Γ. Ν. ΠΑΝΤΕΛΙΔΗ
Καθηγητή Ε.Μ.Π.
Δ. Χ. ΚΡΑΒΒΑΡΙΤΗ
Καθηγητή Ε.Μ.Π.
Ν. Σ. ΧΑΤΖΗΣΑΒΒΑ
Καθηγητή Πανεπ. Αιγαίου

ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Β' ΕΚΔΟΣΗ
ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
ΑΘΗΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η έννοια της ***διαφορικής εξισώσεως****, όπως και η έννοια της παραγώγου, εισήχθη από τον Νεύτωνα, ο οποίος διαπίστωσε ότι ο βασικός νόμος της Μηχανικής :*

Δύναμη = μάζα × επιτάχυνση

είναι μια διαφορική εξίσωση. Από τότε ο κλάδος των Διαφορικών Εξισώσεων γνώρισε μια συνεχή και ανοδική πορεία, που σήμερα έχει γίνει πιο έντονη, αφού έχει συνδεθεί στενά όχι μόνο με όλους τους άλλους κλάδους της Μαθηματικής Αναλύσεως, αλλά και με όλα σχεδόν τα Μαθηματικά και γενικότερα με όλες τις Θετικές Επιστήμες. Ακόμα και οι Θεωρητικές Επιστήμες δεν έμειναν ανεπηρέαστες. Πρότυπα που στηρίζονται στις Διαφορικές Εξισώσεις χρησιμοποιούνται ευρύτατα στην Οικονομία, στην Κοινωνιολογία ακόμα και στην Πολιτική των Διεθνών Σχέσεων.

Το παρόν σύγγραμμα θεωρούμε ότι προσφέρει τις απαραίτητες γνώσεις των συνήθων διαφορικών εξισώσεων για τους φοιτητές και σπουδαστές των Φυσικομαθηματικών Σχολών και των Πολυτεχνείων.

Βασικοί στόχοι του βιβλίου είναι αφενός μεν να αναπτύξει και να παρουσιάσει τις τεχνικές επιλύσεως των διαφορικών εξισώσεων με μεγάλο αριθμό παραδειγμάτων, πολλά από τα οποία αναφέρονται σε φυσικά ή τεχνικά προβλήματα και αφετέρου να εμβαθύνει, με την απαιτούμενη μαθηματική αυστηρότητα, σε λεπτές θεωρητικές έννοιες και αποδεικτικές μεθόδους. Για να μην επιβαρυνθεί η διδακτική διαδικασία μεταφέραμε τις αποδείξεις ορισμένων θεωρημάτων, που είναι σχετικά δύσκολες, στο Παράρτημα του βιβλίου. Επίσης παραθέσαμε στο Παράρτημα στοιχεία της Θεωρίας Κατανομών, που σχετίζονται με το κεφάλαιο VI. Στο κεφάλαιο I δίνονται παραδείγματα συνήθων διαφορικών εξισώσεων, που απαντώνται στη Φυσική, και οι βασικοί ορισμοί της θεωρίας. Στο κεφάλαιο II παρουσιάζονται οι στοιχειώδεις μέθοδοι επιλύσεως διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως. Στο κεφάλαιο III παρουσιάζονται τα θεωρήματα υπάρξεως και μοναδικότητας λύσεων διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως. Ένα μέρος του κεφαλαίου αυτού, που αναφέρεται στην επεκτασιμότητα των λύσεων και σε διαφορικές ανισώσεις, μπορεί να παραληφθεί στην πρώτη ανάγνωση.

Το κεφάλαιο IV περιλαμβάνει τη γενική θεωρία γραμμικών διαφορικών εξισώσεων ανωτέρας τάξεως, ενώ το κεφάλαιο V περιλαμβάνει ειδικότερα τις μεθόδους επιλύσεως γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντε-

λεστές. Για παιδαγωγικούς λόγους, εξετάζεται πρώτα η περίπτωση γραμμικών διαφορικών εξισώσεων δευτέρας τάξεως και ακολουθεί η περίπτωση ανωτέρας τάξεως.

Στο κεφάλαιο VI παρουσιάζεται η θεωρία του μετασχηματισμού Laplace και στη συνέχεια δίνονται εφαρμογές του μετασχηματισμού, που αφορούν στην επίλυση διαφορικών και ολοκληρωτικών εξισώσεων. Ιδιαίτερη αναφορά γίνεται στη χρησιμότητα του μετασχηματισμού Laplace για την επίλυση διαφορικών εξισώσεων, των οποίων το δεύτερο μέλος, δηλ. ο όρος εξαναγκασμού, είναι μια ασυνεχής συνάρτηση.

Στο κεφάλαιο VII αναπτύσσεται η μέθοδος επιλύσεως διαφορικών εξισώσεων με τη βοήθεια δυναμοσειρών και δίνονται ορισμένα στοιχεία από τη θεωρία των ειδικών συναρτήσεων Bessel και Legendre.

Στο κεφάλαιο VIII περιέχεται η θεωρία των διαφορικών συστημάτων ενώ στο κεφάλαιο IX μελετώνται προβλήματα συνοριακών τιμών για συνήθεις διαφορικές εξισώσεις δευτέρας τάξεως.

Τέλος στο κεφάλαιο X δίνονται μερικά στοιχεία από τη Θεωρία Ευστάθειας των διαφορικών εξισώσεων κατά Ljapunoff.

Για την κατανόηση και εμπέδωση της θεωρίας υπάρχουν παρατηρήσεις και πολλά παραδείγματα ενώ στο τέλος κάθε κεφαλαίου μια σειρά από επιλεγμένες ασκήσεις.

Στο τέλος του βιβλίου υπάρχει πίνακας ολοκληρωμάτων (Πίνακας R) και πίνακας μετασχηματισμένων Laplace (Πίνακας L).

Η σημασία των διαφόρων εκφράσεων και συμβολισμών είναι η ακόλουθη :

Πρόταση 1.2. : η πρόταση 1.2 του παρόντος κεφαλαίου.

Πόρισμα II.3.4. : το πόρισμα 3.4 του κεφαλαίου II.

Πρόταση (I & II), XII.1.5. : η πρόταση XII.1.5 του βιβλίου Γ. Παντελίδη, «Μαθηματική Ανάλυση I & II».

Πρόταση (III), III.3.6. : η πρόταση III.3.6 του βιβλίου Γ. Παντελίδη, «Μαθηματική Ανάλυση III».

▲ : *τέλος αποδείξεως προτάσεως.*

● : *τέλος παραδείγματος ή παρατηρήσεως.*

Τα σχήματα επιμελήθηκε ο κ. Γ. Καρύδας, τον οποίο ευχαριστούμε. Ευχαριστούμε θερμά τον εκδοτικό οίκο ΖΗΤΗ για την εξαιρετική εμφάνιση του βιβλίου και κυρίως για το ενδιαφέρον που έδειξε για να αναλάβει την έκδοσή του.

Οκτώβριος 1990 *Οι συγγραφείς*

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Χ. ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ I

ΓΕΝΙΚΑ ΠΕΡΙ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

1. Εισαγωγικά

Μια εξίσωση που περιέχει μια ή περισσότερες άγνωστες συναρτήσεις και τις παραγώγους τους μέχρι μιας ορισμένης τάξεως ονομάζεται **διαφορική εξίσωση.** Όταν οι άγνωστες συναρτήσεις είναι μιας μεταβλητής, τότε η εξίσωση ονομάζεται **συνήθης διαφορική εξίσωση.** Όταν οι άγνωστες συναρτήσεις είναι πολλών μεταβλητών, τότε η εξίσωση ονομάζεται **μερική διαφορική εξίσωση.**

Στο πρώτο μέρος του βιβλίου αυτού θα ασχοληθούμε με τη μελέτη των συνήθων διαφορικών εξισώσεων.

Η μελέτη πολλών φυσικών, τεχνικών ακόμη και λογικών προβλημάτων οδηγεί συχνά σε διαφορικές εξισώσεις. Θα παραθέσουμε παρακάτω ορισμένα παραδείγματα που δείχνουν πως προκύπτουν οι εξισώσεις αυτές.

Παράδειγμα 1.1. Νόμος του Νεύτωνα (Μηχανική)

Θεωρούμε ότι ο χώρος είναι εφοδιασμένος με ένα καρτεσιανό (ορθογώνιο) σύστημα συντεταγμένων $Oxyz$. Ένα υλικό σημείο με μάζα m κινείται υπό την επίδραση μιας δυνάμεως $\mathbf{F} = F_1\,\mathbf{i} + F_2\,\mathbf{j} + F_3\,\mathbf{k}$ που είναι συνάρτηση του χρόνου t, του διανύσματος θέσεως του σημείου $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}$ και της ταχύτητάς του $\dot{\mathbf{r}}(t) = \dot{x}(t)\,\mathbf{i} + \dot{y}(t)\,\mathbf{j} + \dot{z}(t)\,\mathbf{k}$, δηλ. $\mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$.

Η κίνηση του σημείου περιγράφεται από το νόμο του Νεύτωνα:

$$\mathbf{F} = m\,\gamma$$

ή ισοδύναμα,

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = m\,\ddot{\mathbf{r}} \tag{1}$$

ή ακόμη

$$(2) \qquad \begin{cases} F_1(t,\ x,\ y,\ z,\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z}) = m\,\ddot{x} \\ F_2(t,\ x,\ y,\ z,\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z}) = m\,\ddot{y} \\ F_2(t,\ x,\ y,\ z,\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z}) = m\,\ddot{z} \end{cases}$$

Το σύστημα (2) είναι ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων με άγνωστες τις συναρτήσεις $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. Η μελέτη της κινήσεως του υλικού σημείου συνίσταται στην εύρεση των συναρτήσεων αυτών που αποτελούν λύση του (2).

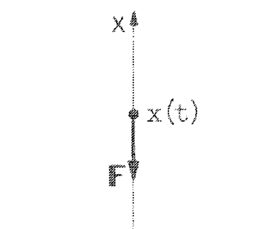
Πολύ συχνά εξετάζονται «μονοδιάστατα» δυναμικά προβλήματα, δηλ. προβλήματα στα οποία γνωρίζουμε ότι το σώμα κινείται κατά μήκος μιας ευθείας, την οποία χάριν απλότητας ταυτίζουμε με τον άξονα Ox, οπότε $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i}$ και $\mathbf{F} = F\,\mathbf{i}$. Επομένως το σύστημα (2) παίρνει τη μορφή

$$(3) \qquad F(t,\ x,\ \dot{x}) = m\,\ddot{x}\ ,$$

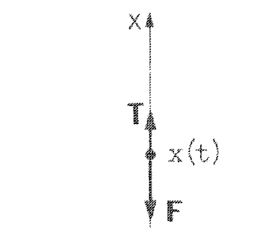
δηλ. μια διαφορική εξίσωση με άγνωστη τη συνάρτηση $x(t)$. Θα αναφέρουμε τώρα ειδικές περιπτώσεις του προβλήματος αυτού:

α) **Ελεύθερη πτώση.** Θεωρούμε ότι το υλικό σημείο πέφτει υπό την επίδραση μόνο της δυνάμεως της βαρύτητας. Αν θεωρήσουμε τον άξονα Ox κατακόρυφο και τη θετική φορά προς τα πάνω (σχ. 1), τότε η δύναμη της βαρύτητας είναι $\mathbf{F} = -mg\,\mathbf{i}$, οπότε η εξίσωση του Νεύτωνα γίνεται

$$(4) \qquad -m\,g = m\,\ddot{x}.$$



Σχ. 1

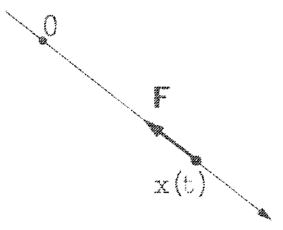


Σχ. 2

β) **Πτώση με αντίσταση του αέρα.** Όταν εκτός από το βάρος του σώματος $-mg$ ασκείται πάνω του μια δύναμη τριβής $\mathbf{T}$ από τον αέρα, οπότε η δύναμη $\mathbf{T}$ είναι ανάλογη της ταχύτητας (όταν αυτή δεν είναι πολύ μεγάλη) δηλ. είναι της μορφής $\mathbf{T} = -\alpha\,\dot{x}\,\mathbf{i}$, όπου α είναι θετική σταθερά.(Το αρνητικό πρόσημο δικαιολογείται γιατί η τριβή ενεργεί κατά φορά αντίθετη της φοράς της ταχύτητας (σχ. 2)). Τότε η εξίσωση (3) παίρνει τη μορφή

$$-mg - \alpha\,\dot{x} = m\ddot{x} \tag{5}$$

γ) **Ταλάντωση.** Θεωρούμε ότι το υλικό σημείο κινείται κατά μήκος κάποιου άξονα, τον οποίο ταυτίζουμε με τον άξονα Ox, υπό την επίδραση μιας «δυνάμεως επαναφοράς» $\mathbf{F}$ που είναι ανάλογη της αποστάσεως του σημείου από κάποιο σταθερό σημείο, έστω το O, και με φορά προς το O (σχ. 3). Τότε η αλγεβρική τιμή της $\mathbf{F}$ είναι $-kx$, οπότε ο νόμος του Νεύτωνα δίνει



$$-kx = m\ddot{x}\,. \tag{6}$$

Σχ. 3

Αν συμμετέχει και μια δύναμη τριβής $\mathbf{T}$ ανάλογη της ταχύτητας, τότε όπως και στην περίπτωση β) έχουμε

$$-kx - \alpha\,\dot{x} = m\,\ddot{x}\,. \tag{7}$$

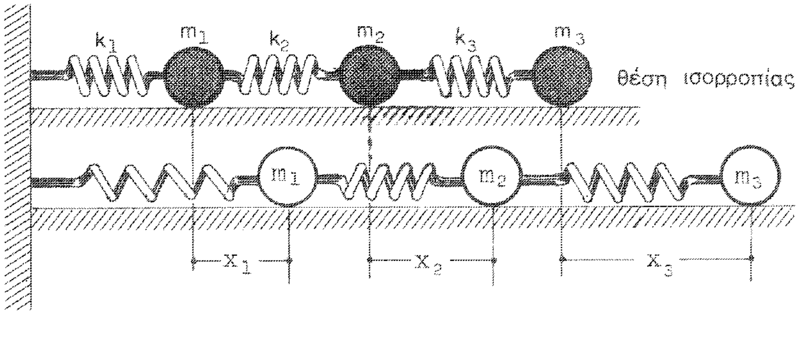
Αν τέλος υπάρχει και μια επιπλέον δύναμη $\varphi(t)\,\mathbf{i}$ (εξαναγκασμένη ταλάντωση), τότε η εξίσωση (3) παίρνει τη μορφή

$$-kx - \alpha\,\dot{x} + \varphi(t) = m\,\ddot{x}\,. \tag{8}$$

●

Παράδειγμα 1.2. Συστήματα σε σύζευξη

Θεωρούμε τρία σώματα με μάζες m_1, m_2, m_3, που συνδέονται με τρία αβαρή ελατήρια με σταθερές k_1, k_2, k_3 (σχ. 4). Τα σώματα ταλαντώνον-



Σχ. 4

ται χωρίς τριβές πάνω σε μια ευθεία, που την ταυτίζουμε με τον άξονα Ox, και έστω x_1, x_2 και x_3 οι μετατοπίσεις τους σε μια χρονική στιγμή από τη θέση ισορροπίας.

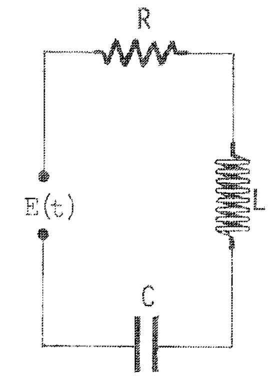
Το πρώτο ελατήριο έχει επιμηκυνθεί κατά x_1, επομένως ασκεί στη μάζα m_1 δύναμη ίση με $-k_1x_1$. Το δεύτερο ελατήριο έχει επιμηκυνθεί κατά x_2-x_1, επομένως ασκεί στη μάζα m_2 δύναμη ίση με $-k_2(x_2-x_1)$ και στη μάζα m_1 δύναμη ίση με $k_2(x_2-x_1)$. Ανάλογα το τρίτο ελατήριο ασκεί στις μάζες m_3 και m_2 τις δυνάμεις $-k_3(x_3-x_2)$ και $k_3(x_3-x_2)$ αντίστοιχα. Επομένως για τα τρία σώματα ισχύει το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων

$$(9) \qquad \begin{cases} -k_1x_1 + k_2(x_2-x_1) = m_1\ddot{x}_1 \\ -k_2(x_2-x_1) + k_3(x_3-x_2) = m_2\ddot{x}_2 \\ -k_3(x_3-x_2) = m_3\ddot{x}_3 \end{cases}$$

με άγνωστες τις συναρτήσεις $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$. ●

Παράδειγμα 1.3. Ηλεκτρικά κυκλώματα

Θεωρούμε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα που αποτελείται από μια πηγή ηλεκτρεγερτικής δυνάμεως $E(t)$ (η οποία μεταβάλλεται με το χρόνο), ωμική αντίσταση R, πηνίο αυτεπαγωγής L και πυκνωτή χωρητικότητας C που συνδέονται σε σειρά (σχ. 5).



Σχ. 5

Σύμφωνα με το νόμο του *Kirchhoff*, η ηλεκτρεγερτική δύναμη $E(t)$ ισούται με το άθροισμα των διαφορών δυναμικού στα άκρα των διαφόρων στοιχείων του κυκλώματος.

Η διαφορά δυναμικού στα άκρα της ωμικής αντιστάσεως είναι $i(t)\,R$, όπου $i(t)$ είναι η ένταση ρεύματος, στα άκρα του πηνίου είναι $L\,\dfrac{di(t)}{dt}$ και στα άκρα του πυκνωτή είναι $\dfrac{q(t)}{C}$, όπου $q(t)$ είναι το φορτίο στις πλάκες του πυκνωτή. Επομένως ισχύει η ισότητα

$$(10) \qquad E(t) = i\,R + L\,\frac{di}{dt} + \frac{q}{C}$$

ή, άν λάβουμε υπόψη ότι $\dfrac{dq}{dt} = i$,

$$(11) \qquad L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}\, q = E(t).$$

Αν παραγωγήσουμε την (10) ως προς t, παίρνουμε τη διαφορική εξίσωση των ηλεκτρικών κυκλωμάτων

$$(12) \qquad L\frac{d^2i}{dt^2} + R\,\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\,i = \frac{dE}{dt}$$

με άγνωστη συνάρτηση $i(t)$. ●

2. Ορισμοί

Μια εξίσωση μεταξύ μιας ζητούμενης πραγματικής συναρτήσεως $y(x)$ και ορισμένων από τις παραγώγους της ονομάζεται **συνήθης διαφορική εξίσωση,** δηλ. μια εξίσωση της μορφής

$$(1) \qquad F\,(x,\, y,\, y',\ldots,\, y^{(n-1)},\, y^{(n)}) = 0,$$

όπου $F\,(u,\, u_0,\, u_1,\ldots,\, u_n)$ είναι μια πραγματική συνάρτηση ορισμένη σ' ένα ανοιχτό υποσύνολο Ω του $\mathbb{R}^{n+2}$.

Ονομάζουμε **συνήθη διαφορική εξίσωση** n **τάξεως** την εξίσωση (1), όταν η συνάρτηση F δεν είναι σταθερή ως προς τη μεταβλητή u_n[1].

Ονομάζουμε **λύση** της διαφορικής εξισώσεως κάθε πραγματική συνάρτηση $y(x)$, ορισμένη και n φορές παραγωγίσιμη σ' ένα ανοιχτό διάστημα (φραγμένο ή μη) $I\subset\mathbb{R}$ και τέτοια, ώστε για κάθε $x \in I$ να ισχύει:

$$\big(x,\, y(x),\, y'(x),\ldots,\, y^{(n)}(x)\big) \in \Omega \quad \text{και} \quad F\,\big(x,\, y(x),\, y'(x),\ldots,\, y^{(n)}(x)\big) = 0.$$

Το x στην εξίσωση (1) ονομάζεται **ανεξάρτητη μεταβλητή** και το y **άγνωστη συνάρτηση.** Το γράφημα κάθε λύσεως $y(x)$ ονομάζεται **ολοκληρωτική καμπύλη** της (1).

Η μορφή (1) μιας διαφορικής εξισώσεως ονομάζεται **γενική** ή **πεπλεγμένη.** Πολλές φορές η εξίσωση (1) μπορεί να γραφεί με τη μορφή

$$(2) \qquad y^{(n)} = f\big(x,\, y,\, y',\ldots,\, y^{(n-1)}\big),$$

---

1) Όταν υπάρχουν δύο (τουλάχιστον) στοιχεία της μορφής $(u,\, u_0,\, u_1,\ldots,\, u_{n-1}\,,\, u_n)$ και $(u,\, u_0,\, u_1,\ldots,\, u_{n-1}\,,\, \upsilon_n)$ του Ω τέτοια, ώστε $F\,(u,\, u_0\,\ldots,\, u_{n-1}\,,\, u_n) \neq F\,(u,\, u_0,\ldots,\, u_{n-1}\,,\upsilon_n)$.

όπου f είναι μια πραγματική συνάρτηση ορισμένη σ' ένα ανοιχτό υποσύνολο D του $\mathbb{R}^{n+1}$. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η διαφορική εξίσωση n τάξεως, είναι στην **κανονική ή λυμένη** της μορφή.

Παράδειγμα 2.1. Η διαφορική εξίσωση

$$x \ln (y''y'-y) - e^{y^{(4)}} = 0$$

είναι 4ης τάξεως σε πεπλεγμένη μορφή, όπου $F(u, u_0, u_1, u_2, u_3, u_4) = u \ln (u_2 u_1 - u_0) - e^{u_4}$. ●

Παράδειγμα 2.2. Η διαφορική εξίσωση

$$y'' = xy' - y^2$$

είναι δευτέρας τάξεως σε κανονική (λυμένη) μορφή. ●

Παράδειγμα 2.3. Η συνήθης διαφορική εξίσωση της ταλαντώσεως

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx \ , \qquad m, k > 0,$$

είναι δευτέρας τάξεως. Εδώ η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι το t και η άγνωστη συνάρτηση η x.

Εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι η συνάρτηση

$$x(t) = \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t \right), \qquad t \in \mathbb{R} \ ,$$

είναι μια λύση της εξισώσεως. Επίσης λύσεις της εξισώσεως είναι και οι συναρτήσεις της μορφής

$$x(t) = A \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t \right) + B \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t \right), \qquad t \in \mathbb{R} \ ,$$

όπου A, B είναι αυθαίρετες σταθερές. ●

Μια διαφορική εξίσωση μπορεί να μην έχει λύση, όπως π.χ. η $(y')^2+\alpha^2=0$, $\alpha \neq 0$, να έχει μια μοναδική λύση, όπως π.χ. η $(y')^2+y^2=0$ ή να έχει περισσότερες από μία λύσεις όπως στο παράδειγμα 2.3. Από τις λύσεις μιας διαφορικής εξισώσεως συνήθως ζητάμε μια λύση που θέλουμε να ικανοποιεί ορισμένες συνθήκες. Για παράδειγμα στην εξίσωση που περιγράφει την κίνηση ενός υλικού σημείου πάνω σε μια ευθεία (παράδειγμα 1.1)

$$m\,\ddot{x} = f(t, x, \dot{x}),$$

που είναι δευτέρας τάξεως, ζητείται η θέση του σημείου σε κάθε χρονική στιγμή t, όταν είναι γνωστή η θέση x_0 και η ταχύτητά του y_0 σε μια δοσμένη χρονική στιγμή t_0. Ζητείται συνεπώς η λύση $x(t)$ που ικανοποιεί τις δοσμένες συνθήκες:

$$x(t_0) = x_0 \quad , \quad \dot{x}(t_0) = y_0$$

Πιο γενικά· όταν δίνονται η διαφορική εξίσωση (2) και ένα σημείο $(x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$ του πεδίου ορισμού D της f, τότε το πρόβλημα της ευρέσεως μιας λύσεως της (2) που ικανοποιεί τις συνθήκες

(3) $$y(x_0) = y_0 \, , \, \dots, \, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \, ,$$

λέγεται **πρόβλημα αρχικών τιμών** ή **πρόβλημα Cauchy** για τη συνήθη διαφορική εξίσωση (2).
Οι συνθήκες (3) ονομάζονται **αρχικές συνθήκες** ή **συνθήκες Cauchy**.

Όπως θα αποδείξουμε αργότερα, όταν η συνάρτηση f είναι συνεχής, το πρόβλημα αρχικών τιμών (2), (3) έχει πάντοτε μια τουλάχιστον λύση. Μπορούμε επομένως για κάθε x_0 να επιλέξουμε αυθαίρετα τις τιμές της συναρτήσεως $y(x)$ και των παραγώγων της μέχρι $n-1$ τάξεως στο σημείο x_0, αρκεί το σημείο $(x_0, y_0, \dots, y_{n-1})$ ν' ανήκει στο πεδίο ορισμού D της f. Ας σημειωθεί ότι στην περίπτωση αυτή η $y^{(n)}(x_0)$ δίνεται από την ισότητα:

$$y^{(n)}(x_0) = f(x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \, .$$

Αν μάλιστα η f είναι διαφορίσιμη, τότε με παραγώγιση της εξισώσεως (2) ως προς x μπορούμε να υπολογίσουμε και την $y^{(n+1)}(x_0)$. Επειδή για κάθε x_0 μπορούμε να επιλέγουμε αυθαίρετα τα $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ συμπεραίνουμε ότι η (2) έχει, εν γένει άπειρες λύσεις. Επίσης, σύμφωνα με όσα αναφέραμε, είναι λογικό οι λύσεις να εξαρτώνται από n αυθαίρετες σταθερές, όσες είναι η τάξη της εξισώσεως.

Ορισμός 2.1. Θα λέμε ότι η συνάρτηση

(4) $$y = \varphi(x, C_1, \dots, C_n) \, ,$$

που εξαρτάται από τις n σταθερές $C_1, \dots, C_n$, είναι **γενική λύση** της διαφορικής εξισώσεως (2), όταν

(i) Για οποιοδήποτε σημείο $(C_1, \dots, C_n)$ ενός ανοιχτού υποσυνόλου Δ του $\mathbb{R}^n$ η (4) αποτελεί λύση της (2) και

(ii) Για οποιοδήποτε σημείο $(x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$ ενός ανοιχτού υποσυνό-

λου D_1 του πεδίου ορισμού D της f υπάρχει ακριβώς ένα σημείο $(C_1, \ldots, C_n)$ του Δ τέτοιο, ώστε η y να ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες (3).
Η λύση που παίρνουμε για μια συγκεκριμένη επιλογή των σταθερών $C_1, \ldots, C_n$ ονομάζεται **μερική λύση** της συνήθους διαφορικής εξισώσεως (2).

Παράδειγμα 2.4. Η διαφορική εξίσωση

$$y'' = y' + 2y$$

όπου η συνάρτηση $f(x, u_0, u_1) = 2u_0 + u_1$ ορίζεται στον $\mathbb{R}^3$, έχει τη γενική λύση

$$(*) \qquad y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Πράγματι, είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι για κάθε επιλογή των σταθερών C_1, C_2 η $(*)$ αποτελεί μια λύση της δοθείσης διαφορικής εξισώσεως.
Εξάλλου αν (x_0, y_0, y_1) είναι ένα οποιοδήποτε σημείο του $\mathbb{R}^3$, μπορούμε τότε να προσδιορίσουμε τα C_1, C_2 ώστε η $(*)$ να ικανοποιεί και τις αρχικές συνθήκες

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1.$$

Πράγματι, από το σύστημα

$$C_1 e^{2x_0} + C_2 e^{-x_0} = y_0$$
$$2C_1 e^{2x_0} - C_2 e^{-x_0} = y_1$$

προκύπτουν

$$C_1 = \frac{y_0 + y_1}{3} e^{-2x_0}, \quad C_2 = \frac{2y_0 - y_1}{3} e^{x_0}$$

●

Παρατήρηση 2.1. Η συνθήκη *(ii)* του ορισμού 2.1 είναι απαραίτητη. Πράγματι, για τη διαφορική εξίσωση $y'' = 0$ η συνάρτηση $y = x + C_1 + C_2$ δεν είναι γενική λύση της,αν και για κάθε τιμή των σταθερών C_1 και C_2 είναι λύση. Αν δοθεί ένα οποιοδήποτε σημείο (x_0, y_0, y_1) του $\mathbb{R}^3$, δεν προσδιορίζονται τα C_1, C_2 κατά μοναδικό τρόπο, ώστε $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$, αφού η μοναδική σχέση που ικανοποιούν είναι $y_0 = x_0 + C_1 + C_2$. ●

Είναι δυνατόν μια διαφορική εξίσωση να έχει, εκτός από τη γενική λύση, και άλλες λύσεις που δεν μπορούν να προκύψουν από τη γενική λύση για κάποια τιμή της σταθεράς ή των σταθερών. Οι λύσεις αυτές ονομάζονται **ιδιάζουσες λύσεις.**

Παράδειγμα 2.5. Η συνήθης διαφορική εξίσωση

$$y' = 2xy^2$$

έχει τη γενική λύση

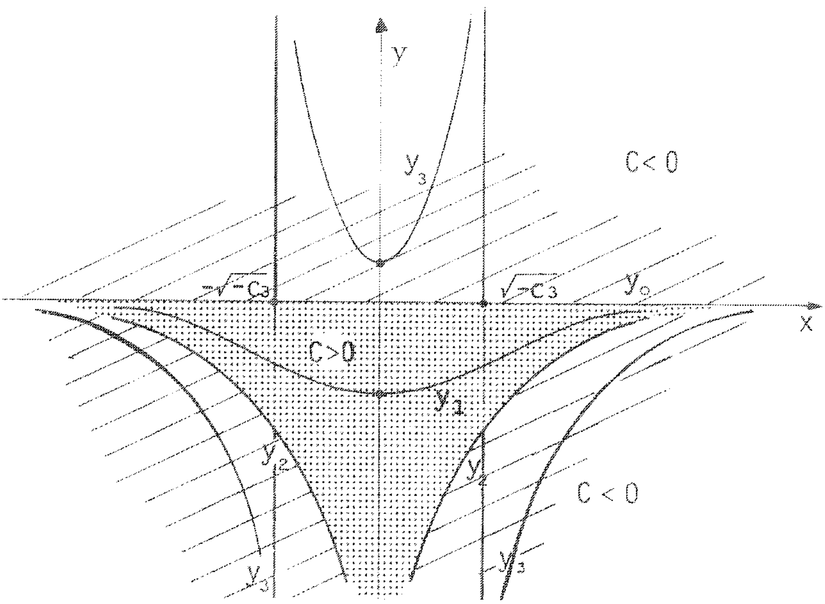
$$(*) \qquad y = \frac{-1}{x^2+C}\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

Πράγματι, για κάθε $C \in \mathbb{R}$ η $(*)$ είναι λύση της δοθείσης διαφορικής εξισώσεως. Ενώ για κάθε $(x_0, y_0) \in D_1 = \mathbb{R} \times \{\mathbb{R}\setminus\{0\}\}$ υπάρχει $C = -\dfrac{1}{y_0} - x_0^2$ τέτοιο, ώστε η $(*)$ να ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $y(x_0) = y_0$.

Εύκολα όμως μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι και η συνάρτηση

$$y(x) = 0$$

είναι λύση της δοθείσης διαφορικής εξισώσεως, που δεν μπορεί να προκύψει από την $(*)$ για κάποια τιμή της σταθεράς C. Είναι λοιπόν μια ιδιάζουσα λύση. ●



Σχ. 6. Γραφική παράσταση των λύσεων $y_i = \dfrac{-1}{x^2+C_i}$, $i = 1,2,3$, της $y' = 2xy^2$, όπου $C_1 > C_2 = 0 > C_3$. Η $y_0 \equiv 0$ είναι η ιδιάζουσα λύση.

Παρατηρούμε ότι οι ολοκληρωτικές καμπύλες (γραφήματα των λύσεων) καλύπτουν όλο το επίπεδο, δηλ. από κάθε σημείο (x_0, y_0), που ορίζει μια αρχική συνθήκη, περνά ακριβώς μια καμπύλη. Αν $y_0 \neq 0$, η καμπύλη παριστά μια μερική λύση. Από τα σημεία της μορφής $(x_0, 0)$ περνά η ιδιάζουσα λύση.

Η διαδικασία για τον προσδιορισμό των λύσεων των διαφορικών εξισώσεων ονομάζεται **επίλυση** ή **ολοκλήρωση της διαφορικής εξισώσεως**. Κατά την ολοκλήρωση των διαφορικών εξισώσεων είναι δυνατόν να καταλήξουμε σε σχέσεις που δίνουν τη λύση είτε υπό παραμετρική μορφή είτε υπό πεπλεγμένη μορφή.

Ορισμός 2.2. Το σύστημα των ισοτήτων

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \qquad t \in I,$$

όπου I είναι ένα ανοιχτό διάστημα του $\mathbb{R}$, λέμε ότι ορίζουν **τη λύση της** (1) **υπό παραμετρική μορφή**, όταν οι συναρτήσεις $x(t)$, $y(t)$ είναι n φορές παραγωγίσιμες, η $x(t)$ είναι αντιστρέψιμη [1] και η σύνθετη συνάρτηση

$$y = y\big(t(x)\big)$$

είναι λύση της (1).

Ορισμός 2.3. Το σύστημα των ισοτήτων

$$(5) \qquad \begin{cases} \psi_1(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, C_1) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \psi_n(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, C_n) = 0 \end{cases}$$

λέμε ότι αποτελεί ένα **γενικό ολοκλήρωμα** της (2), όταν για κάθε σημείο $(C_1, \ldots, C_n)$ ενός ανοιχτού υποσυνόλου Δ του $\mathbb{R}^n$ υπάρχει λύση $y(x)$ της (2), που επαληθεύει τις (5), και αντίστροφα · όταν κάθε n φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $y(x)$, που επαληθεύει τις (5), είναι λύση της (2).

Το γενικό ολοκλήρωμα μιας διαφορικής εξισώσεως α΄ τάξεως έχει τη μορφή

$$(6) \qquad \psi(x, y, C) = 0\,, \quad C \in \Delta\,.$$

Για κάθε $C \in \Delta$ η (6) ορίζει μια καμπύλη στον $\mathbb{R}^2$ (βλ. *(III).IV.* 1). Επομένως η (6) παριστάνει μια **μονοπαραμετρική οικογένεια καμπυλών** στον

1) Αυτό συμβαίνει όταν π.χ. η $\dot{x}(t)$ είναι συνεχής και $\neq 0$ στο διάστημα I.

$\mathbb{R}^2$. Γενικότερα, αν δίνεται το γενικό ολοκλήρωμα μιας συνήθους διαφορικής εξισώσεως n τάξεως και μπορούμε να απαλείψουμε αλγεβρικά τις $y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ από το σύστημα (5) παίρνουμε μια εξίσωση της μορφής

$$(7) \qquad \psi(x, y, C_1, \ldots, C_n) = 0.$$

Η (7) παριστάνει μια $n-$παραμετρική οικογένεια καμπύλων του $\mathbb{R}^2$ και ονομάζεται επίσης **γενικό ολοκλήρωμα** της συνήθους διαφορικής εξισώσεως.

Παράδειγμα 2.6. Η συνήθης διαφορική εξίσωση

$$yy' + x = 0$$

έχει τις γενικές λύσεις

$$y = \sqrt{C-x^2}\ , \quad C > 0\ , \quad x \in (-\sqrt{C}\ , \sqrt{C}\ )$$
$$y = -\sqrt{C-x^2}\ , \quad C > 0\ , \quad x \in (-\sqrt{C}\ , \sqrt{C}\ )$$

Οι λύσεις αυτές μπορούν να γραφούν υπό παραμετρική μορφή:

$$y(t) = C \sin t\ , \quad x(t) = C \cos t\ , \quad t \in (0, \pi)$$

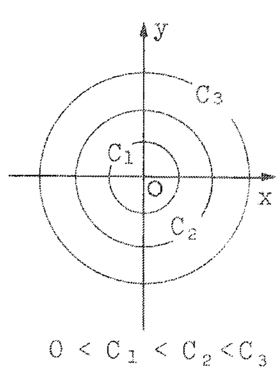
και

$$y(t) = C \sin t\ , \quad x(t) = C \cos t\ , \quad t \in (\pi, 2\pi)$$

αντίστοιχα.

Ακόμη μπορεί να γραφούν με τη μορφή γενικού ολοκληρώματος (υπό πεπλεγμένη μορφή):

$$x^2 + y^2 = C \quad (\text{σχ. } 7)$$



Σχ. 7

Αν δίνεται μια μονοπαραμετρική οικογένεια καμπυλών του επιπέδου με τη μορφή (6), όπου η συνάρτηση ψ για κάθε τιμή της σταθεράς C είναι διαφορίσιμη με $grad\, \psi \neq 0$[1], τότε μπορούμε να βρούμε μια διαφορική εξίσωση α΄ τάξεως που να έχει την (6) ως γενικό ολοκλήρωμα. Πράγματι, αν $y(x)$ (ή $x(y)$) είναι μια

1) $grad\, f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$.

παραγωγίσιμη συνάρτηση που ορίζει πεπλεγμένα η εξίσωση (6) (βλ. (III). Παρατ. VIII. 1.3), για μια τιμή της σταθεράς C, τότε αυτή ικανοποιεί την ισότητα

$$(8) \qquad \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} y' = 0 \qquad \left(\text{ή} \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} x' + \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0\right).$$

Με απαλοιφή της C από τις εξισώσεις (6) και (8) προκύπτει η ζητούμενη διαφορική εξίσωση α΄ τάξεως. Τη διαφορική εξίσωση αυτή ικανοποιούν όλες οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $y(x)$ (ή $x(y)$) που ικανοποιούν την (6).

Εντελώς ανάλογα, αν μας δοθεί μια n-παραμετρική οικογένεια καμπυλών της μορφής (7), παραγωγίζοντας την ψ n φορές (βλ. προϋποθέσεις (III). VIII. Προτ. 1.2.(γ)) και απαλείφοντας τις σταθερές $C_1, \ldots, C_n$ από τις σχέσεις που προκύπτουν και την (7), παίρνουμε μια συνήθη διαφορική εξίσωση n τάξεως που έχει την (7) ως γενικό ολοκλήρωμα.

Παράδειγμα 2.7. Αναζητούμε τη διαφορική εξίσωση 2ας τάξεως με γενικό ολοκλήρωμα

$$\psi(x, y, \alpha, \beta) \equiv (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - 1 = 0 \quad \text{(οι κύκλοι με ακτίνα 1).}$$

Για τη συνάρτηση ψ ισχύει $grad\, \psi(x, y) \neq 0$ στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(\alpha, \beta)\}$.
Με δύο διαδοχικές παραγωγίσεις της ψ παίρνουμε

$$2(x-\alpha) + 2(y-\beta) y' = 0, \qquad 1 + y'^2 + (y-\beta) y'' = 0,$$

από τις οποίες προκύπτουν

$$y-\beta = -\frac{1+y'^2}{y''}, \qquad x-\alpha = \frac{y'(1+y'^2)}{y''}.$$

Οι τελευταίες μαζί με την $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = 1$ μας δίνουν τη διαφορική εξίσωση

$$y''^2 = (1+y'^2)^3.$$

●

3. Ποσοτική και ποιοτική θεωρία των συνήθων διαφορικών εξισώσεων

Όταν δοθεί μια συνήθης διαφορική εξίσωση το πρώτο πρόβλημα είναι φυσικά η επίλυσή της. Στο βιβλίο αυτό θα παραθέσουμε αρκετές μεθόδους επιλύσεως διαφορικών εξισώσεων. Το σύνολο όμως όλων των γνω-