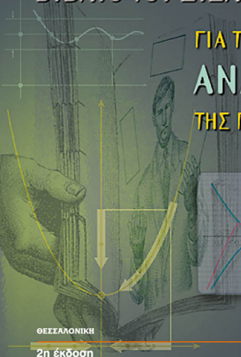
ΓΕΩΡΓΙΟΥ Ν. ΠΑΝΤΕΛΙΔΗ

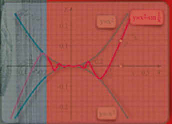
ΒΙΒΛΙΟ ΤΟΥ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΟΣ

ΓΙΑ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ

ΑΝΑΛΥΣΗ

ΤΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ





ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ

2η έκδοση

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

Κάθε γνήσιο αντίτυπο φέρει την υπογραφή του συγγραφέα

ISBN 960-431-460-2

Το Βιβλίο του διδάσκοντος για το μάθημα «Ανάλυση» της Γ Λυκείου

2η ΄Εκδοση: Αύγουστος 2006

Φωτοστοιχειοθεσία Εκτύπωση

Π. ΖΗΤΗ & Σια ΟΕ
18ο χλμ Θεσ/νίκης-Περαίας
Τ.Θ. 4171 • Περαία Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19
Τηλ.: 2392.072.222 - Fax: 2392.072.229
e-mail: info@ziti.gr

Βιβλιοπωλείο

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
Αρμενοπούλου 27 • 546 35 Θεσσαλονίκη
Τηλ. 2310.203.720, Fax 2310.211.305
e-mail: sales@ziti.gr

www.ziti.gr

Εις μνήμην των διδασκάλων μου

Δημητρίου Σπύρου,

Καθηγητή Μαθηματικών
στο Ε΄ Γυμνάσιο Αρρένων Θεσσαλονίκης

Ιωάννη Αναστασιάδη

Καθηγητή Μαθηματικής Αναλύσεως
στο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Πρόλογος

Η σπουδή των Μαθηματικών θέτει στους μαθητές, αλλά κυρίως στους καθηγητές, απαιτήσεις όσο καμιά άλλη Επιστήμη. Οι απαιτήσεις αυτές είναι συνέπεια της *"φύσεως των πραγμάτων"*. Ο άνθρωπος από καταβολής του *"βολεύεται"* στην ασάφεια, στο περίπου και στην αβεβαιότητα. Δε θέλει *"να γνωρίζει ακριβώς"*, αφού στην καθημερινή του ενασχόληση δεν του είναι απαραίτητο. Με το σκεπτικό αυτό βρίσκει *αφύσικο, απάνθρωπο* και *ακατόρθωτο* αυτό που διακρίνει τα Μαθηματικά: *η σαφήνεια, η ακρίβεια, η σχολαστική φροντίδα στη χρήση των ορισμών, η αυστηρότητα των αποδείξεων* (μόνο με τη χρήση της Λογικής και όχι τις μεθόδους της 'παραδοσιακής' αποδεικτικής διαδικασίας της πειθούς) και τέλος η *αφηρημένη φύση* των μαθηματικών αντικειμένων και επινοημάτων, τα οποία δε βλέπουμε, δεν ακούμε, δεν πιάνουμε, δε γευόμαστε και δε μυρίζουμε.

Η Ανάλυση αποτελεί το πιο ισχυρό και τελείως απαραίτητο εργαλείο για κάθε σε βάθος εξέταση προβλημάτων που απασχολούν σήμερα, εκτός από τα Μαθηματικά, τη Φυσική, την Τεχνολογία, τη Βιολογία, την Ιατρική, την Οικονομία καθώς και τις Κοινωνικές Επιστήμες. Στην Ανάλυση εισάγεται για πρώτη φορά η έννοια της *αρίθμησης* και *συνεχούς διαδικασίας,* η έννοια της *προσεγγίσεως* με την εισαγωγή του ορίου καθώς και η γνωστή από την Αρχαιότητα έννοια της *εξαντλήσεως* για τον υπολογισμό των εμβαδών κ.λπ.

Το ***Βιβλίο του Διδάσκοντος*** *για το μάθημα της Αναλύσεως* απευθύνεται στους συναδέλφους μαθηματικούς οι οποίοι διδάσκουν στο Λύκειο το μάθημα αυτό και πιστεύουμε ότι θα αποτελέσει στα χέρια τους ένα απαραίτητο βοήθημα στην προετοιμασία και στη διδασκαλία του μαθήματος. Απευθύνεται όμως και σε εκείνους τους συναδέλφους που θα προσέρχονται στις εξετάσεις για διορισμό στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση.

Το ***Βιβλίο του Διδάσκοντος,*** όπως είναι γραμμένο, είναι ένας συνεχής *"διάλογος"* με τον αναγνώστη που *"συζητά"* μαζί του μεγάλο μέρος των προβληματισμών και των ερωτημάτων, τα οποία μπορεί να θέσει κάποιος μελετώντας ή διδάσκοντας την Ανάλυση. Επιδιώκει ακόμη να βοηθήσει τον διδάσκοντα να προσαρμόσει τις πανεπιστημιακές του γνώσεις στο επίπεδο και στους στόχους του μαθήματος στο Λύκειο.

Το διδακτικό βιβλίο, που είναι το βασικό βοήθημα του μαθητή, παραθέτει με παιδαγωγικό τρόπο τη διδακτέα ύλη, δεν μπορεί όμως να δίνει διδακτικές οδηγίες και να καλύπτει όλους τους προβληματισμούς και τα ερωτηματικά που εμφανίζονται κατά τη διδασκαλία. Η παράθεση στο σχολικό βιβλίο τέτοιων οδηγιών θα αποπροσανατόλιζε τον μαθητή. Για το λόγο αυτό θεωρήσαμε απαραίτητη τη συγγραφή του ***Βιβλίου του Διδάσκοντος.*** Είναι άλλωστε διεθνής πρακτική η συγγραφή τέτοιου βιβλίου για κάθε μάθημα.

Το ***Βιβλίο του Διδάσκοντος*** δεν είναι ένα πανεπιστημιακό βιβλίο Αναλύσεως. Αποτελεί συμπλήρωμα του εγκεκριμένου σχολικού βιβλίου και για το λόγο αυτό χρησιμοποιεί απαραίτητα τη διατύπωση, την ορολογία και το συμβολισμό του σχολικού βιβλίου και περιλαμβάνει μόνο επεκτάσεις και γενικεύσεις προτάσεων που θεωρούμε ότι είναι απαραίτητες για την κατανόηση της σχολικής ύλης. Προκειμένου να διατηρήσουμε τους όρους *“πρόταση”* και *“πόρισμα”* μόνο για τις προτάσεις και τα πορίσματα που αναφέρονται στο σχολικό βιβλίο, θα χρησιμοποιούμε τους όρους *“συνέπεια”* ή *“εφαρμογή”* για τις προτάσεις, τα πορίσματα και τους τύπους που δεν υπάρχουν ως τέτοια στο βιβλίο. Οι εφαρμογές, οι συνέπειες ακόμη και τα παραδείγματα παρατίθενται εδώ γιατί επισημαίνουν ιδιότητες που είναι απαραίτητες για την κατανόηση της ύλης και υποδεικνύουν μεθόδους λύσεως ασκήσεων. Συχνά, όταν θέλουμε να επισημάνουμε ότι κάποια πρόταση δεν ισχύει παραθέτουμε κατάλληλα παραδείγματα *(αντιπαραδείγματα)* που στοχεύουν να *“διαβεβαιώσουν”* τον διδάσκοντα. Δεν είναι απαραίτητη η διεξοδική παρουσίαση μέσα στην τάξη, αρκεί μια περιγραφή του παραδείγματος.

Οι αποδείξεις προτάσεων που βρίσκονται μέσα στο σχολικό βιβλίο δεν παρατίθενται εδώ. Επίσης δε σχολιάζονται ορισμένες παράγραφοι όταν δεν θεωρούμε ότι κάτι τέτοιο είναι απαραίτητο. Πολλές φορές υπενθυμίζουμε με σχόλια και παρατηρήσεις (γραμμένα με μικρότερα γράμματα και **δεν αποτελούν αντικείμενο διδασκαλίας**) έννοιες και μεθόδους, που είναι μεν εκτός διδακτέας ύλης, οπωσδήποτε όμως από το *“άμεσο περιβάλλον”* της. Αυτό θα γίνεται για να είναι ο εκπαιδευτικός μας πάντοτε **ένα βήμα πιο μπροστά.**

Είναι αυτονόητο ότι το βιβλίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί και από τους μαθητές της Γ′ τάξεως του Λυκείου καθώς και τους υποψήφιους των ΑΕΙ και ΤΕΙ της 1ης Δέσμης.

Αθήνα, Οκτώβριος 1998

Πρόλογος 2ης έκδοσης

Στη 2η αυτή έκδοση του ***Βιβλίου του Διδάσκοντος*** έγινε προσθήκη ορισμένων προτάσεων, παρατηρήσεων, σχολιασμών και υποδείξεων με τη μορφή παραπομπών στο βιβλίο μας «**ΑΝΑΛΥΣΗ**», τόμος Ι (2000).

Θεωρήσαμε ότι οι προσθήκες-παραπομπές αυτές είναι απαραίτητες, ώστε το *Βιβλίο του Διδάσκοντος* να είναι προσαρμοσμένο στις πιθανές αλλαγές στο περιεχόμενο του μαθήματος. Επιπλέον το βιβλίο αυτό αποτελεί ένα σημαντικό βοήθημα για τους υποψηφίους του Α.Σ.Ε.Π. Συνιστούμε στους μελετητές, κυρίως στους υποψηφίους του Α.Σ.Ε.Π., να συμβουλεύονται τις υποδείξεις, παρατηρήσεις και προτάσεις του βιβλίου μας αυτού, γιατί υπάρχουν λεπτομερείς περιγραφές, υποδείξεις και αποδείξεις καθώς και κατάλληλα παραδείγματα για την κατανόηση της δομής της Αναλύσεως.

Αθήνα, Μάιος 2006

Γεώργιος Νικ. Παντελίδης

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κεφάλαιο 1
ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Κεφάλαιο 2
ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ $x_0 \in R$

Κεφάλαιο 3
ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Κεφάλαιο 4
ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ

Κεφάλαιο 5 ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ- ΟΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ $α^x$, $log_α x$

Κεφάλαιο 6 ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Κεφάλαιο 7 ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Κεφάλαιο 1
ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1.0. Εισαγωγή

Οι **φυσικοί αριθμοί** $\mathbb{N}^*$, εισάγονται στα Μαθηματικά με τη βοήθεια των αξιωμάτων *Dedekind-Peano,* τους οποίους εφοδιάζουμε με δύο πράξεις συνθέσεως, την *πρόσθεση* «+» και τον *πολλαπλασιασμό* «·», οπότε σε κάθε ζεύγος $\kappa, \nu \in \mathbb{N}^*$ αντιστοιχίζουμε το *άθροισμα* τους

$$\kappa+\nu \in \mathbb{N}^*$$

και το *γινόμενό* τους

$$\kappa \cdot \nu \in \mathbb{N}^*.$$

Μπορούμε επίσης στο σύνολο $\mathbb{N}^*$ να εισάγουμε μια σχέση $\nu<\mu$ (διάβ. ν μικρότερο του μ), όταν υπάρχει φυσικός αριθμός κ τέτοιος, ώστε $\nu+\kappa=\mu$. Το σύνολο $\mathbb{N}^*$ εφοδιασμένο με **τη σχέση διατάξεως**

$$\nu \leq \mu \ \ (\nu<\mu \ \text{ή} \ \nu=\mu)$$

είναι **ολικά** ή **γραμμικά διατεταγμένο.** Έτσι για τους φυσικούς αριθμούς ισχύουν οι διαδοχικές ανισότητες:

$$1 < 2< \ldots < \nu < \nu+1 < \ldots$$

Τα αξιώματα *Dedekind-Peano* για το $\mathbb{N}^*$, μετά τον ορισμό των πράξεων αυτών διατυπώνονται ως εξής:

(N1) $1 \in \mathbb{N}^*$, ο 1 είναι φυσικός αριθμός.

(N2) (α) Αν $\nu \in \mathbb{N}^*$, τότε και $\nu+1 \in \mathbb{N}^*$

(β) Για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$ ισχύει $\nu+1 \neq 1$, δηλ. δεν υπάρχει φυσικός αριθμός, του οποίου ο επόμενος να είναι ο 1.

(N3) Αν για ένα υποσύνολο M του $\mathbb{N}^*$ ισχύουν (i) $1 \in M$ και (ii) με $\nu \in M$ και $\nu+1 \in M$, τότε $M=\mathbb{N}^*$.

Πολλές φορές, όπως στο σχολικό βιβλίο, ως σύνολο των φυσικών αριθμών θεωρούμε το σύνολο

$$\mathbb{N} = \mathbb{N}^* \cup \{0\},$$

οπότε τα αξιώματα του Peano, δίνονται από τα (N1′), (N2′) και (N3′). Ενώ η διάταξη: $\nu<\mu$, όταν υπάρχει φυσικός αριθμός $\kappa \neq 0$ τέτοιος, ώστε $\nu+\kappa=\mu$, οπότε η διάταξη είναι

$$0 < 1 < 2 < \ldots < \nu < \nu+1 < \ldots$$

Τα αξιώματα *Dedekind-Peano* για το $\mathbb{N}$ διατυπώνονται ως εξής:

(N1′) $0 \in \mathbb{N}$, ο μηδέν είναι φυσικός αριθμός.

(N2′) (α) Αν $\nu \in \mathbb{N}$, τότε και $\nu+1 \in \mathbb{N}$

(β) Για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ ισχύει $\nu+1 \neq 0$, δηλ. δεν υπάρχει φυσικός αριθμός, του οποίου ο επόμενος να είναι ο 0.

(N3′) Αν για ένα υποσύνολο M του $\mathbb{N}$ ισχύουν (i) $0 \in M$ και (ii) με $\nu \in M$ και $\nu+1 \in M$, τότε $M=\mathbb{N}$.

Στο αξίωμα (Ν3), που αναφέρεται και στην υποσημείωση της σελ. 11 του βιβλίου, στηρίζεται η αποδεικτική **μέθοδος της μαθηματικής επαγωγής**, της οποίας η πλέον εύχρηστη μορφή είναι η εξής:

Δίνεται ο ισχυρισμός $p(\nu)$, $\nu\in\mathbb{N}^*$. Προκειμένου να αποδείξουμε ότι ο ισχυρισμός είναι αληθής για κάθε $\nu\in\mathbb{N}^*$, εργαζόμαστε ως εξής:

(α) **Αποδεικνύουμε ότι ο ισχυρισμός $p(1)$ είναι αληθής,**

(β) **Υποθέτοντας ότι ο ισχυρισμός $p(\kappa)$ είναι αληθής αποδεικνύουμε ότι και ο ισχυρισμός $p(\kappa+1)$ είναι αληθής,**

τότε ο ισχυρισμός $p(\nu)$ είναι αληθής για κάθε $\nu\in\mathbb{N}^*$.

Σχόλιο: Δεν είναι απαραίτητο, όπως στην παρακάτω επισήμανση, να θεωρήσουμε στο βήμα (β) ότι $\kappa\geq 1$ γιατί αυτό είναι αυτονόητο.

Προσοχή!

1) Το βήμα (β) από μόνο του δεν αποδεικνύει **τίποτε,** αν δεν αποδειχθεί η αλήθεια του ισχυρισμού $p(1)$. Για παράδειγμα, για τον ισχυρισμό $p(\nu)$:

$$2(1+2+\ldots+\nu) = (\nu-1)(\nu-2)$$

ισχύει η (β), ενώ δεν υπάρχει φυσικός για τον οποίον να είναι αληθής ο $p(\nu)$.

2) Αν, κατά την εφαρμογή της μαθηματικής επαγωγής, στο βήμα (α) αποδείξουμε ότι ο ισχυρισμός $p(\kappa_0)$ είναι αληθής για κάποιο $\kappa_0\in\mathbb{N}^*$ και αποδείξουμε το βήμα (β) για κάθε $\kappa\geq\kappa_0$, τότε **έχουμε αποδείξει** ότι ο $p(\nu)$ είναι αληθής για κάθε $\nu\geq\kappa_0$.
Αυτό αποδεικνύεται αν εφαρμόσουμε τη μαθηματική επαγωγή στον ισχυρισμό

$$q(\nu) = p((\kappa_0-1)+\nu).$$

Παράδειγμα

Να αποδειχθεί ο ισχυρισμός $p(\nu)$: $2^\nu > \nu^2$ για κάθε $\nu\geq 5$.

Απόδειξη 1η: Για $\nu=5$ η ανισότητα είναι αληθής αφού

$$2^5 = 32 > 25 = 5^2.$$

Υποθέτουμε ότι για κάποιο $\kappa\geq 5$ είναι αληθής ο $p(\kappa)$: $2^\kappa > \kappa^2$. Πολλαπλασιάζοντας τα δύο μέλη επί 2 παίρνουμε την

$$2^{\kappa+1} > 2\cdot\kappa^2.$$

Αρκεί επομένως να αποδείξουμε ότι

$$2\cdot\kappa^2 \geq (\kappa+1)^2.$$

Η τελευταία είναι συνέπεια των ισοδυναμιών:

$$2\cdot\kappa^2 \geq (\kappa+1)^2 \Leftrightarrow 2\cdot\kappa^2 \geq \kappa^2+2\kappa+1$$
$$\Leftrightarrow \kappa^2-2\kappa+1 \geq 2$$
$$\Leftrightarrow (\kappa-1)^2 \geq 2,$$

που ισχύει για κάθε $\kappa\geq 5$ (και μάλιστα για $\kappa\geq 3$).

Απόδειξη 2η: Μπορούμε να θεωρήσουμε τον ισοδύναμο ισχυρισμό

$$q(\nu):\ 2^{\nu+4} > (\nu+4)^2 \text{ ή } 16\cdot 2^{\nu} > (\nu+4)^2$$

και να αποδείξουμε ότι ισχύει για κάθε $\nu\geq 1$.
Προφανώς για $\nu=1$ ισχύει. Υποθέτοντας ότι ισχύει για $\kappa>1$, δηλ. $16\cdot 2^{\kappa} > (\kappa+4)^2$, πολλαπλασιάζουμε τα δύο μέλη επί 2, οπότε παίρνουμε την

$$16\cdot 2^{\kappa+1} > 2\cdot(\kappa+4)^2.$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $2\cdot(\kappa+4)^2 > (\kappa+1+4)^2$, το οποίο μετά την εκτέλεση των πράξεων είναι προφανές. ▲

Πραγματικοί αριθμοί

Θεωρούμε δεδομένη την ύπαρξη των πραγματικών αριθμών εφοδιασμένων με τις γνωστές πράξεις και τη διάταξη. Επιδιώκουμε την εξοικείωση των μαθητών με τις ιδιότητες των πράξεων και της διατάξεως μεταξύ των πραγματικών αριθμών καθώς επίσης με την έννοια του διαστήματος και του άνω (αντ. κάτω) φράγματος ενός συνόλου αριθμών.

Ξεκινώντας από ένα διάστημα της μορφής (α, β) και $(\alpha, \beta]$ ($\alpha<\beta$, α, β πραγματικοί αριθμοί) διαπιστώνουμε το «αυτονόητο» ότι από τα άνω φράγματα των διαστημάτων αυτών υπάρχει ένα, το β, που είναι μικρότερο από όλα τα άνω φράγματα. Αυτή η διαπίστωση όμως για γενικώς άνω φραγμένα σύνολα δεν είναι συνέπεια των πράξεων μεταξύ των αριθμών και ούτε της διατάξεως. Έτσι αναγκαζόμαστε να εφοδιάσουμε το σύνολο των πραγματικών αριθμών με το επόμενο αξίωμα:

Το αξίωμα της πλήρους διατάξεως

Κάθε άνω φραγμένο υποσύνολο των πραγματικών αριθμών έχει ένα ελάχιστο άνω φράγμα.

Το σύνολο των πραγματικών αριθμών εφοδιασμένο και με το αξίωμα αυτό συμβολίζεται με $\mathbb{R}$.

Το αξίωμα αυτό εξασφαλίζει

α) την ύπαρξη του ορίου μονότονης και φραγμένης ακολουθίας, β) την ύπαρξη λύσεων των εξισώσεων της μορφής

$$\alpha^x = \beta,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \alpha > 0,\ \alpha \neq 1 \text{ και } \beta > 0 \text{ (λογάριθμοι)}$$

και

γ) την ύπαρξη των υπερβατικών αριθμών, όπως ο π και ο e.

Σχόλιο: Το ελάχιστο άνω φράγμα ενός άνω φραγμένου υποσυνόλου X του $\mathbb{R}$ ονομάζεται supremum του X και συμβολίζεται με $supX$. Ως συνέπεια αυτού του αξιώματος είναι: Κάθε κάτω φραγμένο υποσύνολο X του $\mathbb{R}$ έχει μέγιστο κάτω φράγμα, το *infimum* του X, που συμβολίζεται $infX$. Πολλές φορές η τελευταία δίνεται ως αξίωμα και το παραπάνω αξίωμα ως πρόταση. Η Αρχιμήδεια ιδιότητα των πραγματικών αριθμών μαζί με την αρχή του κιβωτισμού αποτελούν ισοδύναμο αξίωμα με το αξίωμα της πλήρους διατάξεως (βλ. Γ. Παντελίδη, ΑΝΑΛΥΣΗ Ι, σ. 36).

Η κατασκευή των πραγματικών αριθμών από τους φυσικούς αριθμούς

1. Οι εξισώσεις της μορφής $x+\nu=\mu,\ \nu, \mu \in \mathbb{N}$, στο σύνολο των φυσικών αριθμών **δεν έχουν πάντοτε λύση** (π.χ. για $\nu=7$ και $\mu=5$). Επεκτείνουμε τους φυσικούς αριθμόύς με την προσθήκη των λύσεων των εξισώσεων $x+\nu=\mu$, οπότε παίρνουμε τους **ακέραιους** $\mathbb{Z}=\{0, \pm1, \pm2, ..., \pm\nu, ...\} \supset \mathbb{N}$.

2. Οι εξισώσεις της μορφής $x \cdot \nu = \mu,\ \nu, \mu \in \mathbb{Z}$, στο σύνολο των ακεραίων αριθμών **δεν έχουν πάντοτε λύση** (π.χ. για $\nu=7$ και $\mu=5$). Επεκτείνουμε τους ακέραιους αριθμούς με την προσθήκη των λύσεων των εξισώσεων $x \cdot \nu = \mu$, οπότε παίρνουμε τους **ρητούς** $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{\mu}{\nu} :\ \mu, \nu \in \mathbb{Z},\ \nu \neq 0 \right\} \supset \mathbb{Z}$.

3. α) Οι εξισώσεις της μορφής $x^\nu = \alpha,\ \alpha > 0,\ \nu \in \mathbb{N}$, και γενικότερα οι αλγεβρικές εξισώσεις, δηλ. πολυωνυμικές εξισώσεις με ακέραιους συντελεστές, στο σύνολο των ρητών αριθμών **δεν έχουν πάντοτε λύση** (π.χ. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$).

   β) Οι εξισώσεις της μορφής $\alpha^x = \beta,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \alpha > 0,\ \alpha \neq 1$ και $\beta > 0$ (λογάριθμοι), στο σύνολο των ρητών αριθμών **δεν έχουν πάντοτε λύση** (π.χ. $2^x = 3$).

   γ) Τα όρια αύξουσας και φραγμένης ακολουθίας ρητών αριθμών επίσης **δεν είναι πάντοτε** ρητοί αριθμοί, όπως ο e και ο π, οι οποίοι είναι **υπερβατικοί**, δηλ. δεν είναι ρίζες αλγεβρικής εξισώσεως.

Επεκτείνουμε τους ρητούς αριθμούς με την προσθήκη των λύσεων των παραπάνω εξισώσεων και των ορίων που αναφέραμε, οπότε παίρνουμε τους **πραγματικούς αριθμούς** $\mathbb{R}$, τους οποίους εφοδιάζουμε με τις γνωστές πράξεις (που προήλθαν από τις διαδοχικές επεκτάσεις των ανάλογων πράξεων στα σύνολα $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ και $\mathbb{Q}$). Προφανώς ισχύουν: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Ονομάζουμε **άρρητους** εκείνους τους πραγματικούς αριθμούς που δεν είναι ρητοί, δηλ. τα στοιχεία του συνόλου $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Το αριθμήσιμο ή μη

Θα λέμε ότι τα σύνολα A και B έχουν το *αυτό πλήθος* στοιχείων ή ότι το A έχει την *ίδια ισχύ* με το B ή ότι τα σύνολα A, B είναι *ισοδύναμα*, όταν υπάρχει αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση του A επί του B. Όταν $B=\{1, 2, \ldots, \kappa\}$, τότε λέμε ότι το A έχει κ στοιχεία, όπως στην καθομιλουμένη. Όταν $B=\mathbb{N}$, τότε λέμε ότι το σύνολο A είναι **αριθμήσιμο** και το πλήθος των στοιχείων του είναι *άπειρον*. Το σύνολο των ρητών αριθμών $\mathbb{Q}$ είναι επίσης αριθμήσιμο. Μια αρίθμησή του δίνεται στον πίνακα. Το άπειρο αυτό συμβολίζεται με $\aleph_0$ (διαβ. άλεφ μηδέν). Όταν $B=\mathbb{R}$, τότε το σύνολο A είναι **υπεραριθμήσιμο** και το πλήθος των στοιχείων του A είναι πάλι άπειρον, το οποίο συμβολίζεται με c και ονομάζεται *δύναμις του συνεχούς*. Με κάποια έννοια, που δε θα εξηγήσουμε εδώ, ισχύει η ανισότητα $c>\aleph_0$.

Παραμένει ανοιχτό το μαθηματικό πρόβλημα αν μεταξύ των c και $\aleph_0$ υπάρχει άλλο άπειρο.

Τέλος, ένα υποσύνολο X του $\mathbb{N}$ είναι άπειρο, όταν, και μόνο όταν, για κάθε $\nu\in\mathbb{N}$ υπάρχει $x\in X$ τέτοιο, ώστε $x>\nu$.

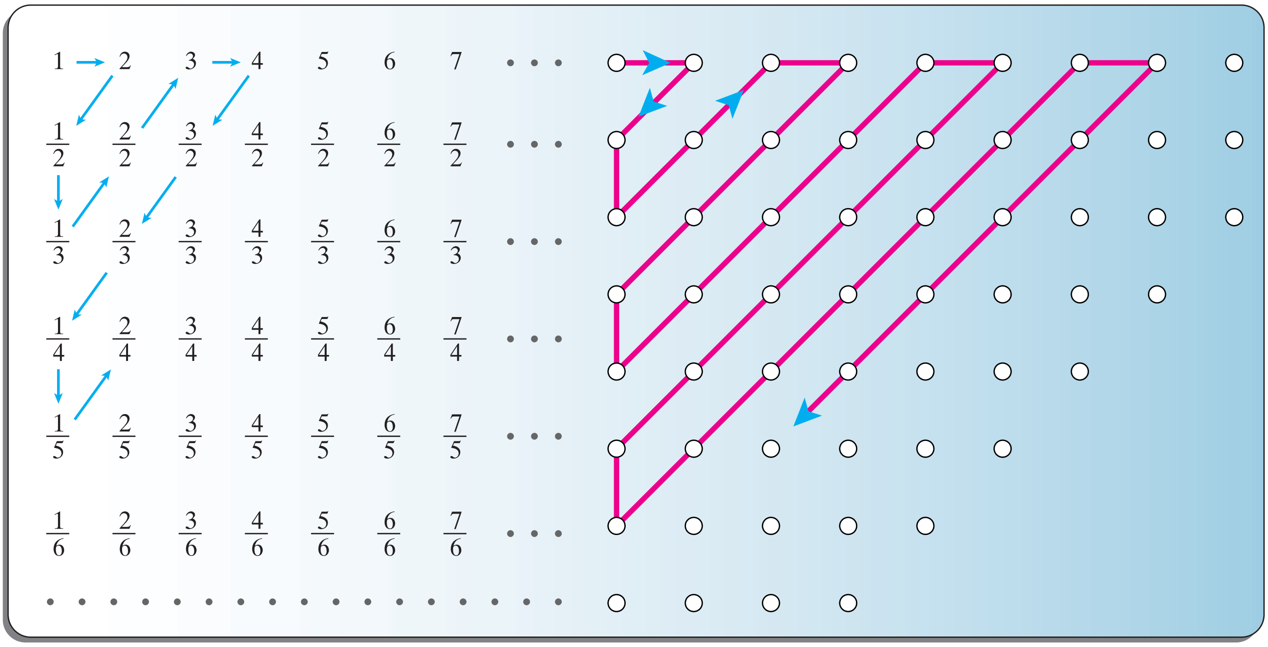
Παραδείγματα

1) Το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$ και το σύνολο των άρτιων αριθμών $\mathbf{N_2}$ έχουν το *αυτό πλήθος* στοιχείων, παρόλον ότι τον $\mathbf{N_2}$ είναι υποσύνολο του $\mathbb{N}$. Η σχετική συνάρτηση είναι $f(\nu)=2\nu$ για κάθε $\nu\in\mathbb{N}$.

2) Το διάστημα $(0, 1)$ και το $\mathbb{R}$ έχουν το *αυτό πλήθος* στοιχείων. Η σχετική συνάρτηση είναι
$$f(x)=\frac{2x-1}{1-|2x-1|},\ x\in(0, 1).$$
Με τη συνάρτηση
$$g(x)=\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}$$
αποδεικνύεται ότι το διάστημα (α, β), $\alpha<\beta$, και το διάστημα $(0, 1)$ έχουν το *αυτό πλήθος* στοιχείων. Ως παράδειγμα μπορεί να προσδιοριστεί η σύνθεση
$$F(x)=(f\circ g)(x)=\frac{2x-(\beta+\alpha)}{\beta-\alpha-|2x-(\beta+\alpha)|},\ x\in(\alpha, \beta),$$
που αποδεικνύει ότι και κάθε ανοιχτό μη κενό διάστημα έχει το *αυτό πλήθος* στοιχείων με το $\mathbb{R}$.

Παρατηρείστε ότι στα δύο παραδείγματα τα σύνολα $\mathbb{N}$ και $\mathbb{R}$ έχουν το αυτό πλήθος στοιχείων με γνήσια υποσύνολά τους $\mathbf{N_2}$ και $\mathbb{Q}$ αντίστοιχα. Αυτό συμβαίνει μόνο σε άπειρα σύνολα και πολλές φορές χρησιμοποιείται και ως ορισμός του άπειρου συνόλου, δηλ. ένα σύνολο είναι άπειρο, όταν έχει το αυτό πλήθος στοιχείων με ένα υποσύνολό του.

Πίνακας: Μια αρίθμηση των ρητών αριθμών.



Τί είναι εκείνο που διαφοροποιεί το ℕ από το ℝ ;

- *Τόσο το σύνολο ℕ όσο και το ℝ έχουν* ***διάταξη,*** *δηλαδή μεταξύ δύο αριθμών μπορούμε να πούμε ποιος είναι μικρότερος (αντ. μεγαλύτερος).*

- *Στο σύνολο ℕ υπάρχει* ***διαδοχή****, δηλαδή μπορούμε να πούμε ποιος είναι ο επόμενος ενός φυσικού αριθμού, όπως ακριβώς και σε μια ακολουθία. Μπορούμε δηλαδή να* ***αριθμήσουμε*** *τα στοιχεία του.*

- *Στο σύνολο ℝ όχι μόνο δεν μπορούμε να πούμε ποιος είναι ο επόμενος,* ***αλλά*** *όποιον κι' αν ονομάσουμε «επόμενο» έχουμε παραλείψει τόσους αριθμούς «όσους έχει» όλο το σύνολο ℝ***.*** *Στο σύνολο ℝ δεν υπάρχουν κενά μεταξύ των αριθμών. Με πιο απλά λόγια, το σύνολο των πραγματικών αριθμών* ***είναι συνεχές*** *και δεν μπορούμε να αριθμήσουμε τα στοιχεία του.*

Προσοχή!

Το γεγονός ότι μπορούμε να αριθμήσουμε τα στοιχεία ενός συνόλου, στο οποίο υπαρχει διάταξη, δε σημαίνει ότι το επόμενο κάποιου στοιχείου είναι στοιχείο μεγαλύτερο από αυτό. Για παράδειγμα, σε μια ακολουθία ο επόμενος ενός όρου της ακολουθίας δεν είναι απαραίτητα μεγαλύτερός του.

Στοιχεία Λογικής

Τα στοιχεία της Μαθηματικής Λογικής που παραθέτουμε εδώ δεν είναι σκόπιμο να διδαχθούν ως διδακτική ενότητα, αφού κάτι τέτοιο δεν προβλέπεται από το αναλυτικό πρόγραμμα. Είναι όμως σκόπιμο να παρουσιάζονται με παραδείγματα, όταν πρόκειται να χρησιμοποιηθούν.

- Η άρνηση της προτάσεως «***για κάθε*** $x \in A$ ***ισχύει*** $p(x)$» είναι «***υπάρχει (τουλάχιστον) ένα*** $x \in A$ ***για το οποίο δεν ισχύει*** $p(x)$».

  Η ύπαρξη ενός τέτοιου στοιχείου είναι εκείνο που ονομάζουμε **αντιπαράδειγμα**. Έτσι για να αποδείξουμε ότι δεν είναι σωστός ο ισχυρισμός «*όλοι οι καθηγητές έχουν αυτοκίνητο*» αρκεί να βρούμε έναν καθηγητή που δεν έχει αυτοκίνητο.

- Η άρνηση της προτάσεως «***υπάρχει ένα*** $x \in A$ ***για το οποίο ισχύει*** $p(x)$» είναι «***για κάθε*** $x \in A$ ***δεν ισχύει*** $p(x)$». Για παράδειγμα, η άρνηση της προτάσεως «*Υπάρχει* $x \in \mathbb{R}$ *τέτοιο, ώστε* $x^2 < 0$» είναι η πρόταση «*Για κάθε* $x \in \mathbb{R}$ *ισχύει* $x^2 \geq 0$».

- Όταν από μια αλγεβρική παράσταση (σχέση, ισχυρισμό) $P(x)$, που ισχύει για τα στοιχεία ενός συνόλου A, μετά από πράξεις οδηγούμαστε σε μια άλλη παράσταση $T(x)$, τότε το σύνολο B για τα στοιχεία του οποίου ισχύει η $T(x)$ είναι εν γένει **υπερσύνολο** του A, δηλ. $A \subseteq B$. Ισχύει αυτό που με σύμβολα (δε χρησιμοποιείται στο Λύκειο) γράφουμε: *Αν* $P(x) \Rightarrow T(x)$, *τότε* $A \subseteq B$.

  Αυτό σημαίνει ότι: **Για να προσδιορίσουμε το σύνολο A, αρκεί να βρούμε το σύνολο B και με δοκιμές να προσδιορίσουμε εκείνα τα στοιχεία του B που ικανοποιούν την $P(x)$.**

  Για παράδειγμα:

  $P(x)$: $\sqrt{(x-1)(3x-5)} = 1-3x$ (υψώνοντας στο τετράγωνο)$\Rightarrow T(x)$: $3x^2+x-2=0$

  Τα στοιχεία του συνόλου $B = \left\{-1, \frac{2}{3}\right\}$ ικανοποιούν την $T(x)$. Με δοκιμή των -1 και $\frac{2}{3}$ στην $P(x)$ διαπιστώνουμε ότι μόνο το -1 την ικανοποιεί, που σημαίνει ότι $A=\{-1\} \subset B = \left\{-1, \frac{2}{3}\right\}$

- Στην περίπτωση ισοδυναμίας, δηλ. $P(x) \Leftrightarrow T(x)$, ισχύει $A=B$. **Προσοχή** όμως, για να συμβαίνει αυτό πρέπει, κατά τη μετάβαση από την $P(x)$ στην $T(x)$ οι εκτελούμενες πράξεις να είναι αντιστρεπτές, όπως, για παράδειγμα, η εκτέλεση γραμμοπράξεων για τη λύση γραμμικών συστημάτων.

Δυνάμεις πραγματικών αριθμών

I. **Θα υπενθυμίσουμε-σχολιάσουμε τον ορισμό της ν-οστής ρίζας,** $\nu \in \mathbb{N}$: Κάθε πραγματικός αριθμός που ικανοποιεί την εξίσωση

$$x^{\nu} = a$$

ονομάζεται *λύση ή ρίζα της εξίσωσης*

Τη **μη-αρνητική** από αυτές, **εφ' όσον υπάρχει**, την ονομάζουμε **ν-οστή ρίζα του** a και τη συμβολίζουμε με $\sqrt[\nu]{\alpha}$.

Είναι λοιπόν $\sqrt{4}=2$ και όχι -2. Είναι λάθος να γράφουμε $\sqrt{4}=\pm 2$.

1. Η $\sqrt[\nu]{\alpha}$ **ορίζεται μόνο** για $a \geq 0$.

   Έστω $a < 0$.

   - Η εξίσωση $x^{2\nu}=a<0$ δεν έχει πραγματική ρίζα και
   - Η εξίσωση $x^{2\nu+1}=a<0$ δεν έχει θετική ρίζα, επομένως **δεν μπορούμε να γράψουμε** $\sqrt[2\nu+1]{a}$.

2. Ο υπολογισμός της $\sqrt[\nu]{\alpha}$ συγχέεται πολλές φορές με την αναζήτηση *όλων των λύσεων της εξισώσεως* $x^{\nu}=\alpha$. Έτσι, όταν $a>0$ και $\nu=2\kappa$ (άρτιος), τότε εκτός από την $\sqrt[\nu]{\alpha}$ και η $-\sqrt[\nu]{\alpha}$ είναι μια δεύτερη, αλλά *αρνητική*, λύση της εξισώσεως, αφού $\left(-\sqrt[2\kappa]{a}\right)^{2\kappa} = (-1)^{2\kappa} = \left(\sqrt[2\kappa]{a}\right)^{2\kappa} = a$.

   Τις λύσεις αυτές με συντομία τις συμβολίζουμε $x_{1,2}=\pm\sqrt[\nu]{\alpha}$ [αυτό, πολλές φορές, οδηγεί στο εσφαλμένο συμπέρασμα ότι η ρίζα έχει δύο πρόσημα].

3. Για $a \geq 0$, ισχύει πάντοτε $(\sqrt[\nu]{\alpha})^{\nu} = a$.

4. Η ισότητα $\sqrt[\nu]{a^{\nu}}=a$ ισχύει μόνο στην περίπτωση $a\geq 0$. Διαφορετικά ισχύει $\sqrt[\nu]{a^{\nu}} = |a|$, όπως π.χ. $\sqrt{(-1)^2} = 1 \neq -1$.

   Συμπέρασμα: Έγινε σαφές από το παραπάνω σχόλιο της *ν-οστής* ρίζας ότι το σύμβολο $\sqrt[\nu]{\alpha}$ για όλους τους δείκτες ρίζας $\nu \in \mathbb{N}$ ορίζεται μόνο για $a \geq 0$.

II. **Δυνάμεις με ρητό εκθέτη** $\varrho \in \mathbb{Q}$**:**

1. $0^{\varrho} := 0$, για $\varrho>0$ (ορίζουμε).

2. Για $a>0$ ορίζουμε

   - $a^0 := 1$
   - Για θετικό ρητό $\varrho = \dfrac{\mu}{\nu}$ $(\mu,\nu \in \mathbb{N}^*)$ ορίζουμε:

$$a^{\varrho} := \sqrt[\nu]{a^{\mu}}, \quad a^{-\varrho} := \frac{1}{\sqrt[\nu]{a^{\mu}}}$$

Επομένως η δύναμη a^{ϱ} **ορίζεται για όλα τα** $a>0$ **και όλα τα** $\varrho \in \mathbb{Q}$ (ρητούς).

Η γραφή $\sqrt[\nu]{a^{\mu}}$ είναι ισοδύναμη με την $a^{\frac{\mu}{\nu}}$ μόνο όταν $a>0$.

Για $a,\beta>0$ και $\tau,\varrho\in\mathbb{Q}$ ισχύουν:

$a^{\tau}a^{\varrho}=a^{\tau+\varrho}$	$\dfrac{a^{\tau}}{a^{\varrho}}=a^{\tau-\varrho}$	$(a^{\tau})^{\varrho}=a^{\tau\varrho}$	$a^{\tau}\beta^{\tau}=(a\beta)^{\tau}$	$\dfrac{a^{\tau}}{\beta^{\tau}}=\left(\dfrac{a}{\beta}\right)^{\tau}$

Άμεση συνέπεια των παραπάνω και της §5.7 είναι:

Συμπέρασμα:

Οι δυνάμεις a^{τ} με πραγματικό εκθέτη ($\tau\in\mathbb{R}$) ορίζονται μόνο για $a>0$ και $0^{\tau}:=0$, **για** $\tau>0$.

Θα επιδιώξουμε να επισημάνουμε ορισμένα σφάλματα που εμφανίζονται κατά την χρήση των ριζών και των δυνάμεων με ρητούς εκθέτες:

Για $a<0$ και $\varrho=\dfrac{m}{n}\in\mathbb{Q},\ m,n\in\mathbb{N}$

1. Η δύναμη α^{ϱ} δεν ορίζεται ως $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$.

Η ρίζα $\sqrt[n]{a^m}$ είναι μονοσήμαντα ορισμένη, γιατί:

- Υπάρχει όταν $a^m\geq 0$ και
- Δεν υπάρχει όταν $a^m<0$.

2. Η δύναμη α^{ϱ} δεν ορίζεται ως

$a^{\frac{m}{n}}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^m$, **αφού για $a<0$ δεν υπάρχει.**

Υπόδειξη: Από την απόδειξη προκύπτει ότι το πρόβλημα των ρητών δυνάμεων προκύπτει από τη χρήση της ισοδύναμης γραφής της με τη βοήθεια των ριζών. Για το λόγο αυτό προτείνουμε, όταν πρόκειται να μελετήσουμε τέτοιες καταστάσεις να γράφουμε την έκφραση με τη βοήθεια των ριζών, οπότε αμέσως διαπιστώνεται αν κάτι ορίζεται ή όχι.

Σχόλια

Για α<0 **δεν μπορούμε** να γράψουμε

(*) $$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m},$$

γιατί τότε θα ήταν αληθείς

$$\sqrt[2n]{a^{2m}}=a^{\frac{2m}{2n}}=a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m},$$

που **δεν είναι πάντοτε αληθείς**.

Αληθείς είναι οι ισότητες

$$\sqrt[2n]{a^{2m}}=\sqrt[2n]{|a|^{2m}}=|a|^{\frac{2m}{2n}}=|a|^{\frac{m}{n}}$$

Παράδειγμα:

Αν ο εκθέτης $\varrho=\dfrac{m}{n}$ μετά από σχετικές απλοποιήσεις πάρει τη μορφή:

- $\varrho=\dfrac{2\nu-1}{2\mu}$. Τότε από την (*) θα είχαμε

$$a^{\varrho}=a^{\frac{2\nu-1}{2\mu}}=\sqrt[2\mu]{a^{2\nu-1}}\ \text{ ή }\ a^{\frac{2\nu-1}{2\mu}}=(\sqrt[2\mu]{a})^{2\nu-1},$$

που δεν είναι πραγματικοί αριθμοί, αφού $a^{2\nu-1}$ και α<0.

- $\varrho=\dfrac{2\mu}{2\nu-1}$. Τότε από την (*) θα είχαμε

$$a^{\frac{2\mu}{2\nu-1}}=\sqrt[2\nu-1]{a^{2\mu}}\Rightarrow a^{2\mu}=\sqrt[2\nu-1]{|a|^{2\mu}}=|a|^{\frac{2\mu}{2\nu-1}},$$

που υπάρχει και η $a^{\frac{2\mu}{2\nu-1}}=\left(\sqrt[2\nu-1]{a}\right)^{2\mu}$ που δεν υπάρχει.

Π.χ. $\sqrt[4]{(-1)^6}=|-1|^{\frac{3}{2}}=1$ και όχι

$\sqrt[4]{(-1)^6}=\sqrt{(-1)^3}=(-1)^{\frac{3}{2}}$ που δεν υπάρχει.

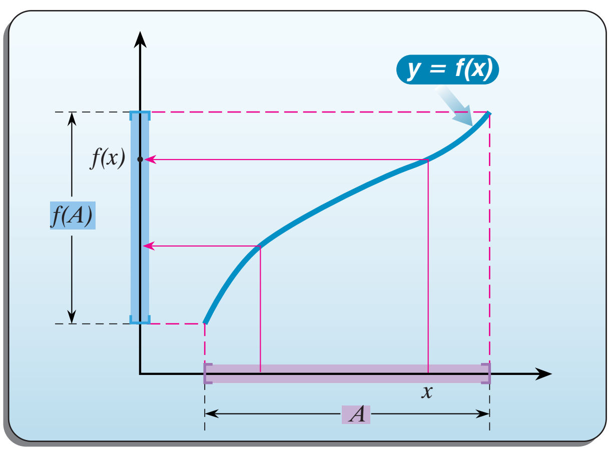
1.1. Η έννοια της πραγματικής συνάρτησης

Στο επίκεντρο της Ανάλυσης βρίσκεται η έννοια της **συναρτήσεως**, η οποία είναι απαραίτητη για να εκφράσουμε μαθηματικά πραγματικές καταστάσεις. Είναι το κατάλληλο μέσο για να περιγράψουμε την **εξάρτηση** μεγεθών μεταξύ τους. Η ακριβής γνώση της συναρτήσεως, δηλ. των μαθηματικών σχέσεων που συνδέουν τα μεγέθη, μας επιτρέπει να επεμβαίνουμε **ρυθμιστικά** στις διαδικασίες για να επιτύχουμε μια επιθυμητή έκβαση, όπως γίνεται συχνά στην Τεχνολογία, στη Βιολογία, στην Ιατρική, στην Οικονομία καθώς και στις Κοινωνικές Επιστήμες γενικότερα.

Στο Διαφορικό Λογισμό η έννοια της συναρτήσεως έχει ιδιαίτερη σημασία, γιατί, εκτός από την αντιστοιχία μεταξύ των μεγεθών, περιγράφει και διαδικασίες ποσοτικών μεταβολών. Η έννοια του **ορίου**, στις διάφορες μορφές του, κυριαρχεί παντού. Αυτό είναι φυσικό, αφού είναι απαραίτητη για να οριστούν οι βασικές έννοιες της Αναλύσεως, **παράγωγος** και **ολοκλήρωμα**, με τις οποίες μπορούμε να κατανοήσουμε τις «*μικρές μεταβολές*» μιας συναρτήσεως, όπως τη στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού, και να βγάλουμε συμπεράσματα για τη «*συνολική συμπεριφορά*» μιας συναρτήσεως, όπως το μήκος της τροχιάς του κινητού.

Στο εισαγωγικό αυτό μάθημα, που περιέχει έννοιες προηγουμένων τάξεων, πρέπει να επιδιώξουμε με μια σειρά παραδειγμάτων από τη Φυσική, την καθημερινή μας ζωή κ.ά:

Να εξοικειωθούν οι μαθητές με την έννοια της πραγματικής συναρτήσεως:



Σχ. 1: Γραφική Παράσταση

Ορισμός

Έστω A ένα μη-κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με *πεδίο ορισμού* το A μια διαδικασία (κανόνα) f, με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μοναδικό στοιχείο $y \in \mathbb{R}$. Το y ονομάζεται *τιμή της* f *στο* x και συμβολίζεται $f(x)$.

Συμβολικά ο κανόνας αυτός δίνεται ως εξής:

$$f: A \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x).$$

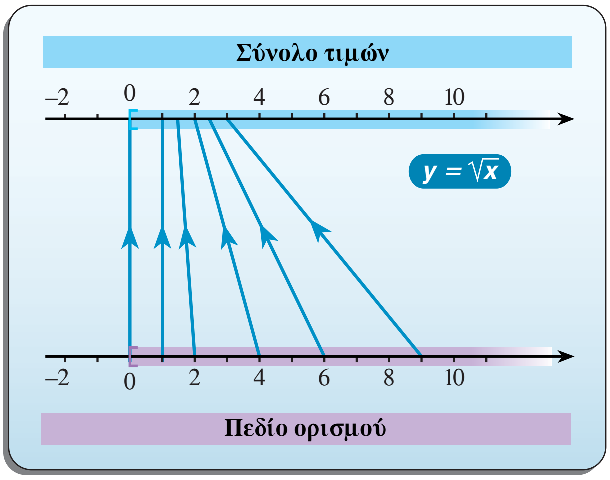
Το $f(x)$ ονομάζεται *τύπος της συναρτήσεως*, ενώ η

$$y=f(x)$$

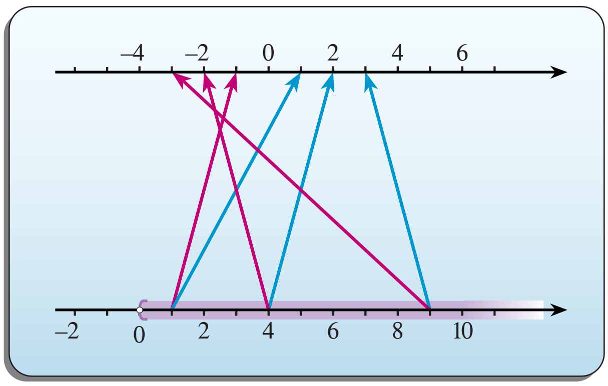
ονομάζεται *εξίσωση της συναρτήσεως*.

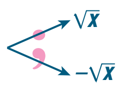
Το *σύνολο τιμών* της f είναι το

$$f(A) := \{\, y \in \mathbb{R} \mid \text{υπάρχει } x \in A \text{ τέτοιο, ώστε } y = f(x) \,\}.$$



Σχ. 2: Διάγραμμα με βέλη



Σχ. 3: 

Παρατήρηση

Η διαδικασία που «*σε κάθε θετικό αριθμό* x *αντιστοιχίζει τον πραγματικό αριθμό, του οποίου το τετράγωνο είναι ίσο με τον αριθμό*» δεν αποτελεί συνάρτηση, αφού η αντιστοίχιση αυτή δεν είναι μονοσήμαντη (σχ.3). Επίσης, η διαδικασία: *Σε κάθε* $\lambda>0$ *αντιστοιχίζουμε το εμβαδόν του ρόμβου με πλευρά* λ" **δεν ορίζει συνάρτηση**.

Για μια συνάρτηση με εξίσωση $y=f(x)$ και πεδίο ορισμού A, το υποσύνολο

$$G(f)=\{(x,f(x))\in\mathbb{R}^2\mid x\in A\}$$

του $\mathbb{R}^2$ ονομάζεται **γράφημα** της f. Όταν είναι δυνατόν να παρασταθεί στο καρτεσιανό επίπεδο, τότε έχουμε τη **γραφική παράσταση** της f.

Δεν είναι απαραίτητο ο τύπος της συναρτήσεως να εκφράζεται με μια μόνο αλγεβρική παράσταση, όπως για παράδειγμα, οι συναρτήσεις

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x & \text{αν } x\geq 0\\ -x & \text{αν } x<0\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases} x & \text{αν } 0\leq x\leq 1\\ x-1 & \text{αν } x>1\end{cases}$$

Να εμπεδώσουν τις έννοιες *πεδίο ορισμού, σύνολο τιμών, γράφημα* και *γραφική παράσταση*, η f *είναι ορισμένη* στο σημείο x_0 (αντ. στο σύνολο Ε).

1) Αν για μια συνάρτηση με τύπο $f(x)$ δεν αναφέρεται το πεδίο ορισμού, τότε αυτό αποτελείται από όλους τους πραγματικούς αριθμούς για τους οποίους έχει νόημα ο τύπος της συναρτήσεως. Στην περίπτωση αυτή το πεδίο ορισμού είναι το ευρύτερο δυνατό (παράδ. 1).

Παράδειγμα 1:

Οι συναρτήσεις

$$f(x)=\sqrt{1-x},\quad g(x)=\sqrt{x-1},\quad h(x)=\frac{x}{x^2+1}$$

έχουν πεδία ορισμού τα

$$A_f=(-\infty,1],\ A_g=[1,+\infty)\ \text{και}\ A_h=\mathbb{R}$$

αντίστοιχα.

2) Μια συνάρτηση έχει τιμές μόνο στα σημεία του πεδίου ορισμού της. Σ' ένα σημείο που δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού μιας συναρτήσεως δεν υπάρχει τιμή της (αυτονόητο, αλλά πολλές φορές δημιουργεί προβλήματα). Αυτό ισχύει ακόμη και στην περίπτωση του παραδείγματος 2.

Παράδειγμα 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=ημx$ με πεδίο ορισμού $[0, \pi]$. Ποιά είναι η τιμή της συναρτήσεως στο σημείο 3π;

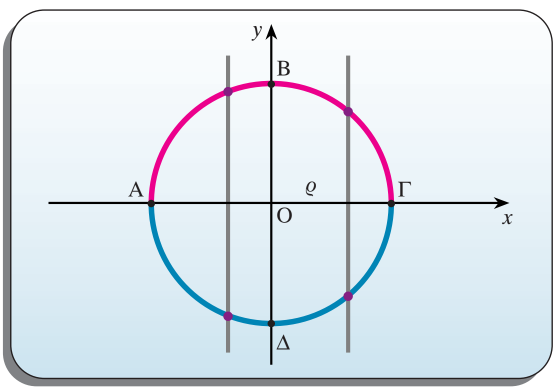
Απάντηση: Η f στο σημείο αυτό δεν έχει τιμή (δεν ορίζεται).

Μας εξαπατά συνήθως το γεγονός ότι η γνωστή μας συνάρτηση $g(x)=ημx$, σύμφωνα με την 1, έχει πεδίο ορισμού *το ευρύτερο υποσύνολο* του $\mathbb{R}$, *όπου αυτή έχει νόημα*, εδώ δηλαδή όλο το $\mathbb{R}$.

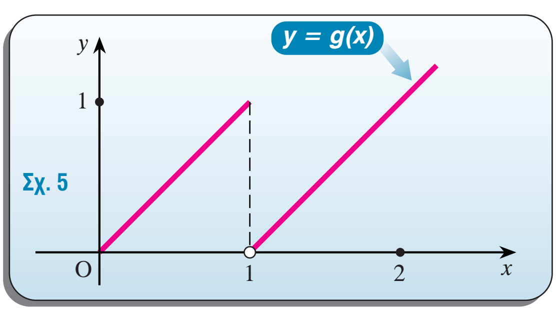
3) Παρά το γεγονός ότι, με τα ανακριβή όργανα σχεδιάσεως ή με το χέρι, η γραφική παράσταση μιας συναρτήσεως δεν αποδίδεται ακριβώς μας παρέχει όμως μια διδακτική εποπτική εικόνα της συναρτήσεως. Η γεωμετρική παράσταση κάνει εμφανείς ορισμένες σχέσεις, που δεν είναι δυνατόν να γίνουν αντιληπτές από την αλγεβρική μορφή της συναρτήσεως. Μπορεί επίσης να μας οδηγήσει και στην εύρεση νέων σχέσεων και τη δημιουργία νέων εννοιών.

Σημείωση: Όταν σε κάποιο σημείο της γραφικής παραστάσεως υπάρχει ο κύκλος «○», τότε το σημείο αυτό δεν ανήκει σ' αυτήν.

4) Ένα σημείο (x, y) του καρτεσιανού επιπέδου ανήκει στη γραφική παράσταση, όταν ικανοποιεί την εξίσωση $y=f(x)$.



Σχ. 4. Το ημικύκλιο ΑΒΓ (αντ. ΑΔΓ) είναι η γραφική παράσταση της $y=\sqrt{\rho^2-x^2}$ (αντ. $y=-\sqrt{\rho^2-x^2}$) που είναι λύσεις ως προς y της εξισώσεως του κύκλου $x^2+y^2=\rho^2$.



Σχ. 5

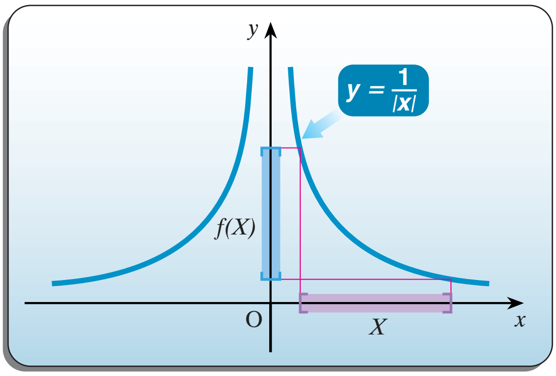
5) Μια καμπύλη στο καρτεσιανό επίπεδο (επίπεδο εφοδιασμένο με τους άξονες συντεταγμένων) μπορεί να είναι γραφική παράσταση μιας συναρτήσεως, εφόσον κάθε ευθεία παράλληλη προς τον άξονα $y'y$ τέμνει την καμπύλη το **πολύ σε ένα** σημείο. Ένα πολύ καλό παράδειγμα καμπύλης, που **δεν είναι γραφική παράσταση** συναρτήσεως, είναι ο κύκλος (σχ. 4)

6) Η γραφική παράσταση μιας συναρτήσεως δεν είναι απαραίτητο να είναι μια συνεχής γραμμή. όπως για τις συναρτήσεις

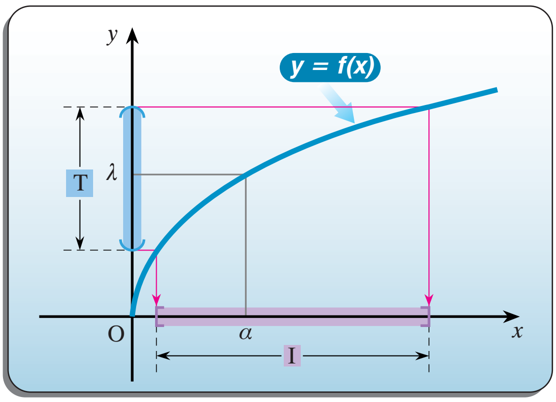
$$f(x)=\frac{1}{x} \text{ (βλ. Κατάλογο συναρτήσεων σχ. 6),}$$

$$g(x)=\begin{cases} x & αν \quad 0\le x\le 1 \\ x-1 & αν \quad x>1 \end{cases} \quad \text{(σχ. 5)}$$

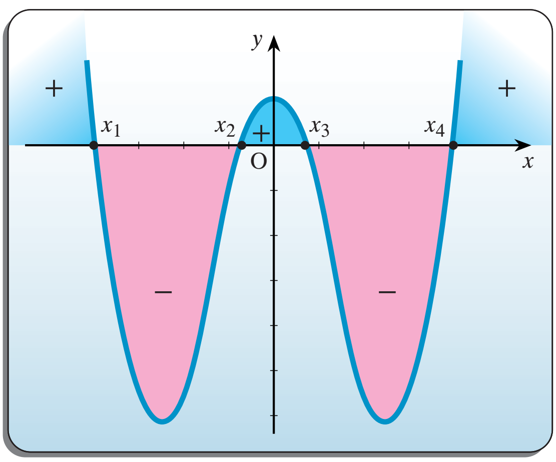
Να προσδιορίζουν τα χαρακτηριστικά στοιχεία μιας συναρτήσεως, πεδίο ορισμού, σύνολο τιμών, σημεία μηδενισμού, πρόσημο των τιμών κ.λπ. της *f*:



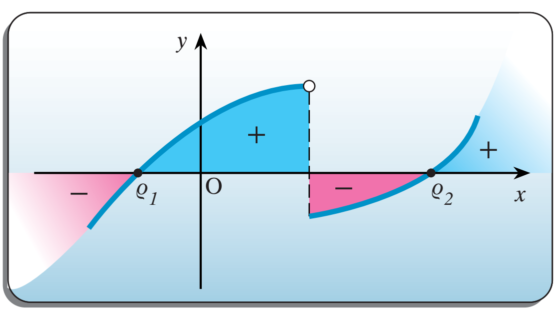
Σχ. 6



Σχ. 7



Σχ. 8



Σχ. 9

Είναι πολύ σημαντικό οι μαθητές, με τη βοήθεια της γραφικής παραστάσεως, να μπορούν να προσδιορίζουν

1) Την εικόνα $f(X)$ ενός συνόλου X (προφανώς υποσυνόλου του πεδίου ορισμού A) μιας συναρτήσεως f (σχ. 6).

2) Το υποσύνολο I του πεδίου ορισμού, του οποίου τα σημεία απεικονίζονται μέσα σε δοσμένο υποσύνολο T του συνόλου τιμών. Η διαδικασία αυτή είναι σημαντική για την κατανόηση της έννοιας του ορίου και της συνέχειας (σχ. 7).

3) Τα σημεία μηδενισμού, τα διαστήματα μονοτονίας καθώς και το φραγμένο ή μη μιας συναρτήσεως. Ειδικότερα, αυτό πρέπει να γίνει για τις βασικές συναρτήσεις (σχ. 8).

4) Το πρόσημο των τιμών μιας συναρτήσεως μεταξύ δύο διαδοχικών σημείων μηδενισμού της. Τι συμβαίνει όταν σ' ένα τέτοιο διάστημα (μεταξύ δύο διαδοχικών σημείων μηδενισμού) η συνάρτηση παίρνει θετικές και αρνητικές τιμές (σχ. 9). Να διαπιστωθεί με παραδείγματα ότι η γραφική παράσταση δεν είναι συνεχής γραμμή. Επισημαίνουμε εδώ ότι κάτι τέτοιο δε συμβαίνει για τα πολυώνυμα, τις εκθετικές συναρτήσεις, τη λογαριθμική συνάρτηση, το *ημx* και το *συνx*

Είναι χρήσιμο να γίνουν οι παραπάνω σχολιασμοί με βάσει τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων του Κεφαλαίου 1 του σχολικού βιβλίου και εκείνων του Καταλόγου συναρτήσεων (βλ. σελ. 31).

Σχόλιο

Η συνάρτηση είναι ειδική περίπτωση της απεικονίσεως: *Απεικόνιση* είναι μια μονοσήμαντη αντιστοίχιση των στοιχείων ενός συνόλου $A(\neq\varnothing)$ σε στοιχεία ενός συνόλου B.

Αν f είναι μια τέτοια απεικόνιση, τότε γράφουμε $f\colon A\to B$ και διαβάζουμε: f είναι απεικόνιση του A στο (μέσα στο) B. Το A ονομάζεται *πεδίο ορισμού* ή *σύνολο εκκίνησεως* της f, ενώ το B *σύνολο αφίξεως* ή (πολλές φορές) *πεδίο τιμών*.

Πολλές φορές ορίζουμε την απεικόνιση $f\colon A\to B$, ως το υποσύνολο του *καρτεσιανού γινομένου* $A\times B$:

$$f := \{(x, y)\in A\times B \mid \text{κάθε x ανήκει μόνο σ' ένα ζεύγος } (x, y)\} \quad \text{ή} \quad \text{αν } (x, y_1)\in f \ \& \ (x, y_2)\in f, \ \text{τότε } y_1 = y_2.$$

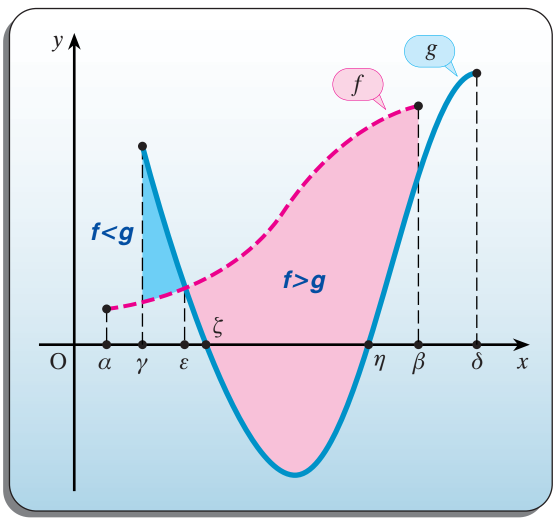
Όταν τα A, B είναι σύνολα αριθμών (πραγματικών ή μιγαδικών ή ζεύγη τέτοιων αριθμών), τότε έχουμε μια συνάρτηση. Στην περίπτωση που τόσο το A, όσο και το B είναι υποσύνολα του $\mathbb{R}$, τότε πρόκειται για μια πραγματική συνάρτηση (πραγματικής μεταβλητής), της οποίας το σύνολο αφίξεως είναι πάντοτε το $\mathbb{R}$ και γι' αυτό δεν το αναφέρουμε.

Στο τέλος αυτού του κεφαλαίου θα παραθέσουμε σε παράρτημα έναν κατάλογο συναρτήσεων με τα γραφήματά και τις ιδιότητές τους, οι οποίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν κατά τη διδασκαλία για να κάνουν εποπτικότερη την παρουσίαση.

1.3 Ισότητα και πράξεις μεταξύ συναρτήσεων

Στόχος αυτής της παραγράφου θα πρέπει να είναι οι μαθητές να κατανοήσουν και να εμπεδώσουν, με τη βοήθεια γραφικών παραστάσεων συναρτήσεων, τις έννοιες της ισότητας, του αθροίσματος, της διαφοράς, του γινομένου και του πηλίκου συναρτήσεων. Θα πρέπει, μεταξύ άλλων:

Να επισημανθεί ότι, για να έχει νόημα μια οποιαδήποτε σχέση ισότητας-ανισότητας ή πράξη μεταξύ συναρτήσεων θα πρέπει να αναφέρεται σε σύνολο που είναι υποσύνολο τόσο του πεδίου ορισμού της μιας, όσο και του πεδίου ορισμού της άλλης, δηλ. της τομής των πεδίων ορισμού των συναρτήσεων. Ειδικότερα, αυτό πρέπει να παρουσιαστεί εποπτικά με γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων.



Σχ. 1

Στο παραπλεύρως σχήμα δίνονται δύο συναρτήσεις f και g με πεδία ορισμού $A=[\alpha, \beta]$ και $B=[\gamma, \delta]$ αντίστοιχα. Η τόμη των πεδίων ορισμού $A\cap B$ είναι το διάστημα $[\gamma, \beta]$.

- Στο υποδιάστημα $[\gamma, \varepsilon]$ της τομής ισχύει $f<g$, ενώ στο υποδιάστημα $[\varepsilon, \beta]$ ισχύει $f>g$.
- Στο διάστημα $[\gamma, \beta]$ έχει νόημα να θεωρήσουμε το άθροισμα και το γινόμενο των συναρτήσεων f και g.

Το πηλίκον συναρτήσεων f και g ορίζεται στην τομή $A\cap B$, **εκτός από τα σημεία μηδενισμού του παρονομαστού**, δηλ. στο σύνολο $A\cap\{x\in B: g(x)\neq 0\}$. Έτσι το πηλίκο $\frac{f}{g}$ (σχ. 1) ορίζεται στο διάστημα $[\gamma, \beta]$ εκτός από τα σημεία ζ και η, όπου η g μηδενίζεται.

Για παράδειγμα, η $\varepsilon\varphi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$ ορίζεται στο $\mathbb{R}$ εκτός από τα σημεία $\pm\frac{\pi}{2}$, $\pm\frac{3\pi}{2}$, ... όπου μηδενίζεται η $\sigma\upsilon\nu x$.

Τι συμβαίνει στα διαστήματα $[\alpha, \gamma]$ και $[\beta, \delta]$;

Σε κάθε x από τα διαστήματα αυτά δεν υπάρχει ένα από τα $f(x)$, $g(x)$, οπότε δεν έχει νόημα οποιαδήποτε σύγκριση ή πράξη.

Παρατήρηση

Όταν γράφουμε «η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2-\alpha^2}{x-\alpha}$», τότε το πεδίο ορισμού της είναι το $\mathbb{R}\setminus\{\alpha\}$, παρόλον ότι **και ο αριθμητής** μηδενίζεται στο σημείο α (όπως στο παραπάνω παράδειγμα). Παρατηρείστε τη διαφορά στις ακόλουθες εκφράσεις:

«Το πηλίκο των συναρτήσεων $f(x)=x^2-\alpha^2$ και $g(x)=x-\alpha$ ορίζεται για $x\neq\alpha$»

και

«Η ρητή συνάρτηση $F(x) = \dfrac{x^2-\alpha^2}{x-\alpha}$ ».

Στη δεύτερη περίπτωση δε χρειάζεται να γράψουμε το $x \neq \alpha$, γιατί το κλάσμα έχει νόημα μόνο για $x \neq \alpha$.

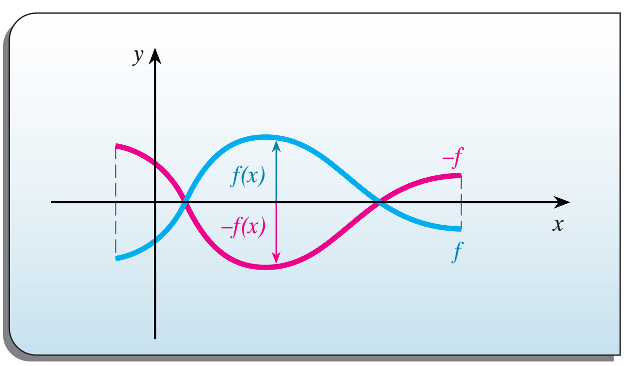
Προσοχή!

Επειδή ακριβώς το πεδίο ορισμού της συναρτήσεως F είναι το $\mathbb{R} \setminus \{\alpha\}$, μπορούμε να απλοποιήσουμε το κλάσμα (δηλ. διαιρούμε αριθμητή και παρονομαστή δια του $x-\alpha \neq 0$) και η συνάρτηση παίρνει τη μορφή $F(x)=x+\alpha$. Παραμένει όμως το πεδίο ορισμού να είναι το $\mathbb{R} \setminus \{\alpha\}$. Επομένως δεν πρέπει να συγχέεται με τη συνάρτηση $G(x)=x+\alpha$, που έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Η γραφική παράσταση της G είναι κατά τα γνωστά η ευθεία $y=x+\alpha$, ενώ της F είναι η ευθεία $y=x+\alpha$, **εκτός από το σημείο** $(\alpha, 2\alpha)$ του επιπέδου. Η G λέμε ότι είναι μια **επέκταση** της F στο $\mathbb{R}$ ή F είναι ένας **περιορισμός** της G στο $\mathbb{R} \setminus \{\alpha\}$.

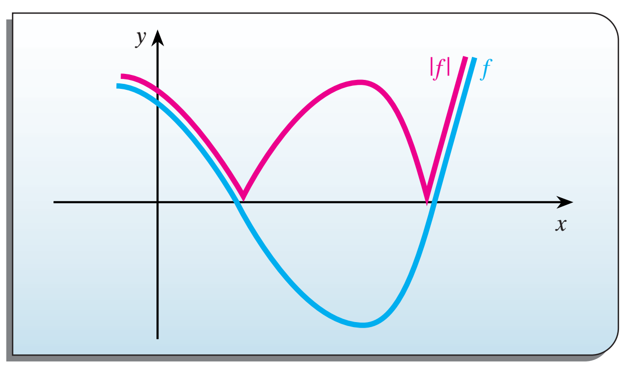
Ομοίως, για τις συναρτήσεις $f(x)=\eta\mu x$ και $g(x)=x$ το πηλίκο $F(x) = \dfrac{\eta\mu x}{x}$ ορίζεται στο $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, χωρίς να μπορούμε να απλοποιήσουμε το κλάσμα (βλ. σχ. 1, §2.4).

Να εξοικειωθούν οι μαθητές

1. Με το γραφικό προσδιορισμό της γραφικής παραστάσεως της συναρτήσεως $-f(x)$ *(συμμετρική ως προς τον άξονα $x'x$)* και της $|f(x)|$ από τη γραφική παράσταση της $f(x)$.



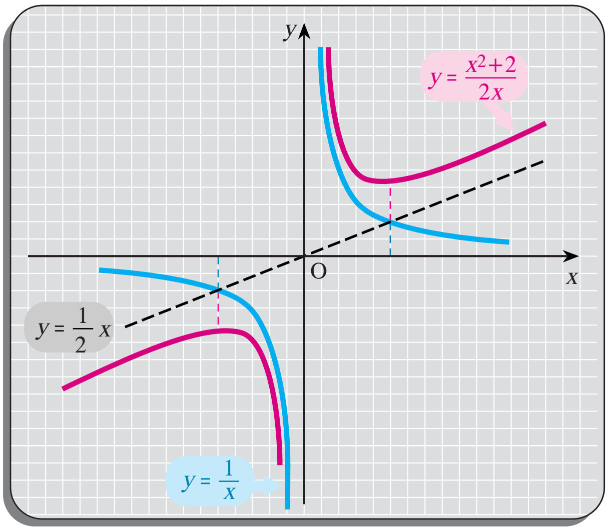
Σχ.2



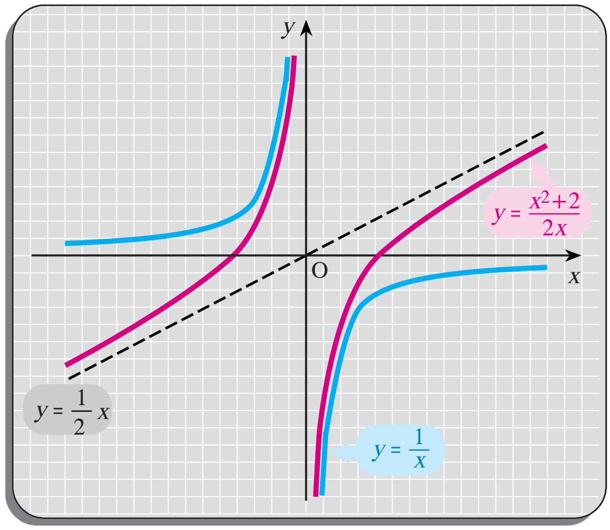
Σχ.3

2. Με το γραφικό προσδιορισμό του αθροίσματος και της διαφοράς συναρτήσεων f, g (χρησιμοποιώντας γραφικές παραστάσεις γνωστών συναρτήσεων). Συνιστάται, στην περίπτωση της διαφοράς $f(x)-g(x)$ να προσδιοριστεί η γραφική παράσταση της $-g(x)$ και στη συνέχεια να προσδιοριστεί το άθροισμα $f(x)+[-g(x)]$ (σχ. 4, 5).

Στην περίπτωση ρητής συναρτήσεως $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ είναι πολλές φορές (όχι πάντοτε) δυνατόν να γραφεί αυτή ως άθροισμα ενός πολυωνύμου και κλασμάτων της μορφής $\dfrac{\alpha}{x+\beta}$, των οποίων γνωρίζουμε τις γραφικές παραστάσεις (σχ. 4, 5).

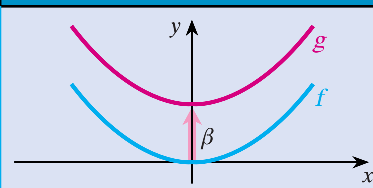
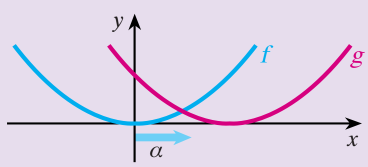
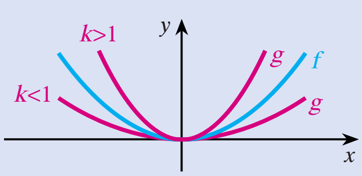
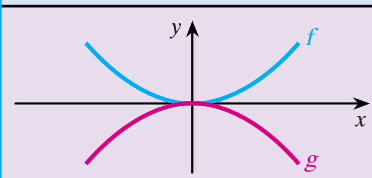


Σχ. 4: $y = \dfrac{x^2+2}{2x} = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{x}$



Σχ. 5: $y = \dfrac{x^2-2}{2x} = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{x}$

Στον παρακάτω πίνακα θα παρουσιάσουμε τις βασικές πράξεις στον τύπο μιας συναρτήσεως και την αντίστοιχη μεταβολή της γραφικής παραστάσεώς της, που θα μας διευκολύνουν στην παρουσίαση της παραγράφου αυτής:

Σχεδίαση της γραφικής παραστάσεως της συναρτήσεως f με τύπο f(x)	Αλλαγή του τύπου	Νέος τύπος g(x)	Γραφική παράσταση
Παράλληλη μεταφορά ως προς τον άξονα $y'y$ κατά β μονάδες	Πρόσθεση β	$g(x) = f(x)+\beta$	
Παράλληλη μεταφορά ως προς τον άξονα $x'x$ κατά α μονάδες	Αντικατάσταση του x με x–α	$g(x) = f(x-\alpha)$	
Ομοιοθεσία κατά τον παράγοντα k ($\neq 0$) στην κατεύθυνση του άξονα $y'y$ αρχίζοντας από τον άξονα $x'x$	Πολλαπλασιασμός επί k ($\neq 0$)	$g(x)=k\cdot f(x)$	
Συμμετρική μεταφορά ως προς τον άξονα $x'x$	Πολλαπλασιασμός επί (–1)	g(x) = – f(x)	

Θα λέμε ότι η συνάρτηση f, ορισμένη σ' ένα διάστημα $I=[-\alpha, \alpha]$ ή σε σύνολο της μορφής $I=[-\alpha, \alpha]\setminus\{0\}$ είναι **συμμετρική ως προς τον άξονα** $y'y$, όταν για κάθε $x\in I$ ισχύει

$$f(-x)=f(x).$$

Στην περίπτωση αυτή η γραφική παράσταση της συναρτήσεως είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$ καθώς και οι συναρτήσεις $f(x)=x^{-2\nu}$ είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $y'y$ στο $\mathbb{R}$ και $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ αντίστοιχα.

Θα λέμε ότι η συνάρτηση f, ορισμένη σ' ένα διάστημα $I=[-\alpha, \alpha]$ ή σε σύνολο της μορφής $I=[-\alpha, \alpha]\setminus\{0\}$ είναι **συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων**, όταν για κάθε $x\in I$ ισχύει

$$f(-x) = -f(x).$$

Στην περίπτωση αυτή η γραφική παράσταση της συναρτήσεως είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων. Αν η f είναι ορισμένη στο 0, τότε είναι $f(0)=0$.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x$ καθώς και οισυναρτήσεις $f(x)=x^{-(2\nu+1)}$ είναι συμμετρικές ως προς την αρχή.

Μια συνάρτηση δεν μπορεί να είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $x'x$, για το ίδιο λόγο που ο κύκλος δεν μπορεί να είναι η γραφική παράσταση συναρτήσεως.

1.4. Σύνθεση συναρτήσεων

Εκτός από τους μέχρι τώρα τρόπους να δημιουργήσουμε νέες συναρτήσεις από δοσμένες συναρτήσεις $f{:}A\to\mathbb{R}$ και $g{:}B\to\mathbb{R}$, υπάρχει και η εξής δυνατότητα δημιουργίας μιας διαδικασίας:

I. Εφαρμόζουμε σε κάποιο $x\in A$ τη διαδικασία που υποδεικνύει η συνάρτηση f, οπότε παίρνουμε την τιμή $f(x)$.

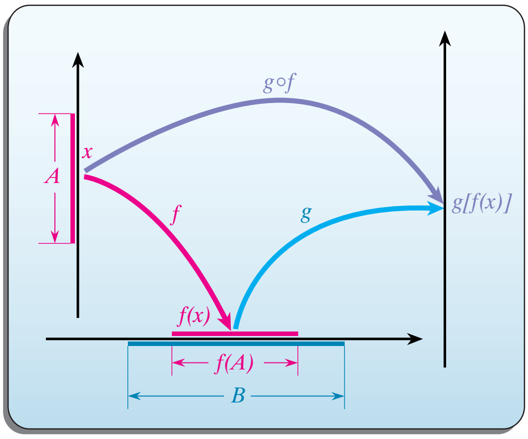
II. Στη συνέχεια εφαρμόζουμε στο $f(x)$ τη διαδικασία που υποδεικνύει η συνάρτηση g, οπότε παίρνουμε την $g(f(x))$.

Αμέσως γίνεται αντιληπτό ότι για να έχει η διαδικασία που περιγράψαμε νόημα (το βήμα II.) θα πρέπει η τιμή $f(x)$ να ανήκει στο πεδίο ορισμού B της συναρτήσεως g.

Επομένως, οι παραπάνω διαδικασίες

- **Δεν μπορούν** να ορίσουν μια συνάρτηση, όταν $f(A)\cap B=\varnothing$.
- **Μπορούν** να ορίσουν μια νέα συνάρτηση στις εξής δύο περιπτώσεις:

1η Περίπτωση:



Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$f: \mathrm{A} \to \mathbb{R} \quad \text{και} \quad g: \mathrm{B} \to \mathbb{R},$$

για τις οποίες ισχύει:

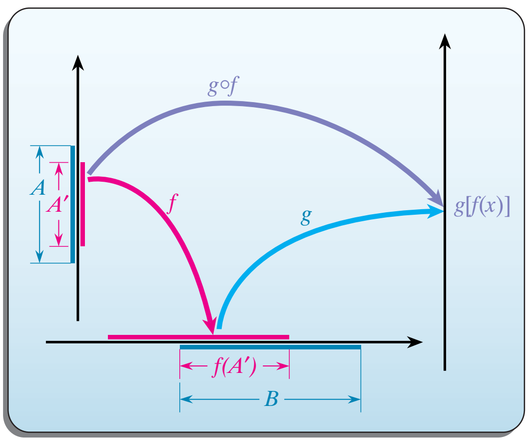
$$f(\mathrm{A}) \subseteq \mathrm{B}.$$

Τότε τα παραπάνω βήματα Ι. και ΙΙ. ορίζουν μια νέα συνάρτηση

$$g \circ f: \mathrm{A} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto g(f(x)),$$

που ονομάζεται **σύνθεση της** f **με την** g (σχ. 1).

2η Περίπτωση:



Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$f: \mathrm{A} \to \mathbb{R} \quad \text{και} \quad g: \mathrm{B} \to \mathbb{R},$$

για τις οποίες **δεν ισχύει**

$$f(\mathrm{A}) \subseteq \mathrm{B} \quad \text{αλλά} \quad f(\mathrm{A}) \cap \mathrm{B} \neq \varnothing.$$

Στην περίπτωση αυτή αναζητούμε το υποσύνολο εκείνο του Α, του οποίου τα στοιχεία έχουν τιμές που ανήκουν στο Β, δηλ. το σύνολο $\mathrm{A}' = \{x \in \mathrm{A} \mid f(x) \in \mathrm{B}\}$, οπότε $f(\mathrm{A}') = f(\mathrm{A}) \cap \mathrm{B}$. Τότε τα παραπάνω βήματα Ι. και ΙΙ. ορίζουν μια νέα συνάρτηση

$$g \circ f: \mathrm{A}' \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto g(f(x)),$$

που ονομάζεται επίσης **σύνθεση της** f **με την** g (σχ. 2).

Υπόδειξη: Ο προσδιορισμός του συνόλου Α′, όταν το πεδίο ορισμού Β της g είναι διάστημα, ανάγεται στην επίλυση ανισοτήτων. Έτσι, για παράδειγμα, αν $\mathrm{B} = [\alpha, \beta]$, το σύνολο Α′ αποτελείται από εκείνα τα στοιχεία του Α, για τα οποία αληθεύει τόσο η $\alpha \leq f(x)$, όσο και η $f(x) \leq \beta$.

Διάστημα Β	$[\alpha, \beta]$	(α, β)	$[\alpha, \beta)$	$(\alpha, \beta]$
Ανισότητες	$\alpha \leq f(x) \leq \beta$	$\alpha < f(x) < \beta$	$\alpha \leq f(x) < \beta$	$\alpha < f(x) \leq \beta$

Παράδειγμα 1

Για τις συναρτήσεις

$$f(x)=5\cdot x, \text{ με } A=\mathbb{R}, \quad \text{και} \quad g(x)=x^3, \text{ με } B=\mathbb{R},$$

συντρέχει η περίπτωση Ι.

$g\circ f$: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$x \underset{\text{πενταπλασιασμός}}{\overset{f}{\longmapsto}} 5\cdot x \underset{\text{ύψωση σε κύβο}}{\overset{g}{\longmapsto}} (5\cdot x)^3=25\cdot x^3 \quad \Rightarrow (g\circ f)(x) = g(f(x)) = 25\cdot x^3$$

$f\circ g$: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$x \underset{\text{ύψωση σε κύβο}}{\overset{g}{\longmapsto}} x^3 \underset{\text{πενταπλασιασμός}}{\overset{f}{\longmapsto}} 5\cdot x^3 \quad \Rightarrow (f\circ g)(x) = f(g(x)) = 5\cdot x^3$$

Παρατηρούμε ότι στο απλό αυτό παράδειγμα η συνάρτηση $g\circ f$ (σύνθεση της f με την g) δεν είναι ίση με τη συνάρτηση $f\circ g$ (σύνθεση της g με την f), παρόλο ότι έχουν το αυτό πεδίο ορισμού. Επομένως δεν ισχύει (γενικά) η αντιμεταθετική ιδιότητα στη σύνθεση συναρτήσεων. [Οι πίνακες είναι ένα είδος συναρτήσεων, στις οποίες το γινόμενο είναι σύνθεση την συναρτήσεων αυτών. Γνωρίζουμε περιπτώσεις όπου η σύνθεση αυτή είναι αντιμεταθετική].

Παράδειγμα 2

Για τις συναρτήσεις $f(x)=\eta\mu x$, με $A=[0, 2\pi]$, και $g(x)=\ln x$, με $B=(0, +\infty)$, συντρέχει η περίπτωση ΙΙ:

1. Για τη σύνθεση $\ln\circ\eta\mu$ είναι $A'=(0, \pi)$, αφού για κάθε $x\in[\pi, 2\pi]$ ισχύει $\eta\mu x\leq 0$, όπου η λογαριθμική συνάρτηση δεν ορίζεται.

   $\ln\circ\eta\mu : (0, \pi)\to\mathbb{R}$

   $$x \underset{\text{ημίτονο}}{\overset{\eta\mu}{\longmapsto}} \eta\mu x \underset{\text{λογάριθμος}}{\overset{\ln}{\longmapsto}} \ln(\eta\mu x) \quad \Rightarrow (\ln\circ\eta\mu)(x)=\ln(\eta\mu x)$$

2. Για τη σύνθεση $\eta\mu\circ\ln$ είναι $B'=[1, e^{2\pi}]$, αφού $g([1, e^{2\pi}])= [0, 2\pi]$.

   $\eta\mu\circ\ln$: $[1, e^{2\pi}]\to\mathbb{R}$

   $$x \underset{\text{λογάριθμος}}{\overset{\ln}{\longmapsto}} \ln x \underset{\text{ημίτονο}}{\overset{\eta\mu}{\longmapsto}} \eta\mu(\ln x) \quad \Rightarrow (\eta\mu\circ\ln)(x)=\eta\mu(\ln x)$$

Στο παραπάνω παράδειγμα 2

- Στην περίπτωση της $\ln\circ\eta\mu$ που $B=(0, +\infty)$, τα $x\in[0, 2\pi]$ για τα οποία $0<\eta\mu x$ είναι εκείνα που ανήκουν στο διάστημα $A'=(0, \pi)$.
- Στην περίπτωση της $\eta\mu\circ\ln$ που $B=[0, 2\pi]$, τα $x\in(0, +\infty)$ για τα οποία $0\leq\ln x\leq 2\pi$ (δηλ. $0\leq\ln x$ **και** $\ln x\leq 2\pi$) είναι εκείνα που ανήκουν στο διάστημα $[1, e^{2\pi}]$.

Σχόλιο: Ο διδάσκων πρέπει να έχει υπόψη του, χωρίς να αποτελεί αυτό αντικείμενο διδασκαλίας, ότι η γραφή f^2 για το «*τετράγωνον των τιμών της συναρτήσεως f*» δεν είναι ορθή, γιατί συνήθως η γραφή f^2 σημαίνει τη σύνθεση $f \circ f$ (προφανώς αυτό ισχύει και για κάθε δύναμη).

Παράδειγμα

Για τη συνάρτηση $f(x)=x^3$

- Το *τετράγωνο της f* είναι $(f \circ f)(x)=f(f(x))=(x^3)^3=x^9$.
- Το τετράγωνο των τιμών $f(x)$ είναι $[f(x)]^2=(x^3)^2=x^6$.

Η γραφή $\eta\mu^2 x$ αντί της $(\eta\mu x)^2$ γίνεται κατόπιν συμφωνίας και σε πολλά βιβλία, κυρίως της αλλοδαπής, γράφεται μόνο η δεύτερη.

1.5. Μονότονες συναρτήσεις

Η έννοια της μονοτονίας μιας συναρτήσεως είναι ίσως από τις λίγες που έχουν άμεση σχέση με την καθημερινή μας ενασχόληση. Έτσι, για παράδειγμα, λέμε και ακούμε «η θερμοκρασία ανεβαίνει», «η ταχύτητα του αυτοκινήτου αυξάνει», «η ατμοσφαιρική πίεση μειώνεται όσο απομακρυνόμαστε από τη γη». Σε κάθε μια από τις περιπτώσεις αυτές μιλάμε για μια συνάρτηση (με κατάλληλο πεδίο ορισμού) που είναι αύξουσα ή φθίνουσα ανάλογα.

- Η θερμοκρασία $T: I \to \mathbb{R}$, όπου I κατάλληλο χρονικό διάστημα.
- Η ταχύτητα $V: I \to \mathbb{R}$, όπου I κατάλληλο χρονικό διάστημα.
- Η ατμοσφαιρική πίεση $P:[0, h] \to \mathbb{R}$, όπου $x \in [0, h]$ εκφράζει την απόσταση του σημείου από την επιφάνεια της γής.

Τι είναι αυτό που διαπιστώνουμε, ώστε να λέμε ότι κάτι αυξάνει ή μειώνεται; Την απάντηση σ' αυτή την ερώτηση δίνει ο ορισμός:

Ορισμός

Έστω μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ και $\varnothing \neq E \subseteq A$.

- Θα λέμε ότι η συνάρτηση f είναι

$$\left\{\begin{matrix} \textit{αύξουσα} \\ \textit{φθίνουσα} \end{matrix}\right\} \quad \text{στο } E \text{, όταν για κάθε } x_1, x_2 \in E, \text{ με } x_1 < x_2 \text{, ισχύει} \quad \left\{\begin{matrix} f(x_1) \leq f(x_2) \\ f(x_1) \geq f(x_2) \end{matrix}\right\}$$

- Θα λέμε ότι η συνάρτηση f είναι

$$\left\{\begin{matrix} \textit{γνησίως αύξουσα} \\ \textit{γνησίως φθίνουσα} \end{matrix}\right\} \quad \text{στο } E \text{, όταν για κάθε } x_1, x_2 \in E, \text{ με } x_1 < x_2 \text{, ισχύει} \quad \left\{\begin{matrix} f(x_1) < f(x_2) \\ f(x_1) > f(x_2) \end{matrix}\right\}$$

- Θα λέμε ότι η f είναι **μονότονη** (αντ. **γνησίως μονότονη**), όταν είναι αύξουσα ή φθίνουσα (αντ. γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα).

Επομένως, η συνάρτηση f **δεν είναι αύξουσα** (αντ. **γνησίως αύξουσα**) στο Ε, όταν υπάρχουν $x_1, x_2 \in E$ με $x_1 < x_2$, για τα οποία ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$ (αντ. $f(x_1) \geq f(x_2)$).

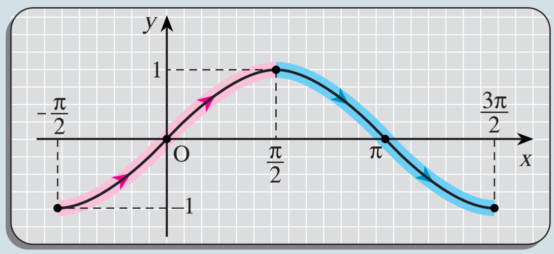
Ανάλογα, η συνάρτηση f **δεν είναι φθίνουσα** (αντ. **γνησίως φθίνουσα**) στο Ε, όταν υπάρχουν $x_1, x_2 \in E$ με $x_1 < x_2$, για τα οποία ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$ (αντ. $f(x_1) \leq f(x_2)$).

Στην παράγραφο αυτή είναι απαραίτητο να **επισημανθούν** τα εξής:

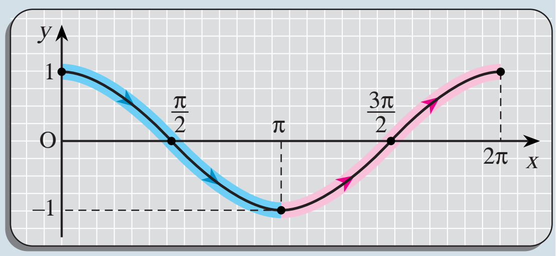
- Ο ορισμός **δεν** αναφέρεται απαραίτητα σ' όλο το πεδίο ορισμού της συναρτήσεως (και ούτε πάντοτε ενδιαφέρει), αλλά σ' ένα **μη κενό** υποσύνολό του Ε.
- Οι ανισότητες μεταξύ των $f(x_1)$, $f(x_2)$ πρέπει να ισχύουν για κάθε $x_1, x_2 \in E$.

Παραδείγματα

1. Η συνάρτηση ***ημx*** είναι **γνησίως αύξουσα** στο $E = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ και **γνησίως φθίνουσα** στο $Z = \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.



2. Η συνάρτηση ***συνx*** είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $E=[0, \pi]$ και **γνησίως αύξουσα** στο $Z=[\pi, 2\pi]$.



- Το γεγονός ότι μια συνάρτηση $f(x)$ είναι αύξουσα (αντ. φθίνουσα) σε δύο υποσύνολα Ε και Ζ του πεδίου ορισμού της δε σημαίνει ότι αυτή είναι αύξουσα (αντ. φθίνουσα) στην ένωσή τους $E \cup Z$.

3. Η συνάρτηση ***εφx*** είναι **γνησίως αύξουσα** στα διαστήματα

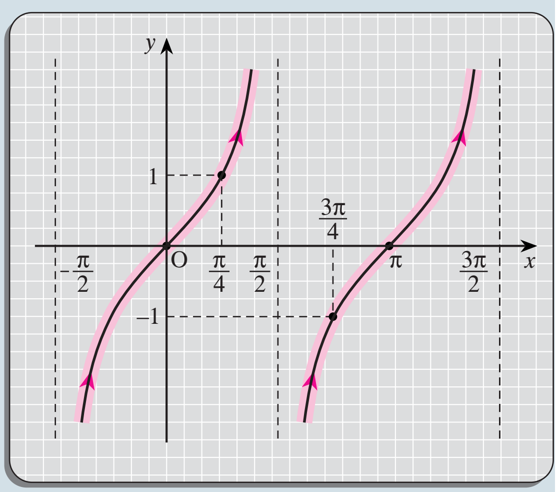
$$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right), \ldots,$$

χωρίς να είναι αύξουσα στην ένωση των διαστημάτων αυτών, αφού για

$$x_1 = \frac{\pi}{4} \quad \text{και} \quad x_2 = \frac{3\pi}{4}$$

ισχύει

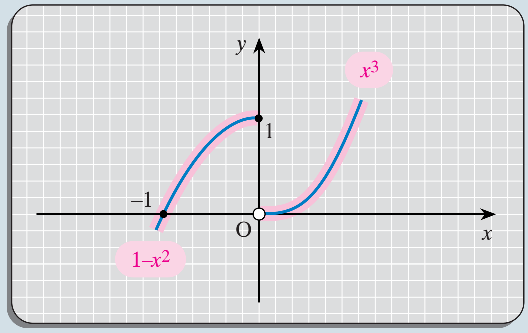
$$\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 > -1 = \varepsilon\varphi\left(\frac{3\pi}{4}\right).$$



4. Η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 1-x^2, & x\le 0 \\ x^3, & x>0 \end{cases}$$

είναι **αύξουσα** στα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $(0, +\infty)$, ενώ δεν είναι αύξουσα στην ένωσή τους που είναι όλο το $\mathbb{R}$.



Λόγος μεταβολής

Ο ***λόγος μεταβολής*** μιας συναρτήσεως $f: A\to\mathbb{R}$ μεταξύ δύο σημείων x_1, $x_2\in A, x_1\neq x_2$, ορίζεται ως το πηλίκο

$$\lambda = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1},$$

με τον οποίο μπορούμε να μελετήσουμε τη μονοτονία της f και, ειδικότερα, όταν η συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο Ε. Οι σχετικές προτάσεις, του σχολικού βιβλίου, είναι:

Πρόταση

Έστω μια συνάρτηση f: Α$\to\mathbb{R}$ και $\varnothing\neq$ Ε$\subseteq$Α.

- *Η f είναι* $\left\{\begin{matrix} \textit{αύξουσα} \\ \textit{φθίνουσα} \end{matrix}\right\}$ *στο* Ε, *όταν* $\left\{\begin{matrix} \lambda\ge 0 \\ \lambda\le 0 \end{matrix}\right\}$ *για κάθε* $x_1, x_2\in$ Ε
- *Η f είναι* $\left\{\begin{matrix} \textit{γνησίως αύξουσα} \\ \textit{γνησίως φθίνουσα} \end{matrix}\right\}$ *στο* Ε, *όταν* $\left\{\begin{matrix} \lambda> 0 \\ \lambda< 0 \end{matrix}\right\}$ *για κάθε* $x_1, x_2\in$ Ε.

Απόδειξη: Έστω $\lambda\ge 0$. Τότε για δύο οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2\in$ Ε με $x_1<x_2$ θα ισχύει

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\ge 0.$$

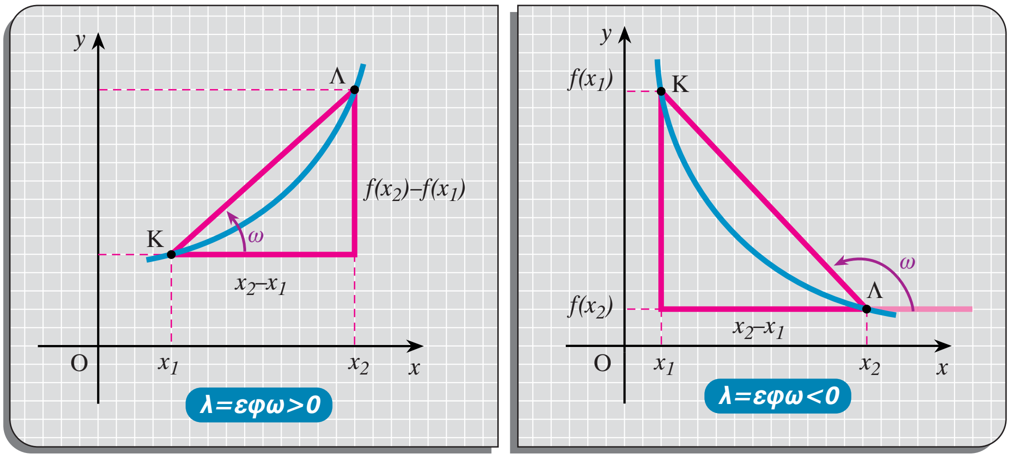
Επειδή $x_1-x_2<0$ έπεται ότι και $f(x_1)-f(x_2)\le 0$, που σημαίνει ότι

$$f(x_1)\le f(x_2),$$

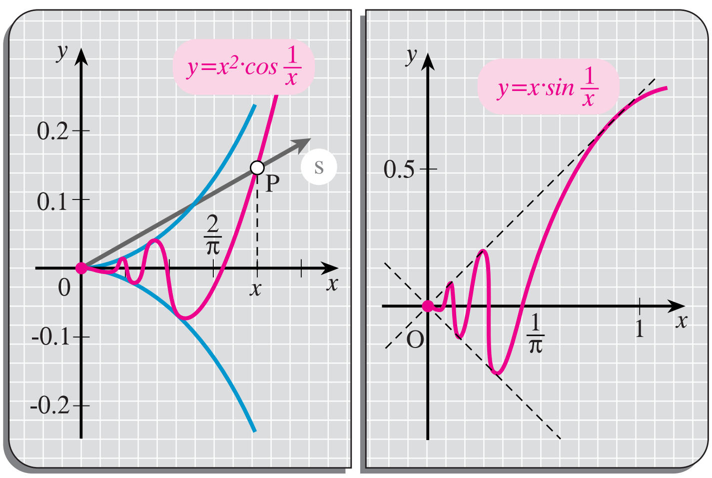
δηλ. η f είναι αύξουσα.

Ανάλογη είναι η απόδειξη των άλλων.

Είναι σκόπιμο, με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων, να δείξουμε στους μαθητές ότι ο λόγος μεταβολής μεταξύ των σημείων $\mathrm{K}(x_1, f(x_1))$ και $\Lambda(x_2, f(x_2))$ δεν είναι τίποτε άλλο από το συντελεστή διευθύνσεως της ευθείας που περνά από τα σημεία Κ και Λ, που είναι θετικός όταν ο «δρόμος είναι ανηφορικός» και είναι αρνητικός όταν είναι «δρόμος είναι κατηφορικός».



Παρατηρήσεις:



- Δεν είναι απαραίτητο μια συνάρτηση να είναι μονότονη σε κάποιο υποδιάστημα του πεδίου ορισμού της. Για παράδειγμα η συνάρτηση Dirichlet δεν είναι μονότονη σε κανένα διάστημα (βλ. Γ. Παντελίδη, ΑΝΑΛΥΣΗ Ι, σ. 86, 116). Επίσης οι συναρτήσεις f και g των παραπλεύρως σχημάτων δεν είναι μονότονες σε κανένα διάστημα της μορφής $[0, \alpha]$.
- Ο λόγος μεταβολής, όπως θα δούμε αργότερα, είναι η **μέση μεταβολή** της συναρτήσεως στο διάστημα $[x_1, x_2]$, την οποία θα χρησιμοποιήσουμε για να ορίσουμε την παράγωγο.
- Η απάντηση στο ερώτημα «Η θερμοκρασία αυξάνει γρηγορότερα την ημέρα απ' ό,τι τη νύχτα;» (ανάλογη για τις άλλες περιπτώσεις) θα δοθεί στο κεφάλαιο των παραγώγων, όπου θα σχολιάσουμε την έννοια του ρυθμού μεταβολής μιας συναρτήσεως.
- Τη σχέση μεταξύ μονοτονίας και του «ένα προς ένα» μιας συναρτήσεως θα μελετήσουμε στην παράγρ. 1. 8. Ενώ τη μελέτη της μονοτονίας μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης θα διαπραγματευτούμε στο σχετικό κεφάλαιο των παραγώγων.

Παράδειγμα

5. Η συνάρτηση

$$f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

με πεδίο ορισμού $(-\infty, -1)\cup(0, \infty)$ είναι αύξουσα στο σύνολο $\mathbb{N}^*$.
Πράγματι, για κάθε $\nu\in\mathbb{N}^*$, με $\nu>1$, ισχύουν

$$(*) \qquad \frac{f(\nu)}{f(\nu-1)} = \frac{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}}{\left(1+\frac{1}{\nu-1}\right)^{\nu-1}} =$$

$$= \frac{\nu}{\nu-1}\left(1-\frac{1}{\nu^2}\right)^{\nu} \text{(Bernoulli)} \geq \frac{\nu}{\nu-1}\left(1-\nu\cdot\frac{1}{\nu^2}\right) = 1,$$

δηλ. $f(\nu)\geq f(\nu-1)$, που σημαίνει ότι η f είναι αύξουσα στο $\mathbb{N}^*$.

Παρατήρηση:

Η συνάρτηση $f(x)$ είναι αύξουσα στο πεδίο ορισμού της $(-\infty, -1)\cup(0, \infty)$, γεγονός που δε μπορούμε να συμπεράνουμε από την παραπάνω απόδειξη. Η απόδειξη ότι η f είναι αύξουσα θα γίνει με τη βοήθεια των παραγώγων (βλ. §6.11).

1.6. Φραγμένες συναρτήσεις

Όπως έχουμε αναφέρει και σε προηγούμενη παράγραφο, η έννοια της συναρτήσεως είναι απαραίτητη για να εκφράσουμε μαθηματικά πραγματικές καταστάσεις και να περιγράψουμε την εξάρτηση μεγεθών μεταξύ τους. Είναι φυσικό επομένως να μας ενδιαφέρει αν κάποιο μέγεθος, που εξαρτάται από κάποιο άλλο, μπορεί να αυξάνει ή να φθίνει απεριόριστα ή δεν μπορεί να ξεπεράσει κάποια ανώτατη ή κατώτατη τιμή. Όταν το μέγεθος αυτό εκφράζεται με μια συνάρτηση, τότε το παραπάνω ερώτημα αναφέρεται στο σύνολο τιμών της συναρτήσεως.

Ορισμός: Μια συνάρτηση f:Α$\to\mathbb{R}$ λέμε ότι είναι:

- **άνω** (αντ. **κάτω**) **φραγμένη**, όταν υπάρχει $\text{M}\in\mathbb{R}$ (αντ. $\text{m}\in\mathbb{R}$) τέτοιο, ώστε για κάθε $x\in\text{A}$ να ισχύει

$$f(x) \leq \text{M} \quad (\text{αντ. } f(x) \geq \text{m}).$$

- **φραγμένη**, όταν υπάρχουν $\text{M}, \text{m}\in\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε για κάθε $x\in\text{A}$ να ισχύουν

$$\text{m} \leq f(x) \leq \text{M}.$$

Με άλλα λόγια:

Μια συνάρτηση f είναι $\left\{\begin{array}{c}\textit{άνω φραγμένη}\\ \textit{κάτω φραγμένη}\\ \textit{φραγμένη}\end{array}\right\}$, όταν το σύνολο τιμών $f(\text{A})$ είναι $\left\{\begin{array}{c}\textit{άνω φραγμένο}\\ \textit{κάτω φραγμένο}\\ \textit{φραγμένο}\end{array}\right\}$

Η επόμενη πρόταση (βλ. πρόταση και απόδειξη στη σελ. 35), δίνει ένα ισοδύναμο και πιο εύχρηστο κριτήριο για να είναι μια συνάρτηση φραγμένη:

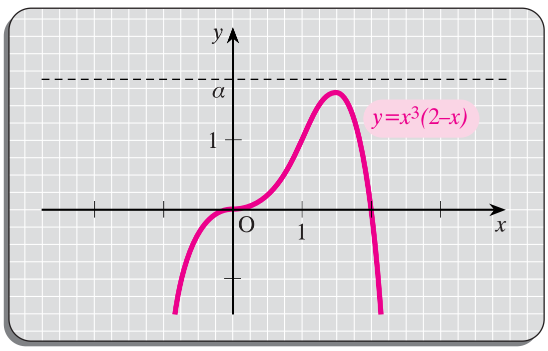
Πρόταση: *Μια συνάρτηση* $f\colon \mathrm{A}\to \mathbb{R}$ *είναι φραγμένη, όταν, και μόνο όταν, υπάρχει* $\mathrm{K}\in\mathbb{R}$ *τέτοιο, ώστε για κάθε* $x\in \mathrm{A}$ *να ισχύει*

$$|f(x)|\le K.$$

Αν χρησιμοποιήσουμε τις αρνήσεις των λογικών προτάσεων, που έχουμε αναφέρει στην §1. 0, τότε συμπεραίνουμε τα ακόλουθα:

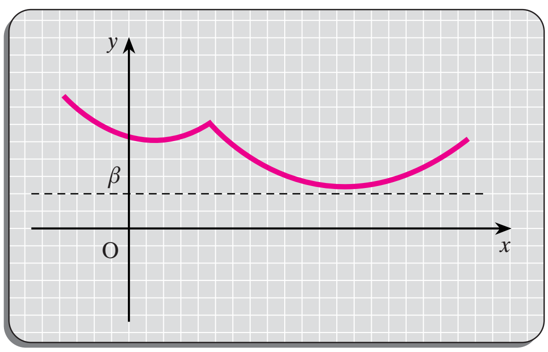
- Η συνάρτηση $f\colon \mathrm{A}\to\mathbb{R}$ **δεν είναι άνω φραγμένη**, όταν για κάθε $\mathrm{M}\in\mathbb{R}$ υπάρχει $x_0\in \mathrm{A}$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)\ge \mathrm{M}$.
- Η συνάρτηση $f\colon \mathrm{A}\to\mathbb{R}$ **δεν είναι κάτω φραγμένη**, όταν για κάθε $\mathrm{m}\in\mathbb{R}$ υπάρχει $x_0\in \mathrm{A}$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)\le \mathrm{m}$.

Πρέπει ακόμη να επισημανθούν στους μαθητές τα εξής:



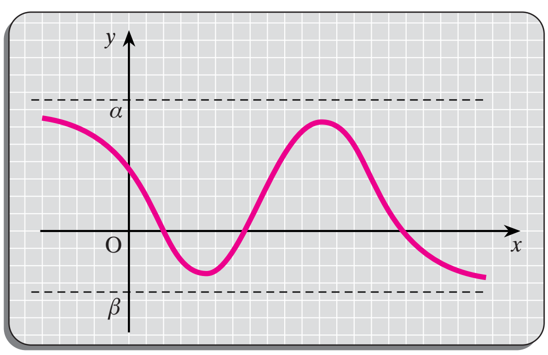
Σχ. 1

Το ότι μια συνάρτηση f είναι άνω φραγμένη αναγνωρίζεται από το γεγονός ότι υπάρχει μια ευθεία παράλληλη προς τον άξονα $x'x$ (δηλ. της μορφής $y=\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$) **κάτω από την οποία** βρίσκεται η γραφική παράσταση της f (σχ. 1).



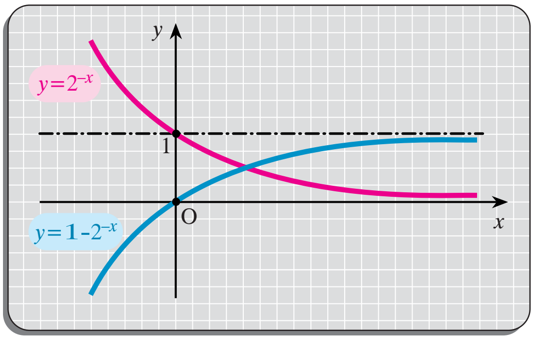
Σχ. 2

Το ότι μια συνάρτηση f είναι κάτω φραγμένη αναγνωρίζεται από το γεγονός ότι υπάρχει μια ευθεία παράλληλη προς τον άξονα $x'x$ (δηλ. της μορφής $y=\beta$, $\beta\in\mathbb{R}$) **πάνω από την οποία** βρίσκεται η γραφική παράσταση της f (σχ. 2).



Σχ. 3

Το ότι μια συνάρτηση f είναι φραγμένη αναγνωρίζεται από το γεγονός ότι υπάρχουν δύο ευθείες παράλληλες προς τον άξονα $x'x$ **μεταξύ των οποίων** βρίσκεται η γραφική παράσταση της f (σχ. 3).



Σχ. 4

Επισημαίνουμε ότι μια συνάρτηση f μπορεί να είναι γνησίως αύξουσα (αντ. γνησίως φθίνουσα) και συγχρόνως να είναι άνω (αντ. κάτω) φραγμένη. Για παράδειγμα, η συνάρτηση $y=1-2^{-x}$ (σχ. 4) είναι γνησίως αύξουσα και άνω φραγμένη από την ευθεία $y=1$. Ανάλογα, η συνάρτηση $y=2^{-x}$ είναι γνησίως φθίνουσα και κάτω φραγμένη από την $y=0$.

Στην περίπτωση που στους παραπάνω ορισμούς ισχύουν οι σχέσεις για ένα υποσύνολο Ε του πεδίου ορισμού Α, τότε λέμε ότι η συνάρτηση f είναι **άνω φραγμένη, κάτω φραγμένη** ή **φραγμένη στο σύνολο** $E \subseteq A$ αντίστοιχα. Ενώ οι τελευταίες παρατηρήσεις για τη θέση της γραφικής παραστάσεως ισχύουν μόνο για το τμήμα εκείνο της γραφικής παραστάσεως που αντιστοιχεί στο σύνολο Ε.

1.8. Συνάρτηση «ένα προς ένα» - Αντίστροφη συνάρτηση

Κατά τον ορισμό της συναρτήσεως έχουμε επισημάνει, ότι σε κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται **ένα μοναδικό** στοιχείο $y \in \mathbb{R}$, ενώ είναι δυνατόν η συνάρτηση σε περισσότερα στοιχεία του Α να αντιστοιχίζει το ίδιο στοιχείο. Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x)=ημx$ αντιστοιχίζει στα σημεία $x=2νπ$, $ν \in \mathbb{N}$, τον αριθμό 0. Ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι συναρτήσεις που το αρχέτυπο κάθε τιμής τους είναι μοναδικό.

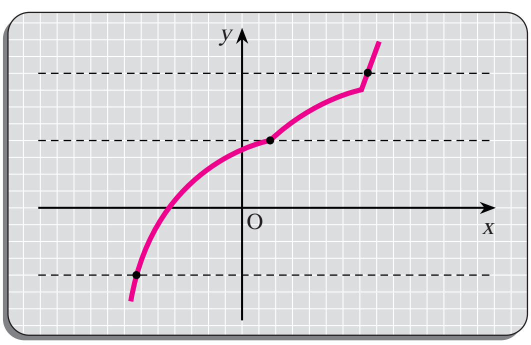
Ορισμός: Μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ λέμε ότι είναι «**ένα προς ένα**», όταν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει:

$$\text{Αν } x_1 \neq x_2, \text{ τότε } f(x_1) \neq f(x_2)$$

ή ισοδύναμα

$$\text{Αν } f(x_1) = f(x_2), \text{ τότε } x_1 = x_2$$

Μια συνάρτηση «*ένα προς ένα*», κατά το ελληνικότερον, ονομάζεται και ***αμφιμονοσήμαντη***.



- Από τον ορισμό προκύπτει ότι, για να είναι μια συνάρτηση f «ένα προς ένα» θα πρέπει διαφορετικά στοιχεία του πεδίου ορισμού της να έχουν διαφορετικές εικόνες. Που σημαίνει ότι, εφ' όσον γνωρίζουμε τη γραφική παράσταση της συναρτήσεως, τότε αναγνωρίζουμε ότι αυτή είναι *«ένα προς ένα»,* αν κάθε ευθεία παράλληλη προς τον άξονα $x'x$ τέμνει τη γραφική παράσταση σ' ένα μόνο σημείο ή δεν την τέμνει.

Το γεγονός ότι για κάθε στοιχείο του συνόλου τιμών μιας συναρτήσεως f υπάρχει ένα μοναδικό αρχέτυπό του μας δίνει τη δυνατότητα να ορίσουμε μια νέα συνάρτηση, την αντίστροφη της f.

Ορισμός

Αν f:Α→ℝ είναι μια «*ένα προς ένα*» συνάρτηση, τότε η συνάρτηση

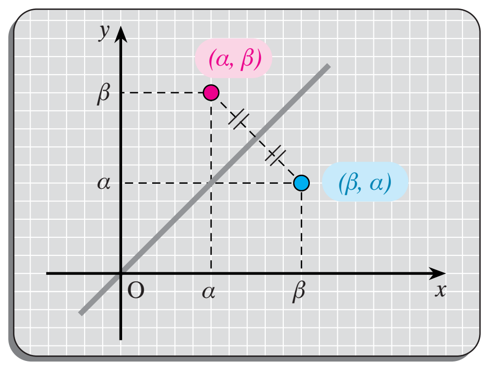
$$f^{-1}: f(A) \to \mathbb{R}$$
$$y \mapsto f^{-1}(y) = x,$$

που σε κάθε στοιχείο $y \in f(A)$ αντιστοιχίζει το μοναδικό αρχέτυπό του $x \in A$, ονομάζεται **αντίστροφη της** f.

- Για μια «*ένα προς ένα*» συνάρτηση f:Α→ℝ ισχύουν οι παραπλεύρως σχέσεις που αποδεικνύονται εύκολα με τη χρήση του ορισμού:

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$$
$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{για κάθε} \quad x \in A$$
$$f(f^{-1}(y)) = y \quad \text{για κάθε} \quad y \in f(A)$$

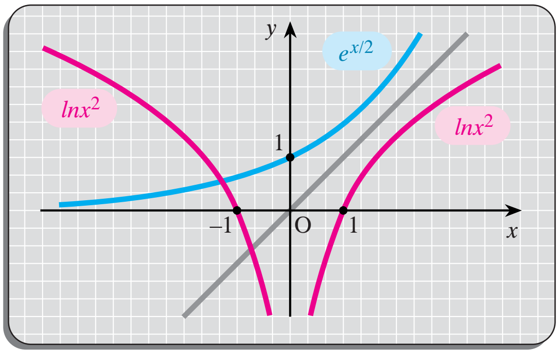
- Αν για την «ένα προς ένα» συνάρτηση f είναι $\beta = f(\alpha)$, τότε το σημείο (α, β) του επιπέδου ανήκει στη γραφική παράσταση της f. Σύμφωνα με τον ορισμό της αντίστροφης συνάρτησης, $\alpha = f^{-1}(\beta)$, που σημαίνει ότι το σήμείο (β, α) ανήκει στη γραφική παράσταση της f^{-1}. Τα σημεία (α,β) και (β,α) είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία $y=x$, δηλ. τη διχοτόμο της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων. Έπομένως η γραφική παράσταση της f^{-1} είναι συμμετρική της f ως προς τη διχοτόμο $y=x$.



Όταν μας δίνεται ο τύπος μιας «ένα προς ένα» συναρτήσεως f μπορούμε, πολλές φορές, να προσδιορίσουμε τον τύπο της αντίστροφή της f^{-1}. Η διαδικασία αυτή δίνεται παραστατικά στο επόμενο πλαίσιο:

Συνάρτηση f f:Α→ℝ	Εξίσωση συναρτήσεως	Λύση ως προς x	Εναλλαγή μεταβλητών	Αντίστροφη συνάρτηση f^{-1}:Α′=f(Α)→Α
$f(x) = \dfrac{x}{2(1+x)}$ Α=ℝ\\{–1}	$y = \dfrac{x}{2(1+x)}$	$x = \dfrac{2y}{1-y}$	$y = \dfrac{2x}{1-x}$	$f^{-1}(x) = \dfrac{2x}{1-x}$ Α′=ℝ\\{1}
$f(x)=lnx^2$ Α=(0, +∞)	$y=lnx^2$	$x=e^{\frac{y}{2}}$	$y=e^{\frac{x}{2}}$	$f^{-1}(x)=e^{\frac{x}{2}}$ Α′=ℝ

Πρέπει να εξοικειωθούν οι μαθητές με περιπτώσεις όπως η παρακάτω:



- Η $f(x)=lnx^2$ έχει πεδίο ορισμού το σύνολ ο $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, όπου όμως δεν είναι *«ένα προς ένα»*. Η συνάρτηση είναι «ένα προς ένα» σε κάθε ένα από τα διαστήματα. $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$. Έτσι έχει νόημα να προσδιορίσουμε την αντίστροφή της σε κάθε ένα από τα διαστήματα αυτά.

Προσοχή!

Με την ευκαιρία του παραπάνω παραδείγματος, αλλά και ανάλογων παραδειγμάτων, πρέπει να επισημανθεί ο ρόλος της απόλυτης τιμής στις παρακάτω ισότητες:

1. $log\alpha^k = k\cdot log|\alpha|$ & $log(\alpha\cdot\beta) = \log|\alpha| + log|\beta|$, $\alpha,\beta\neq 0$.

   Επομένως η $y=lnx^2$ **δεν είναι** ισοδύναμη με την $y=2\cdot lnx$ αλλά με την $y=2\cdot ln|x|$

2. $\sqrt{\alpha\cdot\beta} = \sqrt{|\alpha|}\cdot\sqrt{|\beta|}$

3. $\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$

Μια σημαντική πρόταση που συνδέει τη μονοτονία με την ιδιότητα *«ένα προς ένα»* μιας συναρτήσεως είναι η ακόλουθη (βλ Γ. Παντελίδη, ΑΝΑΛΥΣΗ Ι, σ. 91):

Πρόταση:

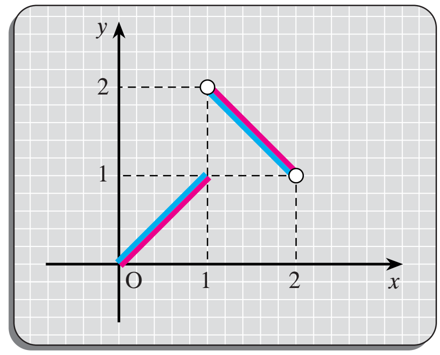
a) *Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της Α, τότε είναι «ένα προς ένα».*

b) *Η αντίστροφη μιας γνησίως μονότονης συναρτήσεως είναι γνησίως μονότονη με το ίδιο είδος μονοτονίας.*

Στην περίπτωση που η ιδιότητα *«ένα προς ένα»* μιας συναρτήσεως f ισχύει σε ένα υποσύνολο Ε του πεδίου ορισμού της, τότε ισχύουν όλα τα παραπάνω για τη συνάρτηση f στο Ε και f(Ε) αντί του Α και f(Α).

Επισήμανση: Το αντίστροφο της προτάσεως αυτής **δεν είναι αληθές**. Δηλαδή, δεν είναι αληθής η πρόταση:

«Αν μια συνάρτηση f *είναι "ένα προς ένα" στο πεδίο ορισμού της* A *(ακόμη και όταν είναι διάστημα), τότε είναι γνησίως μονότονη»* .



Παράδειγμα:

Η συνάρτηση

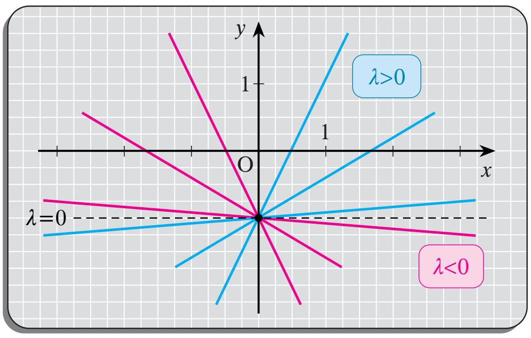
$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 3-x, & 1<x<2 \end{cases}$$

είναι «ένα προς ένα» χωρίς να είναι γνησίως μονότονη. Παρατηρείστε ότι η αντίστροφή της ταυτίζεται με αυτήν (γιατί;).

Κατάλογος συναρτήσεων

Οι γραμμικές συναρτήσεις

$y = \lambda x+\alpha, \quad x\in\mathbb{R}$

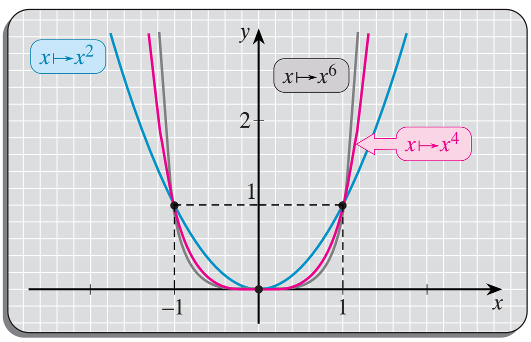


Για όλες τις γραμμικές συναρτήσεις ισχύουν:

- Η συνάρτηση είναι
  - γνησίως αύξουσα, όταν $\lambda>0$
  - γνησίως φθίνουσα, όταν $\lambda<0$
- Το σύνολο τιμών είναι
  - $\mathbb{R}$, όταν $\lambda\neq 0$
  - $\{\alpha\}$, όταν $\lambda=0$
- Η γραφική παράστασή της είναι μια ευθεία με συντελεστή διευθύνσεως λ και διέρχεται από το σημείο $P(0, \alpha)$.

Οι συναρτήσεις

$y = x^{2\nu}, \quad x\in\mathbb{R}, \nu\in\mathbb{N}^*$

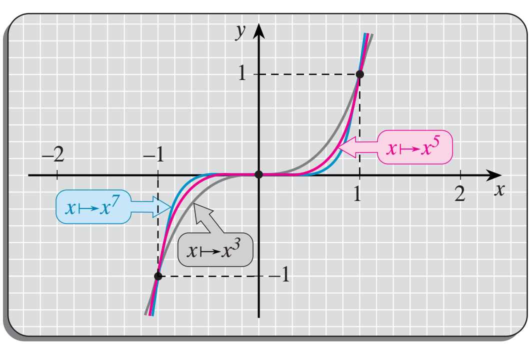


Για όλες τις συναρτήσεις αυτές (με άρτιο θετικό εκθέτη) ισχύουν:

- Η συνάρτηση είναι
  - γνησίως φθίνουσα για $x\leq 0$
  - γνησίως αύξουσα για $x\geq 0$
- Το σύνολο τιμών της συναρτήσεως είναι το $[0, +\infty)$.
- Η γραφική παράστασή της είναι παραβολή συμμετρική ως προς τον y′y.
- Όλες οι γραφικές παραστάσεις έχουν κοινά **μόνο** τα σημεία $O(0, 0)$, $P(1, 1)$ και $T(-1, 1)$.

Οι συναρτήσεις

$y=x^{2\nu+1}, x\in\mathbb{R}, \nu\in\mathbb{N}^*$

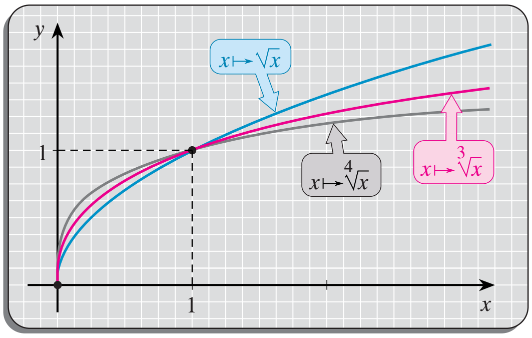


Για όλες τις συναρτήσεις αυτές (με περιττό θετικό εκθέτη) ισχύουν:

- Η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα.
- Το σύνολο τιμών είναι το $\mathbb{R}$.
- Η γραφική παράστασή της είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων).
- Όλες οι γραφικές παραστάσεις έχουν κοινά **μόνο** τα σημεία $O(0, 0)$, $P(1, 1)$ και $T(-1, -1)$.

Οι συναρτήσεις ρίζας

$y = \sqrt[\nu]{x},\ \ x \geq 0,\ \nu \geq 2\ (\nu \in \mathbb{N}^*)$

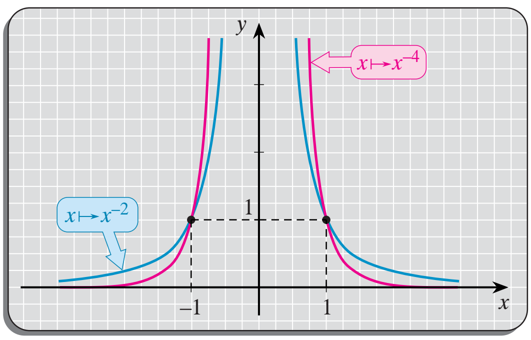


Για όλες τις συναρτήσεις ρίζας ισχύουν:

- Η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα.
- Το σύνολο τιμών είναι το $[0, +\infty)$.
- Όλες οι γραφικές παραστάσεις έχουν κοινά **μόνο** τα σημεία $O(0, 0)$, $P(1, 1)$.

Οι συναρτήσεις *(δυνάμεως)*

$y = x^{-2\nu},\ \ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ \text{με}\ \nu \in \mathbb{N}^*$

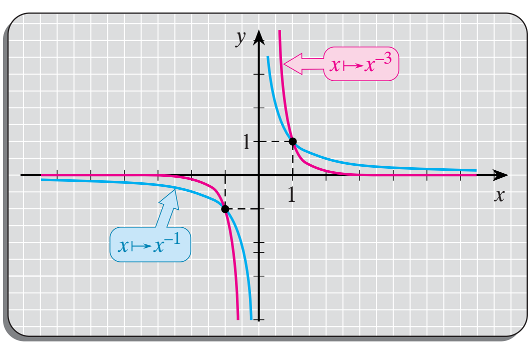


Για όλες τις συναρτήσεις δυνάμεως με άρτιο αρνητικό εκθέτη ισχύουν:

- Η συνάρτηση είναι
  - γνησίως αύξουσα για $x<0$
  - γνησίως φθίνουσα για $x>0$.
- Το σύνολο τιμών είναι το $[0, +\infty)$.
- Η γραφική παράσταση είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$.
- Κάθε τμήμα της γραφικής παραστάσεως προσεγγίζει απεριόριστα τους άξονες $x'x$ και $y'y$.
- Όλες οι γραφικές παραστάσεις έχουν κοινά **μόνο** τα σημεία $P(1, 1)$ και $T(-1, 1)$.

Οι συναρτήσεις *(δυνάμεως)*

$y = x^{-(2\nu+1)},\ \ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ \text{με}\ \nu \in \mathbb{N}^*$

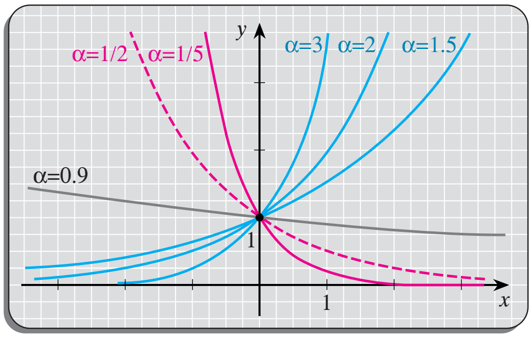


Για όλες τις συναρτήσεις δυνάμεως με περιττό αρνητικό εκθέτη ισχύουν:

- Η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα για $x<0$, όσο και για $x>0$.
- Η γραφική παράσταση είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων O.
- Κάθε τμήμα της γραφικής παραστάσεως προσεγγίζει απεριόριστα τους άξονες $x'x$ και $y'y$.
- Όλες οι γραφικές παραστάσεις έχουν κοινά **μόνο** τα σημεία $P(1, 1)$ και $T(-1, -1)$.

Οι εκθετικές συναρτήσεις

$y = \alpha^x$, x∈ℝ, με $\alpha>0$ και $\alpha\neq 1$

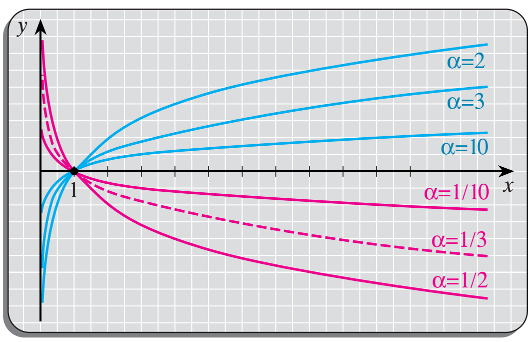


Για όλες τις εκθετικές συναρτήσεις ισχύουν:

- Η συνάρτηση είναι
  - γνησίως αύξουσα για $\alpha>1$
  - γνησίως φθίνουσα για $0<\alpha<1$.
- Το σύνολο τιμών είναι το $(0, +\infty)$.
- Η γραφική παράσταση προσεγγίζει απεριόριστα
  - τον αρνητικό ημιάξονα $x'x$, όταν $\alpha>1$.
  - τον θετικό ημιάξονα $x'x$, όταν $0<\alpha<1$.
- Όλες οι γραφικές παραστάσεις έχουν κοινό **μόνο** το σημείο P(0, 1).

Οι λογαριθμικές συναρτήσεις

$y = log_\alpha x$, $x>0$, με $\alpha>0$ και $\alpha\neq 1$

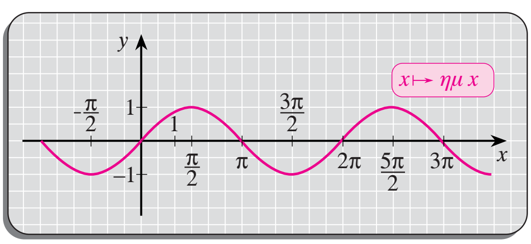


Για όλες τις λογαριθμικές συναρτήσεις ισχύουν:

- Η συνάρτηση είναι
  - γνησίως αύξουσα για $\alpha>1$
  - γνησίως φθίνουσα για $0<\alpha<1$.
- Το σύνολο τιμών είναι όλο το ℝ.
- Η γραφική παράσταση προσεγγίζει απεριόριστα
  - τον αρνητικό ημιάξονα $y'y$, όταν $\alpha>1$
  - τον θετικό ημιάξονα $y'y$, όταν $0<\alpha<1$.
- Όλες οι γραφικές παραστάσεις έχουν κοινό **μόνο** το σημείο T(1, 0).

Η συνάρτηση (ημιτόνου)

y = ημx, x∈ℝ

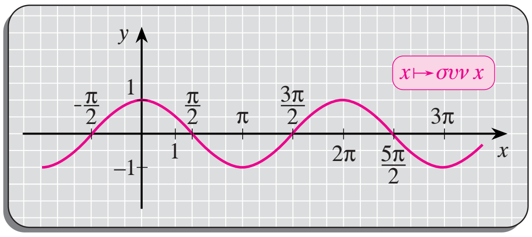


Για τη συνάρτηση ημιτόνου ισχύουν:

- Η συνάρτηση είναι
  - γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, ...
  - γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, ...
- Η γραφική παράστασή της προκύπτει από το τμήμα της στο διάστημα $[0, 2\pi]$ με μετατόπιση κατά μήκος του άξονα $x'x$ από πολλαπλάσια του 2π (περιοδική επανάληψη).
- Το σύνολο τιμών είναι το διάστημα $[-1, 1]$.
- Η γραφική παράσταση είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων O.
- Η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm\, 3\pi, \ldots$.

Η συνάρτηση (συνημιτόνου):

$y = \sigma\upsilon\nu x, \quad x \in \mathbb{R}$



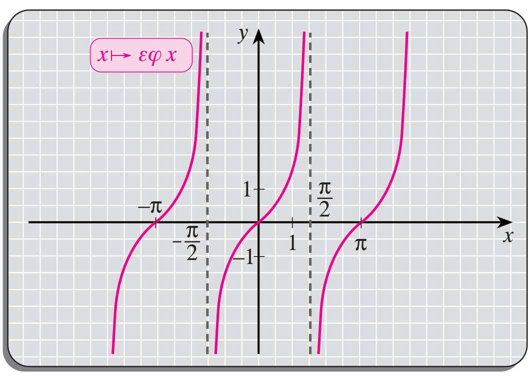
Για τη συνάρτηση συνημιτόνου ισχύουν:

- Η συνάρτηση είναι
  - γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $[0, \pi]$, ...
  - γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $[\pi, 2\pi]$, ...
- Η γραφική παράστασή της προκύπτει από το τμήμα της στο διάστημα $[0, 2\pi]$ με μετατόπιση κατά μήκος του άξονα $x'x$ από πολλαπλάσια του 2π (περιοδική επανάληψη).
- Το σύνολο τιμών είναι το διάστημα $[-1, 1]$.
- Η γραφική παράσταση είναι συμμετρική ως προ τον άξονα $y'y$.

Η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $\pm\frac{1}{2}\pi, \pm\frac{3}{2}\pi, \pm\frac{5}{2}\pi$ ...

Η συνάρτηση εφαπτομένης

$y = \varepsilon\varphi x, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\pm\frac{1}{2}\pi, \pm\frac{3}{2}\pi, \pm\frac{5}{2}\pi \ldots\right\}$



Για τη συνάρτηση εφαπτομένης ισχύουν:

- Η συνάρτηση γνησίως αύξουσα στα διαστήματα από τα οποία αποτελείται το πεδίο ορισμού της, π.χ. $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, ...
- Η γραφική παράσταση αποτελείται από το τμήμα που αντιστοιχεί στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$ και επανάληψή του κατά μήκος του άξονα $x'x$ από πολλαπλάσια του π.
- Το σύνολο τιμών είναι το $\mathbb{R}$.
- Η γραφική παράσταση είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων Ο.