

Περιεχόμενα

Πρόλογος.....	7
Ίσες συναρτήσεις και συναρτήσεις 1–1	11
Ορισμός αντίστροφης συνάρτησης.....	12
Η μόνη συνάρτηση που είναι ίση με την αντίστοχό της είναι η ταυτοτική.....	13
<i>Συμπεράσματα</i>	15
Βασικές ιδιότητες αντίστροφων συναρτήσεων.....	16
Τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων δύο συναρτήσεων	17
<i>Εύρεση των κοινών τους σημείων</i>	18
Τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων δύο αντίστροφων συναρτήσεων	19
<i>Εύρεση των κοινών τους σημείων</i>	20
<i>Σημαντική Παρατήρηση</i>	21
<i>Παραδείγματα</i>	21
Σύνθεση συναρτήσεων και αντίστροφες συναρτήσεις	29
<i>Παραδείγματα</i>	31

Πρόλογος

Στις 12 Νοεμβρίου 2006, εισηγήθηκα στην

**ΔΕΥΤΕΡΗ ΗΜΕΡΙΔΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ**

που πραγματοποιήθηκε στα **ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΑ ΦΡΥΓΑΝΙΩΤΗ** στη Θεσσαλονίκη το θέμα

**«ΚΙ ΟΜΩΣ ..., ΤΑ ΚΟΙΝΑ ΣΗΜΕΙΑ ΤΩΝ ΓΡΑΦΙΚΩΝ
ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ ΔΥΟ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ,
ΑΝ ΥΠΑΡΧΟΥΝ, ΒΡΙΣΚΟΝΤΑΙ ΜΟΝΟ ΠΑΝΩ ΣΤΗΝ ΕΥΘΕΙΑ $y=x$ »**

Υπήρχαν δύο λόγοι που με «προκάλεσαν» να εισηγηθώ το παραπάνω θέμα.

Ο πρώτος λόγος ήταν, ότι θα απευθυνόμουν κυρίως σε Καθηγητές Μαθηματικών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης, άρα είναι ένα ενδιαφέρον θέμα γι' αυτούς, σκέφθηκα, καθότι περιλαμβάνεται στην διδασκόμενη ύλη της Τρίτης Λυκείου.

Ο δεύτερος και κύριος λόγος ήταν η διαπίστωση που έκανα, ότι σχεδόν σε όλα τα βοηθήματα των μαθηματικών της Τρίτης Λυκείου, αλλά και σε αρκετά άρθρα του περιοδικού «ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ Β» της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, γράφτηκε με απόλυτη βεβαιότητα, ότι ισχύει το αντίθετο από αυτό που δηλώνει ο τίτλος της εισήγησής μου. Δηλαδή ότι υπάρχουν αντίστροφες συναρτήσεις με κοινά σημεία των γραφικών τους παραστάσεων εκτός της διχοτόμου $y=x$.

Επιπλέον μετά από συζητήσεις με συναδέλφους της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης διαπίστωσα, ότι αυτή η εσφαλμένη άποψη, διδάσκεται σχεδόν σε όλα τα Λύκεια. Ήταν δε τόσο σίγουροι οι συνάδελφοι για το αληθές των απόψεών τους, που μερικοί φίλοι με προειδοποίησαν, ότι είναι ρίσκο αυτό που πάω να κάνω και να προσέξω να μην εκτεθώ!

Φυσικά η προσωπική μου επιστημονική άποψη διατυπώνεται με απόλυτη σαφήνεια στον τίτλο της εισήγησής μου.

Είναι προφανές και γνωστό σε όλους, ότι το ίδιο πιστεύει και όλη η ακαδημαϊκή κοινότητα στην Ελλάδα και το εξωτερικό. Επίσης την ίδια άποψη συναντά κανείς και στην διεθνή βιβλιογραφία, καθώς και στα άρθρα και παρουσιάσεις στο διαδίκτυο.

Εξάλλου το θέμα της αντιστροφής μιας συνάρτησης δεν είναι τίποτε άλλο παρά ένα πρόβλημα γραμμικού μετασχηματισμού του συνόλου R^2 με πίνακα μετασχηματισμού τον $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Συγκεκριμένα πρόκειται για τον γραμμικό μετασχηματισμό $R^2 \ni (x, y) \rightarrow (y, x) \in R^2$. Το σύνολο των αναλλοίωτων σημείων του μετασχηματισμού αυτού είναι το $K = \{(x, x) / x \in R\}$. Προφανώς τα στοιχεία του συνόλου αυτού απεικονίζονται στα σημεία της ευθείας $y=x$. Αυτό σημαίνει ότι τα κοινά σημεία των συνόλων

$$C(f) = \{M(x, f(x)) / x \in D(f)\} \quad \text{και} \quad C(f^{-1}) = \{N(f(x), x) / x \in D(f)\}$$

είναι αυτά για τα οποία ισχύει $(x, f(x)) \in K$, δηλαδή είναι $f(x) = x$, που σημαίνει ότι ανήκουν στην ευθεία $y=x$.



Το κύριο πρόβλημα που είχα να αντιμετωπίσω δεν ήταν η ορθότητα των απόψεών μου, αλλά με ποιο τρόπο θα παρουσιάσω το θέμα μου, ώστε να μην θίξω τους συναδέλφους συγγραφείς, οι οποίοι γράφουν το αντίθετο στα βιβλία τους, καθώς και τους συναδέλφους που το διδάσκουν εσφαλμένα, εδώ και χρόνια.

Πιστεύω ότι με τις εξηγήσεις που έδωσα στο ακροατήριο δεν προέκυψε τέτοιο θέμα.



Μετά την εισήγησή μου στην ημερίδα, μου υποβλήθηκαν αρκετές ερωτήσεις, οι οποίες σχεδόν όλες είχαν αφετηρία την μη κατανόηση του γεγονότος, ότι δύο αντίστροφες συναρτήσεις μπορεί να έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού και τον ίδιο τύπο και να μην είναι ίσες.

Επίσης από τις ερωτήσεις που μου υποβλήθηκαν, προέκυψε, ότι δεν είναι σαφές, τι ονομάζεται κοινό σημείο των γραφικών παραστάσεων δύο αντίστροφων συναρτήσεων. Επιπλέον συγχέεται η έννοια του κοινού σημείου των γρα-

φικών παραστάσεων δύο αντίστροφων συναρτήσεων, με το γεγονός ότι οι γραφικές παραστάσεις δύο αντίστροφων συναρτήσεων μπορεί να διέρχονται από το ίδιο σημείο του επιπέδου, χωρίς το σημείο αυτό να είναι κοινό τους σημείο.



Μετά την ημερίδα και για δέκα περίπου ημέρες δέχθηκα ένα πολύ μεγάλο αριθμό μηνυμάτων αλλά και τηλεφωνημάτων από συναδέλφους. Πολλοί από αυτούς διαφωνούσαν μαζί μου, άλλοι συμφωνούσαν, και άλλοι ήθελαν διευκρινήσεις και εξηγήσεις στην προσπάθειά τους να καταλάβουν το πρόβλημα.

Αφού συγκέντρωσα τις βασικές απαντήσεις, που έδωσα σε διάφορους συναδέλφους, συνέταξα ένα κείμενο, το οποίο έστειλα σε όσους μπόρεσα και «ώ του θαύματος», άρχισα να παίρνω μια σειρά από μηνύματα που έλεγαν, «ναι, τώρα έγινε πλήρως αντιληπτό τι συμβαίνει με τις αντίστροφες».

Ήταν για μένα μια πολύ σημαντική στιγμή, διότι οι συνάδελφοι κατανόησαν, γιατί συμβαίνουν όλα αυτά τα «παράξενα» με τις αντίστροφες συναρτήσεις, τα οποία δεν ισχύουν για δύο άλλες τυχαίες συναρτήσεις.

Μετά από όλα αυτά, αποφάσισα να γράψω αυτό το τεύχος με τις απόψεις και θέσεις μου πάνω στο θέμα των αντίστροφων συναρτήσεων. Προσπάθησα, να παρουσιάσω με όσο γίνεται μεγαλύτερη πληρότητα το θέμα, ώστε ο μελετητής να βρει ότι χρειάζεται και ότι πρέπει να γνωρίζει.

Περιέχονται μια σειρά προτάσεων, ιδιοτήτων και συμπερασμάτων που αφορούν τις αντίστροφες συναρτήσεις, τα οποία προέκυψαν από την μακρά μου ενασχόληση με τα μαθηματικά. Πιστεύω, ότι μερικά από αυτά δεν υπάρχουν στην βιβλιογραφία τόσο αναλυτικά και τόσο διεξοδικά παρουσιασμένα.



Στο τεύχος λοιπόν που κρατάτε στα χέρια σας, δίνονται αποδείξεις και εξηγήσεις σε βασικά θέματα όπως

- ▶ Γιατί δύο αντίστροφες συναρτήσεις οι οποίες ενώ έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού και τον ίδιο τύπο δεν είναι ίσες. Μοναδική προφανώς εξαίρεση αποτελεί η ταυτοτική συνάρτηση.
- ▶ Τι ονομάζεται κοινό σημείο των γραφικών παραστάσεων δύο αντίστροφων συναρτήσεων.

- ▶ Πως βρίσκουμε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων δύο αντίστροφων συναρτήσεων και γιατί αυτά βρίσκονται μόνο πάνω στην διχοτόμο $y=x$.
- ▶ Πως συνδέεται η σύνθεση δύο τυχαίων συναρτήσεων με το θέμα των αντίστροφων συναρτήσεων.
- ▶ Ποια είναι η «μαθηματική» σημασία της εναλλαγής των μεταβλητών x, y στον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης, και πότε δεν πρέπει να γίνεται αυτή η αλλαγή.

Τέλος, περιέχονται αρκετές λυμένες ασκήσεις, για την καλύτερη κατανόηση όλων των εννοιών, που έχουν σχέση με τις αντίστροφες συναρτήσεις.



Πρέπει να ευχαριστήσω και δημόσια τον φίλο και συνάδελφο **Αθανάσιο Π. Φρυγανιώτη** διευθυντή και ιδιοκτήτη των **ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΩΝ ΦΡΥΓΑΝΙΩΤΗ**, για όλα όσα έκανε και προσέφερε για την έκδοση του τεύχους αυτού και τον διαβεβαιώνω ότι η φήμη ενός σχολείου διαμορφώνεται από το σύνολο της προσφοράς του, τόσο στο επίπεδο της παρεχόμενης εκπαίδευσης στους μαθητές του, όσο και στο επίπεδο της επιστημονικής έρευνας και της συμμετοχής σε επιστημονικές δραστηριότητες.

Ανδρέας Α. Πετράκης

Αριστούχος Μαθηματικός

Διδάκτωρ των Μαθηματικών

Καθηγητής του Γενικού Τμήματος

Θετικών Επιστημών του ΤΕΙ Δυτικής Μακεδονίας

Ίσες συναρτήσεις και συναρτήσεις 1-1

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω f, g δύο συναρτήσεις, τότε είναι

$$f = g \Leftrightarrow \begin{cases} D(f) = D(g) = A \\ \text{και} \\ f(x) = g(x), \forall x \in A \end{cases}$$

Ιδιότητα

Έστω f, g δύο ίσες συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το μη κενό σύνολο A .

Τότε για κάθε υποσύνολο B του A ($B \subseteq A$), θα ισχύει $f(x) = g(x)$, για κάθε $x \in B$.

Δηλαδή οι συναρτήσεις f, g είναι ίσες και στο σύνολο B .

Συνεπώς,

- αν δύο συναρτήσεις είναι ίσες, τότε θα είναι ίσες και σε οποιοδήποτε υποσύνολο του πεδίου ορισμού τους.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω $f: A \rightarrow R$ μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα μη κενό σύνολο $A = D(f)$.

Η συνάρτηση f λέμε ότι είναι ένα προς ένα 1-1, αν και μόνο αν, για κάθε $x_1, x_2 \in D(f)$ με $x_1 \neq x_2$ ισχύει $f(x_1) \neq f(x_2)$.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Έστω $f: A \rightarrow R$ μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα μη κενό σύνολο $A = D(f)$.

Η συνάρτηση f είναι ένα προς ένα 1-1, αν και μόνο αν,

για κάθε $x_1, x_2 \in D(f)$ με $f(x_1) = f(x_2)$ ισχύει $x_1 = x_2$.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Έστω $f: A \rightarrow R$ μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα μη κενό σύνολο $A=D(f)$.

Η συνάρτηση f είναι ένα προς ένα 1-1, αν και μόνο αν, κάθε ευθεία (ε) παράλληλη προς τον άξονα $x'x$, τέμνει την γραφική της παράσταση, το πολύ σε ένα σημείο.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση $f: D(f) \rightarrow R$ λέμε ότι είναι αντιστρέψιμη, αν και μόνο αν, είναι 1-1.

Αν η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη, τότε «κατασκευάζουμε» μια νέα συνάρτηση, την οποία ονομάζουμε αντίστροφη της f και την συμβολίζουμε f^{-1} , ως εξής:

Ορίζουμε ότι η συνάρτηση f^{-1} έχει πεδίο ορισμού $D(f^{-1})$ το σύνολο τιμών $R(f)$ της f και «κανόνα» που ορίζεται από την ισοδυναμία:

$$f^{-1}(y)=x \Leftrightarrow f(x)=y, \text{ όπου } x \in D(f) \text{ και } y=f(x) \in R(f).$$

Παράδειγμα

Η συνάρτηση $f(x)=4-x$, με $x \in R$ είναι 1-1 γιατί,

για κάθε $x_1, x_2 \in D(f)$ με $x_1 \neq x_2$ ισχύει $4-x_1 \neq 4-x_2$

άρα και $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Επειδή η συνάρτηση είναι 1-1 θα είναι αντιστρέψιμη.

Είναι προφανές ότι η συνάρτηση f έχει σύνολο τιμών $R(f)=R$ και είναι

$$f^{-1}(y)=4-y$$

Δηλαδή έχουμε $f^{-1}(y)=4-y$, με $y \in R$.

Θα δείξω τώρα ότι οι συναρτήσεις

$$f(x)=4-x \text{ με } x \in R, f^{-1}(y)=4-y \text{ με } y \in R \text{ δεν είναι ίσες.}$$

Υποθέτουμε ότι οι δύο συναρτήσεις είναι ίσες. Θα καταλήξουμε σε άτοπο.

Αφού υποθέσαμε ότι οι δύο συναρτήσεις f, f^{-1} είναι ίσες στο R , τότε θα εί-

ναι υποχρεωτικά ίσες και σε οποιοδήποτε υποσύνολο B του R .

Παίρνουμε $B = \{1\} \subset R$, και περιορίζουμε την f στο B .

Τότε θα έχουμε $f(1) = 3$.

Αλλά αφού περιορίσαμε την f στο σύνολο $B = \{1\}$, τότε «υποχρεωτικά» το πεδίο ορισμού της αντίστροφης f^{-1} θα είναι το $M = \{3\}$ γιατί είναι $f(1) = 3$.

(Ορισμός αντίστροφης)

Άρα δεν μπορεί η αντίστροφη f^{-1} να έχει πεδίο ορισμού το $B = \{1\}$.

Δηλαδή καταλήξαμε στο παράλογο (άτοπο) συμπέρασμα, ότι ενώ οι δύο συναρτήσεις f, f^{-1} είναι ίσες στο R , αν «περιορίσουμε» την f στο σύνολο $B = \{1\}$, τότε η f^{-1} όχι μόνο δεν είναι ίση με την f στο B , αλλά δεν ορίζεται στο σύνολο αυτό!

Πώς καταλήξαμε σε άτοπο; Μα φυσικά υποθέτοντας ότι οι δύο συναρτήσεις είναι ίσες.

Άρα οι συναρτήσεις $f(x) = 4 - x$ με $x \in R$, $f^{-1}(y) = 4 - y$ με $y \in R$ δεν είναι ίσες.

Η μόνη συνάρτηση που είναι ίση με την αντίστροφή της είναι η ταυτοτική συνάρτηση

ΠΡΟΤΑΣΗ

Αν η συνάρτηση $f: D(f) \rightarrow R$ δεν είναι η ταυτοτική στο $D(f)$ και είναι αντιστρέψιμη τότε είναι διαφορετική από την αντίστροφή της.

Απόδειξη

Επειδή η συνάρτηση f δεν είναι η ταυτοτική στο $D(f)$ θα υπάρχει $x_0 \in D(f)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) \neq x_0$.

Θεωρώ τον περιορισμό της συνάρτησης f στο σύνολο $B = \{x_0\}$.

Τότε έχω $x_0 \xrightarrow{f} f(x_0)$ και $f(x_0) \xrightarrow{f^{-1}} x_0$, συνεπώς, από τον ορισμό της

αντίστροφης, η συνάρτηση f^{-1} περιορίζεται υποχρεωτικά στο σύνολο $\Gamma = \{f(x_0)\}$.

Επειδή $f(x_0) \neq x_0$ θα είναι $B \neq \Gamma$ και συνεπώς περιορίζοντας την f στο B η αντίστροφή της f^{-1} , δεν ορίζεται στο σύνολο αυτό και συνεπώς πολύ περισσότερο δεν είναι ίση με αυτή στο σύνολο B .

Τέλος αφού οι δύο αντίστροφες συναρτήσεις δεν είναι ίσες στο σύνολο B δεν μπορεί να είναι ίσες συναρτήσεις.

Τελικά μπορούμε να συμπεράνουμε ότι αν η συνάρτηση $f: D(f) \rightarrow R$ δεν είναι η ταυτοτική στο $D(f)$ και είναι αντιστρέψιμη τότε είναι διαφορετική από την αντίστροφή της.

ΠΡΟΤΑΣΗ

Αν η συνάρτηση $f: D(f) \rightarrow R$ είναι η ταυτοτική στο $D(f)$ δηλαδή ισχύει $f(x) = x$, για κάθε $x \in D(f)$, τότε είναι αντιστρέψιμη και είναι ίση με την αντίστροφή της.

Απόδειξη

Επειδή η συνάρτηση f είναι η ταυτοτική στο $D(f)$ θα ισχύει $f(x) = x$, για κάθε $x \in D(f)$.

Προφανώς η f είναι αντιστρέψιμη με $D(f^{-1}) = R(f) = D(f)$ και για κάθε $x \in D(f) = D(f^{-1})$ είναι

$$f(x) = x \Leftrightarrow f^{-1}(x) = x, \quad (x \xrightarrow{f} x \Leftrightarrow x \xrightarrow{f^{-1}} x)$$

που σημαίνει ότι οι συναρτήσεις f και f^{-1} είναι ίσες σε κάθε μονοσύνολο $B = \{x\}$, που είναι υποσύνολο του κοινού πεδίου ορισμού τους, συνεπώς είναι ίσες συναρτήσεις.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Αν η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη τότε ισχύει

$$f = f^{-1} \Leftrightarrow \eta \ f \ \text{είναι η ταυτοτική συνάρτηση.}$$