Γ. Ν. ΠΑΝΤΕΛΙΔΗ
ΚΑΘΗΓΗΤΗ Ε.Μ.Πολυτεχνειου

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

ΤΟΜΟΣ III

Β' ΕΚΔΟΣΗ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
ΑΘΗΝΑ 1994

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Ο τόμος αυτός είναι συνέχεια του βιβλίου μου «Μαθηματική Ανάλυση», Τόμος I και II, και περιέχει τον Διαφορικό και Ολοκληρωτικό Λογισμό συναρτήσεων πολλών μεταβλητών: Εισάγεται η τοπολογική δομή των ευκλείδειων χώρων $\mathbb{R}^n$ και δίνονται τα συνήθη συστήματα συντεταγμένων. Η μελέτη των ιδιοτήτων των πραγματικών και διανυσματικών συναρτήσεων γίνεται με τρόπο που είναι προσαρμοσμένος στη σύγχρονη ορολογία και μεθοδολογία. Ο αναγνώστης αποκτά τις κατάλληλες γνώσεις και πληροφορίες αφ' ενός γιατί το απαιτεί η σύγχρονη βιβλιογραφία και πρακτική και αφ' ετέρου γιατί με τον τρόπο αυτό διαφαίνεται η συγγένεια διαφόρων εννοιών, ανεξάρτητα από τη διάσταση του χώρου, π.χ. η συνέχεια και το διαφορικό πραγματικής ή διανυσματικής συναρτήσεως πολλών μεταβλητών.

Σε ειδικά κεφάλαια αναλύονται οι έννοιες της καμπύλης και επιφάνειας, όπως αυτές ορίζονται στην Ανάλυση, και ορίζεται η εφαπτόμενη ευθεία και το εφαπτόμενο επίπεδο. Στοιχεία Διαφορικής Γεωμετρίας παρατίθενται στο Κεφάλαιο X, παρ' όλο ότι η Διαφορική Γεωμετρία δεν ανήκει σε βιβλίο Αναλύσεως. Αυτό έγινε γιατί συνήθως στα Τεχνολογικά Ιδρύματα, στα πλαίσια του μαθήματος του λογισμού συναρτήσεων πολλών μεταβλητών, διδάσκονται τα στοιχεία αυτά της Διαφορικής Γεωμετρίας.

*Στα κεφάλαια **XI-XV** γίνεται εκτενής μελέτη των επικαμπύλιων, διπλών, επιφανειακών, τριπλών και πολλαπλών ολοκληρωμάτων καθώς και των ολοκληρωτικών τύπων, με αναφορά στην ερμηνεία τους από την πλευρά της Φυσικής. Έχει καταβληθεί προσπάθεια ώστε οι προτάσεις να διατυπώνονται στην πιο γενική τους περίπτωση, χωρίς δαιδαλώδεις και εκτεταμένες αποδείξεις, ενώ για την καλύτερη κατανόηση και εμπέδωση αναφέρονται οι ειδικές περιπτώσεις π.χ. ο τύπος του **Green** αποδεικνύεται για απλώς συνεκτικά πεδία ενώ παρατίθεται και η απλή περίπτωση του αστεροειδούς συνόλου. Συνιστούμε στον αναγνώστη, κυρίως στον σπουδαστή, να αποφύγει κατ' αρχήν τη μελέτη δύσκολων και εκτεταμένων αποδείξεων, να εφαρμόσει τις προτάσεις και τις ειδικές περιπτώσεις τους και μετά να μελετήσει τις αποδείξεις αυτές. Στο τέλος του βιβλίου υπάρχει παράρτημα όπου παρατίθενται οι αποδείξεις ορισμένων προτάσεων, που μπορούν να παραληφθούν στην πρώτη ανάγνωση χωρίς να βλάπτεται η συνέχεια της μελέτης του βιβλίου.*

Υπάρχουν και μερικές προτάσεις, που για τις αποδείξεις τους παραπέμπουμε στη βιβλιογραφία, γιατί δεν εξυπηρετούν τους στόχους του βιβλίου.
Για την καλύτερη και εποπτικότερη παρουσίαση ορισμένων εννοιών και προτάσεων παρατίθεται μεγάλος αριθμός σχημάτων και παραδειγμάτων.
Επισημαίνουμε την έννοια των εκφράσεων και των συμβολισμών:

Πρόταση 5.3: η πρόταση 5.3 του παρόντος κεφαλαίου.

Πόρισμα VI.2.5: το πόρισμα 2.5 του κεφαλαίου VI.

Πρόταση (ΙΙ).Χ.6.2: η πρόταση 6.2 του κεφαλαίου Χ του τόμου ΙΙ.

▲ : *τέλος αποδείξεως προτάσεως.*
● : *τέλος παραδείγματος ή παρατηρήσεως.*

Θεωρώ υποχρεώσή μου να ευχαριστήσω τους κ.κ. Δ. Κραββαρίτη, Αναπληρωτή Καθηγητή, Β. Νασόπουλο, επίκουρο Καθηγητή, και Ν. Χατζησάββα, Αναπληρωτή Καθηγητή, για τη διεξοδική ανάγνωση των χειρογράφων, τις υποδείξεις τους και τη συμβολή τους στην άρτια εμφάνιση του τόμου αυτού. Τα σχήματα επιμελήθηκε ο κ. Γ. Καρύδας τον οποίο ευχαριστώ θερμά. Η εξαιρετική εμφάνιση και η κυκλοφορία του τόμου αυτού θα ήταν σχεδόν αδύνατη αν ο εκδοτικός οίκος ΖΗΤΗ δεν αναλάμβανε την έκδοσή του και γι' αυτό τον ευχαριστώ θερμά.

Αθήνα, Ιανουάριος 1989 *Γ.Ν. ΠΑΝΤΕΛΙΔΗΣ*

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VI. **ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ ΚΑΙ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΑ ΕΠΙΠΕΔΑ**

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VII. **ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ. ΤΥΠΟΣ TAYLOR. ΑΚΡΟΤΑΤΑ**

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VIII. **ΠΕΠΛΕΓΜΕΝΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ**

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IX. **ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΗ ΕΞΑΡΤΗΣΗ. ΥΠΕΡΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ**

ΚΕΦΑΛΑΙΟ X. **ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ**

ΚΕΦΑΛΑΙΟ XI. **ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ**

ΚΕΦΑΛΑΙΟ XII. **ΤΟ ΔΙΠΛΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ**

ΚΕΦΑΛΑΙΟ XIII. **ΤΟ ΤΡΙΠΛΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ. ΤΑ ΠΟΛΛΑΠΛΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ**

ΚΕΦΑΛΑΙΟ XIV. **ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ**

ΚΕΦΑΛΑΙΟ XV. **ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ**

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ n- ΔΙΑΣΤΑΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΥ ΧΩΡΟΥ $\mathbb{R}^n$

1. Γενικά

Στην παράγραφο αυτή θα περιγράψουμε τους πραγματικούς γραμμικούς χώρους $\mathbb{R}^n$ και ορισμένες από τις μετρικές τους ιδιότητες, χωρίς απόδειξη. Γενικά, όλα τα στοιχεία που αναφέρονται στη Γραμμική Άλγεβρα δεν θα αποδεικνύονται αλλά θα γίνεται παραπομπή στη σχετική βιβλιογραφία (βλ. [17]).

Έστω ο σταθερός φυσικός αριθμός n. Συμβολίζουμε με $\mathbb{R}^n$ το σύνολο των διατεταγμένων n-άδων $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ από πραγματικούς αριθμούς $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Με παχιά γράμματα θα συμβολίζουμε στοιχεία του $\mathbb{R}^n$, ενώ με απλά γράμματα τους πραγματικούς αριθμούς, π.χ. $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ ενώ $x, y \in \mathbb{R}$. Ειδικότερα στην περίπτωση του $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}^3$ θα γράφουμε $\mathbf{x} = (x, y)$ ή $\mathbf{x} = (x, y, z)$ αντίστοιχα για να αποφύγουμε τους δείκτες.

Για κάθε δύο στοιχεία $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ και $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ του $\mathbb{R}^n$ ορίζουμε το άθροισμα

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} := (x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n)$$

και για κάθε πραγματικό αριθμό a το βαθμωτό πολλαπλασιασμό

$$a\mathbf{x} := (ax_1, ax_2, \ldots, ax_n).$$

Το σύνολο $\mathbb{R}^n$ εφοδιασμένο με τις δύο παραπάνω πράξεις είναι ένας πραγματικός γραμμικός χώρος με το μηδενικό στοιχείο $\mathbf{0}=(0, 0, \ldots, 0)$ και το αντίθετο στοιχείο $-\mathbf{x}=(-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$ του στοιχείου $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Ο χώρος $\mathbb{R}^n$ εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n ,$$

για το οποίο ισχύουν οι ιδιότητες

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} \geq 0 \quad \text{και} \quad \mathbf{x}\cdot\mathbf{x} = 0 \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0},$$
$$(a\mathbf{x})\cdot\mathbf{y} = a\,(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}), \quad a \in \mathbb{R},$$
$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \mathbf{y}\cdot\mathbf{x}$$
$$\mathbf{x}\cdot(\mathbf{y}+\mathbf{z}) = \mathbf{x}\cdot\mathbf{y} + \mathbf{x}\cdot\mathbf{z}$$

είναι ένας πραγματικός ευκλείδειος χώρος.
Με τη βοήθεια, του εσωτερικού γινομένου ορίζεται στον $\mathbb{R}^n$ η ευκλείδεια απόσταση

(1) $$d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

των σημείων **x** και **y**.
Ονομάζουμε ευκλείδεια νορμ[1] ή, όταν δεν υπάρχει περίπτωση συγχύσεως με άλλη νορμ, απλά νορμ την απόσταση του στοιχείου **x** από το στοιχείο **0** και το συμβολίζουμε με $\|\mathbf{x}\|$, δηλ.

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = (\mathbf{x}\cdot\mathbf{x})^{1/2}.$$

Για την ευκλείδεια νορμ ισχύουν

$$\|\mathbf{x}\| \geq 0, \quad \|\mathbf{x}\| = 0 \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad \|a\mathbf{x}\| = |a|\,\|\mathbf{x}\|, \quad a \in \mathbb{R},$$

η τριγωνική ανισότητα

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$$

και η ανισότητα *Schwarz*

$$|\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\| = \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big)^{1/2} \Big(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\Big)^{1/2}$$

Ως γωνία μεταξύ δύο στοιχείων **x** και **y** ($\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$) ορίζεται ο μονοσήμαντα ορισμένος αριθμός $\theta \in [0, \pi]$ για τον οποίο

(2) $$\cos\theta = \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|}.$$

---

1) Ένας γραμμικός χώρος E επί του $\mathbb{R}$ θα ονομάζεται χώρος νορμέ, όταν είναι δυνατόν σε κάθε στοιχείο **x** του E να αντιστοιχίσουμε ένα πραγματικό αριθμό $\|\mathbf{x}\|$, τη νορμ του **x**, τέτοια, ώστε για κάθε $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ και $a \in \mathbb{R}$ να ισχύουν:

$$\|\mathbf{x}\| \geq 0 \quad \text{και} \quad \|\mathbf{x}\| = 0 \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$$
$$\|a\mathbf{x}\| = |a|\,\|\mathbf{x}\|$$
$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \quad \text{(τριγωνική ιδιότητα)}$$

(βλ. [17]).

Ένας τέτοιος ορισμός έχει νόημα γιατί η απόλυτος τιμή του δεύτερου μέλους είναι, σύμφωνα με την ανισότητα *Schwarz*, ≤ 1.

Δύο στοιχεία $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ θα λέμε ότι είναι ορθογώνια, όταν ισχύει $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$.

Ένα σύνολο $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}$ από στοιχεία του $\mathbb{R}^n$ (ακριβώς n σε πλήθος) λέμε ότι αποτελεί μια βάση του $\mathbb{R}^n$, όταν είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και κάθε στοιχείο $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ μπορεί να γραφεί (κατά μοναδικό τρόπο) με τη μορφή

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \dots + x_n\mathbf{a}_n .$$

Οι πραγματικοί αριθμοί $x_1, x_2, \dots, x_n$ ονομάζονται συνιστώσες ή συντεταγμένες του $\mathbf{x}$ ως προς τη βάση $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}$.

Θα ονομάζουμε άξονες του $\mathbb{R}^n$ ως προς τη βάση $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}$ τους μονοδιάστατους υπόχωρους, ευθείες στην περίπτωση του $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}^3$.

$$L_i = \{\, t\,\mathbf{a}_i \;:\; t \in \mathbb{R} \,\}\,, \quad i = 1, 2, \dots, n\,.$$

Τα στοιχεία

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)\,, \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_n = (0, \dots, 0, 1)$$

αποτελούν μια βάση του $\mathbb{R}^n$, που ονομάζεται συνήθης βάση του $\mathbb{R}^n$.

Αν $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ είναι ένα στοιχείο του $\mathbb{R}^n$, τότε οι πραγματικοί αριθμοί $x_1, x_2, \dots, x_n$ είναι συντεταγμένες του $\mathbf{x}$ ως προς τη συνήθη βάση $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$, γιατί μπορούμε να γράψουμε

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_n\mathbf{e}_n .$$

Τα στοιχεία $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ της συνήθους βάσεως του $\mathbb{R}^n$ είναι ανά δύο ορθογώνια και για κάθε $k = 1, 2, \dots, n$ ισχύει $\|\mathbf{e}_k\| = 1$. Για το λόγο αυτό η συνήθης βάση λέμε ότι είναι ορθοκανονική, γεγονός που εκφράζεται από τις ισότητες

$$\mathbf{e}_\nu \cdot \mathbf{e}_k = \begin{cases} 1\,, & \text{αν } \nu = k \\ 0\,, & \text{αν } \nu \neq k \end{cases}, \qquad \nu, k \in \{1, 2, \dots, n\}\,.$$

Στο εξής θα θεωρούμε ότι ο $\mathbb{R}^n$ είναι εφοδιασμένος με τη συνήθη βάση, εκτός αν ρητά αναφέρεται κάτι διαφορετικό. Επομένως οι άξονες του $\mathbb{R}^n$ είναι οι

$$Ox_1 = \{t\,\mathbf{e}_1 = (t, 0, \dots, 0) : t \in \mathbb{R}\}, \quad Ox_2 = \{t\,\mathbf{e}_2 = (0, t, 0, \dots, 0) : t \in \mathbb{R}\}, \dots,$$
$$Ox_n = \{t\,\mathbf{e}_n = (0, \dots, 0, t) : \; t \in \mathbb{R}\}.$$

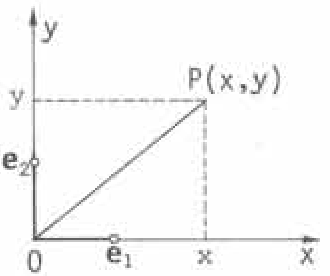
Στο χώρο $\mathbb{R}^2$ (σχ. 1) τα στοιχεία $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ και $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ αποτελούν τη συνήθη βάση του $\mathbb{R}^2$ με άξονες

$$Ox = \{t\,\mathbf{e}_1 = (t, 0) \colon t \in \mathbb{R}\} \quad \text{και} \quad Oy = \{t\,\mathbf{e}_2 = (0, t) \colon t \in \mathbb{R}\}$$

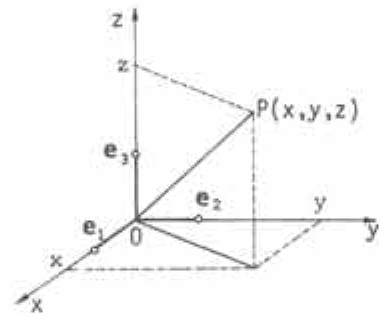
που είναι ευθείες κάθετες μεταξύ τους.
Στο χώρο $\mathbb{R}^3$ (σχ. 2) τα στοιχεία $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$ και $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ αποτελούν τη συνήθη βάση του $\mathbb{R}^3$ με άξονες

$$Ox = \{t\,\mathbf{e}_1 = (t, 0, 0) \colon t \in \mathbb{R}\},\ Oy = \{t\,\mathbf{e}_2 = (0, t, 0) \colon t \in \mathbb{R}\} \quad \text{και}$$
$$Oz = \{t\,\mathbf{e}_3 = (0, 0, t) \colon t \in \mathbb{R}\},$$

που είναι ευθείες κάθετες μεταξύ τους.



Σχ. 1



Σχ. 2

Στον τόμο I (III.9) έχουμε δόσει τον τρόπο που κάθε στοιχείο (x, y) (αντ. (x, y, z)) του $\mathbb{R}^2$ (αντ. $\mathbb{R}^3$) αντιστοιχεί αμφιμονοσήμαντα σε ένα σημείο P του επιπέδου (αντ. του χώρου) και γράφουμε $P\,(x, y)$ (αντ. $P\,(x, y, z)$). Για το λόγο αυτό, γενικεύοντας αυτή την αντιστοιχία, πολλές φορές θα λέμε «ένα σημείο $\mathbf{x}$ του $\mathbb{R}^n$» αντί «ένα στοιχείο $\mathbf{x}$ του $\mathbb{R}^n$».
Σε κάθε σημείο $\mathbf{x}$ του $\mathbb{R}^n$ αντιστοιχίζουμε ένα n-διάστατο διάνυσμα με αρχή το σημείο $\mathbf{0}$ και πέρας το σημείο $\mathbf{x}$, το οποίο θα το συμβολίζουμε με $\vec{\mathbf{x}}$. Το σύνολο των διανυσμάτων αυτών το συμβολίζουμε με Δ^n.
Το Δ^n εφοδιασμένο με το άθροισμα

$$\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{y}} := \overrightarrow{\mathbf{x}+\mathbf{y}}$$

και το βαθμωτό πολλαπλασιασμό

$$\lambda\,\vec{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\lambda\mathbf{x}}\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

αποτελεί πραγματικό γραμμικό χώρο.
Εφοδιάζουμε τον Δ^n με το ε σ ω τ ε ρ ι κ ό γ ι ν ό μ ε ν ο

$$\vec{\mathbf{x}} \cdot \vec{\mathbf{y}} := \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i$$

και τη νορμ

$$\|\vec{\mathbf{x}}\| := \|\mathbf{x}\| ,$$

δηλ. το μέτρο (μήκος) του διανύσματος $\vec{\mathbf{x}}$.

Ο χώρος $\mathbb{A}^n$ είναι επομένως ένας πραγματικός ευκλείδειος χώρος.

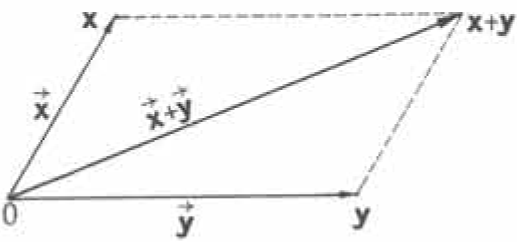
Η απεικόνιση (αντιστοιχία) $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{A}^n$ με

$$T(\mathbf{x}) = \vec{\mathbf{x}} ,$$

όπως διατυπώθηκε παραπάνω είναι αμφιμονοσήμαντη και επί, είναι γραμμική και διατηρεί τις νορμ (μέτρα, μήκη) και τις γωνίες. Είναι, όπως λέμε, ένας ισομετρικός ισομορφισμός. Για το λόγο αυτό ταυτίζουμε τα σημεία $\mathbf{x}$ του $\mathbb{R}^n$ με τα διανύσματα $\vec{\mathbf{x}}$ του $\mathbb{A}^n$, οπότε θα παραλείπουμε ο θέλος πάνω από το $\mathbf{x}$ και μόνο η αναφορά «σημείο» ή «διάνυσμα» θα προσδιορίζει τη φύση του $\mathbf{x}$.

Στο σχ. 3 φαίνεται η γεωμετρική ερμηνεία της πρόσθεσης δυό σημείων $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$ (αντ. διανυσμάτων $\vec{\mathbf{x}}$, $\vec{\mathbf{y}}$) με τη βοήθεια του γνωστού κανόνα του παραλληλογράμμου. Ειδικά για τον $\mathbb{R}^3$ (αντ. $\mathbb{R}^2$) τα διανύσματα $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ (αντ. $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$) συμβολίζονται με

$$\mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} \quad (\text{αντ. } \mathbf{i} , \mathbf{j}),$$



Σχ. 3

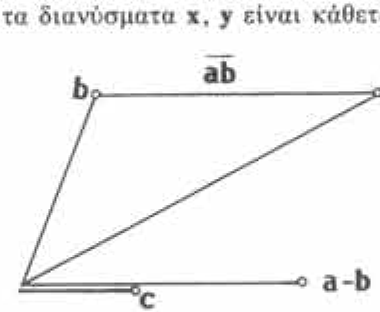
ενώ το διάνυσμα $\mathbf{x}$, που αντιστοιχεί στο σημείο (x, y, z) (αντ. (x, y)), ονομάζεται διάνυσμα θέσεως του σημείου $\mathbf{x}$ και γράφεται συνήθως

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k} \quad (\text{αντ. } \mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}).$$

Στην περίπτωση του $\mathbb{R}^3$ (αντ. $\mathbb{R}^2$) τα σημεία $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ ($\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$) είναι ορθογώνια, όταν, και μόνο όταν, τα διανύσματα $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ είναι κάθετα.

Έστω $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Θα λέμε ότι το ευθύγραμμο τμήμα

$$\overline{\mathbf{ab}} := \{\mathbf{a} + t\,(\mathbf{b}-\mathbf{a}) \in \mathbb{R}^n : 0 \leq t \leq 1\}$$



Σχ. 4

είναι παράλληλο προς το διάνυσμα $\mathbf{c}$, όταν, και μόνο όταν, $\mathbf{a}-\mathbf{b} = \lambda\mathbf{c}$, για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}$ (σχ. 4). Ενώ ένα ευθύγραμμο τμήμα είναι παράλληλο προς τον άξονα Ox_ν, όταν, και μόνο όταν, είναι παράλληλο προς το διάνυσμα $\mathbf{e}_\nu$. Η έκφραση $\mathbf{a} + t(\mathbf{b}-\mathbf{a})$ γράφεται συχνά και στη μορφή $(1-t)\mathbf{a}+t\mathbf{b}$.

Αν $\mathbf{x}_0$ είναι ένα σταθερό σημείο του $\mathbb{R}^n$ και $\mathbf{a}$ ένα στοιχείο του Δ^n, $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, τότε ονομάζουμε ευθεία (ε) του $\mathbb{R}^n$ που περνά από το σημείο $\mathbf{x}_0$ και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\mathbf{a}$ το σύνολο των σημείων

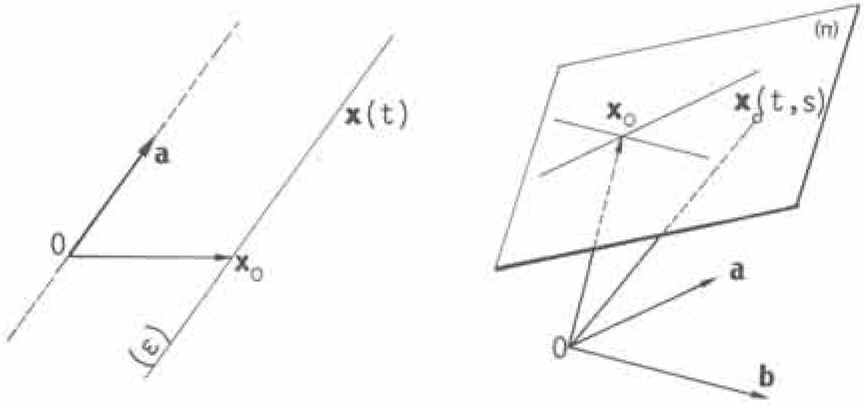
$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + t\,\mathbf{a}\,, \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

του $\mathbb{R}^n$ (σχ. 5).

Αν $\mathbf{x}_0$ είναι ένα σταθερό σημείο του $\mathbb{R}^n$ και $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ είναι δύο γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbb{R}^n$, τότε ονομάζουμε επίπεδο (π) του $\mathbb{R}^n$ που περνά από το σημείο $\mathbf{x}_0$ και είναι παράλληλο προς τα διανύσματα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$ το σύνολο των σημείων

$$\mathbf{x}(t, s) = \mathbf{x}_0 + t\,\mathbf{a} + s\,\mathbf{b}\,, \quad t, s \in \mathbb{R}$$

του $\mathbb{R}^n$ (σχ. 5β).



(α) (β)

Σχ. 5

Γενικά· αν $\mathbf{x}_0$ είναι ένα σταθερό σημείο του $\mathbb{R}^n$ και $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$, $1 \leq k < n$, είναι k γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbb{R}^n$, τότε ονομάζουμε **k-διάστατη πολλαπλότητα** $\mathscr{H}$ του $\mathbb{R}^n$ που περνά από το $\mathbf{x}_0$ και είναι παράλληλο προς τα διανύσματα $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ το σύνολο των σημείων

$$\mathbf{x}(t_1, t_2, \ldots, t_k) = \mathbf{x}_0 + t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \ldots + t_k\mathbf{a}_k\,, \quad t_i \in \mathbb{R},\ i = l, \ldots, k\,,$$

του $\mathbb{R}^n$. Όταν $k = n-1$ η πολλαπλότητα ονομάζεται **υπερεπίπεδο** του $\mathbb{R}^n$. Τις 2-διάστατες (αντ. 1-διάστατες) πολλαπλότητες του $\mathbb{R}^n$ τις ονομάζουμε **επίπεδα** (αντ. **ευθείες**) του $\mathbb{R}^n$.

Ένα διάνυσμα $\mathbf{a}$ θα λέμε ότι είναι παράλληλο προς την πολλαπλότητα

$\mathscr{H}$, όταν, και μόνο όταν, είναι γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$,..., $\mathbf{a}_k$, δηλ.

$$\mathbf{a} = t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \ldots + t_k\mathbf{a}_k .$$

Στην περίπτωση αυτή το διάνυσμα $\mathbf{x}_0 + t\,\mathbf{a}$, που περνά από το $\mathbf{x}_0$ και είναι παράλληλο προς το $\mathbf{a}$, ανήκει στην πολλαπλότητα $\mathscr{H}$ αφού

$$\mathbf{x}_0 + t\,\mathbf{a} = \mathbf{x}_0 + (t\,t_1)\,\mathbf{a}_1 + \ldots + (t\,t_k)\,\mathbf{a}_k .$$

Πάνω στο γραμμικό χώρο $\mathbb{R}^n$ είναι δυνατόν να οριστούν και άλλες νορμ, όπως π.χ.

$$\|\mathbf{x}\|_\infty := \max\{\,|x_1|,\ldots,|x_n|\,\}$$
$$\|\mathbf{x}\|_p := \Big(\sum_{l}^{n} |x_i|^p\Big)^{1/p}, \qquad p \geq 1.$$

Από την τελευταία για $p = 2$ παίρνουμε την ευκλείδεια νορμ. Τονίζουμε ότι οι νορμ $\|\cdot\|_\infty$ και $\|\cdot\|_p$, $p \geq 1$ και $p \neq 2$, δεν μπορούν να προκύψουν από εσωτερικό γινόμενο, όπως η ευκλείδεια νορμ.
Οι επόμενες προτάσεις δίνουν τις σχέσεις μεταξύ των νορμ $\|\mathbf{x}\|$, $\|\mathbf{x}\|_1$, $\|\mathbf{x}\|_\infty$.

Π ρ ό τ α σ η 1 . 1 . Για κάθε $\mathbf{x} = (x_1, x_2,\ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ισχύουν

$$\|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x}\|_1 \leq n\,\|\mathbf{x}\|_\infty$$

και

$$\frac{1}{n}\,\|\mathbf{x}\|_1 \leq \|\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x}\|_1 .$$

Απόδειξη. Είναι άμεση συνέπεια των στοιχειωδών ανισοτήτων

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max\{\,|x_i| : i = 1,\ldots, n\} \leq \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\Big)^{1/2} = \|\mathbf{x}\|$$
$$\|\mathbf{x}\| = \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\Big)^{1/2} \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| = \|\mathbf{x}\|_1$$
$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq n\,\max\{\,|x_i| : i = 1,\ldots, n\} = n\,\|\mathbf{x}\|_\infty .$$

▲

Παρατήρηση. Στην περίπτωση που για δύο νορμ $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|'$ πάνω στο χώρο $\mathbb{R}^n$ υπάρχουν σταθεροί k, $K > 0$ τέτοιοι, ώστε για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ να ισχύει

$$k\,\|\mathbf{x}\|' \leq \|\mathbf{x}\| \leq K\,\|\mathbf{x}\|' ,$$

τότε λέμε ότι οι νορμ είναι ι σ ο δ ύ ν α μ ε ς (βλ. προτ. 2.3). Επομένως, σύμφωνα με την πρόταση 1.1, οι νορμ $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|$ και $\|\cdot\|_1$ είναι ισοδύναμες.

Για τους πεπερασμένης διαστάσεως γραμμικούς χώρους, όπως οι $\mathbb{R}^n$, όλες οι νορμ τους είναι ισοδύναμες. (Αποδείξτε την ισοδυναμία των νορμ $\|\cdot\|_\infty$ και $\|\cdot\|_p$ στον $\mathbb{R}^n$).

Πρόταση 1.2. Έστω $\mathbf{a}=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ **και** $\mathbf{b}=(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\lambda) \in \mathbb{R}^\lambda$. **Τότε υπάρχει** $L > 0$ **τέτοιο, ώστε**

$$\|\mathbf{a}\| \leq L \cdot \|\mathbf{b}\| ,$$

όταν, και μόνο όταν, υπάρχει $K > 0$, **τέτοιο, ώστε**

$$|\alpha_i| \leq \mathrm{K} \sum_{j=1}^{\lambda} |\beta_j|, \quad i = 1, 2, \ldots, n .$$

Απόδειξη: «$\Rightarrow$» Από τις ανισότητες της προτάσεως 1.1 προκύπτουν:

$$|\alpha_i| \leq \|\mathbf{a}\| \leq L\|\mathbf{b}\| \leq L\|\mathbf{b}\|_1 = L \sum_{j=1}^{\lambda} |\beta_j| \cdot \quad i = 1, \ldots, n .$$

«$\Leftarrow$» Από τις ίδιες ανισότητες έχουμε:

$$\|\mathbf{a}\| \leq \|\mathbf{a}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \leq \sum_{i=1}^{n} \Big(K \sum_{j=1}^{\lambda} |\beta_j|\Big) = nK \sum_{j=1}^{\lambda} |\beta_j| = nK\|\mathbf{b}\|_1 \leq$$

$$\leq (nK)\, \lambda\|\mathbf{b}\| = \lambda n\, K\|\mathbf{b}\| = L\|\mathbf{b}\| ,$$

όπου $L = \lambda n\, K$. ▲

Στο εξής με $\mathbb{R}^n$ θα συμβολίζουμε τον ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^n$, δηλ. τον γραμμικό χώρο $\mathbb{R}^n$ εφοδιασμένο με τη νορμ $\|\mathbf{x}\|$.

Αν $I_1, I_2, \ldots, I_n$ είναι διαστήματα του $\mathbb{R}$, τότε ονομάζουμε *διάστημα* του $\mathbb{R}^n$ το σύνολο

$$I = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n .$$

Αν όλα τα διαστήματα I_k είναι ανοικτά (αντ. κλειστά), τότε το διάστημα I ονομάζεται *ανοιχτό* (αντ. *κλειστό*). Τα διαστήματα του $\mathbb{R}^2$ (αντ. $\mathbb{R}^3$) είναι ορθογώνια (αντ. ορθογώνια παραλληλεπίπεδα) με πλευρές (αντ. ακμές) παράλληλες προς τους άξονες (βλ. (Ι).ΙΙΙ.9).

Ονομάζουμε **μέτρο** του διαστήματος I, τον μη-αρνητικό αριθμό $|I| = |I_1| \ldots |I_n|$, όπου $|I_j|$ είναι το μήκος του διαστήματος I_j. Είναι το εμβαδόν (αντ. ο όγκος) στην περίπτωση διαστήματος του $\mathbb{R}^2$ (αντ. $\mathbb{R}^3$).

Γενική Παρατήρηση:

Πολλές φορές ένα στοιχείο $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ του $\mathbb{R}^n$ θα το γράφουμε και στη μορφή πίνακα γραμμής

$$(x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)$$

ή στη μορφή πίνακα στήλης

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

κυρίως όταν θα χρησιμοποιηθεί σε γινόμενο πινάκων.
Θα διατηρούμε και στην περίπτωση αυτή το ίδιο σύμβολο $\mathbf{x}$ ενώ ο ρόλος του θα διαφαίνεται από τη σημασία του και τις εκτελούμενες πράξεις. Π.χ. για την $f(\mathbf{x})$, το $\mathbf{x}$ είναι το στοιχείο $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ενώ για το γινόμενο πινάκων $\mathbf{L}\mathbf{x}$ (αντ. $\mathbf{x}\mathbf{L}$), όπου $\mathbf{L}$ είναι κατάλληλος πίνακας, το $\mathbf{x}$ είναι ο πίνακας $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ (αντ. $(x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)$).

Στο εξής πολλοί ορισμοί, προτάσεις και αποδείξεις θα διατυπώνονται ενιαία για τους χώρους $\mathbb{R}^n$, κυρίως όταν δεν είναι απαραίτητη η αναφορά στις συνιστώσες των στοιχείων. Ο αναγνώστης, ανάλογα με τον επιδιωκόμενο σκοπό, θα θέτει στη θέση του $\mathbb{R}^n$ το $\mathbb{R}^2$ ή $\mathbb{R}^3$. Στις προτάσεις ή στις αποδείξεις, όπου γίνεται χρήση των συνιστωσών των στοιχείων, θα διατυπώνονται ή θα αποδεικνύονται αυτές στην περίπτωση του $\mathbb{R}^2$ ή $\mathbb{R}^3$. Προφανώς οι προτάσεις και οι αποδείξεις ισχύουν και στη γενική περίπτωση του $\mathbb{R}^n$. Ο αναγνώστης μπορεί, ως άσκηση, να κάνει τη γενίκευση αυτή.
Όταν τέλος γράφουμε $\|\mathbf{x}\|$ εννοούμε κάθε φορά τη νορμ του χώρου στον οποίο ανήκει το $\mathbf{x}$.

2. Η τοπολογία των ευκλείδειων χώρων

Στην παράγραφο αυτή θα παραθέσουμε ορισμένες τοπολογικές έννοιες των χώρων $\mathbb{R}^n$, που είναι ανάλογες με τις αντίστοιχες του χώρου των πραγματικών αριθμών.
Έστω ένα σημείο $\mathbf{a}$ του χώρου $\mathbb{R}^n$ και $\varepsilon > 0$. Θα ονομάζουμε ε-περιοχή του σημείου $\mathbf{a}$ και θα το συμβολίζουμε με $B(\mathbf{a}, \varepsilon)$ το σύνολο των σημείων $\mathbf{x}$ του $\mathbb{R}^n$ για τα οποία ισχύει $\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| < \varepsilon$, δηλ.

$$B(\mathbf{a}, \varepsilon) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \ \|x-\mathbf{a}\| < \varepsilon\} .$$

Ενώ με $S(\mathbf{a}, \varepsilon)$ συμβολίζουμε το σύνολο των σημείων $\mathbf{x}$ για τα οποία $\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| = \varepsilon$, δηλ.:

$$S(\mathbf{a}, \varepsilon) := \{\mathbf{x} \in I\!R^n : \ \|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| = \varepsilon\} .$$

Ειδικότερα· για τον R^2 (αντ. $I\!R^3$) και $\mathbf{a} = (\alpha, \beta)$ (αντ. $\mathbf{a} = (\alpha, \beta, \gamma)$) η ε-περιοχή $B(\mathbf{a}, \varepsilon)$ αποτελείται από τα σημεία $(x, y) \in I\!R^2$ (αντ. $(x, y, z) \in I\!R^3$) για τα οποία ισχύει

$$\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2} < \varepsilon \quad (\text{αντ. } \sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2} < \varepsilon) .$$

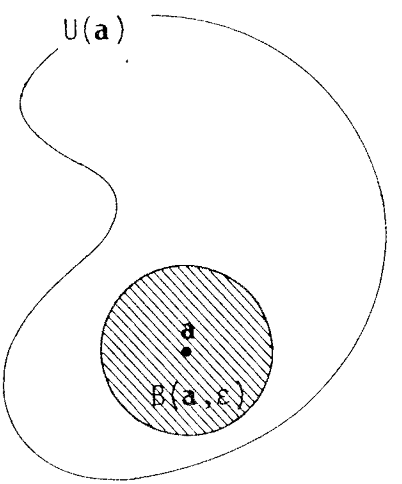
Γενικά στο χώρο R^n η ε-περιοχή $B(\mathbf{a}, \varepsilon)$ του σημείου $\mathbf{a}=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ είναι το σύνολο των σημείων $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ του $I\!R^n$ για τα οποία ισχύει

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i-\alpha_i)^2} < \varepsilon .$$

Ενώ το σύνολο $S(\mathbf{a}, \varepsilon)$ αποτελείται από τα σημεία $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ με

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i-\alpha_i)^2} = \varepsilon .$$

Επομένως στο επίπεδο (αντ. χώρο) η ε-περιοχή είναι το εσωτερικό του κύκλου (αντ. της σφαίρας) με κέντρο $\mathbf{a}$ και ακτίνα ε. Ενώ $S(\mathbf{a}, \varepsilon)$ είναι ο κύκλος και η σφαίρα αντίστοιχα. Για το λόγο αυτό στη γενική περίπτωση τα $B(\mathbf{a}, \varepsilon)$ και $S(\mathbf{a}, \varepsilon)$ ονομάζονται *ανοιχτή σφαίρα* και *επιφάνεια σφαίρας* αντίστοιχα.



Σχ. 6

Ονομάζουμε *περιοχή του* $\mathbf{a}$ και τη συμβολίζουμε με $U(\mathbf{a})$ κάθε υποσύνολο του $I\!R^n$ που περιέχει μια ε-περιοχή του $\mathbf{a}$ (σχ. 6).

Δύο διαφορετικά σημεία $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ του $I\!R^n$ έχουν ε-περιοχές ξένες μεταξύ τους, δηλ. υπάρχουν $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ τέτοια, ώστε

$$B(\mathbf{a}, \varepsilon_1) \cap B(\mathbf{b}, \varepsilon_2) = \emptyset ,$$

Π.χ. για

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{1}{2} \|\mathbf{b}-\mathbf{a}\| .$$

Ένας τέτοιος χώρος, όπου δηλ. δύο στοιχεία χωρίζονται με δύο περιοχές ονομάζεται **χωριζόμενος** ή **χώρος Hausdorff**.