Περιεχόμενα

Πρόλογος

Το βιβλίο που κρατάτε στα χέρια σας, προέκυψε από την προσπάθειά μου να παρουσιάσω ένα μεγάλο αριθμό ασκήσεων στους μιγαδικούς αριθμούς, οι οποίες να είναι πρωτότυπες. Πολλές από τις ασκήσεις που περιέχονται στο πόνημά μου αυτό, προέκυψαν συνδυάζοντας διάφορες ασκήσεις, ώστε ο μελετητής να α-σκηθεί σε πιο πολύπλοκα προβλήματα.

Ίσως σας είναι γνωστό ότι, όλα τα μέλη της πατρικής μου οικογένειας είμαστε μαθηματικοί, και οι γονείς μου Αγνή και Ανδρέας Πετράκης διαθέτουν μια πολυε-τή πείρα στη μελέτη, έρευνα και διδασκαλία των μαθηματικών.

Ιδιαίτερα ο πατέρας μου, διαθέτει πάνω από τριάντα χρόνια, εμπειρία στην έ-ρευνα και μελέτη πολλών και σύνθετων μαθηματικών προβλημάτων. Το αρχείο του, το οποίο αποτελεί πολύτιμη κληρονομιά για εμένα, περιέχει τεράστιο αριθμό ασκήσεων, προβλημάτων, μελετών αλλά και προγραμμάτων Η/Υ τα οποία είναι αδημοσίευτα.

Από το αρχείο αυτό, άντλησα ικανό αριθμό πρωτότυπων ασκήσεων. Τις ασκή-σεις αυτές τις επεξεργάστηκα, τις προσάρμοσα στις ανάγκες των αναγνωστών μου και στους σκοπούς του βιβλίου αυτού και τις παρουσιάζω με κατάλληλη σειρά, ώστε ο μελετητής να οδηγείτε φυσιολογικά από το απλό στο δύσκολο και από το ειδικό στο γενικό. Δηλαδή προσπάθησα να παρουσιάσω το θέμα με επαγωγικό τρόπο.

Τέλος, φρόντισα ώστε να περιέχονται και πολλές θεωρητικές ασκήσεις, οι ο-ποίες θα αποτελέσουν συμπλήρωμα γνώσεων, για όλους όσους θα αποφασίσουν να ασχοληθούν πιο συστηματικά, με το θέμα που διαπραγματεύομαι.

Δωροθέα Α. Πετράκη

1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Οι βασικές ασκήσεις είναι εκείνες οι ασκήσεις, που κάθε μαθητής οφείλει να θυμάται, γιατί αποτελούν αναπόσπαστο συμπλήρωμα της θεωρίας. Αποτελούν βασικό εργαλείο για την αντιμετώπιση σύνθετων ασκήσεων.

1) Αν $z_1,z_2,z_3 \in C$ και δύο από τις παραστάσεις

$z_1+z_2+z_3$, $z_1^2+z_2^2+z_3^2$, $z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1$

είναι μηδέν τότε και η τρίτη παράσταση θα είναι μηδέν, δηλαδή

- Αν $z_1+z_2+z_3=0$ και $z_1^2+z_2^2+z_3^2=0$ τότε $z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1=0$.
- Αν $z_1+z_2+z_3=0$ και $z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1=0$ τότε $z_1^2+z_2^2+z_3^2=0$.
- Αν $z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1=0$ και $z_1^2+z_2^2+z_3^2=0$ τότε $z_1+z_2+z_3=0$.

2) Αν $z_1,z_2,z_3 \in C$ με $z_1+z_2+z_3=0$ και $z_1^2+z_2^2+z_3^2=0$ τότε θα είναι $|z_1|=|z_2|=|z_3|$. Να δειχθεί ότι δεν ισχύει το αντίστροφο.

3) Αν $z_1,z_2,z_3 \in C$ με $z_1+z_2+z_3=0$ και $z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1=0$ τότε θα είναι $|z_1|=|z_2|=|z_3|$. Να δειχθεί ότι δεν ισχύει το αντίστροφο.

4) Αν $z_1,z_2,z_3 \in C$ με $z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1=0$ και $z_1^2+z_2^2+z_3^2=0$ τότε θα είναι $|z_1|=|z_2|=|z_3|$. Να δειχθεί ότι δεν ισχύει το αντίστροφο.

5) Αν $z_1,z_2,z_3 \in C$ με $z_1^2+z_2^2+z_3^2=z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1$ τότε θα είναι $|z_1-z_2|=|z_2-z_3|=|z_3-z_1|$.

6) Έστω $z_1,z_2,z_3 \in C^*$ με $|z_1|=|z_2|=|z_3|$.

Αν $z_1+z_2+z_3=0$ τότε $z_1^2+z_2^2+z_3^2=0$ και $z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1=0$.

Αν $z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1=0$ τότε $z_1^2+z_2^2+z_3^2=0$ και $z_1+z_2+z_3=0$.

7) Έστω $z_1,z_2,z_3\in C^*$ με $|z_1|=|z_2|=|z_3|$. Αν $z_1^2+z_2^2+z_3^2=0$ να δειχθεί ότι δεν ισχύει πάντα $z_1+z_2+z_3=0$ και $z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1=0$.

8) Αν $z_1,z_2,z_3\in C$ με $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ και $z_1+z_2+z_3=1$ να δειχθεί ότι,
$z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1=z_1z_2z_3$ και $z_1^2+z_2^2+z_3^2=1-2z_1z_2z_3$.

9) Αν $z\in C$ με $|z|=1$, να δειχθεί ότι,

- Είναι $\overline{z}=\dfrac{1}{z}$.
- Υπάρχει αριθμός $\theta\in[0,2\pi)$ τέτοιος ώστε $z=$συνθ$+i$ημθ.
- Αν επιπλέον είναι $z\neq-1$ τότε

i) Είναι $z=\dfrac{1+z}{1+\overline{z}}$.

ii) Υπάρχει $w\in C^*$ τέτοιος ώστε $z=\dfrac{w}{\overline{w}}$.

iii) Υπάρχει $b\in R$ τέτοιος ώστε $z=\dfrac{1+bi}{1-bi}$.

iv) Υπάρχει $\theta\in R-\left\{\kappa\pi+\dfrac{\pi}{2}/\kappa\in Z\right\}$ τέτοιος ώστε $z=\dfrac{1+i\varepsilon\varphi\theta}{1-i\varepsilon\varphi\theta}$.

v) Υπάρχει $\varphi\in R-\{2\kappa\pi+\pi/\kappa\in Z\}$ τέτοιος ώστε $z=\dfrac{1+i\varepsilon\varphi\frac{\varphi}{2}}{1-i\varepsilon\varphi\frac{\varphi}{2}}$.

- $z+\dfrac{1}{z}\in[-2,2]$ και γενικά $z^\nu+\dfrac{1}{z^\nu}\in[-2,2]$, όπου ν ακέραιος αριθμός.

10) Αν $z_1,z_2,z_3,z_4\in C^*$ με $|z_1|=|z_2|=|z_3|=|z_4|$ και $z_1+z_2+z_3+z_4=0$ να δειχθεί ότι, $z_1z_2z_3+z_1z_2z_4+z_1z_3z_4+z_2z_3z_4=0$.

11) Αν $z_1,z_2,z_3,z_4\in C$ και δύο από τις παραστάσεις
$z_1+z_2+z_3+z_3$, $z_1^2+z_2^2+z_3^2+z_4^2$, $z_1z_2+z_1z_3+z_1z_4+z_2z_3+z_2z_4+z_3z_4$
είναι μηδέν τότε και η τρίτη παράσταση θα είναι μηδέν.

12) Έστω $z_1, z_2 \in C$ να δειχθεί ότι,

$$Re(z_1\overline{z}_2)=0 \Leftrightarrow z_1\overline{z}_2+\overline{z}_1 z_2=0 \Leftrightarrow |z_1|^2+|z_1|^2=|z_1-z_2|^2.$$

$$\Leftrightarrow |z_1|^2+|z_1|^2=|z_1+z_2|^2 \Leftrightarrow |z_1-z_2|=|z_1+z_2|$$

13) Έστω $z_1, z_2, z_3, z_4 \in C^*$, διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο, με

$$(z_1\overline{z}_2+\overline{z}_1 z_2)^2+(z_2\overline{z}_3+\overline{z}_2 z_3)^2+(z_3\overline{z}_4+\overline{z}_3 z_4)^2=0$$

ή $$(Re(z_1\overline{z}_2))^2+(Re(z_2\overline{z}_3))^2+(Re(z_3\overline{z}_1))^2=0$$

i) Να δειχθεί ότι $|z_1|^2+|z_2|^2=|z_1-z_2|^2$, $|z_2|^2+|z_3|^2=|z_2-z_3|^2$ και $|z_3|^2+|z_4|^2=|z_3-z_4|^2$.

ii) Να δειχθεί ότι $z_1\overline{z}_4+\overline{z}_1 z_4=0$ και $|z_1|^2+|z_4|^2=|z_1-z_4|^2$.

14) Έστω $z_1, z_2 \in C$, Α, Β είναι οι εικόνες των z_1, z_2 αντίστοιχα στο μιγαδικό επίπεδο και Μ είναι το μέσο του ΑΒ. Να δειχθεί ότι, στο σημείο Μ απεικονίζεται ο μιγαδικός αριθμός $\frac{z_1+z_2}{2}$.

15) Έστω $z_1, z_2, z_3 \in C$, Α, Β, Γ είναι οι εικόνες των z_1, z_2, z_3 αντίστοιχα στο μιγαδικό επίπεδο. Αν τα σημεία Α, Β, Γ δεν είναι συνευθειακά, ονομάζουμε Μ το κέντρο βάρους του τριγώνου ΑΒΓ. Να δειχθεί ότι, στο σημείο Μ απεικονίζεται ο μιγαδικός αριθμός $\frac{z_1+z_2+z_3}{3}$.

16) Αν $z, w \in C$ με $w=\pm\frac{z+|z|}{\sqrt{2[Re(z)+|z|]}}$, τότε θα ισχύει $w^2=z$, δηλαδή ο w είναι τετραγωνική ρίζα του z.

17) Έστω $z_1, z_2 \in C$ και Α, Β είναι οι εικόνες των z_1, z_2 αντίστοιχα στο μιγαδικό επίπεδο. Να δειχθεί ότι, ισχύει $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=Re(z_1\overline{z}_2)=Re(\overline{z}_1 z_2)$.

18) Έστω $z_1, z_2 \in C$ και Α, Β είναι οι εικόνες των z_1, z_2 αντίστοιχα στο μιγαδικό επίπεδο. Να δειχθεί ότι, ισχύει $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB} \Leftrightarrow Re(z_1\overline{z}_2)=0$.

19) Έστω $z_1, z_2 \in C$ και Α, Β είναι οι εικόνες των z_1, z_2 αντίστοιχα στο μιγαδικό επίπεδο. Να δειχθεί ότι, ισχύει $\overrightarrow{OA}//\overrightarrow{OB} \Leftrightarrow Im(z_1\overline{z}_2)=0$.

20) Έστω $z_1,z_2 \in C$, με $Re(z_1) \neq Re(z_2)$ και Α, Β είναι οι εικόνες των z_1,z_2 αντίστοιχα στο μιγαδικό επίπεδο. Να δειχθεί ότι, η ευθεία (ε) που διέρχεται από τα σημεία Α και Β έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -\dfrac{(z_1-z_2)-\overline{(z_1-z_2)}}{(z_1-z_2)+\overline{(z_1-z_2)}}i$.

21) Έστω $z_1,z_2,z_3 \in C$, διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο και Α, Β, Γ είναι οι εικόνες των z_1,z_2,z_3 αντίστοιχα στο μιγαδικό επίπεδο. Να δειχθεί ότι, τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά, αν και μόνο αν, ισχύει:

$$\begin{vmatrix} Re(z_1) & Im(z_1) & 1 \\ Re(z_2) & Im(z_2) & 1 \\ Re(z_3) & Im(z_3) & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

22) Έστω $z_1,z_2 \in C^*$, διαφορετικοί μεταξύ τους και Α, Β είναι οι εικόνες των z_1,z_2 αντίστοιχα στο μιγαδικό επίπεδο. Να δειχθεί ότι, η απόσταση του σημείου Ο από την ευθεία ΑΒ, δίνεται από τον τύπο

$$d(O,AB) = \frac{|z_1\overline{z}_2 - \overline{z}_1 z_2|}{2|z_1-z_2|} = \frac{|Im(z_1\overline{z}_2)|}{|z_1-z_2|}.$$

23) Έστω $z_1,z_2 \in C^*$, διαφορετικοί μεταξύ τους και Α, Β είναι οι εικόνες των z_1,z_2 αντίστοιχα στο μιγαδικό επίπεδο. Αν τα σημεία Ο, Α, Β δεν είναι συνευθειακά να δειχθεί ότι, το τρίγωνο ΟΑΒ έχει εμβαδό

$$(OAB) = \frac{1}{4}|z_1\overline{z}_2 - \overline{z}_1 z_2| = \frac{1}{2}|Im(z_1\overline{z}_2)|.$$

24) Έστω $z_1,z_2 \in C^*$, διαφορετικοί μεταξύ τους και Α, Β, Γ είναι οι εικόνες των z_1,z_2,z_1+z_2 αντίστοιχα στο μιγαδικό επίπεδο. Αν τα σημεία Ο, Α, Β δεν είναι συνευθειακά να δειχθεί ότι, το παραλληλόγραμμο ΟΑΓΒ έχει εμβαδό

$$(OA\Gamma B) = |Im(z_1\overline{z}_2)| = \frac{1}{2}|z_1\overline{z}_2 - \overline{z}_1 z_2|.$$

25) Έστω $z_1,z_2,z_3 \in C$, Α, Β, Γ είναι οι εικόνες των z_1,z_2,z_3 αντίστοιχα στο μιγαδικό επίπεδο. Αν τα σημεία Α, Β, Γ δεν είναι συνευθειακά, συμβολίζουμε με (c) τον περιγεγραμμένο κύκλο στο τρίγωνο ΑΒΓ. Να δειχθεί ότι, η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z ανήκει στον κύκλο (c) αν και μόνο αν υπάρχει $\alpha \in R$ τέτοιος ώστε $(z-z_1)(z_2-z_3)=\alpha(z-z_2)(z_1-z_3)$

26) Έστω $z \in C$ και $p \in R^*$. Να δειχθεί ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου $M(z)$, για τα οποία ισχύει $|2z-p|=|z+\overline{z}+p|$, είναι η παραβολή (c) με εξίσωση $y^2=2px$.

27) Έστω $z \in C$ και $p \in R^*$. Να δειχθεί ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου $M(z)$, για τα οποία ισχύει $|2z-pi|=|z-\overline{z}+pi|$, είναι η παραβολή (c) με εξίσωση $x^2=2py$.