Μιχ. Γ. Μαριάς - Γ. Π. Πέρρος

Ασκήσεις Λογισμού Πολλών Μεταβλητών

τόμος Α'

Διαφορικός Λογισμός

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

Περιεχόμενα

Les méthodes
sont les habitudes de l'esprit
et les économies de la mémoire.

Antoine Rivarol (1753-1801)

Πρόλογος

Το ανά χείρας εγχειρίδιο είναι ο πρώτος τόμος των «Ασκήσεων Λογισμού Πολλών Μεταβλητών». Περιέχει συνοπτικά τη θεωρία του *διαφορικού* λογισμού και πλήθος ασκήσεων (λυμένων και άλυτων). Ελπίζω πως σύντομα θα κυκλοφορήσει και ο δεύτερος τόμος, με τη συνοπτική θεωρία και τις ασκήσεις του *ολοκληρωτικού* λογισμού πολλών μεταβλητών.

Οι δύο αυτοί τόμοι είναι κατά κάποιον τρόπο συνοδευτικοί και συμπληρωματικοί των «Μαθημάτων Λογισμού Πολλών Μεταβλητών» που έγραψα πριν από μερικά χρόνια με τον αείμνηστο Ν. Δανίκα (Διαφορικός) και τον Ν. Μαντούβαλο (Ολοκληρωτικός). Τα «Μαθήματα» ήταν η τακτοποίηση των πρόχειρων σημειώσεών μας για τον Λογισμό ΙΙΙ και IV που διδάσκαμε στο Τμήμα Μαθηματικών του ΑΠΘ.

Η τακτοποίηση της συλλογής των ασκήσεών μας και η μεθοδική παρουσίασή τους, που πιστεύαμε ότι θα βοηθούσε τους φοιτητές μας αλλά και κάθε ενδιαφερόμενο να καταλάβει καλύτερα τα “δύσκολα” αυτά μαθηματικά, ήταν μέσα στις προθέσεις και τα σχέδιά μας. Όμως ο Δανίκας έφυγε νωρίς, και ο φόρτος εργασίας δεν μας άφησε να υλοποιήσουμε το στόχο μας. Έτσι το βάρος έπεσε στον Γιώργο Πέρρο που πήρε τη συλλογή και την εμπλούτισε, βάζοντας την προσωπική του σφραγίδα στη συνοπτική παρουσίαση της θεωρίας και τη μεθοδική λύση των ασκήσεων, από τις πιο απλές μέχρι και τις πιο “τσιμπημένες”.

Αλλά ας μείνω λίγο παραπάνω σε ορισμένα χαρακτηριστικά των «Ασκήσεων», τα οποία εκφράζουν τις απόψεις μας περί διδακτικής. Πρώτα θέλω να επισημάνω ότι οι πολλές μεταβλητές είναι ένας “νέος κόσμος” για τον δευτεροετή φοιτητή. Έτσι, όπως στα «Μαθήματα», προσπαθήσαμε να κάνουμε το πέρασμα από τη μία μεταβλητή στις πολλές όσο γίνεται πιο γλυκό, εκμεταλλευόμενοι τις ομοιότητες και τις αναλογίες, και εξηγώντας με υπομονή το πώς και το γιατί, όταν εμφανίζονται διαφορές. Ύστερα, επιμείναμε στην άμεση προσέγγιση του ουσιαστικού, εξοβελίζοντας το περιττό, το φλύαρο και το κενό, τα οποία στην εποχή μας έχουν πάρει το πάνω χέρι.

Οι ασκήσεις που επιλέχτηκαν “αγκαλιάζουν” τη θεωρία, αφού βοηθούν να αφομοιωθούν οι νέες έννοιες, να εφαρμοστούν τα θεωρήματα, και κυρίως να μάθει ο φοιτητής να λογαριάζει. Η παρουσίαση των λύσεων είναι υποδειγματική και έγινε με έμφαση στις *μεθόδους*, ώστε ο αναγνώστης να ξέρει πώς να αντιμετωπίζει ανάλογες καταστάσεις.

Στο τέλος του βιβλίου υπάρχουν δύο παραρτήματα — «Διανύσματα» και «Στοιχεία Αναλυτικής Γεωμετρίας» — χάρη στα οποία οι «Ασκήσεις» γίνονται ένα έργο αυτοτελές και ιδανικό για ανεξάρτητη μελέτη. Έτσι, με ελάχιστες εξαιρέσεις, οι μόνες γνώσεις που προϋποθέτουμε από τους αναγνώστες μας είναι αυτές που αντιστοιχούν στην ύλη του λυκείου.

Μιχ. Γ. Μαριάς
Θεσσαλονίκη, Οκτώβριος 2007

Κεφάλαιο 1

Όρια και Συνέχεια

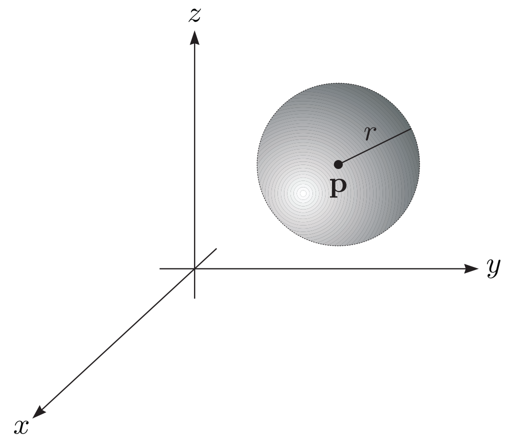
1.1 Συνοπτική Θεωρία

1.1.1 Η Τοπολογία του $\mathbb{R}^n$

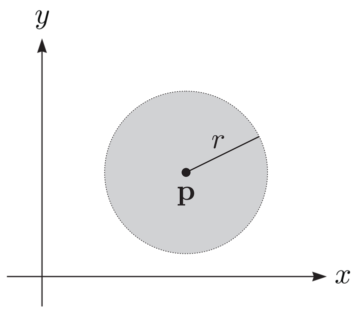
Έστω $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ και έστω r ένας θετικός πραγματικός αριθμός. Το σύνολο

$$B(\mathbf{p}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| < r\}$$

λέγεται **ανοικτή μπάλα** με κέντρο $\mathbf{p}$ και ακτίνα r. Στον $\mathbb{R}^3$ (δηλαδή για $n = 3$) το σύνολο αυτό μοιάζει πράγματι με μπάλα:



Στον $\mathbb{R}^2$ όμως το $B(\mathbf{p}, r)$ έχει τη μορφή δίσκου:



Τέλος στον $\mathbb{R}$ η ανοικτή μπάλα $B(p,r)$ είναι ανοικτό διάστημα:

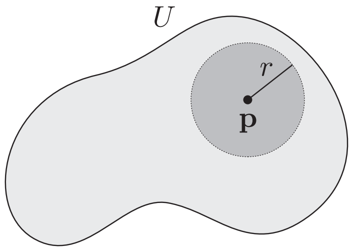
$$B(p,r) = \{x \in \mathbb{R} : |x-p| < r\} = (p-r, p+r).$$

Θα ορίσουμε τώρα κι ένα άλλο είδος μπάλας. Αν $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ και $r > 0$, τότε το σύνολο

$$\overline{B}(\mathbf{p},r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}-\mathbf{p}\| \leq r\}$$

λέγεται **κλειστή μπάλα** με κέντρο $\mathbf{p}$ και ακτίνα r. Π.χ. στον $\mathbb{R}$ η κλειστή μπάλα $\overline{B}(p,r)$ ταυτίζεται με το κλειστό διάστημα $[p-r, p+r]$.

Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{p} \in U$. Αν υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε $B(\mathbf{p},r) \subseteq U$, τότε λέμε ότι το $\mathbf{p}$ είναι **εσωτερικό σημείο** του συνόλου U, ή ότι το U είναι **περιοχή** του σημείου $\mathbf{p}$.



Γεωμετρικά αυτό σημαίνει ότι μια μικρή μετατόπιση από το $\mathbf{p}$ προς οποιαδήποτε κατεύθυνση δεν πρόκειται να μας βγάλει έξω από το σύνολο U. Αν κάθε σημείο του U είναι εσωτερικό σημείο, τότε το U λέγεται **ανοικτό σύνολο.** Το κενό σύνολο $\varnothing$ και όλος ο χώρος $\mathbb{R}^n$ είναι δύο τετριμμένα παραδείγματα ανοικτών συνόλων. Πιο ενδιαφέροντα παραδείγματα είναι οι ανοικτές μπάλες.

Παρατήρηση 1.1 Μια περιοχή ενός σημείου $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ δεν είναι αναγκαστικά ανοικτό σύνολο. Αν όμως $\mathbf{p} \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ και U ανοικτό, τότε σίγουρα το U είναι περιοχή του $\mathbf{p}$ (για την ακρίβεια: **ανοικτή περιοχή** του $\mathbf{p}$).

Πρόταση 1.2 *(i) Η ένωση μιας οποιασδήποτε οικογένειας ανοικτών υποσυνόλων του* $\mathbb{R}^n$ *είναι ανοικτό σύνολο.*

(ii) Η τομή μιας πεπερασμένης οικογένειας ανοικτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$ *είναι ανοικτό σύνολο.*[1]

Ένα σύνολο $U \subseteq \mathbb{R}^n$ λέγεται **κλειστό** αν το συμπλήρωμά του

$$U' = \mathbb{R}^n - U$$

είναι ανοικτό. Π.χ. τα σύνολα $\varnothing$ και $\mathbb{R}^n$ είναι κλειστά. Επίσης, κάθε κλειστή μπάλα είναι κλειστό σύνολο.

Πρόταση 1.3 *(i) Η ένωση μιας πεπερασμένης οικογένειας κλειστών υποσυνόλων του* $\mathbb{R}^n$ *είναι κλειστό σύνολο.*

(ii) Η τομή μιας οποιασδήποτε οικογένειας κλειστών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$ *είναι κλειστό σύνολο.*

Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$. Δίνουμε τους εξής ορισμούς:

- Το $\mathbf{p}$ λέγεται **οριακό σημείο** (ή **σημείο συσσώρευσης**) του U αν για κάθε $r > 0$ η ανοικτή μπάλα $B(\mathbf{p}, r)$ περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο $\mathbf{u} \in U$ με $\mathbf{u} \neq \mathbf{p}$. (Προσοχή: ένα οριακό σημείο του U δεν είναι κατ' ανάγκη στοιχείο του U.)

- Το $\mathbf{p}$ λέγεται **μεμονωμένο σημείο** του U αν $\mathbf{p} \in U$ και το $\mathbf{p}$ δεν είναι οριακό σημείο του U.

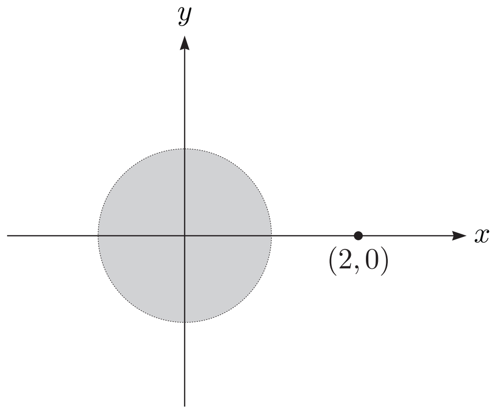
- Το $\mathbf{p}$ λέγεται **συνοριακό σημείο** του U αν για κάθε $r > 0$ η ανοικτή μπάλα $B(\mathbf{p}, r)$ περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο του U και τουλάχιστον ένα σημείο του U'. Το σύνολο όλων των συνοριακών σημείων του U συμβολίζεται με
$$\partial U$$
και λέγεται **σύνορο** του U.

Παράδειγμα 1.4 Στον $\mathbb{R}^2$ θεωρούμε το σύνολο

$$U = B(\mathbf{0}, 1) \cup \{(2, 0)\},$$

όπου $\mathbf{0} = (0, 0)$. Το U φαίνεται στην επόμενη εικόνα:

[1] Η τομή της κενής οικογένειας υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$ είναι όλος ο $\mathbb{R}^n$.



Το σύνολο όλων των οριακών σημείων του U είναι η κλειστή μπάλα (δίσκος) $\overline{B}(\mathbf{0},1)$, ενώ το $(2,0)$ είναι μεμονωμένο σημείο του U. Επίσης,

$$\partial U = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\right\} \cup \{(2,0)\}.$$

Πρόταση 1.5 *Ένα σύνολο $U \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι κλειστό αν και μόνον αν το U περιέχει όλα τα οριακά του σημεία.*

Πρόταση 1.6 *Ένα σύνολο $U \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι κλειστό αν και μόνον αν το U περιέχει όλα τα συνοριακά του σημεία (δηλαδή $\partial U \subseteq U$).*

Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Με τον όρο **ανοικτό κάλυμμα** του U εννοούμε μια οικογένεια $\mathcal{A}$ ανοικτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε $U \subseteq \bigcup \mathcal{A}$. Το U λέγεται **συμπαγές σύνολο** αν κάθε ανοικτό κάλυμμα $\mathcal{A}$ του U έχει ένα πεπερασμένο υποκάλυμμα (δηλαδή μια πεπερασμένη υποοικογένεια $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$ τέτοια ώστε $U \subseteq \bigcup \mathcal{A}_0$). Το U λέγεται **φραγμένο σύνολο** αν $U \subseteq B(\mathbf{p}, r)$ για κάποιο $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ και κάποιο $r > 0$.

Θεώρημα 1.7 (Heine-Borel) *Ένα σύνολο $U \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι συμπαγές αν και μόνον αν το U είναι κλειστό και φραγμένο.*

1.1.2 Διανυσματικές και Πραγματικές Συναρτήσεις

Αντικείμενο μελέτης του λογισμού πολλών μεταβλητών είναι οι συναρτήσεις της μορφής

$$\mathbf{f} : U \longrightarrow \mathbb{R}^m \quad \text{με} \quad U \subseteq \mathbb{R}^n,$$

ή για συντομία

$$\mathbf{f} : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m.$$

Μια τέτοια συνάρτηση $\mathbf{f}$ λέγεται **διανυσματική συνάρτηση** αν $m > 1$, και **πραγματική συνάρτηση** (ή **αριθμητική συνάρτηση** ή **βαθμωτή συνάρτηση**) αν $m = 1$. Επίσης, επειδή κάθε τιμή της $\mathbf{f}$ έχει τη μορφή

$$\mathbf{f}\left(x_1, \ldots, x_n\right)$$

για κάποιο $\left(x_1, \ldots, x_n\right) \in U$, λέμε ότι η $\mathbf{f}$ είναι **συνάρτηση** n **μεταβλητών.** Οι πραγματικές συναρτήσεις θα συμβολίζονται στο εξής με κανονικά (δηλαδή όχι έντονα) γράμματα

$$f, g, F, G, \ldots,$$

ενώ με έντονα γράμματα

$$\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{F}, \mathbf{G}, \ldots$$

θα συμβολίζονται οι διανυσματικές συναρτήσεις ή γενικότερα οι συναρτήσεις $U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ με ακαθόριστο $m \geq 1$ (οι οποίες δηλαδή μπορεί να είναι είτε διανυσματικές είτε πραγματικές).

Κάθε διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{f} : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ αναλύεται σε m πραγματικές συναρτήσεις $f_i : U \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$, έτσι ώστε

$$\mathbf{f}\left(\mathbf{x}\right) = \left(f_1\left(\mathbf{x}\right), \ldots, f_m\left(\mathbf{x}\right)\right)$$

για κάθε $\mathbf{x} \in U$. Συμβολικά αυτό γράφεται

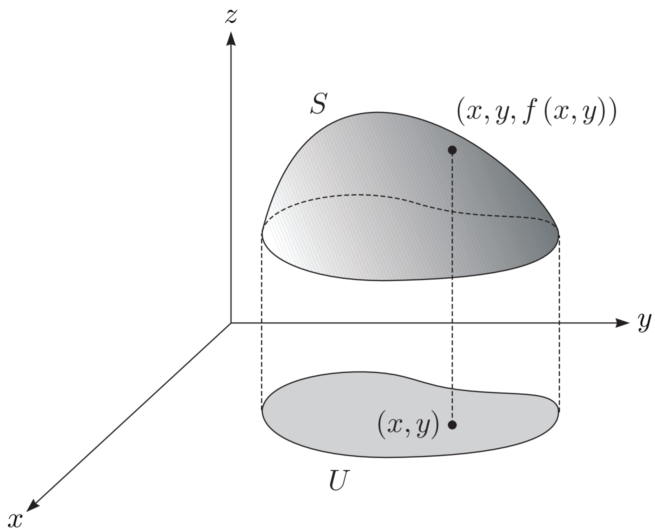
$$\mathbf{f} = \left(f_1, \ldots, f_m\right)$$

και οι $f_1, \ldots, f_m$ λέγονται **συνιστώσες** της $\mathbf{f}$.

Έστω $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ μια πραγματική συνάρτηση δύο μεταβλητών. Η γραφική παράσταση (γράφημα) της f, ή ακριβέστερα του συνόλου

$$S = \left\{\left(x, y, f\left(x, y\right)\right) : \left(x, y\right) \in U\right\},$$

είναι συνήθως μια επιφάνεια:



Γενικά όμως μια τυχαία διανυσματική ή πραγματική συνάρτηση δεν μπορεί να παρασταθεί γραφικά.

Αν $f, g : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι δύο πραγματικές συναρτήσεις και $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε οι (πραγματικές) συναρτήσεις $f+g$, $f-g$, λf, fg, f/g ορίζονται από τους τύπους

$$\begin{gathered}(f+g)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}), \\ (f-g)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}), \\ (\lambda f)(\mathbf{x}) = \lambda f(\mathbf{x}), \\ (fg)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})\, g(\mathbf{x}), \\ \left(\frac{f}{g}\right)(\mathbf{x}) = \frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})},\end{gathered}$$

όπου για τον ορισμό της f/g υποθέτουμε ότι $g(\mathbf{x}) \neq 0$ για κάθε $\mathbf{x} \in U$.

Έστω τώρα $\mathbf{f}, \mathbf{g} : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ δύο διανυσματικές συναρτήσεις, $\phi : U \longrightarrow \mathbb{R}$ μια πραγματική συνάρτηση, και $\lambda \in \mathbb{R}$. Οι συναρτήσεις $\mathbf{f}+\mathbf{g}$, $\mathbf{f}-\mathbf{g}$, $\lambda\mathbf{f}$, $\phi\mathbf{f}$, $\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}$ ορίζονται από τους τύπους

$$\begin{gathered}(\mathbf{f}+\mathbf{g})(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}), \\ (\mathbf{f}-\mathbf{g})(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{x}), \\ (\lambda\mathbf{f})(\mathbf{x}) = \lambda\,\mathbf{f}(\mathbf{x}),\end{gathered}$$

$$(\phi \mathbf{f})(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x})\,\mathbf{f}(\mathbf{x}),$$
$$(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g})(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{g}(\mathbf{x}).$$

Παρατηρούμε ότι οι $\mathbf{f}+\mathbf{g}$, $\mathbf{f}-\mathbf{g}$, $\lambda\mathbf{f}$, $\phi\mathbf{f}$ είναι διανυσματικές συναρτήσεις, ενώ η $\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}$ (εσωτερικό γινόμενο των $\mathbf{f}$ και $\mathbf{g}$) είναι πραγματική συνάρτηση. Αν $m=3$, τότε ορίζουμε και τη διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{f}\times\mathbf{g}$ (εξωτερικό γινόμενο των $\mathbf{f}$ και $\mathbf{g}$) με τον προφανή τρόπο, δηλαδή

$$(\mathbf{f}\times\mathbf{g})(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})\times\mathbf{g}(\mathbf{x}).$$

Μια συνάρτηση $\mathbf{f}:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ λέγεται **γραμμική** αν

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})+\mathbf{f}(\mathbf{y}), \quad \mathbf{f}(\lambda\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{f}(\mathbf{x})$$

για κάθε $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$ και $\lambda\in\mathbb{R}$. Είναι εύκολο να δούμε ότι μια τέτοια συνάρτηση απεικονίζει το $\mathbf{0}$ του $\mathbb{R}^n$ στο $\mathbf{0}$ του $\mathbb{R}^m$, δηλαδή

$$\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0},$$

και ικανοποιεί

$$\mathbf{f}(\lambda_1\mathbf{x}_1+\cdots+\lambda_k\mathbf{x}_k) = \lambda_1\mathbf{f}(\mathbf{x}_1)+\cdots+\lambda_k\mathbf{f}(\mathbf{x}_k)$$

για κάθε $k\geq 1$, $\mathbf{x}_i\in\mathbb{R}^n$, $\lambda_i\in\mathbb{R}$.

Θεώρημα 1.8 *Έστω $\mathbf{f}:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$. Αν η $\mathbf{f}$ είναι γραμμική συνάρτηση, τότε υπάρχει μοναδικός $m\times n$ πίνακας*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

ο λεγόμενος ***πίνακας της*** $\mathbf{f}$*, τέτοιος ώστε για κάθε διάνυσμα*

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

του $\mathbb{R}^n$ να ισχύει

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x},$$

ή ισοδύναμα

$$\mathbf{f}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j \end{pmatrix}.$$

Αντίστροφα, η ύπαρξη ενός τέτοιου πίνακα $\mathbf{A}$ *συνεπάγεται ότι η* $\mathbf{f}$ *είναι γραμμική συνάρτηση.*

1.1.3 Όριο Συνάρτησης

Έστω $\mathbf{f} : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ και $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ ένα οριακό σημείο του συνόλου U. Ένα σημείο $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^m$ λέγεται **όριο** της $\mathbf{f}$ στο $\mathbf{p}$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$(\mathbf{x} \in U \text{ και } 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| < \delta) \Rightarrow \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{q}\| < \varepsilon.$$

Στην περίπτωση αυτή γράφουμε

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{q} \qquad \text{ή} \qquad \mathbf{f}(\mathbf{x}) \to \mathbf{q} \quad \text{καθώς} \quad \mathbf{x} \to \mathbf{p}.$$

Διαισθητικά η ισότητα $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{q}$ σημαίνει το εξής: καθώς το $\mathbf{x}$ $(\in U)$ πλησιάζει το σημείο $\mathbf{p}$ χωρίς όμως ποτέ να το φτάνει, το $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ πλησιάζει το σημείο $\mathbf{q}$. Ή ισοδύναμα: αν $\mathbf{x} \approx \mathbf{p}$ αλλά $\mathbf{x} \neq \mathbf{p}$, τότε $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{q}$.[2]

Πρόταση 1.9 *Έστω* $\mathbf{f} : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *και* $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ *ένα οριακό σημείο του συνόλου* U*. Αν η* $\mathbf{f}$ *έχει όριο στο* $\mathbf{p}$*, τότε το όριο αυτό είναι μοναδικό.*

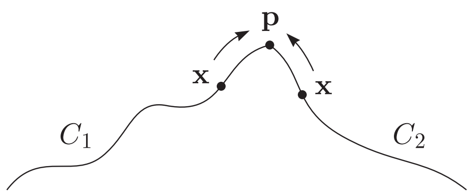
Το όριο της $\mathbf{f}$ στο $\mathbf{p}$ είναι ανεξάρτητο του τρόπου με τον οποίο το $\mathbf{x}$ τείνει στο $\mathbf{p}$. Π.χ. έστω ότι η $\mathbf{f}$ ορίζεται πάνω σ' ένα σύνολο $U \subseteq \mathbb{R}^2$, και ας υποθέσουμε ότι $C_1, C_2 \subseteq U$ είναι δύο καμπύλες τέτοιες ώστε

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \to \mathbf{q}_1 \quad \text{καθώς} \quad \mathbf{x} \to \mathbf{p} \quad \text{μέσω της } C_1$$

και

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \to \mathbf{q}_2 \quad \text{καθώς} \quad \mathbf{x} \to \mathbf{p} \quad \text{μέσω της } C_2.$$

[2] Το σύμβολο $\approx$ σημαίνει "περίπου ίσο".



Αν το $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} \mathbf{f}(\mathbf{x})$ υπάρχει, τότε

$$\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_2 = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} \mathbf{f}(\mathbf{x}).$$

Επομένως αν $\mathbf{q}_1 \neq \mathbf{q}_2$, τότε το $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} \mathbf{f}(\mathbf{x})$ δεν υπάρχει.

Πρόταση 1.10 *Έστω* $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_m) : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *μια διανυσματική συνάρτηση,* $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ *ένα οριακό σημείο του* U*, και* $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_m) \in \mathbb{R}^m$*. Τότε έχουμε*

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{q} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} f_i(\mathbf{x}) = q_i \text{ για } i = 1, \ldots, m.$$

Μια συνάρτηση $\mathbf{f} : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ λέγεται **φραγμένη πάνω σ' ένα σύνολο** $A \subseteq U$ αν η εικόνα $\mathbf{f}(A)$ είναι φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^m$.

Πρόταση 1.11 *Έστω ότι η* $\mathbf{f} : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *έχει όριο στο* $\mathbf{p}$ *(όπου* $\mathbf{p}$ *ένα οριακό σημείο του* U*). Τότε μπορούμε να βρούμε ένα* $\delta > 0$ *τέτοιο ώστε η* $\mathbf{f}$ *να είναι φραγμένη πάνω στο σύνολο* $U \cap [B(\mathbf{p}, \delta) - \{\mathbf{p}\}]$.

Πρόταση 1.12 *Έστω* $f, g : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *δύο πραγματικές συναρτήσεις τέτοιες ώστε* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} f(\mathbf{x}) = a$ *και* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} g(\mathbf{x}) = b$*. Επίσης, έστω* $\lambda \in \mathbb{R}$*. Τότε:*

(i) $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} [f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})] = a + b$.

(ii) $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} [f(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})] = a - b$.

(iii) $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} [\lambda f(\mathbf{x})] = \lambda a$.

(iv) $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} [f(\mathbf{x}) g(\mathbf{x})] = ab$.

(v) $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} [f(\mathbf{x}) / g(\mathbf{x})] = a/b$ *(εφόσον* $b \neq 0$ *και* $g(\mathbf{x}) \neq 0$ *για κάθε* $\mathbf{x} \in U$*).*

Πρόταση 1.13 *Έστω* $\mathbf{f}, \mathbf{g} : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *και* $\phi : U \longrightarrow \mathbb{R}$ *τρεις συναρτήσεις, οι δύο πρώτες διανυσματικές και η τρίτη πραγματική, τέτοιες ώστε* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}$, $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ *και* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} \phi(\mathbf{x}) = c$. *Επίσης, έστω* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Τότε:*

(i) $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} [\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})] = \mathbf{a} + \mathbf{b}$.

(ii) $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} [\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{x})] = \mathbf{a} - \mathbf{b}$.

(iii) $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} [\lambda \mathbf{f}(\mathbf{x})] = \lambda\mathbf{a}$.

(iv) $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} [\phi(\mathbf{x}) \mathbf{f}(\mathbf{x})] = c\mathbf{a}$.

(v) $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} [\mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x})] = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

(vi) $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} [\mathbf{f}(\mathbf{x}) \times \mathbf{g}(\mathbf{x})] = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ *(μόνο για* $m = 3$*).*

1.1.4 Συνέχεια

Έστω $\mathbf{f} : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ και $\mathbf{p} \in U$. Η $\mathbf{f}$ λέγεται **συνεχής στο p** αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$(\mathbf{x} \in U \text{ και } \|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| < \delta) \Rightarrow \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{p})\| < \varepsilon.$$

Διαισθητικά: $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{f}(\mathbf{p})$ όποτε $\mathbf{x} \in U$ και $\mathbf{x} \approx \mathbf{p}$. Αν το $\mathbf{p}$ είναι οριακό σημείο του U, τότε έχουμε

$$\mathbf{f} \text{ συνεχής στο } \mathbf{p} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{p}).$$

Στην αντίθετη περίπτωση (όταν δηλαδή το $\mathbf{p}$ είναι μεμονωμένο σημείο του U), η $\mathbf{f}$ είναι αυτομάτως συνεχής στο $\mathbf{p}$.

Αν μια συνάρτηση $\mathbf{f} : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ είναι συνεχής σε κάθε σημείο $\mathbf{p} \in U$, τότε λέμε ότι η $\mathbf{f}$ είναι **συνεχής στο σύνολο** U (ή απλά **συνεχής**).

Πρόταση 1.14 *Μια διανυσματική συνάρτηση* $\mathbf{f} : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *είναι συνεχής σ' ένα σημείο* $\mathbf{p} \in U$ *αν και μόνον αν όλες οι συνιστώσες της είναι συνεχείς στο* $\mathbf{p}$.

Πρόταση 1.15 *Έστω* $f, g : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *δύο πραγματικές συναρτήσεις οι οποίες είναι συνεχείς σ' ένα σημείο* $\mathbf{p} \in U$. *Επίσης, έστω* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Τότε οι συναρτήσεις*

$$f + g, \quad f - g, \quad \lambda f, \quad fg, \quad \frac{f}{g}$$

είναι συνεχείς στο $\mathbf{p}$ *(όπου για την* f/g *υποθέτουμε ότι* $g(\mathbf{x}) \neq 0$ *για κάθε* $\mathbf{x} \in U$*).*

Πρόταση 1.16 *Έστω* $\mathbf{f}, \mathbf{g} : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *και* $\phi : U \longrightarrow \mathbb{R}$ *τρεις συναρτήσεις, οι δύο πρώτες διανυσματικές και η τρίτη πραγματική, οι οποίες είναι όλες συνεχείς σ' ένα σημείο* $\mathbf{p} \in U$*. Επίσης, έστω* $\lambda \in \mathbb{R}$*. Τότε οι συναρτήσεις*

$$\mathbf{f} + \mathbf{g}, \quad \mathbf{f} - \mathbf{g}, \quad \lambda\mathbf{f}, \quad \phi\mathbf{f}, \quad \mathbf{f} \cdot \mathbf{g}, \quad \mathbf{f} \times \mathbf{g}$$

είναι συνεχείς στο $\mathbf{p}$ *(όπου για την* $\mathbf{f} \times \mathbf{g}$ *υποθέτουμε ότι* $m = 3$*).*

Πρόταση 1.17 *Έστω* $\mathbf{f} : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow V \subseteq \mathbb{R}^m$ *και* $\mathbf{g} : V \longrightarrow \mathbb{R}^k$ *δύο συναρτήσεις τέτοιες ώστε η* $\mathbf{f}$ *είναι συνεχής σ' ένα σημείο* $\mathbf{p} \in U$ *και η* $\mathbf{g}$ *είναι συνεχής στο* $\mathbf{f}(\mathbf{p})$*. Τότε η σύνθετη συνάρτηση* $\mathbf{g} \circ \mathbf{f} : U \longrightarrow \mathbb{R}^k$ *είναι συνεχής στο* $\mathbf{p}$*.*

Πρόταση 1.18 *Κάθε γραμμική συνάρτηση είναι συνεχής.*

Θεώρημα 1.19 *Αν η* $\mathbf{f} : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *είναι συνεχής και το* U *είναι συμπαγές, τότε το* $\mathbf{f}(U)$ *είναι συμπαγές.*

Μια συνάρτηση $\mathbf{f} : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ λέγεται **ομοιόμορφα συνεχής** αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U \text{ και } \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta) \Rightarrow \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{y})\| < \varepsilon.$$

Κάθε ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση προφανώς είναι συνεχής. Το αντίστροφο γενικά δεν ισχύει, όμως έχουμε το ακόλουθο

Θεώρημα 1.20 *Αν η* $\mathbf{f} : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *είναι συνεχής και το* U *είναι συμπαγές, τότε η* $\mathbf{f}$ *είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

1.2 Ασκήσεις

1.2.1 Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 1.1 Να δείξετε ότι κάθε ανοικτή μπάλα $B(\mathbf{p}, r)$ του $\mathbb{R}^n$ είναι ανοικτό σύνολο.

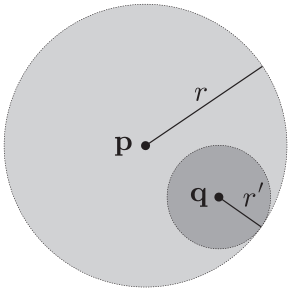
Λύση Έστω $\mathbf{q} \in B(\mathbf{p}, r)$. Πρέπει να βρούμε ένα $r' > 0$ τέτοιο ώστε $B(\mathbf{q}, r') \subseteq B(\mathbf{p}, r)$. Θέτουμε

$$r' = r - \|\mathbf{q} - \mathbf{p}\|.$$

Αν $\mathbf{x} \in B(\mathbf{q}, r')$, τότε

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{q}\| + \|\mathbf{q} - \mathbf{p}\| < r' + \|\mathbf{q} - \mathbf{p}\| = r$$

και άρα $\mathbf{x} \in B(\mathbf{p}, r)$. Έτσι $B(\mathbf{q}, r') \subseteq B(\mathbf{p}, r)$.



■

Άσκηση 1.2 Να αποδείξετε την Πρόταση 1.2.

Λύση (i) Έστω $\mathcal{A}$ μια οικογένεια ανοικτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$ και έστω $\mathbf{p} \in \bigcup \mathcal{A}$. Έτσι $\mathbf{p} \in A_0$ για κάποιο $A_0 \in \mathcal{A}$. Τώρα επειδή το A_0 είναι ανοικτό, υπάρχει ένα $r > 0$ τέτοιο ώστε $B(\mathbf{p}, r) \subseteq A_0$. Αλλά $A_0 \subseteq \bigcup \mathcal{A}$, οπότε $B(\mathbf{p}, r) \subseteq \bigcup \mathcal{A}$. Αυτό δείχνει ότι το σύνολο $\bigcup \mathcal{A}$ είναι ανοικτό.

(ii) Αρκεί να δείξουμε ότι η τομή $A_1 \cap A_2$ δύο ανοικτών υποσυνόλων A_1, A_2 του $\mathbb{R}^n$ είναι ανοικτό σύνολο. Έστω $\mathbf{p} \in A_1 \cap A_2$. Διαλέγουμε $r_1, r_2 > 0$ τέτοια ώστε $B(\mathbf{p}, r_1) \subseteq A_1$ και $B(\mathbf{p}, r_2) \subseteq A_2$. Θέτοντας $r = \min\{r_1, r_2\}$, έχουμε

$$B(\mathbf{p}, r) \subseteq B(\mathbf{p}, r_1) \cap B(\mathbf{p}, r_2) \subseteq A_1 \cap A_2.$$

Συνεπώς το σύνολο $A_1 \cap A_2$ είναι ανοικτό. ■

Άσκηση 1.3 Να βρείτε μια ακολουθία $A_1, A_2, \ldots$ ανοικτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε η τομή $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ να μην είναι ανοικτό σύνολο.

Λύση Θέτοντας $A_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, έχουμε

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\}.$$

Έτσι τα $A_1, A_2, \ldots$ είναι ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ αλλά η τομή τους δεν είναι ανοικτό σύνολο. ■

Άσκηση 1.4 Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ ένα οριακό σημείο του U. Να δείξετε ότι κάθε ανοικτή μπάλα $B(\mathbf{p}, r)$ περιέχει άπειρα σημεία του U. (Έτσι ένα πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ δεν μπορεί να έχει οριακά σημεία.)

Λύση Με απαγωγή σε άτοπο. Ας υποθέσουμε ότι κάποια ανοικτή μπάλα $B(\mathbf{p}, r)$ περιέχει πεπερασμένο πλήθος σημείων του U. Τότε η τομή των συνόλων $B(\mathbf{p}, r) - \{\mathbf{p}\}$ και U είναι ένα πεπερασμένο μη κενό σύνολο:

$$[B(\mathbf{p}, r) - \{\mathbf{p}\}] \cap U = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}.$$

Θέτοντας

$$r_0 = \min_{1 \leq i \leq n} \|\mathbf{u}_i - \mathbf{p}\|,$$

είναι φανερό ότι η ανοικτή μπάλα $B(\mathbf{p}, r_0)$ δεν περιέχει κανένα σημείο $\mathbf{u} \in U$ με $\mathbf{u} \neq \mathbf{p}$. Αυτό όμως είναι άτοπο αφού το $\mathbf{p}$ είναι οριακό σημείο του U. ■

Άσκηση 1.5 Να αποδείξετε την Πρόταση 1.5.

Λύση Έστω ότι το U είναι κλειστό αλλά κάποιο οριακό του σημείο $\mathbf{p}$ ανήκει στο συμπλήρωμα U'. Τώρα το U' είναι ανοικτό (αφού το U είναι κλειστό), συνεπώς υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε $B(\mathbf{p}, r) \subseteq U'$. Έτσι η ανοικτή μπάλα $B(\mathbf{p}, r)$ δεν περιέχει κανένα σημείο του U. Αυτό όμως είναι άτοπο αφού το $\mathbf{p}$ είναι οριακό σημείο του U.

Αντίστροφα, έστω ότι το U περιέχει όλα τα οριακά του σημεία. Ο σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι το U' είναι ανοικτό. Έστω $\mathbf{p} \in U'$. Έτσι το $\mathbf{p}$ δεν είναι οριακό σημείο του U, και άρα υπάρχει ανοικτή μπάλα $B(\mathbf{p}, r)$ η οποία δεν περιέχει κανένα σημείο $\mathbf{u} \in U$ με $\mathbf{u} \neq \mathbf{p}$. Αυτό όμως σημαίνει ότι $B(\mathbf{p}, r) \subseteq U'$. Συνεπώς το U' είναι ανοικτό. ■

Άσκηση 1.6 Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις:

(i) Της συνάρτησης $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, όπου

$$f(x, y) = 1 - \frac{x}{3} - \frac{y}{4}.$$

(ii) Της συνάρτησης $g : U \longrightarrow \mathbb{R}$, όπου

$$U = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 9 - 9x^2 - y^2 \geq 0\right\}$$

και

$$g(x, y) = \frac{2}{3}\sqrt{9 - 9x^2 - y^2}.$$

(iii) Της συνάρτησης $h : V \longrightarrow \mathbb{R}$, όπου

$$V = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\right\}$$

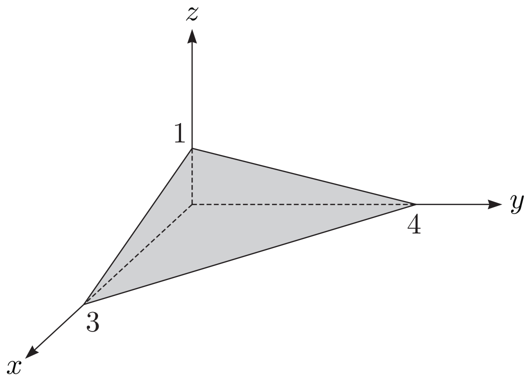
και

$$h\,(x, y) = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Λύση (i) Έχουμε

$$z = f\,(x, y) \Leftrightarrow z = 1 - \frac{x}{3} - \frac{y}{4} \Leftrightarrow \frac{x}{3} + \frac{y}{4} + z = 1.$$

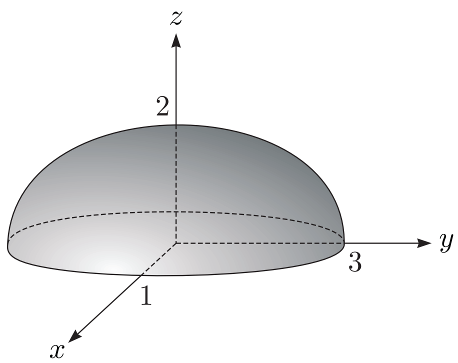
Έτσι η γραφική παράσταση της f είναι ένα επίπεδο, μέρος του οποίου φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



(ii) Αν $(x, y) \in U$, τότε

$$z = g\,(x, y) \Leftrightarrow z = \frac{2}{3}\sqrt{9 - 9x^2 - y^2}$$
$$\Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1 \text{ και } 0 \leq z \leq 2\right).$$

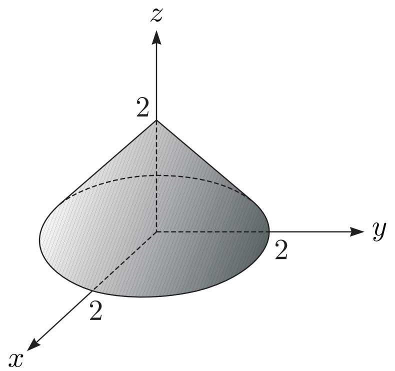
Συνεπώς η γραφική παράσταση της g είναι το πάνω μισό του ελλειψοειδούς $x^2 + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$:



(iii) Αν $(x,y) \in V$, τότε

$$z = h(x,y) \Leftrightarrow z = 2 - \sqrt{x^2+y^2}$$
$$\Leftrightarrow \left[(z-2)^2 = x^2+y^2 \text{ και } 0 \le z \le 2\right].$$

Συνεπώς η γραφική παράσταση της h είναι το μέρος του κώνου $(z-2)^2 = x^2+y^2$ που βρίσκεται μεταξύ των επιπέδων $z=0$ και $z=2$:



■

Άσκηση 1.7 Να αποδείξετε το Θεώρημα 1.8.

Λύση Έστω ότι η $\mathbf{f}$ είναι γραμμική συνάρτηση. Γράφουμε

$$\mathbf{f}(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \mathbf{f}(\mathbf{e}_n) = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

όπου

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

είναι τα συνήθη βασικά διανύσματα του $\mathbb{R}^n$, και θεωρούμε τον πίνακα $\mathbf{A}$ με στήλες $\mathbf{f}(\mathbf{e}_1), \mathbf{f}(\mathbf{e}_2), \ldots, \mathbf{f}(\mathbf{e}_n)$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Έτσι για κάθε διάνυσμα

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

του $\mathbb{R}^n$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}(\mathbf{x}) &= \mathbf{f}(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n) \\
&= x_1\mathbf{f}(\mathbf{e}_1) + x_2\mathbf{f}(\mathbf{e}_2) + \cdots + x_n\mathbf{f}(\mathbf{e}_n) \\
&= x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{2j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj}x_j \end{pmatrix} = \mathbf{Ax}.
\end{aligned}$$

Τώρα αν

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

είναι ένας άλλος $m \times n$ πίνακας τέτοιος ώστε

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{Bx}$$

για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, τότε

$$\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{pmatrix} = \mathbf{Be}_j = \mathbf{f}(\mathbf{e}_j) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

για $j = 1, \ldots, n$, και άρα $\mathbf{B} = \mathbf{A}$.