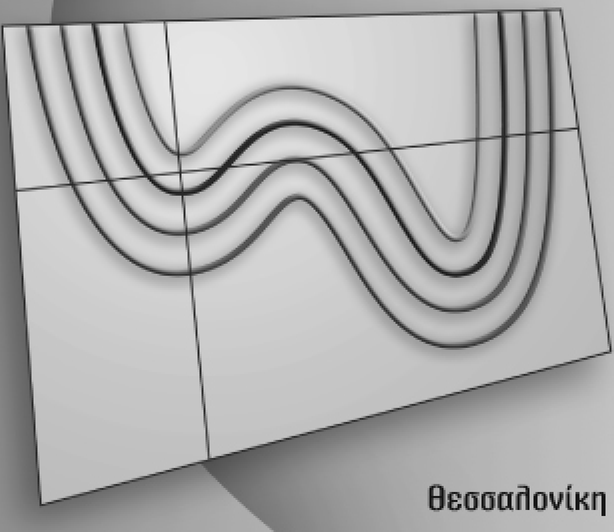
ΑΝΔΡΕΑΣ Λ. ΠΕΤΡΑΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ • ΔΙΔΑΚΤΩΡ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΛΕΩΝΙΔΑΣ Α. ΠΕΤΡΑΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ • ΔΙΔΑΚΤΩΡ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Η Πλήρης Τεταρτοβάθμια Εξίσωση

· ΤΟ ΕΙΔΟΣ ΤΩΝ ΡΙΖΩΝ ΤΗΣ
· ΟΙ ΤΥΠΟΙ ΤΩΝ ΡΙΖΩΝ ΤΗΣ

ΜΟΝΟΓΡΑΦΙΑ



Θεσσαλονίκη 2008

Περιεχόμενα

Πρόλογος

Διερεύνηση και λύση της πλήρους τεταρτοβάθμιας εξίσωσης με πραγματικούς συντελεστές.

Ίσως ένα από τα πιο παραμελημένα θέματα των μαθηματικών με ελάχιστη βιβλιογραφία. Μάλιστα, ότι υπάρχει στην βιβλιογραφία, αναφέρεται μόνο στην λύση της (Ferrari) και τίποτε για την διερεύνησή της.

Όπως στην περίπτωση της πλήρους τριτοβάθμιας εξίσωσης έτσι και στην περίπτωση της πλήρους τεταρτοβάθμιας εξίσωσης τα ερωτήματα που θέσαμε ήταν

- υπάρχουν για την πλήρη τεταρτοβάθμια εξίσωση «διακρίνουσες» και αν ναι, ποιές μπορεί να είναι;
- με δεδομένο ότι υπάρχουν εννιά δυνατές περιπτώσεις για το είδος των ριζών μιας τεταρτοβάθμιας εξίσωσης, πόσες τελικά διακρίνουσες χρειαζόμαστε.
- Υπάρχουν τύποι, που μας δίνουν τις ρίζες της εξίσωσης, σε όλες τις περιπτώσεις;

Αυτό που μας ενδιέφερε ήταν **να βρούμε, «απλές» ικανές και αναγκαίες συνθήκες ώστε η πλήρης τεταρτοβάθμια εξίσωση να έχει τα εννιά διαφορετικά είδη των ριζών.**

Ορίσαμε τρείς «διακρίνουσες» d_1, d_2 και d_3, οι οποίες είναι οι απλούστερες δυνατές, που μπορούν να οριστούν και με την βοήθεια των οποίων διερευνάται πλήρως η τεταρτοβάθμια εξίσωση.

Στην μονογραφία μας αυτή εκτός της πλήρους διερεύνησης της εξίσωσης τετάρτου βαθμού, **περιέχονται και οι τύποι εύρεσης των ριζών της και αυτό ανεξάρτητα από το είδος των ριζών της εξίσωσης**. Επίσης περιέχεται και η δουλειά που έγινε μέχρι σήμερα κατάλληλα απλοποιημένη και ειδικά επεξεργασμένη, ώστε ο μελετητής να έχει συγκεντρωμένη την υπάρχουσα γνώση για το θέμα αυτό.

Πρέπει να ευχαριστήσω, για μια ακόμη φορά, και δημόσια το φίλο και συνάδελφο **Αθανάσιο Π. Φρυγανιώτη**, διευθυντή και ιδιοκτήτη των **ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΩΝ ΦΡΥΓΑΝΙΩΤΗ**, για όλα όσα έκανε και προσέφερε για την έκδοση και του τεύχους αυτού. Απέδειξε για μια ακόμη φορά ότι, εκτός από άρι-

στος επαγγελματίας, είναι και επιστήμονας, με ιδιαίτερο ενδιαφέρον και αγάπη για την επιστήμη του, τα μαθηματικά, μη φειδόμενος κόπων και εξόδων, βοηθώντας κάθε επιστημονική δραστηριότητα, ατομική ή συλλογική.

Ανδρέας Λ. Πετράκης
Διδάκτωρ των Μαθηματικών
Καθηγητής του Γενικού Τμήματος
Θετικών Επιστημών του ΤΕΙ Δυτικής Μακεδονίας

Εισαγωγή

Θέτω $f(x)=\alpha x^4+\beta x^3+\gamma x^2+\delta x+\varepsilon$, με $a\neq 0$ και $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon\in\mathbb{R}$.
Τότε η παράγωγος του πολυώνυμου $f(x)$ είναι

$$f'(x)=4\alpha x^3+3\beta x^2+2\gamma x+\delta .$$

Η συνάρτηση λοιπόν $f'(x)$ είναι πολυώνυμο τρίτου βαθμού και όπως γνωρίζουμε ([1] σελίδα 24) έχει διακρίνουσες τους πραγματικούς αριθμούς

$$s_1=3\beta^2-8\alpha\gamma \quad \text{και} \quad s_2=32\alpha\gamma^3+27\delta\beta^3+108\alpha^2\delta^2-9\beta^2\gamma^2-108\alpha\beta\gamma\delta .$$

Οι διακρίνουσες s_1,s_2 συνδέονται με τη σχέση

$$108a^2s_2=729(\beta^3-4\alpha\beta\gamma+8\alpha^2\delta)^2-s_1^3 . \quad \text{([1] σελίδα 9)}$$

Έτσι αν δύο από τις ποσότητες s_1, s_2 και $\beta^3-4\alpha\beta\gamma+8\alpha^2\delta$ είναι μηδέν, θα είναι και η τρίτη μηδέν.
Συμβολίζουμε με ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4 τις τέσσερις ρίζες της εξίσωσης

$$f(x)=\alpha x^4+\beta x^3+\gamma x^2+\delta x+\varepsilon=0 ,$$

ανεξάρτητα αν είναι πραγματικές ή μιγαδικές ή αν είναι ίσες ή άνισες, όλες ή μερικές από αυτές.
Συμβολίζουμε με x_1, x_2, x_3 τις τρεις ρίζες της εξίσωσης

$$f'(x)=4\alpha x^3+2\beta x^2+2\gamma x+\delta=0 ,$$

ανεξάρτητα αν είναι αν ίσες ή άνισες όλες ή μερικές από αυτές, ή αν είναι πραγματικές ή πραγματικές και μιγαδικές.
Θέτουμε

$$d_1=f(x_1)+f(x_2)+f(x_3) ,$$

$$d_2=f(x_1)f(x_2)+f(x_2)f(x_3)+f(x_3)f(x_1) ,$$

$$d_3=f(x_1)f(x_2)f(x_3) .$$

Τι ποσότητες d_1, d_2, d_3 τις ονομάζουμε διακρίνουσες του πολυώνυμου $f(x)$.
Επειδή οι αριθμοί x_1, x_2, x_3 είναι οι ρίζες του πολυώνυμου
$f'(x)=4\alpha x^3+2\beta x^2+2\gamma x+\delta$ θα ισχύει

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{3\beta}{4\alpha},$$

$$\sigma_2 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{\gamma}{2\alpha},$$

$$\sigma_3 = x_1x_2x_3 = -\frac{\delta}{4\alpha}.$$

Μπορεί να αποδειχθεί ότι ισχύουν οι σχέσεις

1) Συμμετρικές παραστάσεις πρώτου βαθμού.

$$x_1 + x_2 + x_3 = \sigma_1$$

2) Συμμετρικές παραστάσεις δευτέρου βαθμού.

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \sigma_2$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$$

3) Συμμετρικές παραστάσεις τρίτου βαθμού.

$$x_1x_2x_3 = \sigma_3$$

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$$

$$x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2 + x_3^2x_1 + x_3x_1^2 = \sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3$$

4) Συμμετρικές παραστάσεις τετάρτου βαθμού.

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3$$

$$x_1^2x_2^2 + x_2^2x_3^2 + x_3^2x_1^2 = \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3$$

$$x_1^3x_2 + x_1x_2^3 + x_2^3x_3 + x_2x_3^3 + x_3^3x_1 + x_3x_1^3 = \sigma_1^2\sigma_2 - 2\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_3$$

5) Συμμετρικές παραστάσεις πέμπτου βαθμού.

$$x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 = \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1^2\sigma_3 + 5\sigma_1\sigma_2^2 - 5\sigma_2\sigma_3$$

$$x_1^3x_2^2 + x_1^2x_2^3 + x_2^3x_3^2 + x_2^2x_3^3 + x_3^3x_1^2 + x_3^2x_1^2 = \sigma_1\sigma_2^2 - 2\sigma_1^2\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3$$

$$x_1^4x_2 + x_1x_2^4 + x_2^4x_3 + x_2x_3^4 + x_3^4x_1 + x_3x_1^4 = \sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_2\sigma_3 - 3\sigma_1\sigma_2^2 - \sigma_1^2\sigma_3$$

6) Συμμετρικές παραστάσεις έκτου βαθμού.

$$x_1^6 + x_2^6 + x_3^6 = \sigma_1^6 - 6\sigma_1^4\sigma_2 + 9\sigma_1^2\sigma_2^2 - 2\sigma_2^3 + 6\sigma_1^3\sigma_3 - 12\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + 3\sigma_3^2$$

$$x_1^3x_2^3 + x_2^3x_3^3 + x_3^3x_1^3 = \sigma_2^3 - 3\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + 3\sigma_3^2$$

$$x_1^4x_2^2 + x_1^2x_2^4 + x_2^4x_3^2 + x_2^2x_3^4 + x_3^4x_1^2 + x_3^2x_1^4 = \sigma_1^2\sigma_2^2\text{-}2\sigma_2^3 - 2\sigma_1^3\sigma_3 +$$

$$+4\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - 3\sigma_3^2$$

7) Συμμετρικές παραστάσεις εβδόμου βαθμού.

$$x_1^7 + x_2^7 + x_3^7 = \sigma_1^7 - 7\sigma_1^5\sigma_2 + 14\sigma_1^3\sigma_2^2 - 7\sigma_1\sigma_2^3 + 7\sigma_1^4\sigma_3 - 21\sigma_1^2\sigma_2\sigma_3 +$$

$$+7\sigma_2^2\sigma_3 + 7\sigma_1\sigma_3^2$$

$$x_1^4x_2^3 + x_1^3x_2^4 + x_2^4x_3^3 + x_2^3x_3^4 + x_3^4x_1^3 + x_3^3x_1^4 = \sigma_1\sigma_2^3\text{-}3\sigma_1^2\sigma_2\sigma_3 - \sigma_2^2\sigma_3 + 5\sigma_1\sigma_3^2$$

8) Συμμετρικές παραστάσεις ογδόου βαθμού.

$$x_1^4x_2^4 + x_2^4x_3^4 + x_3^4x_1^4 = \sigma_2^4 - 4\sigma_1\sigma_2^2\sigma_3 + 2\sigma_1^2\sigma_3^2 + 4\sigma_2\sigma_3^2$$

Μετά από πράξεις προκύπτει ότι οι **διακρίνουσες** $d_1,\ d_2,\ d_3$ της εξίσωσης

$$f(x) = \alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \varepsilon = 0$$

δίνονται από τους τύπους

$$d_1 = \frac{-27\beta^4 + 144\alpha\beta^2\gamma - 128\alpha^2\gamma^2 - 192\alpha^2\beta\delta + 768\alpha^3\varepsilon}{256\alpha^3}$$

$$d_2 = \frac{-2\beta^2\gamma^3 + 8\alpha\gamma^4 + 9\beta^3\gamma\delta - 40\alpha\beta\gamma^2\delta - 3\alpha\beta^2\delta^2 + 72\alpha^2\gamma\delta^2 - 27\beta^4\varepsilon}{128\alpha^3} +$$

$$+\frac{144\alpha\beta^2\gamma\varepsilon - 128\alpha^2\gamma^2\varepsilon - 192\alpha^2\beta\delta\varepsilon + 384\alpha^3\varepsilon^2}{128\alpha^3}$$

$$d_3 = \frac{\beta^2\gamma^2\delta^2 - 4\alpha\gamma^3\delta^2 - 4\beta^3\delta^3 + 18\alpha\beta\gamma\delta^3 - 27\alpha^2\delta^4 - 4\beta^2\gamma^3\varepsilon}{256\alpha^3} +$$

$$+\frac{16\alpha\gamma^4\varepsilon + 18\beta^3\gamma\delta\varepsilon - 80\alpha\beta\gamma^2\delta\varepsilon - 6\alpha\beta^2\delta^2\varepsilon + 144\alpha^2\gamma\delta^2\varepsilon}{256a^3} +$$

$$+\frac{-128\alpha^2\gamma^2\varepsilon^2 - 192\alpha^2\beta\delta\varepsilon^2 + 256\alpha^3\varepsilon^3}{256\alpha^3}$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας σε όλες τις επόμενες αποδείξεις υποθέτω ότι είναι $a > 0$.