ή είναι πραγματικές με πολλαπλότητα ριζών αλλά κείνται στο ανοικτό ΑΗΠ τότε πάλι (βλ. υποπαράγραφο 2.1.6 και παράρτημα Ι) θα ισχύει η Εξ. (7.1.1.4) και η απόδειξη παραμένει η ίδια.

Από εδώ φαίνεται ότι για φραγμένη u(t) αν οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης κείνται στο ανοικτό ΑΗΠ το σύστημα είναι ευσταθές. Έτσι αποδείχθηκε η ικανή συνθήκη. Η αναγκαιότητα της συνθήκης προκύπτει αν δεχθούμε ότι ένα σύστημα είναι ευσταθές και ότι η h(t) δεν τείνει στο μηδέν όταν $t \to \infty$ και καταλήξουμε σε αντίφαση. Κάνουμε τις παραπάνω παραδοχές και διαλέγουμε ως είσοδο το +1 όταν

$h(t–\tau) > 0$ και -1 όταν $h(t–\tau) < 0$. Δηλαδή $u(\tau) = \mathrm{sgn}[h(t–\tau)]$. Αυτή η είσοδος είναι φραγμένη και η έξοδος είναι

$$y(t) = \int_0^t h(t-\tau)\, u(\tau)\, d\tau = \int_0^t |h(t-\tau)|\, d\tau \qquad (7.1.1.8)$$

η οποία, βάσει των παραδοχών, δεν είναι φραγμένη για $t \to \infty$. Έτσι καταλήξαμε σε αντίφαση διότι για ευσταθές σύστημα βρήκαμε φραγμένη είσοδο να δημιουργεί μη φραγμένη έξοδο. Πιο απλά η αναγκαιότητα αποδεικνύεται αν δεχθούμε ότι ένα σύστημα είναι ευσταθές και ότι κάποιες ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης έχουν θετικό πραγματικό μέρος και καταλήξουμε σε αντίφαση. Η αντίφαση είναι ότι σε αυτή την περίπτωση η έξοδος θα τείνει στο άπειρο, άρα δεν θα είναι φραγμένη ακόμη και αν η είσοδος είναι φραγμένη.

Επομένως η ευστάθεια ενός συστήματος ελέγχεται βρίσκοντας τις ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης, πράγμα που στις περισσότερες περιπτώσεις είναι δύσκολο. Λύση σ΄αυτό το πρόβλημα αποτελούν οι αλγόριθμοι Routh και Hurwitz οι οποίοι απλώς μας πληροφορούν για το αν υπάρχουν ρίζες και πόσες υπάρχουν στο ανοικτό ΔΗΠ (δεξιό ημιεπίπεδο του μιγαδικού επιπέδου, δηλ. $\mathrm{Re}(\rho) > 0$).

Αν υπάρχει έστω και μία ρίζα, ρ, της χαρακτηριστικής εξίσωσης με $\mathrm{Re}(\rho) \geq 0$ τότε το σύστημα λέγεται ασταθές. Για παράδειγμα παίρνουμε το σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς $\frac{1}{s}$. Για βηματική είσοδο, η έξοδος τείνει στο άπειρο.

Είναι γνωστό από την άλγεβρα, ότι πολυώνυμα με συντελεστές διαφορετικού προσήμου έχουν τουλάχιστον μία ρίζα στο κλειστό ΔΗΠ (μηδέν ή Re(ρ)≥0). Επίσης αν όλες οι ρίζες κείνται στο ανοικτό ΑΗΠ τότε όλοι οι συντελεστές έχουν το ίδιο πρόσημο και είναι μη μηδενικοί. Το αντίστροφο όμως δεν ισχύει. Έτσι αν υπάρχουν συντελεστές διαφορετικού προσήμου το πολυώνυμο είναι ασταθές, αν όμως οι συντελεστές είναι μη μηδενικοί και έχουν το ίδιο πρόσημο δεν μπορούμε να πούμε τίποτα για την ευστάθεια του συστήματος. Αυτό το κενό συμπληρώνουν οι αλγόριθμοι Routh και Hurwitz.

7.1.2 Κριτήριο Routh

Έστω

$$\beta_n s^n + \beta_{n-1} s^{n-1} + \ldots + \beta_1 s + \beta_0 = 0 \qquad (7.1.2.1)$$

γράφουμε τον πίνακα

$$
\begin{array}{c|cccc}
s^n & \beta_n & \beta_{n-2} & \beta_{n-4} & \cdots \\
s^{n-1} & \beta_{n-1} & \beta_{n-3} & \beta_{n-5} & \cdots \\
s^{n-2} & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \\
s^{n-3} & \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \\
\vdots & \vdots & & & \\
s^1 & c_1 & & & \\
s^0 & d_1 & & &
\end{array}
$$

Η πρώτη και δεύτερη σειρά φθάνουν μέχρι και β_1 και β_0. Αν οι σειρές δεν έχουν το ίδιο μήκος βάζουμε μηδενικά.

Οι σταθερές γ προκύπτουν ως εξής:

$$
\begin{aligned}
\gamma_1 &= \frac{\beta_{n-1}\beta_{n-2} - \beta_n\beta_{n-3}}{\beta_{n-1}} \\
\gamma_2 &= \frac{\beta_{n-1}\beta_{n-4} - \beta_n\beta_{n-5}}{\beta_{n-1}} \\
\gamma_3 &= \frac{\beta_{n-1}\beta_{n-6} - \beta_n\beta_{n-7}}{\beta_{n-1}}
\end{aligned}
\tag{7.1.2.2}
$$

κ.λ.π. έως ότου όλα τα γ γίνουν μηδέν. Τα δ προκύπτουν από τις σχέσεις (7.1.2.2) αλλά χρησιμοποιώντας τη δεύτερη και τρίτη σειρά δηλαδή

$$
\begin{aligned}
\delta_1 &= \frac{\gamma_1\beta_{n-3} - \beta_{n-1}\gamma_2}{\gamma_1} \\
\delta_2 &= \frac{\gamma_1\beta_{n-5} - \beta_{n-1}\gamma_3}{\gamma_1}
\end{aligned}
\tag{7.1.2.3}
$$

Οι δύο τελευταίες σειρές αποτελούνται μόνο από ένα μη μηδενικό στοιχείο. Ο πίνακας που προκύπτει λέγεται πίνακας Routh.

Το κριτήριο Routh λέει ότι: **ο αριθμός των ριζών που κείνται στο ανοικτό ΔΗΠ ισούται με τον αριθμό των αλλαγών στα πρόσημα των στοιχείων της πρώτης στήλης του πίνακα Routh για την περίπτωση μη μηδενικών στοιχείων στην πρώτη στήλη.**

Στο εξής όταν αναφερόμαστε στο ΑΗΠ ή στο ΔΗΠ θα εννοούμε το ανοικτό ΑΗΠ ή ΔΗΠ αντίστοιχα.

Παράδειγμα 7.1.2.1

Δίνεται το πολυώνυμο

$$s^3 - 2s^2 + 2s - 1 = 0$$

Επειδή οι συντελεστές είναι ετερόσημοι το πολυώνυμο θα έχει ρίζες στο ΔΗΠ. Πράγματι οι ρίζες είναι

$$s_1 = 1, \quad s_{2,3} = 1 \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Παράδειγμα 7.1.2.2

Δίνεται το πολυώνυμο

$$s^5 + 2s^4 + 14s^3 + 88s^2 + 200s + 800 = 0$$

Ο πίνακας Routh είναι:

$$\begin{array}{c|cccc} s^5 & 1 & 14 & 200 & 0 \\ s^4 & 2 & 88 & 800 & 0 \\ s^3 & -30 & -200 & 0 & \\ s^2 & 74.67 & 800 & 0 & \\ s^1 & 121 & 0 & & \\ s^0 & 800 & 0 & & \end{array}$$

Βλέπουμε ότι υπάρχουν δύο αλλαγές σημείου, άρα, δύο ρίζες στο ΔΗΠ. Πράγματι οι ρίζες είναι

$$s_1 = -4, \quad s_{2,3} = -1 \pm j3, \quad s_{4,5} = 2 \pm j4$$

7.1.3 Ειδικές περιπτώσεις πίνακα Routh

Κατά τον υπολογισμό του πίνακα Routh μπορεί να προκύψουν δύο προβλήματα.

1) Το πρώτο στοιχείο μίας σειράς είναι μηδέν ενώ τα υπόλοιπα είναι διάφορα του μηδενός .
2) ΄Ολα τα στοιχεία μίας σειράς είναι μηδέν.

1. Το πρώτο στοιχείο μίας σειράς είναι μηδέν ενώ τα υπόλοιπα είναι διάφορα του μηδενός.

Αυτό σημαίνει ότι το πολυώνυμο έχει τουλάχιστον μία ασταθή ρίζα.

Είναι φανερό ότι σε αυτή την περίπτωση τα στοιχεία της επόμενης σειράς απειρίζονται και δεν μπορεί να συνεχισθεί η κατασκευή του πίνακα Routh.

Αναφέρουμε τρεις τρόπους με τους οποίους μπορεί να αντιμετωπισθεί αυτό το πρόβλημα.

1α. Πολλαπλασιάζουμε το πολυώνυμο (την ευστάθεια του οποίου εξετάζουμε) επί (s+α) όπου α είναι ένας κατάλληλος, συνήθως θετικός, αριθμός και εξετάζουμε την ευστάθεια του νέου πολυωνύμου. Επειδή α>0 αν υπάρχουν ρίζες στο ΔΗΠ αυτές θα είναι ρίζες του αρχικού πολυωνύμου.

1β. Αντικαθιστούμε στο αρχικό πολυώνυμο s=1/p. Το πολυώνυμο που θα προκύψει έχει τον ίδιο αριθμό ριζών σε κάθε ημιεπίπεδο με το αρχικό.

1γ. Αντικαθιστούμε το στοιχείο που μηδενίστηκε με δ (όπου δ θεωρείται ένας μικρός θετικός αριθμός) και συνεχίζουμε την κατασκευή του πίνακα Routh.

Τα παραπάνω γίνονται καλύτερα κατανοητά μέσω του παραδείγματος 7.1.3.1

Παράδειγμα 7.1.3.1

Να εξετασθεί η ευστάθεια των πολυωνύμων

α) $(s-2)^2(s+4) = s^3 - 12s + 16$

β) $s^5+2s^4+3s^3+6s^2+2s+1$

Λύση

α) Σχηματίζουμε τον πίνακα Routh

$$\begin{array}{c|ll} s^3 & 1 & -12 \\ s^2 & 0 & 16 \\ s & & \\ s^0 & & \end{array}$$

και βλέπουμε ότι είναι μηδέν το πρώτο στοιχείο της δεύτερης σειράς. Πολλαπλασιάζουμε το αρχικό πολυώνυμο επί s+1 και έχουμε

$$s^4+s^3-12s^2+4s+16$$

Σχηματίζουμε τον πίνακα Routh

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & -12 & 16 \\ s^3 & 1 & 4 & 0 \\ s^2 & -16 & 16 & 0 \\ s & 5 & 0 & \\ s^0 & 16 & & \end{array}$$

Υπάρχουν δύο αλλαγές προσήμου άρα υπάρχουν δύο ρίζες στο ΔΗΠ. Αν θέσουμε s=1/p προκύπτει

$$16p^3-12p^2+1$$

και ο πίνακας Routh είναι,

$$\begin{array}{c|cc} p^3 & 16 & 0 \\ p^2 & -12 & 1 \\ p & 1.33 & 0 \\ p^0 & 1 & \end{array}$$

Δύο αλλαγές προσήμου άρα έχουμε δύο ρίζες στο ΔΗΠ. Προκύπτει δηλαδή το ίδιο αποτέλεσμα όπως και με την προηγούμενη μέθοδο.

β) Ο πίνακας Routh είναι:

$$
\begin{array}{c|cccc}
s^5 & 1 & 3 & 2 & 0 \\
s^4 & 2 & 6 & 1 & 0 \\
s^3 & \emptyset^{\delta} & 3/2 & 0 & \\
s^2 & \dfrac{6\delta-3}{\delta} & \dfrac{\delta}{\delta}=1 & 0 & \\
s^1 & \dfrac{18\delta-9-2\delta^2}{12\delta-6} & 0 & & \\
s^0 & 1 & 0 & &
\end{array}
$$

Επίσης

$$\lim_{\delta\to 0^+}\frac{6\delta-3}{\delta}=\lim_{\delta\to 0^+}\frac{6-3/\delta}{1}=-\infty$$

$$\lim_{\delta\to 0^+}\frac{18\delta-9-2\delta^2}{12\delta-6}=1.5$$

΄Αρα υπάρχουν δύο αλλαγές σημείου στην πρώτη στήλη και κατά συνέπεια υπάρχουν δύο ρίζες στο ΔΗΠ.

2. ΄Ολα τα στοιχεία μιας σειράς είναι μηδενικά

Αυτό σημαίνει ότι:

2α. υπάρχουν ρίζες συμμετρικές ως προς το φανταστικό άξονα (π.χ. $\alpha\pm j\beta$, $-\alpha\pm j\beta$)

2β. υπάρχουν ρίζες συζυγείς φανταστικές (π.χ. $\pm j\omega$).

Σε αυτές τις περιπτώσεις το σύστημα δεν είναι ευσταθές και δεν χρειάζεται να υπολογίσουμε τον πίνακα Routh εκτός αν θέλουμε να υπολογίσουμε τον αριθμό των ριζών που βρίσκονται στο ΔΗΠ.

Για να σχηματίσουμε τον πίνακα Routh χρησιμοποιούμε τη λεγόμενη βοηθητική εξίσωση η οποία σχηματίζεται χρησιμοποιώντας τους συντελεστές της σειράς πριν από τη σειρά με τα μηδενικά στοιχεία. Δηλαδή αντικαθιστούμε τη σειρά των μηδενικών με τους συντελεστές της παραγώγου της βοηθητικής εξίσωσης και συνεχίζουμε τον υπολογισμό του πίνακα Routh κανονικά. Η βοηθητική εξίσωση έχει μόνο άρτιες δυνάμεις του s και ο βαθμός της ισούται με το βαθμό της σειράς στον πίνακα Routh αμέσως πριν τη μηδενική σειρά.

Για παράδειγμα παίρνουμε την εξίσωση

$$(s-1+j2)(s-1-j2)(s+1+j2)(s+1-j2)(s+4)$$

$$=s^5+4s^4+6s^3+24s^2+25s+100=0$$

Ο πίνακας Routh είναι

$$\begin{array}{c|ccc}
s^5 & 1 & 6 & 25 \\
s^4 & 4 & 24 & 100 \\
s^3 & 0 & 0 & 0 \\
s^2 & & & \\
s & & & \\
s^0 & & &
\end{array}$$

Δηλαδή η τρίτη σειρά έχει όλα τα στοιχεία της μηδενικά.
Η βοηθητική εξίσωση είναι

$$4s^4+24s^2+100$$

και η παράγωγός της είναι

$$16s^3+48s$$

οπότε ο πίνακας Routh σχηματίζεται αντικαθιστώντας τα στοιχεία της μηδενικής σειράς με τους συντελεστές της παραγώγου της βοηθητικής εξίσωσης

$$
\begin{array}{r|ccc}
s^5 & 1 & 6 & 25 \\
s^4 & 4 & 24 & 100 \\
s^3 & 16 & 48 & 0 \\
s^2 & 12 & 100 & 0 \\
s & -85.33 & 0 & \\
s^0 & 100 & &
\end{array}
$$

΄Εχουμε δύο αλλαγές προσήμου άρα υπάρχουν δύο ρίζες στο ΔΗΠ, οι 1±j2.
Οι ρίζες της βοηθητικής εξίσωσης εύκολα προκύπτουν -1±j2 και 1±j2.

7.1.4 Κριτήριο Hurwitz

Από την χαρακτηριστική Εξ. (7.1.2.1) σχηματίζουμε τις ακόλουθες ορίζουσες, n τον αριθμό,

$$
A_1 = \beta_{n-1}, \quad A_2 = \begin{vmatrix} \beta_{n-1} & \beta_{n-3} \\ \beta_n & \beta_{n-2} \end{vmatrix}, \quad A_3 = \begin{vmatrix} \beta_{n-1} & \beta_{n-3} & \beta_{n-5} \\ \beta_n & \beta_{n-2} & \beta_{n-4} \\ 0 & \beta_{n-1} & \beta_{n-3} \end{vmatrix} \qquad (7.1.4.1)
$$

Το κριτήριο Hurwitz λέει ότι: Αν όλες οι ορίζουσες A είναι θετικές τότε όλες οι ρίζες κείνται στο ΑΗΠ και αντίστροφα.

Ο αλγόριθμος Hurwitz απαιτεί πιο πολλές πράξεις από εκείνον του Routh γιαυτό χρησιμοποιείται κυρίως ο αλγόριθμος Routh.

7.1.5 Περιοχή τιμών ευστάθειας

Όταν συντελεστές της χαρακτηριστικής εξίσωσης ενός συστήματος είναι γραμμικές συναρτήσεις κάποιου κέρδους k το κριτήριο Routh μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό της περιοχής τιμών του k μέσα στην οποία το σύστημα παραμένει ευσταθές. Ας πάρουμε, για παράδειγμα, ότι η χαρακτηριστική εξίσωση ενός συστήματος είναι:

$$s^3 + 6s^2 + 2ks + 10 + k = 0$$

Ο πίνακας Routh είναι

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 2k \\ s^2 & 6 & 10+k \\ s & \dfrac{12k-10-k}{6} & 0 \\ s^0 & 10+k & \end{array}$$

Για να μην υπάρχει αλλαγή προσήμου και άρα η χαρακτηριστική εξίσωση να έχει όλες τις ρίζες στο ΑΗΠ πρέπει

$$11k-10>0$$

και

$$10+k>0$$

από όπου προκύπτει $k > \dfrac{10}{11}$. Αυτό σημαίνει ότι για οποιαδήποτε τιμή του k μεγαλύτερη από $\dfrac{10}{11}$ το σύστημα με την παραπάνω χαρακτηριστική εξίσωση είναι ευσταθές.

7.2 ΚΡΙΤΗΡΙΟ NYQUIST

7.2.1 Αρχή του ορίσματος (principle of the argument)

Πρώτα πρέπει να θυμίσουμε μερικές βασικές έννοιες. Θετική φορά διαγραφής μίας καμπύλης είναι η ωρολογιακή φορά κατά συνέπεια αρνητική φορά είναι η ανθωρολογιακή φορά.

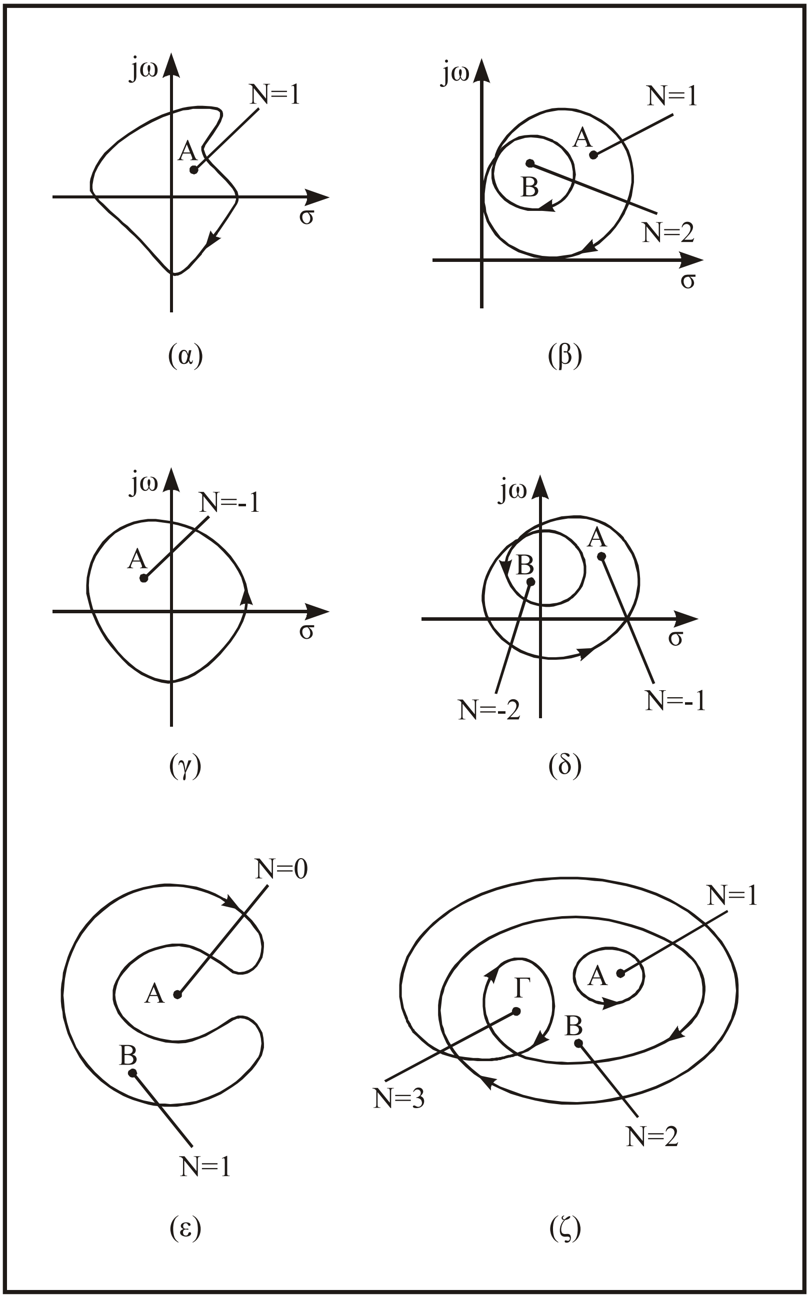
Ο αριθμός περικυκλώσεων, N, δηλαδή το πόσες φορές περικλείει μία καμπύλη C ένα σημείο A υπολογίζεται ως εξής: Χαράζουμε μία ευθεία που αρχίζει από το σημείο A και κατευθύνεται προς το άπειρο προς οποιαδήποτε κατεύθυνση. Ο αριθμός των τομών της ευθείας από την καμπύλη C που γίνονται κατά τη θετική φορά (ωρολογιακή) μετρούν θετικά ενώ ο αριθμός των τομών της ευθείας από την καμπύλη C που γίνονται κατά την αρνητική φορά (ανθωρολογιακή) μετρούν αρνητικά. Το αλγεβρικό άθροισμα του αριθμού των τομών της ευθείας από την καμπύλη C ισούται με τον αριθμό περικυκλώσεων N. Είναι φανερό ότι το N μπορεί να είναι θετικό, αρνητικό ή μηδέν. Μερικά παραδείγματα φαίνονται στο Σχ. 7.2.1.1.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μία μονοσήμαντη (δηλ. παίρνει μόνο μία τιμή) συνάρτηση F(s) που ορίζεται στο επίπεδο s (θεωρούμε $s=\sigma+j\omega$) και είναι αναλυτική [1] σε μία περιοχή, D, του επιπέδου s εκτός από ένα πεπερασμένο αριθμό σημείων στη D.

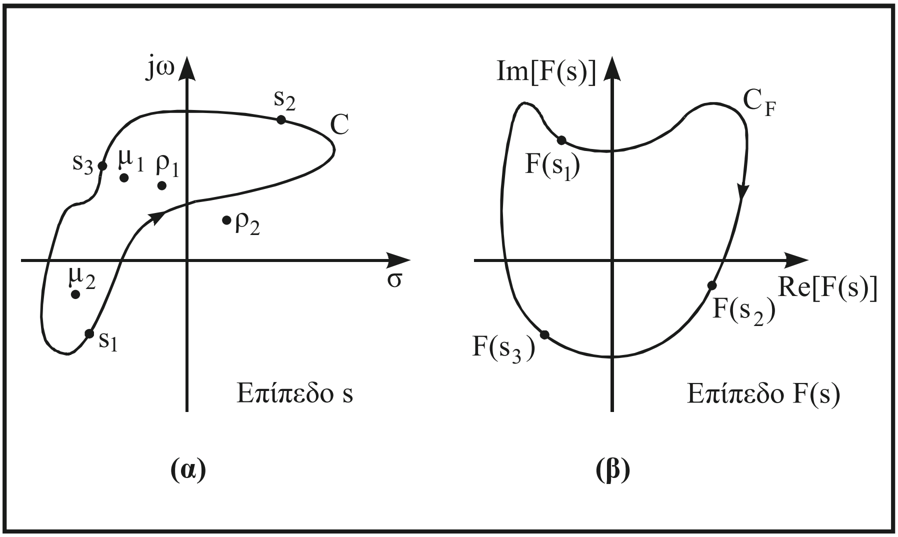
Θεωρούμε μία κλειστή, απλή (δηλαδή δεν τέμνει τον εαυτό της) και συνεχή καμπύλη C στο επίπεδο s όπως στο Σχ. 7.2.1.2α. Υποθέτουμε ότι όλα τα σημεία της C βρίσκονται μέσα στη περιοχή D που η F(s) είναι αναλυτική. Τότε η απεικόνιση της καμπύλης C στο επίπεδο F(s) μέσω της συνάρτησης F(s) (δηλαδή το s απεικονίζεται στο F(s)) είναι επίσης μία κλειστή καμπύλη που τη συμβολίζουμε με C_F. Αν η C διαγράφεται ανθωρολογιακά από s_1 σε s_2 και s_3 όπως στο Σχ. 7.2.1.2α η C_F διαγράφεται ωρολογιακά ή ανθωρολογιακά ανάλογα με τη συνάρτηση F(s). Στο Σχ. 7.2.1.2β η C_F διαγράφεται ωρολογιακά.

---

1. Μία συνάρτηση της μιγαδικής μεταβλητής s λέγεται **αναλυτική** σε ένα σημείο s_0 αν έχει παράγωγο ως προς s στο σημείο s_0 σε κάθε σημείο μέσα σε μια γειτονιά του s_0. Επίσης λέγεται αναλυτική σε μία περιοχή D αν σε όλα τα σημεία του D είναι αναλυτική. Αν η συνάρτηση είναι αναλυτική στη περιοχή D εκτός από πεπερασμένο αριθμό σημείων, τα σημεία στα οποία δεν είναι αναλυτική λέγονται **ανώμαλα**. Μία ρητή συνάρτηση P(s)/Q(s) δύο πολυωνύμων είναι αναλυτική για την περιοχή που $Q(s)\neq 0$. ΄Αρα η P(s)/Q(s) είναι αναλυτική σε όλο το επίπεδο s εκτός από τα σημεία του επιπέδου s που είναι οι πόλοι της P(s)/Q(s) [Churchill].


jω
N=1
A
σ
(α)
jω
N=1
A
B
N=2
σ
(β)
jω
N=-1
A
σ
(γ)
jω
A
B
σ
N=-2
N=-1
(δ)
N=0
A
B
N=1
(ε)
N=1
A
Γ
B
N=3
N=2
(ζ)

Σχήμα 7.2.1.1



Σχήμα 7.2.1.2

Η αρχή του ορίσματος (principle of the argument)

Έστω F(s) μία μονοσήμαντη, ρητή συνάρτηση δύο πολυωνύμων, C μία απλή κλειστή καμπύλη στο επίπεδο s που δεν περνάει από κανένα πόλο και κανένα μηδενικό της F(s) και C_F η καμπύλη που είναι η απεικόνιση της C στο επίπεδο F(s) μέσω της συνάρτησης F(s). Ο αριθμός περικυκλώσεων, N, της αρχής των αξόνων από την C_F είναι

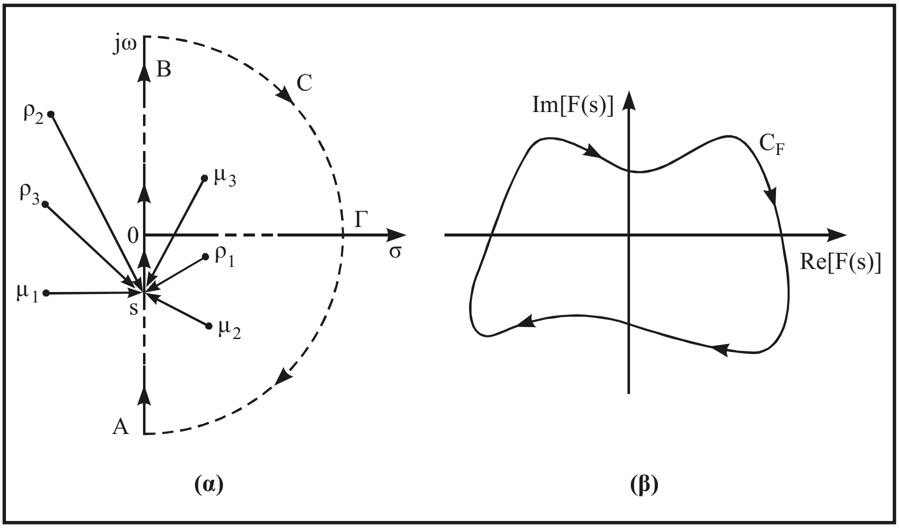
$$N = Z - P$$

όπου Z είναι ο αριθμός των μηδενικών της F(s) που βρίσκονται μέσα στην περιοχή που περικλείεται από τη C και P είναι ο αριθμός των πόλων της F(s) που βρίσκονται μέσα στην περιοχή που περικλείεται από τη C [Churchill].

Η απόδειξη της αρχής του ορίσματος δεν δίνεται εδώ και μπορεί να βρεθεί κυρίως σε βιβλία μιγαδικών συναρτήσεων. Θα δώσουμε μόνο μία απλή δικαιολόγηση της αρχής του ορίσματος. Ας θεωρήσουμε την καμπύλη C (που αποτελείται από τον φανταστικό άξονα και την άπειρη ημιπεριφέρεια του δεξιού ημιεπιπέδου) του Σχ. 7.2.1.3α. Η συνάρτηση F(s) θεωρείται ότι έχει ίσο αριθμό μηδενικών και πόλων και μπορεί να γραφεί,

$$F(s) = \prod_{i=1}^{K} \frac{|s-\mu_i|}{|s-\rho_i|} e^{j\sum_{i=1}^{K}(\angle s-\mu_i - \angle s-\rho_i)}$$

μ_i είναι τα μηδενικά και ρ_i οι πόλοι της F(s) (γωνία που προκύπτει από την κίνηση ενός ανύσματος ανθωρολογιακά είναι θετική).

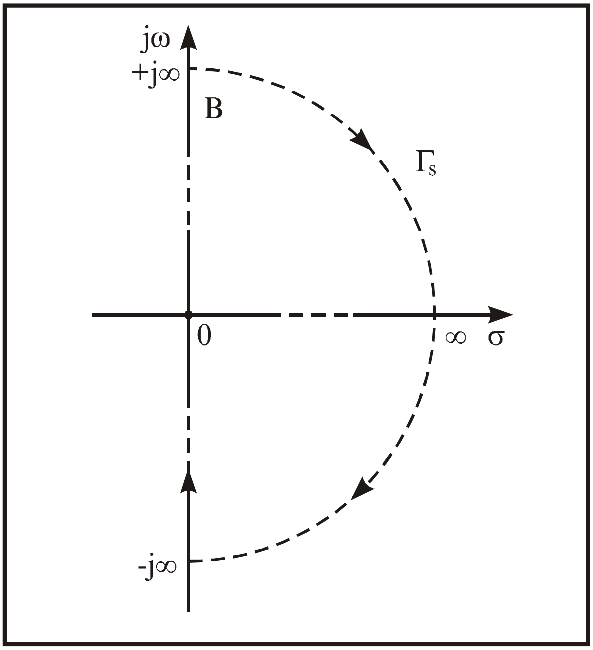


Σχήμα 7.2.1.3

Το ΔΗΠ περικλείεται από την καμπύλη C που αποτελείται από τον φανταστικό άξονα και την άπειρη ημιπεριφέρεια του δεξιού ημιεπιπέδου. Ενδιαφερόμαστε να βρούμε την καμπύλη C_F (Σχ. 7.2.1.3β) που γράφει η F(s) στο μιγαδικό επίπεδο όταν το s κινείται πάνω στην C κατά την ωρολογιακή φορά. Η γραφική παράσταση της F(s) φαίνεται στο Σχ. 7.2.1.3β. Είναι φανερό ότι κάθε πόλος, ρ, ή μηδενικό, μ, της F(s) που περικλείεται από την καμπύλη C συνεισφέρει κατά +2π ή –2π αντίστοιχα (όταν το s διαγράψει όλη την C) στην αλλαγή της φάσης της συνάρτησης F(s). Αντίθετα πόλοι ή μηδενικά της F(s) που δεν περικλείονται από την καμπύλη C δεν συνεισφέρουν καθόλου στη φάση της συνάρτησης F(s) διότι ότι συνεισφέρεται κατά την κίνηση του s πάνω σε ένα τμήμα της C εξουδετερώνεται από την αντίστοιχη αρνητική συνεισφορά κατά την κίνηση του s πάνω στο υπόλοιπο τμήμα της C (π.χ. για το μηδενικό μ_1 η θετική συνεισφορά στην φάση της F(s) γίνεται κατά την κίνηση του s πάνω στο τμήμα AOB και η αρνητική, που είναι κατά απόλυτη τιμή ίση με την θετική, γίνεται κατά την κίνηση του s πάνω στο τμήμα ΒΓΑ). Άρα $-2\pi N = -2\pi Z + 2\pi P$, από όπου προκύπτει $N=Z-P$.

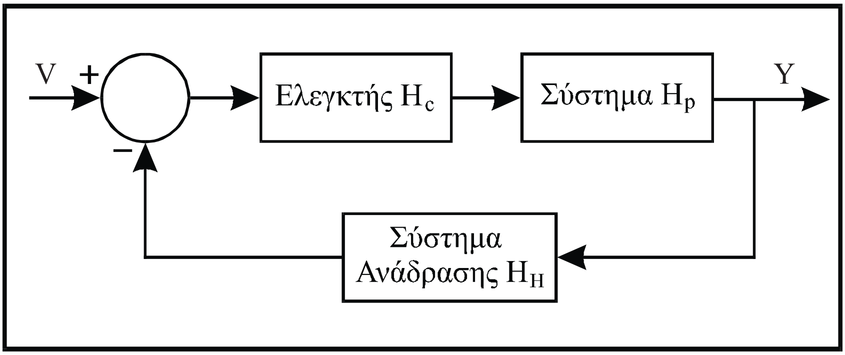
7.2.2 Κριτήριο Nyquist

Θα εξετάσουμε πάλι την καμπύλη C που περικλείει το ΔΗΠ του επιπέδου s, όπως φαίνεται στο Σχ. 7.2.2.1, κατά τη θετική (ωρολογιακή) φορά. Αυτή η καμπύλη αποτελείται από τον φανταστικό άξονα και ένα ημικύκλιο άπειρης ακτίνας και λέγεται **διαδρομή ή καμπύλη Nyquist** και τη συμβολίζουμε με Γ_s.



Σχήμα 7.2.2.1

Ας πάρουμε ένα σύστημα κλειστού βρόχου όπως φαίνεται στο Σχ. 7.2.2.2.



Σχήμα 7.2.2.2

Η συνάρτηση μεταφοράς του είναι:

$$H_K(s) = \frac{H_C(s)H_p(s)}{1+H_H(s)H_C(s)H_p(s)} = \frac{G(s)}{1+H_H(s)G(s)} = \frac{G(s)}{1+A(s)} \qquad (7.2.2.1)$$

Όπου

$$A(s) = H_H(s)G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

και

$$1+A(s) = \frac{N(s)+D(s)}{D(s)} = \frac{(s-\mu_1)(s-\mu_2)...(s-\mu_K)}{(s-\rho_1)(s-\rho_2)...(s-\rho_K)} \qquad (7.2.2.2)$$

Το γινόμενο των συναρτήσεων μεταφοράς κατά μήκος όλου του βρόχου, δηλαδή $A(s) = H_H(s)H_c(s)H_p(s)$ στην περίπτωση του Σχ. 7.2.2.2, λέγεται **συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόχου (open loop transfer function) ή κέρδος βρόχου (loop gain). Το 1+A(s) ονομάστηκε από τον Bode επιστρέφουσα διαφορά (return difference).**

Επειδή H_H, H_C και H_P είναι συναρτήσεις μεταφοράς πραγματικών συστημάτων πρέπει ο αριθμός των σημείων μηδενισμού τους να είναι μικρότερος ή ίσος με τον αριθμό των πόλων τους άρα οι ρίζες της N(s) είναι λιγότερες ή ίσες σε σχέση με τις ρίζες της D(s) κατά συνέπεια ο αριθμός των ριζών της N(s)+D(s) ισούται με τον αριθμό των ριζών της D(s). Η Εξ. (7.2.2.2) μπορεί να γραφεί:

$$1 + A(s) = \prod_{i=1}^{K} \frac{|s-\mu_i|}{|s-\rho_i|} e^{j\sum_{i=1}^{K}(\angle s-\mu_i - \angle s-\rho_i)} \qquad (7.2.2.3)$$

Εφαρμόζουμε τώρα την αρχή του ορίσματος παίρνοντας ως καμπύλη C την καμπύλη Nyquist και συνάρτηση F(s)=1+A(s) και προκύπτει ότι ο αριθμός των περικυκλώσεων N της αρχής των αξόνων από τη C_F (θεωρούμε ότι κανένα μηδενικό και κανένας πόλος της 1+A(s) δεν κείται πάνω στην καμπύλη Nyquist) είναι:

$$N = Z - P$$

όπου Z: ο αριθμός των μηδενικών της 1+A(s), ο οποίος είναι ίσος με τον αριθμό των πόλων της $H_K(s)$ που βρίσκονται στο ΔΗΠ, και

P: ο αριθμός των πόλων της 1+A(s) που βρίσκονται στο ΔΗΠ[1].

Για λόγους ευκολίας αντί να σχεδιασθεί η καμπύλη C_F σχεδιάζεται η C_A (που είναι η καμπύλη που προκύπτει χρησιμοποιώντας την A(s) για την απεικόνιση της καμπύλης Nyquist). Η C_A είναι στην πραγματικότητα η C_F μετατοπισμένη κατά –1. Άρα αντί να μετράμε τον αριθμό περικυκλώσεων της αρχής των αξόνων από την C_F μετράμε τώρα (είναι το ίδιο πράγμα) τον αριθμό των περικυκλώσεων του σημείου –1 από την καμπύλη C_A. Η καμπύλη C_A λέγεται **διάγραμμα Nyquist** και σχεδιάζεται υπολογίζοντας την A(s) για s=jω όπου το ω αρχίζει από το +0 αυξάνει και γίνεται +∞ μετά ακολουθεί το άπειρο ημικύκλιο του Σχ. 7.2.2.1 και γίνεται -∞ και τέλος μειώνεται για να φτάσει το –0.

Έτσι προκύπτει το **κριτήριο Nyquist**:

Ο αριθμός των περικυκλώσεων, N, του σημείου –1 από το διάγραμμα Nyquist είναι

$$N = Z - P$$

όπου Z: ο αριθμός των μηδενικών της 1+A(s) (δηλαδή ο αριθμός των πόλων της $H_K(s)$) που βρίσκονται στο ΔΗΠ και

P: ο αριθμός των πόλων της 1+A(s) που βρίσκονται στο ΔΗΠ.

Εδώ πρέπει να υπενθυμίσουμε ότι οι πόλοι της 1+A(s) είναι οι ρίζες της D(s) (Εξ. (7.2.2.2)). Επίσης οι πόλοι της A(s) είναι οι ρίζες της

1 Αναφερόμαστε στο ανοικτό ΔΗΠ.