Γιάννης Παπαδημητρίου

θέματα γραμμικής άλγεβρας και μαθηματικής ανάλυσης

Εφαρμογές στην οικονομία

ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΕΚΔΟΣΗΣ

Στη δεύτερη αυτή έκδοση των «Θεμάτων γραμμικής Άλγεβρας και Μαθηματικής Ανάλυσης» συμπληρώνονται ορισμένα κενά, που υπήρχαν στην πρώτη έκδοση και κυρίως στο πρώτο μέρος του βιβλίου το αναφερόμενο στη Γραμμική Άλγεβρα. Ελπίζουμε έτσι ότι ο αναγνώστης θα βοηθηθεί στα θέματα των σύγχρονων ποσοτικών μεθόδων, που εφαρμόζονται στις Οικονομικές μελέτες.

Προσθήκες έγιναν επίσης και στο δεύτερο μέρος του βιβλίου, έτσι ώστε η μαθηματική ανάλυση να γίνει ένα εύκολο βοήθημα για τους οικονομολόγους.

Στο τέλος του βιβλίου και σε ειδικό παράρτημα παρατίθενται πίνακες ορολογίας στην αγγλική και ελληνική γλώσσα.

Θεσσαλονίκη 1988

ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΠΡΩΤΗΣ ΕΚΔΟΣΗΣ

Η εξέλιξη των οικονομικών επιστημών έκανε φανερή την ανάγκη της γνώσης ορισμένων αρχών των Μαθηματικών, που έχουν σχέση με την ανάλυση των οικονομικών φαινομένων.

Τα Μαθηματικά καταλαμβάνουν, λοιπόν, όλο και μεγαλύτερο χώρο στα εκπαιδευτικά προγράμματα των Σχολών αυτών.

Το βιβλίο προορίζεται κυρίως, για τους φοιτητές των οικονομικών Σχολών και η ύλη των κεφαλαίων που περιλαμβάνει είναι έτσι επιλεγμένη, ώστε να καλύπτει τις ανάγκες που θα τους γεννηθούν στα επόμενα έτη των σπουδών τους. Αποτελεί τον πρώτο τόμο των μαθηματικών που θα διδαχθούν οι φοιτητές της Ανωτάτης Βιομηχανικής Σχολής Θεσ/νίκης και αποτελείται από δύο ενότητες.

Η πρώτη περιλαμβάνει στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας και η δεύτερη Μαθηματικής Ανάλυσης.

Για την άσκηση των σπουδαστών στην ύλη που παραθέτουμε, διαλέξαμε και προσθέσαμε στο τέλος κάθε κεφαλαίου μια σειρά από ασκήσεις, τόσο λυμένες όσο και άλυτες.

Ελπίζουμε οι φοιτητές να βρουν στο βιβλίο αυτό ένα επαρκές βοήθημα για την μαθηματική τους κατάρτιση.

Κλείνοντας θα ήθελα, αφού πρώτα ευχαριστήσω όσους με βοήθησαν στην πραγματοποίηση του συγγράμματος, ν' αναφέρω ότι κάθε παρατήρηση που θα βοηθούσε στην βελτίωση του παρόντος θα γινόταν ευχαρίστως δεχτή.

ΜΕΡΟΣ Ι

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΩΝ ΣΥΝΟΛΩΝ

1.1. ΣΥΝΟΛΑ

Αν υποθέσουμε ότι τα σύνολα Α και Β είναι υποσύνολα ενός συνόλου Ε, *το σύνολο των στοιχείων του συνόλου Α που δεν ανήκουν στο Β ονομάζεται διαφορά του Β από το Α και συμβολίζεται με Α-Β.*

$$A - B = \{x \mid x \in A,\ x \notin B\}$$

Παράδειγμα 1: Αν Α είναι το σύνολο των πολλαπλασίων του 5 και Β το σύνολο των αρτίων αριθμών, η διαφορά των συνόλων Α και Β, (Α-Β) ορίζεται από το σύνολο.

$$A - B = \{v \mid v = 5(2k+1),\ k \in N\}$$

Το σύνολο των στοιχείων του Ε που ανήκουν είτε στο Α είτε στο Β ονομάζεται συμμετρική διαφορά των Α και Β και συμβολίζεται με ΑΔΒ

$$A\Delta B = (A-B) \cup (B-A)$$

ή

$$A\Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B\}$$

$$A\Delta B = \{X \mid (X \in A) \cap X \notin B) \cup$$
$$(X \in B \cap X \notin A)\}$$

Παράδειγμα 2: Αν Α, Β είναι υποσύνολα του Ε τότε η συμμετρική διαφορά των Α και Β μπορεί να πάρει τη μορφή

$$A\Delta B = (A \cup B) \cap (\overline{A \cap B})$$

Όπου $(\overline{A \cap B})$ είναι το συμπλήρωμα του $A \cap B$ στο E.

Είναι γνωστό ότι $A\Delta B = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) =$
$= (A \cup \bar{A}) \cap (A \cup B) \cap (\bar{B} \cup \bar{A}) \cap (\bar{B} \cup B) =$
$= (A \cup B) \cap (\bar{B} \cup \bar{A}) = (A \cup B) \cap (\overline{A \cap B})$
$\Leftrightarrow (\overline{A\Delta B}) = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B})$

Αν χρησιμοποιήσουμε αυτό το αποτέλεσμα σαν τύπο, ότι δηλαδή:

$$A\Delta B = (A \cup B) \cap (\overline{A \cap B})$$

μπορούμε να επεκτείνουμε την συμμετρική διαφορά και για τρία σύνολα Α, Β, Γ.

Παράδειγμα 3: Να προσδιορίσετε μια μαθηματική έκφραση της συμμετρικής διαφοράς ΑΔΒΔΓ σαν συνάρτηση των Α, Β, Γ και $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{\Gamma}$.

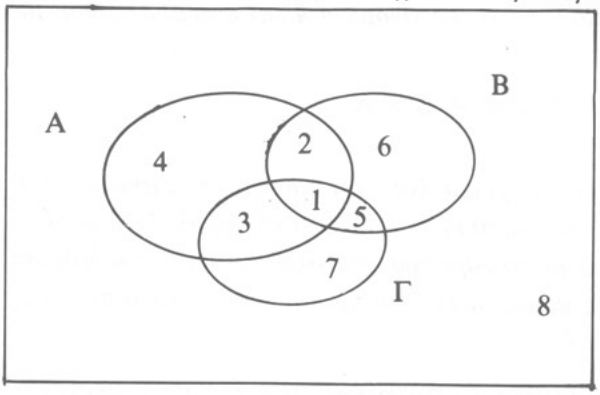
$$\begin{aligned} A\Delta B\Delta\Gamma &= [(\overline{A\Delta B}) \cap \Gamma] \cup [(A\Delta B) \cap \bar{\Gamma}] = \\ &= ([A \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B})] \cap \Gamma) \cup ([A \cap \bar{B}) \cup \\ &\cup (\bar{A} \cap B)] \cap \bar{\Gamma}) = \\ &= (A \cap B \cap \Gamma) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap \Gamma) \cup \\ &\quad (A \cap \bar{B} \cap \bar{\Gamma}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{\Gamma}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A\Delta B\Delta\Gamma = {} & (A \cap B \cap \Gamma) \cup (A \cap \bar{B} \cap \bar{\Gamma}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{\Gamma}) \\ & \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap \Gamma) \end{aligned}$$

Διαμελισμό ενός συνόλου Ε ονομάζουμε τον χωρισμό σε υποσύνολά του E_i τέτοια ώστε:

1. Να μην είναι κενά ($E_i \neq \varnothing \ \forall\ i$)
2. Να είναι ανά δύο ξένα μεταξύ τους ($E_i \cap E_j = \varnothing$)
3. Η ένωσή τους να είναι το Ε ($\cup E_i = E$)

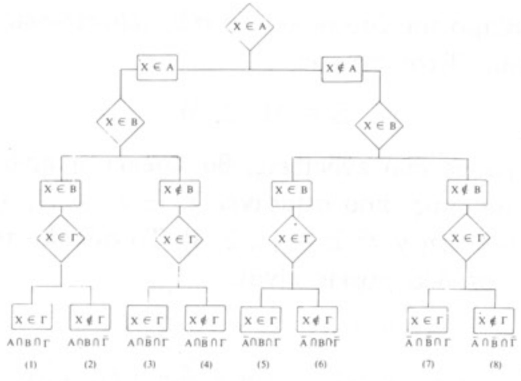
Παράδειγμα 4: Έστω Α, Β, Γ τρία υποσύνολα του συνόλου Ε που δεν είναι ανά δύο ξένα μεταξύ τους. Να διαμελισθεί το *σύνολο Ε, στα άτομά του. Δηλαδή σε υποσύνολά του που να μη επιδέχονται περαιτέρω διάσπαση.*



$1 = A \cap B \cap \Gamma$
$2 = A \cap B \cap \overline{\Gamma}$
$3 = A \cap \overline{B} \cap \Gamma$
$4 = A \cap \overline{B} \cap \overline{\Gamma}$
$5 = \overline{A} \cap B \cap \Gamma$
$6 = \overline{A} \cap B \cap \overline{\Gamma}$
$7 = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \Gamma$
$8 = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{\Gamma}$

Σχήμα 1

Για την κατασκευή αυτού του διαμελισμού όπως φαίνεται και στο σχήμα 1 κατασκευάζουμε το δενδρόγραμμα των διχοτόμων. Ξεκινώντας από ένα τυχαίο στοιχείο $X \notin E$ θέτουμε την ερώτηση: «ανήκει ή όχι στο Α;», οι δύο δυνατές απαντήσεις ορίζουν τα δύο πρώτα κλαδιά του δενδρογράμματος, που αντιστοιχούν στα σύνολα Α και $\overline{A}$. Με τον ίδιο τρόπο συνεχίζοντας για τα σύνολα Β και Γ καταλήγουμε στον διαμελισμό του Ε σε 8 υποσύνολά του όπως αυτά φαίνονται και στην απεικόνιση του Euler (σχήμα 2).



Σχήμα 2

Ονομάζεται καρτεσιανό γινόμενο δύο συνόλων A και B ή απλά γινόμενο των συνόλων A και B το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών (x, y) όταν $x \in A$ και $y \in B$. Το γινόμενο A επί B συμβολίζουμε με $A X B$.

Είναι προφανές ότι $A \times B \neq B \times A$

Παράδειγμα 5: *Έστω ότι έχουμε ένα ζάρι που στις 6 επιφάνειές του έχει τους αριθμούς 1, 2, 3 (κάθε αριθμός 2 φορές). Ρίχνουμε το ζάρι δυο συνεχόμενες φορές, τη δεύτερη όμως φορά, μόνο αν η πρώτη ένδειξη είναι περιττός αριθμός.*

α) Να προσδιορισθεί το σύνολο E των δυνατών περιπτώσεων σε κάθε ρίψη·

β) Αν περιορίσουμε το ενδιαφέρον μας μόνο στα αποτελέσματα των δύο διαδοχικών ενδείξεων και αν τις παραστήσουμε με το ζεύγος (x, y) όπου x η πρώτη ένδειξη και y η δεύτερη, το σύνολο των ενδείξεων είναι το γινόμενο των δύο συνόλων A και E $A = \{1, 3\}$ $E = \{1, 2, 3\}$

γ) Να αποδειχθεί ότι το σύνολο Γ των ενδείξεων (x, y), ώστε $x + y =$ άρτιος αριθμός, είναι το A^2.

α) Σε κάθε ρίξιμο του ζαριού οι δυνατές περιπτώσεις είναι οι ενδείξεις του. Έτσι έχουμε:

$$E = \{1, 2, 3\}$$

β) Για να έχουμε δύο ενδείξεις, θα πρέπει η πρώτη να είναι περιττός αριθμός, που σημαίνει $X \in A = \{1, 3\}$. Επειδή η επόμενη ένδειξη $y \in E = \{1, 2, 3\}$, Το σύνολο των δυνατών ενδείξεων σε δύο ρίψεις είναι:

$(x, y) \in B = A \times E = \{1, 3\} \times \{1, 2, 3\}$

γ) Για να έχουμε δύο ενδείξεις χρειάζονται δύο ρίψεις του ζαριού δηλαδή $X \in A = \{1, 3\}$, για να είναι το άθροισμα $x+y$ των δύο ενδείξεων άρτιος αριθμός θα πρέπει ο y να είναι περιττός δηλαδή $y \in A = \{1, 3\}$. Έτσι έχουμε:

$\Gamma = \{(x, y): x \in \{1, 3\}, y \in \{1, 2, 3\}, x+y = \text{άρτιος}\} \Leftrightarrow$
$\Gamma = \{(x, y): x \in \{1, 3\}, y \in \{1, 3\}\} \Leftrightarrow$
$\Gamma = \{1, 3\} \times \{1, 3\} = \{1, 3\}^2 = A^2$

1.2 Σχέσεις (Ισοδυναμίας, Διάταξης)

Θεωρούμε τα σύνολα A και B καθώς και το υποσύνολο G του γινομένου A x B. Έστω επίσης ένα διατεταγμένο ζεύγος (x, y) του γινομένου A x B, λέμε ότι το στοιχείο $X \in A$ βρίσκεται σε σχέση σ με το $y \in B$ xσy όταν το $(x, y) \in G$.

Σ' αυτή την περίπτωση το A είναι το *σύνολο αναχώρησης*, το B είναι το *σύνολο άφιξης* και το G είναι *το γράφημα*, της σχέσης σ.

Στη περίπτωση που A = B τότε η σχέση ονομάζεται *διμελής σχέση r στο A.*

Μια διμελής σχέση r μπορεί να είναι ανακλαστική, συμμετρική, αντισυμμετρική, μεταβατική.

r = ανακλαστική $\Leftrightarrow \forall\, x \in A, (x,x) \in G$
r = συμμετρική $\Leftrightarrow \forall\, x, y \in A \Rightarrow (y,x) \in G \Rightarrow (y,x) \subset G$
r = αντισυμμετρική $\Leftrightarrow \forall\, x,y \in A, [(x,y) \in G, (y,x) \in G] \Rightarrow x=y$
r = μεταβατική $\Leftrightarrow \forall\, x,y,z \in A, [(x,y) \in G, (y,z) \in G] \Rightarrow$
$\Rightarrow (x,z) \in G$

Σχέση ισοδυναμίας. Μια διμελής σχέση που είναι ανακλαστική συμμετρική και μεταβατική ονομάζεται σχέση ισοδυναμίας. Όλα τα στοιχεία $x \in A$ που είναι ισοδύναμα με το $\alpha \in A$ με τη σχέση r, ορίζουν ένα υποσύνολο του A που ονομάζεται κλάση ισοδυναμίας του α, για τη σχέση r (modulo r)

$$Cl(\alpha) = \{x \in A: (x, \alpha) \in G\}$$

Το σύνολο των Cl(α) που μπορούμε να δημιουργήσουμε σ' ένα σύνολο Α με μια σχέση ισοδυναμίας r αποτελεί έναν διαμελισμό του Α.

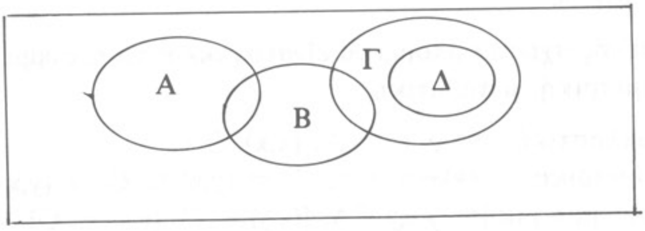
Σχέση διάταξης. Μια διμελής σχέση που είναι ανακλαστική, αντισυμμετρική και μεταβατική ονομάζεται σχέση διάταξης.

Μια σχέση διάταξης r στο σύνολο Α θα λέγεται *ολικής διάταξης* στο Α όταν δυο οποιαδήποτε στοιχεία του Α είναι συγκρίσιμα δια της r, δηλαδή:

$$\forall (x,y) \in A^2 \quad \text{έχουμε} \quad (x,y) \in G \text{ ή } (y,x) \in G$$

Αν αυτό δεν συμβαίνει η σχέση διάταξης είναι σχέση μερικής διάταξης.

Παράδειγμα 6: Έστω τα σύνολα Α,Β,Γ,Δ με σχετική θέση μεταξύ τους αυτή που φαίνεται στο διάγραμμα του Euler (σχήμα 3)



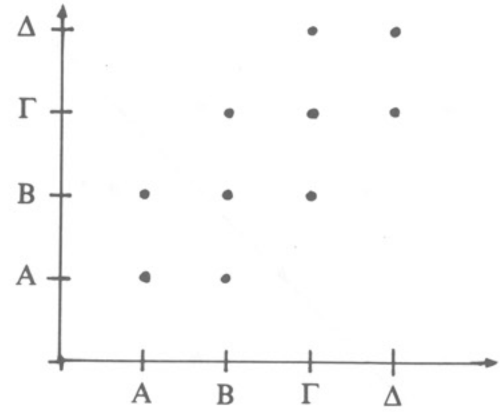
Σχήμα 3

Θεωρώ στο σύνολο Ε = {Α, Β, Γ, Δ} την διμελή σχέση r:

$$X \; r \; Y \Leftrightarrow X \cap Y \neq \varnothing, \qquad X \in E, Y \in E$$

Να γίνει το γράφημα G_r της σχέσης r

Το γράφημα G_r είναι τα υποσύνολα του E^2 που δημιουργούνται από τα ζεύγη συνόλων (X,Y) όταν $X \cap Y \neq \varnothing$ (σχήμα 4)



Σχήμα 4

Παράδειγμα 7: Έστω το σύνολο Ε = {1, 2, 3, 4, 5} και r η διμελής σχέση που ορίζεται από τη σχέση:

x r y ⇔ {x+y = πολ/σιο του 3, x ∈ Ε, y ∈ Ε}

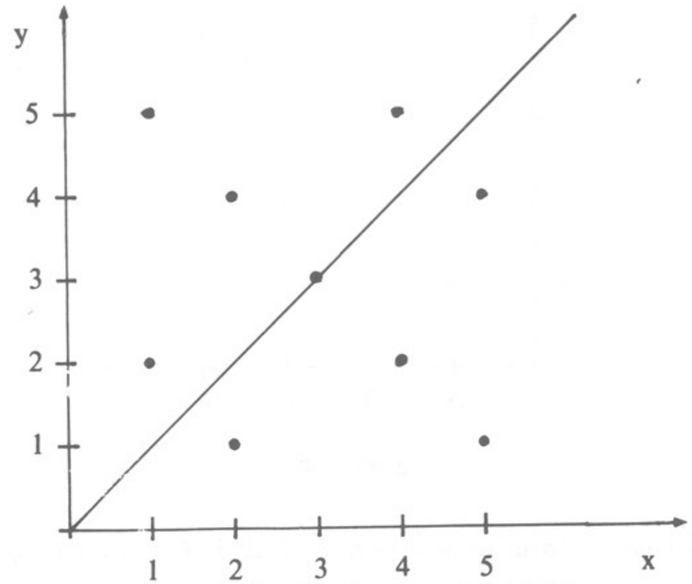
Να κατασκευασθεί το Gr *και να δείξετε ότι αυτή η σχέση είναι συμμετρική καθώς και πώς αυτό διαπιστώνεται από το γράφημε της* Gr;

Στο σχήμα 5 παρουσιάζεται το σύνολο των ζευγών (x,y) του Ε που έχουν άθροισμα x+y = πολ/σιο του 3. Καθόσο x+y = y+x, όταν x+y = πολ/σιο του 3 θα είναι και y+x = πολ/σιο του 3. Παρατηρούμε επίσης στο σχήμα 5 ότι το γράφημα της r είναι συμμετρικό ως προς την ευθεία y = x διχοτόμο της γωνίας των δύο αξόνων ή κύρια διαγώνιο του τετραγώνου E^2.

Παράδειγμα 8: Θεωρούμε στον χώρο R* x R* *την διμελή σχέση* r *που ορίζεται ως εξής:*

$$(x,y) \ r \ (x',y') \Leftrightarrow xy' = yx'$$

Αφού αρχικά αποδειχθεί ότι η σχέση r *είναι σχέση ισοδυναμίας, στη συνέχεια να αποδειχθεί ότι αν τα ζευγάρια* u = (x,y) *και* u΄ = (x΄,y΄) *δεν είναι γραμμικά*



Σχήμα 5

ανεξάρτητα θα είναι ισοδύναμα με την έννοια της r. *Αν δοθεί ένα στοιχείο* $u_0 = (x_0,y_0)$ *ποια είναι η κλάση του (το σύνολο των ισοδυνάμων ως προς την* r *στοιχείων του* u_0).

$(x,y)\ r\ (x,y) \Leftrightarrow xy = yx \Leftrightarrow$ r = ανακλαστική

$(x,y)\ r\ (x',y') \Leftrightarrow xy' = yx' \Leftrightarrow (x',y')\ r\ (x,y) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ r = συμμετρική

$$\left.\begin{array}{l}(x,y)\ r\ (x',y') \Leftrightarrow xy' = yx' \\ (x',y')\ r\ (x'',y'') \Leftrightarrow x'y'' = y'x''\end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow xy'x'y'' = yx'y'x'' \Leftrightarrow x'y'(xy'') = x'y'(yx'') \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow$ r = μεταβατική

Επειδή η r είναι ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική θα είναι μια σχέση ισοδυναμίας, στο $R^* \times R^*$.

Αν τώρα θεωρήσουμε τα δύο διανύσματα $\bar{u}$ και $\bar{u}'$ που δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητα θα πρέπει:

$$\exists\ \lambda\ \in R^* : \bar{u} = \lambda \bar{u}' \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = \lambda x' \\ y = \lambda y' \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{c} \lambda x y' - \lambda y x' = 0 \\ \lambda \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow\ xy' = yx' \Leftrightarrow (x,y)\ r\ (x',y') \Leftrightarrow \bar{u} r \bar{u}'$$

Η σχέση $\bar{u} r \bar{u}'$ εκφράζει την ισοδυναμία των $\bar{u}$ και $\bar{u}'$ δια της r στο $R^* \times R^*$.

Αν, λοιπόν, ισχύει η σχέση $\bar{u} = \lambda \bar{u}_0 \Rightarrow \bar{u} r \bar{u}_0 \Rightarrow$
$Cl(u_0) = \{(x,y) : u = (x,y),\ u = \lambda u_0,\ \lambda \in R^*\}$

Παράδειγμα 9: Ορίζουμε στο σύνολο S των ελληνικών πόλεων την διμελή σχέση r: xry $\Leftrightarrow$ *«Ο πληθυσμός της πόλης x είναι μεγαλύτερος ή τουλάχιστον ίσος μ' αυτόν της y» Η διμελής σχέση* r *είναι σχέση διάταξης;*

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η r είναι ανακλαστική (xrx) και μεταβατική (xry, yrz $\Leftrightarrow$ xrz). Όταν τέλος έχουμε xry και yrx (αυτό σημαίνει ότι οι δυό πόλεις x και y έχουν τον ίδιο πληθυσμό) $\Rightarrow$ x = y. Δηλαδή η r είναι και αντισυμμετρική. Άρα η r είναι μια σχέση διάταξης στο S.

Παράδειγμα 10: Σ' ένα μάθημα διεξάγονται προφορικές και γραπτές εξετάσεις που βαθμολογούνται μ' άριστα το 10. Ονομάζουμε x *και* y *τους βαθμούς των προφορικών και γραπτών εξετάσεων, αντίστοιχα. Στο σύνολο Z των ζευγών* (x,y) *ορίζουμε την διμελή σχέση* r:

$$(x_1,y_1)\ r\ (x_2,y_2) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x_1 < x_2 \\ \text{ή} \\ x_1 = x_2 \text{ και } y_1 \leqslant y_2 \end{array} \right\}$$

Να δειχθεί ότι η r είναι μια σχέση ολικής διάταξης στο Z.

Είναι προφανές ότι η r είναι αντανακλαστική $(x,y)\ r\ (x,y)$
Μεταβατική: $x_1 < x_2$ και $x_2 < x_3 \Rightarrow x_1 < x_3$
$x_1 < x_2$ και $(x_2 = x_3,\ y_2 \leqslant y_3) \Rightarrow x_1 < x_3$
$(x_1 = x_2,\ y_1 \leqslant y_2)$ και $(x_2 < x_3) \Rightarrow x_1 < x_3$
$(x_1 = x_2,\ y_1 \leqslant y_2)$ και $(x_2 = x_3,\ y_2 \leqslant y_3) \Rightarrow (x_1 = x_3,\ y_1 \leqslant y_3)$

Αντισυμμετρική: $(x_1,y_1)\ r\ (x_2,y_2)$ και $(x_2,y_2)\ r\ (x_1,y_1)$
$\Rightarrow (x_1,y_1) = (x_2,y_2)$

Πράγματι γιατί: Αν $x_1 < x_2$ (ή $x_2 < x_1$) η r είναι αδύνατη.
Αν $x_1 = x_2$, $y_1 < y_2$ και $y_2 \leqslant y_1 \Rightarrow x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$

Επειδή οποιαδήποτε ζεύγη βαθμών του z είναι συγκρίσιμα δια της r, η r είναι μια σχέση ολικής διάταξης στο z.

1.3 Αντιστοιχίες (Συναρτήσεις)

Έστω A και B δύο σύνολα και r μια σχέση από το A στο B. Αν για οποιοδήποτε $x \in A$ υπάρχει ένα και μόνο στοιχείο $y \in B$ τέτοιο ώστε $x\ r\ y$, τότε η αντιστοιχί από το A στο B λέγεται συναρτησιακή σχέση.

Το γράφημα μιας συναρτησιακής σχέσης λέγεται συναρτησιακό γράφημα στο A x B.

Συνάρτηση

Ονομάζεται συνάρτηση f, η πράξη που αντιστοιχεί σε κάθε στοιχείο $x \in A$ ένα και μόνο στοιχείο $y \in B$.

Μια συνάρτηση ορίζεται από την τριάδα (A, B, G). Όταν A εί-