Δ. Χ. Κραββαρίτης Γ. Ν. Παντελίδης

Εισαγωγή στις

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το βιβλίο αυτό αποτελεί μια εισαγωγή στις *Διαφορικές Εξισώσεις Μερικών Παραγώγων* και απευθύνεται, κυρίως, σε σπουδαστές Πολυτεχνικών και Φυσικομαθηματικών Σχολών, οι οποίοι έχουν παρακολουθήσει τα βασικά μαθήματα της Αναλύσεως και των Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων.

Στο *κεφάλαιο 1* γίνεται η μαθηματική μοντελοποίηση φυσικών προβλημάτων, που οδηγεί στις γνωστές Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις (ΜΔΕ) της Μαθηματικής Φυσικής.

Εκτενής μελέτη των γραμμικών και μη γραμμικών μερικών διαφορικών εξισώσεων $1^{ης}$ τάξεως γίνεται στο *κεφάλαιο 2*.

Στο *κεφάλαιο 3* γίνεται η ταξινόμηση των μερικών διαφορικών εξισώσεων $2^{ας}$ τάξεως σε υπερβολικές, παραβολικές και ελλειπτικές και αναπτύσσεται η μεθοδολογία για την αναγωγή τους σε κανονική μορφή.

Στο *κεφάλαιο 4* αναπτύσσεται η θεωρία των σειρών *Fourier*, που είναι ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο στη μελέτη των μερικών διαφορικών εξισώσεων.

Στο *κεφάλαιο 5* επιλύονται, με ***χωρισμό των μεταβλητών***, μονοδιάστατα προβλήματα, όπως της παλλόμενης χορδής, της θερμικής αγωγιμότητάς και της εγκάρσιας ταλάντωσης δοκού. Στη συνέχεια εξετάζονται μονοδιάστατα μη ομογενή προβλήματα.

Προβλήματα ιδιοτιμών *Sturm-Liouville* μελετώνται στο *κεφάλαιο 6*. Η θεωρία που αφορά στα προβλήματα αυτά είναι σημαντική για την επίλυση μερικών διαφορικών εξισώσεων με χωρισμό των μεταβλητών καθώς επίσης στην επίλυση ολοκληρωτικών εξισώσεων.

Στο *κεφάλαιο 7* αναπτύσσεται η τεχνική επίλυσης δισδιάστατων προβλημάτων, όπως της παλλόμενης μεμβράνης, της εξισώσεως θερμότητας και της εξισώσεως *Laplace* σε ορθογώνιο και σε κύκλο, όπου οι συναρτήσεις *Bessel* και η ορθογωνιότητά τους παίζουν ένα σημαντικό ρόλο.

Στο *κεφάλαιο 8*, κάνοντας χρήση της μεθόδου αναπτύγματος σε ιδιοσυναρτήσεις, εξετάζονται μη ομογενή δισδιάστατα προβλήματα σε ορθογώνιο και σε κύκλο.

Στο *κεφάλαιο 9* μελετώνται τρισδιάστατα προβλήματα, που αφορούν στις βασικές εξισώσεις της Μαθηματικής Φυσικής (όπως κυματική, θερμότητας και *Laplace*), σε ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο και σε κυλινδρικά και σφαιρικά πεδία. Εκτός των συναρτήσεων *Bessel* και τα πολυώνυμα *Legendre* και οι ιδιότητες ορθογωνιότητος αυτών παίζουν ιδιαίτερο ρόλο στην μελέτη των προβλημάτων αυτών.

Η έννοια του μετασχηματισμού *Fourier* και οι βασικές ιδιότητές του παρουσιάζονται στο *κεφάλαιο 10*. Στη συνέχεια δίνονται εφαρμογές του σε προβλήματα που ορίζονται σε μη φραγμένα πεδία.

Στο *κεφάλαιο 11* παρουσιάζονται τα σημαντικότερα προβλήματα συνοριακών τιμών. Με τη βοήθεια θεωρημάτων αναπαραστάσεως αποδεικνύονται βασικές ιδιότητες των αρμονικών συναρτήσεων, όπως η αρχή του μεγίστου, η οποία χρησιμοποιείται για την καλή τοποθέτηση του προβλήματος *Dirichlet*. Στη συνέχεια ορίζεται η έννοια της συναρτήσεως Green και δίνονται οι βασικές της ιδιότητες. Με τη βοήθεια της συναρτήσεως αυτής δίνεται η ολοκληρωτική αναπαράσταση της λύσεως του προβλήματος *Dirichlet*. Τέλος, με τη χρήση της μεθόδου των ειδώλων, υπολογίζεται η συνάρτηση *Green* για σφαίρα, ημίχωρο και ημιεπίπεδο.

Εφαρμογές των μετασχηματισμών *Laplace* και *Hankel* σε προβλήματα συνοριακών τιμών, που αφορούν σε μη φραγμένα πεδία δίνονται στο *κεφάλαιο 12*.

Τέλος, στο *κεφάλαιο 13* μελετάται η εξίσωση *Schrödinger,* σημαντική εξίσωση της Κβαντομηχανικής, και δίνεται η λύση α) στην περίπτωση του αρμονικού ταλαντωτή με τη βοήθεια των πολυωνύμων *Hermite* και β) στην περίπτωση του ατόμου του Υδρογόνου με τη βοήθεια των πολυωνύμων *Laguerre.* Με τη βοήθεια του μετασχηματισμού *Fourier* εξετάζεται η εξίσωση του τηλεγράφου.

Στο τέλος κάθε κεφαλαίου υπάρχουν *επιλεγμένες ασκήσεις* για την εμπέδωση της θεωρίας, σε περισσότερες δε από αυτές υπάρχουν οι απαντήσεις στο τέλος του βιβλίου. Παρατίθενται επίσης πίνακες των μετασχηματισμών *Fourier*.

Αθήνα, Φεβρουάριος 2003

Δ. Κραββαρίτης
Γ. Παντελίδης

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κεφάλαιο 4

ΣΕΙΡΕΣ FOURIER

Κεφάλαιο 5

ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ-ΜΕΘΟΔΟΣ ΧΩΡΙΣΜΟΥ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Κεφάλαιο 6

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ STURM-LIOUVILLE

Κεφάλαιο 7

ΔΙΣΔΙΑΣΤΑΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Κεφάλαιο 8

ΜΗ ΟΜΟΓΕΝΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ - ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΝΑΠΤΥΓΜΑΤΟΣ ΣΕ ΙΔΙΟΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Κεφάλαιο 9

ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Κεφάλαιο 10

Ο ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER

Κεφάλαιο 11

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ - ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ GREEN

Κεφάλαιο 12

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ LAPLACE ΚΑΙ HANKEL

Κεφάλαιο 13

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Κεφάλαιο 1

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

1. Γενικά περί διαφορικών εξισώσεων

Σε ένα μεγάλο αριθμό προβλημάτων της Τεχνολογίας και των Φυσικομαθηματικών Επιστημών έχουμε να κάνουμε με *Διαφορικές Εξισώσεις Μερικών Παραγώγων.* Για παράδειγμα, οι παλλόμενες μεμβράνες, το ηλεκτροστατικό δυναμικό φορτισμένου σωματιδίου ή η σταθερότητα των πτερυγίων αεροπλάνων, ο προσδιορισμός κατανομής της πυκνότητας σε ροές (*εξίσωση της συνεχείας*), η κατανομή θερμότητας σε σώματα (*εξίσωση θερμικής αγωγιμότητας*) ή τα ηλεκτρικά και τα μαγνητικά πεδία (*εξισώσεις Maxwell*) μας οδηγούν αναγκαστικά στη θεωρία των μερικών διαφορικών εξισώσεων. Ακόμη κατά την περιγραφή της κυματικής διαδόσεως σε υγρά ή αέρια μέσα, όπως π.χ. στην Ακουστική, συναντάμε τέτοιες εξισώσεις (*εξίσωση κύματος*).

Η θεωρία των μερικών διαφορικών εξισώσεων αποτελεί ένα αρκετά εκτεταμένο πεδίο, στο οποίο βρίσκουν εφαρμογή πολλές και διαφορετικές μέθοδοι, ενώ βρίσκεται στην επικαιρότητα της μαθηματικής έρευνας. Αυτό γίνεται φανερό στην ανάπτυξη των τελευταίων ετών.

Με τον όρο ***μερική διαφορική εξίσωση*** ή ***διαφορική εξίσωση μερικών παραγώγων*** (συντ. **ΜΔΕ**) εννοούμε μια εξίσωση της μορφής

$$F(x,y,...,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},...,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},...)=0. \tag{1.1}$$

Περιέχει τις ανεξάρτητες μεταβλητές $x,y,...,$ την άγνωστη συνάρτηση $u(x,y,...)$ και τις μερικές παραγώγους μέχρι μιας ορισμένης τάξεως. Η μέγιστη τάξη της παραγώγου της u καθορίζει και την τάξη της διαφορικής εξισώσεως. Έτσι για παράδειγμα η εξίσωση

$$F(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y})=0 \quad \text{ή} \quad F(x,y,u,u_x,u_y)=0 \tag{1.2}$$

είναι μια ΜΔΕ 1ης τάξεως των μεταβλητών $(x,y)\in D\subset \mathbf{R}^2$, όπου η F είναι μια πραγματική συνάρτηση 5 μεταβλητών, ενώ η εξίσωση

$$(1.3) \qquad F(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y})=0$$

ή

$$F(x,y,u,u_x,u_y,u_{xx},u_{xy},u_{yy})=0$$

είναι μια ΜΔΕ 2ας τάξεως των μεταβλητών $(x,y)\in D\subset \mathbf{R}^2$, όπου η F είναι μια συνάρτηση 8 μεταβλητών.

Μια συνάρτηση $u=\varphi(x,y,...)$ ορισμένη στο πεδίο D που έχει συνεχείς μερικές παραγώγους και για κάθε $(x,y,...)\in D$ ικανοποιεί την

$$F(x,y,...,\varphi,\varphi_x,\varphi_y,...,\varphi_{xx},\varphi_{xy},\varphi_{yy},...)=0$$

είναι μια ***λύση*** της ΜΔΕ (1.1).

Έτσι, για παράδειγμα η συνάρτηση $\varphi(x,y)=(x+y)^2$ είναι μια λύση της ΜΔΕ $u_x-u_y=0$ και η συνάρτηση $\varphi(x,y)=e^x cosy$ είναι μια λύση της ΜΔΕ $u_{xx}+u_{yy}=0$.

Η γενική λύση μιας συνήθους διαφορικής εξισώσεως n τάξεως είναι μια οικογένεια συναρτήσεων που εξαρτάται από n αυθαίρετες σταθερές. Στην περίπτωση των μερικών διαφορικών εξισώσεων η ***γενική λύση*** εξαρτάται από αυθαίρετες συναρτήσεις. Για να πάρουμε μια ιδέα της γενικής λύσεως θα παραθέσουμε δύο απλά παραδείγματα.

Παράδειγμα 1.1: Η γενική λύση της εξισώσεως $u_y=e^x$ προσδιορίζεται με ολοκλήρωση ως προς y και είναι

$u(x,y)=ye^x+f(x)$, όπου $f(x)$ είναι αυθαίρετη συνάρτηση.■

Παράδειγμα 1.2: Για τη γενική λύση της εξισώσεως $u_{xy}=cosx$, ολοκληρώνουμε ως προς y

$u_x=ycosx+h(x)$, $h(x)$ αυθαίρετη,

και στη συνέχεια ολοκληρώνουμε ως προς x, οπότε έχουμε

$$u(x,y)=ysinx+\int h(x)dx+g(y)=ysinx+f(x)+g(y),$$

όπου οι συναρτήσεις f και g είναι αυθαίρετες των μεταβλητών x και y αντίστοιχα. ■

Το γεγονός ότι η γενική λύση μιας ΜΔΕ εξαρτάται από αυθαίρετες συναρτήσεις είναι μια ένδειξη των δυσκολιών που παρουσιάζονται στη μελέτη των μερικών διαφορικών εξισώσεων. Για το λόγο αυτό, στα περισσότερα προβλήματα αναζητούμε λύσεις, ***μερικές λύσεις***, που ικανοποιούν επιπλέον συνθήκες, όπως *συνοριακές* και/ή *αρχικές συνθήκες.*

Από μια θεωρία λύσεως αναμένουμε απαντήσεις στα εξής ερωτήματα:

1. *Υπάρχει γενικά μια λύση του προβλήματος, ενδεχόμενα κάτω από ποιές προϋποθέσεις; (**Πρόβλημα υπάρξεως).***

2. *Στην περίπτωση υπάρξεως μιας λύσεως, είναι αυτή μονοσήμαντα ορισμένη; (**Πρόβλημα μοναδικότητας**).* Θέλουμε να είμαστε βέβαιοι, ότι δεν έχουμε παραβλέψει κάποια λύση.

3. *Μήπως μικρές αποκλίσεις στις μετρήσεις των αρχικών ή συνοριακών τιμών προκαλούν μικρές επιδράσεις στις λύσεις;* (***Πρόβλημα ευστάθειας***).

Ένα πρόβλημα, στο οποίο απαντώνται θετικά τα παραπάνω ερωτήματα λέμε ότι είναι ***καλά τοποθετημένο***.

Τα παραπάνω ερωτήματα τα έχουμε αντιμετωπίσει και στην περίπτωση των συνήθων διαφορικών εξισώσεων.

Εκτός από τη διευκρίνιση των βασικών αυτών ερωτημάτων ο μηχανικός και ο φυσικομαθηματικός ενδιαφέρεται κυρίως για μεθόδους εύρεσης λύσεων των αντίστοιχων προβλημάτων. Μερικές από τις μεθόδους θα αναπτύξουμε στα επόμενα κεφάλαια.

2. Εξισώσεις της Μαθηματικής Φυσικής

Α. *Η εξίσωση της θερμικής αγωγιμότητας*

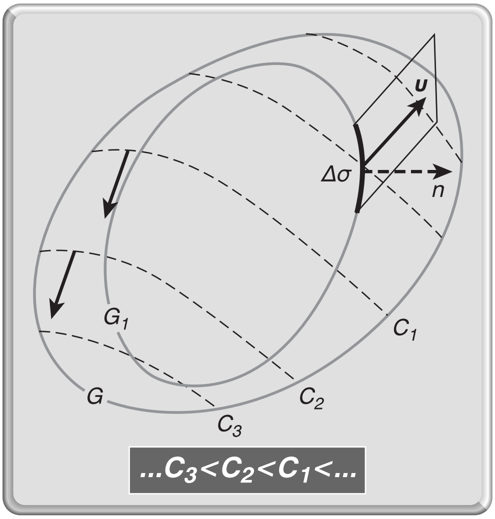
Έστω G ένα πεδίο του τρισδιάστατου χώρου $\mathbf{R}^3$, μέσα στο οποίο υπάρχει ένας αγωγός θερμότητας. Έστω $X=(x,y,z)$ ένα σημείο του πεδίου G και $c(t,X)$, $\delta(t,X)$ και $u(t,X)$ η *αγωγιμότητα* του αγωγού, η *πυκνότητα* του σώματος και η θερμότητα στο σημείο X κατά τη χρονική στιγμή t αντίστοιχα.

Υποθέτουμε ότι για σταθερό t η εξίσωση $u(t,X)=C$(σταθερά) ορίζει μια λεία επιφάνεια, δηλαδή σε κάθε σημείο υπάρχει εφαπτόμενο επίπεδο καθώς και συνεχές κάθετο διάνυσμα (βλ. [8],II,§20.6), την *ισόθερμη επιφάνεια.*

Έστω G_1 ένα υποπεδίο του G και ∂G_1 η επιφάνειά του, την οποία θεωρούμε ότι είναι λεία.

Θεωρούμε τη θερμότητα ως ρευστό, το οποίο κινείται μέσα στο πεδίο G, κάθετα στις ισόθερμες επιφάνειες και προς την κατεύθυνση φθίνουσας θερμότητας u. Για να διαμορφώσουμε την εξίσωση της θερμικής αγωγιμότητας, θα προσεγγίσουμε τη διαφορά θερμότητας στο πεδίο G_1 μεταξύ των χρονικών στιγμών t_1 και t_2 κατά δύο τρόπους:

α) Καταρχήν θα υπολογίσουμε τη διαφορά μεταξύ της θερμότητας που εισρέει στο G_1 και εκείνης που εκρέει από το G_1 μέσω της επιφάνειας ∂G_1 μεταξύ των χρονικών στιγμών t_1 και $t_1+\Delta t$. Θεωρούμε την ταχύτητα ροής ως σταθερά. Προς το σκοπό αυτό υπολογίζουμε το ποσό της θερμότητας που διέρχεται από ένα στοιχείο της επιφάνειας $\Delta\sigma$ του G_1 στο διάστημα $[t_1,t_1+\Delta t]$. Αν συμβολίσουμε με $\mathbf{u}^{(*)}$ την ταχύτητα ροής, τότε η ζητούμενη θερμότητα εκφράζεται από ένα (λοξό) κύλινδρο με βάση $\Delta\sigma$ και γενέτειρα $\|\mathbf{u}\Delta t\|$ και ύψος $\|\mathbf{u}\Delta t\cos(\mathbf{n},\mathbf{u})\|$, όπου $\mathbf{n}$ είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια ∂G_1 (κατευθύνεται προς τα έξω). Υπενθυμίζουμε ότι η ταχύτητα $\mathbf{u}$ είναι κάθετη στην ισόθερμη επιφάνεια που περνά από το σημείο. Επομένως το περιεχόμενο του κυλίνδρου είναι $|\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\Delta t|\,\Delta\sigma$, όπου $\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}=\|\mathbf{u}\|\cos(\mathbf{n},\mathbf{u})$. Υπενθυμίζουμε ακόμη



Σχ. 1

(*) Με έντονα γράμματα θα συμβολίζουμε τα διανύσματα ή τις διανυσματικές συναρτήσεις.

ότι, αν η ταχύτητα **u** κατευθύνεται προς τα έξω (αντ. μέσα), που σημαίνει ότι η θερμότητα ρέει προς τα έξω (αντ. μέσα) στο G_1, τότε $\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}>0$ (αντ. $\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}<0$) αφού η γωνία είναι οξεία (αντ. αμβλεία). Ως συνέπεια αυτών των παρατηρήσεων μπορούμε να πούμε ότι η ποσότητα θερμότητας που εισρέει μέσω της επιφάνειας $\Delta\sigma$ στο χρονικό διάστημα Δt είναι - $\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\ \Delta t\Delta\sigma$ και είναι θετική (αντ. αρνητική), όταν η ταχύτητα **u** κατευθύνεται προς τα μέσα (αντ. έξω).

Επομένως το συνολικό ποσό θερμότητας που διέρχεται από τη συνολική επιφάνεια ∂G_1 στο διάστημα $[t_1,t_2]$ δίνεται από το ολοκλήρωμα

(2.1) $$W_1=-\int_{t_1}^{t_2} dt \iint_{\partial G_1} \mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma\,.$$

β) Το ποσό της θερμότητας που παράγεται (χημικά ή πυρηνικά) στο πεδίο G_1 στο στοιχειώδη όγκο Δv είναι ανάλογο του όγκου και της χρονικής διάρκειας Δt, δηλαδή $q(t,X)\Delta t\Delta v$. Επομένως το συνολικό ποσό θερμότητας που παράγεται στο χρονικό διάστημα $[t_1,t_2]$ είναι

(2.2) $$W_2=\int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_{G_1} q(t,X)\,dv\,,$$

οπότε η θερμότητα που παραμένει στο πεδίο G_1 στο χρονικό διάστημα t_2-t_1 είναι $W=W_1+W_2$.

γ) Για το δεύτερο τρόπο υπολογισμού της ίδιας θερμότητας παρατηρούμε ότι αύξηση θερμότητας ενός στοιχειώδους όγκου Δv κατά το χρονικό διάστημα $[t,t+\Delta t]$ είναι ανάλογη της διαφοράς θερμοκρασίας $u(t+\Delta t,X)$-$u(t,X)$ και του όγκου Δv. Ο παράγοντας αναλογίας είναι το γινόμενο μεταξύ της πυκνότητας και της αγωγιμότητας. Επομένως η ζητούμενη αύξηση είναι

$$\delta(t,X)c(t,X)\big(u(t+\Delta t,X)-u(t,X)\big)\Delta v=(\text{Θεώρ. μέσης τιμής})=$$
$$=\delta(t,X)c(t,X)\,\frac{\partial u}{\partial t}(t+\theta\Delta t,X)\Delta t\Delta v\,,\ 0<\theta<1.$$

Αν το Δt είναι αρκετά μικρό, τότε η τελευταία έκφραση μπορεί να προσεγγιστεί από την

$$\delta(t,X)c(t,X)\,\frac{\partial u}{\partial t}(t,X)\Delta t\Delta v\,,$$

οπότε η συνολική αύξηση για όλο το πεδίο G_1 στο διάστημα $[t_1,t_2]$ προσεγγίζεται από την

(2.3) $$W_3=\int_{t_1}^{t_2}dt\iiint_{G_1}\delta(t,X)c(t,X)\frac{\partial u(t,X)}{\partial t}dv\,.$$

Επομένως η εξίσωση της θερμικής αγωγιμότητας είναι $W_3=W_1+W_2$.

Προτού προχωρήσουμε στη μελέτη της τελευταίας εξισώσεως υπενθυμίζουμε το θεώρημα *Gauss-Ostrogradski* (βλ. [8],II, §29.3) για το πεδίο G_1:

$$\iint_{\partial G_1}\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}d\sigma=\iiint_{G_1}div\mathbf{u}dv\,,$$

όπου

$$\mathbf{u}(t,x,y,z)=u_x(t,x,y,z)\mathbf{i}+u_y(t,x,y,z)\mathbf{j}+u_z(t,x,y,z)\mathbf{k} \text{ και } div\mathbf{u}=\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\,.$$

Για λόγους που αφορούν τη Φυσική ισχύει η ισότητα

$$\mathbf{u}(t,X)=-k(t,X)gradu(t,X) \quad \text{ή} \quad \begin{aligned} u_x&=-k(t,X)\frac{\partial u}{\partial x},\\ u_y&=-k(t,X)\frac{\partial u}{\partial y},\\ u_z&=-k(t,X)\frac{\partial u}{\partial z}\end{aligned}$$

Οι εξισώσεις αυτές δηλώνουν ότι η ταχύτητα κινήσεως της θερμότητας είναι κάθετη στις ισόθερμες, γεγονός που είχαμε λάβει υπόψη μας.

Από τα παραπάνω προκύπτει

(2.4) $$\begin{aligned}W_1&=-\int_{t_1}^{t_2}dt\iint_{\partial G_1}\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}d\sigma=\int_{t_1}^{t_2}dt\iiint_{G_1}div\big(k(t,X)gradu\big)dv=\\ &=\int_{t_1}^{t_2}dt\iiint_{G_1}\left(\frac{\partial k}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial k}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial k}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial z}+k(t,X)\Delta u\right)dv\end{aligned}$$

όπου $\Delta u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ (*τελεστής Laplace*).

Επομένως η εξίσωση της θερμικής αγωγιμότητας παίρνει τη μορφή

(2.5)

$$\int_{t_1}^{t_2}dt\iiint_{G_1}\left\{\frac{\partial k}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial k}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial k}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial z}+k(t,X)\Delta u+q(t,X)-\delta(t,X)c(t,X)\frac{\partial u}{\partial t}\right\}dv=0$$

Υποθέτουμε ότι όλες οι συναρτήσεις που εμφανίζονται στην τελευταία ισότητα είναι συνεχείς ως προς $X=(x,y,z)\in G$ και $t\in[0,T]$. Τότε για κάθε $X=(x,y,z)\in G$ και $t\in[0,T]$ είναι

$$\frac{\partial k}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial k}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial k}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial z}+k(t,X)\Delta u+q(t,X)-\delta(t,X)c(t,X)\frac{\partial u}{\partial t}=0 \text{ ([8]§ 26.5)},$$

που σημαίνει

$$(2.6)\qquad \frac{\partial k}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial k}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial k}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial z}+k(t,X)\Delta u-\delta(t,X)c(t,X)\frac{\partial u}{\partial t}=-q(t,X).$$

Ειδική περίπτωση: Όταν *k=σταθερά, δ=σταθερά* και *c=σταθερά,* τότε η εξίσωση (1.6) παίρνει τη μορφή

$$(2.7)\qquad \frac{\partial u}{\partial t}-a^2\Delta u=f(t,X)\text{ , όπου } X=(x,y,z).$$

Β. ***Η εξίσωση των ηλεκτρικών ταλαντώσεων ή η εξίσωση του τηλεγράφου.***

Έστω $I(t,x)$ και $u(t,x)$ η ***ένταση*** και η ***τάση*** σε έναν αγωγό κατά τη χρονική στιγμή t στο σημείο x. Ο νόμος του *Ohm* στο διάστημα $[x,x+\Delta x]$ του αγωγού δίνει

$$(2.8)\qquad -u_x\,\Delta x=IR\Delta x+I_tL\Delta x,$$

όπου R είναι η *αντίσταση* και L ο *συντελεστής αυτεπαγωγής*, $u_x=\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial x}$ και $I_t=\dfrac{\partial I(t,x)}{\partial t}$.

Το ποσό του ηλεκτρικού φορτίου που παραμένει στο τμήμα αυτό του αγωγού στο χρονικό διάστημα Δt, μεταξύ των t και $t+\Delta t$, είναι

$$-\big(I(t,x+\Delta x)-I(t,x)\big)\Delta t=(\text{Θεώρημα μέσης τιμής})=-\frac{\partial I}{\partial x}(t,x+\theta\Delta x)\Delta t\Delta x\text{ , } 0<\theta<1.$$

Αν το Δx είναι αρκετά μικρό, η τελευταία ποσότητα μπορεί να προσεγγιστεί από την

$$-\frac{\partial I(t,x)}{\partial x}\Delta t\Delta x\,.$$

Το ποσό αυτό του ηλεκτρισμού είναι ίσο με το άθροισμα της απώλειας ηλεκτρισμού (από τα τοιχώματα), που είναι ανάλογο της τάσεως u, του $Gu\Delta t\Delta x$ (G συντελεστής αναλογίας) και του ποσού του ηλεκτρισμού που υπάρχει στο διάστημα Δx, $C\big(u(t+\Delta t,x)-u(t,x)\big)\Delta x,$ το οποίο, όπως και πιο πάνω, προσεγγίζεται από την ποσότητα

$$C\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\Delta t\Delta x.$$

Με τον τρόπο αυτό έχουμε μια δεύτερη εξίσωση μεταξύ της εντάσεως I και της τάσεως u:

$$\frac{\partial I}{\partial x}+C\frac{\partial u}{\partial t}+Gu=0\,, \tag{2.9}$$

η οποία μαζί με την (2.8), την οποία τώρα γράφουμε

$$\frac{\partial u}{\partial x}+L\frac{\partial I}{\partial t}+RI=0\,, \tag{2.10}$$

διαμορφώνουν ένα σύστημα για την u και I. Από το σύστημα αυτό μπορούμε να απαλείψουμε μια από τις άγνωστες, για παράδειγμα την I. Για το σκοπό αυτό παραγωγίζουμε την (2.9) ως προς t και την (2.10) ως προς x, οπότε παίρνουμε το σύστημα:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 I}{\partial x\partial t}+C\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+G\frac{\partial u}{\partial t}=0\\&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+L\frac{\partial^2 I}{\partial x\partial t}+R\frac{\partial I}{\partial x}=0\end{aligned}\,.$$

Απαλείφουμε τον προσθετέο $\frac{\partial^2 I}{\partial x\partial t}$ μεταξύ των εξισώσεων, οπότε παίρνουμε την εξίσωση:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-CL\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-GL\frac{\partial u}{\partial t}+R\frac{\partial I}{\partial x}=0\,. \tag{2.11}$$

Αν λάβουμε υπόψη μας την (2.9), τότε παίρνουμε την ***εξίσωση του τηλεγράφου***:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-CL\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-(GL+CR)\frac{\partial u}{\partial t}-RGu=0\,. \tag{2.12}$$

Η τυπική μορφή της *εξισώσεως του τηλεγράφου* είναι

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\alpha^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+A\frac{\partial u}{\partial t}+Bu=0\,. \tag{2.12}$$

Γ. Η εξίσωση της Υδροδυναμικής και η εξίσωση κύματος.

Θεωρούμε ένα ρευστό, το οποίο κινείται στο χώρο $\mathbf{R}^3$. Έστω P(x,y,z) ένα σημείο του χώρου. Για να περιγράψουμε την κίνηση του ρευστού θα πρέπει να γνωρίζουμε κάθε στιγμή και σε κάθε σημείο P(x,y,z) την ταχύτητά του. Έστω

$$\mathbf{u}(t,x,y,z)=u_x(t,x,y,z)\mathbf{i}+u_y(t,x,y,z)\mathbf{j}+u_z(t,x,y,z)\mathbf{k}$$

το διάνυσμα της ταχύτητας κατά τη χρονική στιγμή t στο σημείο P(x,y,z).

Το υλικό σημείο, το οποίο κατά το χρόνο t βρίσκεται στο σημείο (x,y,z), κατά το χρόνο $t+\Delta t$ θα βρίσκεται στο σημείο του χώρου ($x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$). Με την έννοια αυτή μπορούμε να πούμε ότι οι x,y,z είναι συναρτήσεις του χρόνου, δηλαδή $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ και ότι

$$\begin{aligned} &\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{dx}{dt}=u_x(t,x,y,z)\\ (2.13)\qquad &\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}=\frac{dy}{dt}=u_y(t,x,y,z)\,.\\ &\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t}=\frac{dz}{dt}=u_z(t,x,y,z) \end{aligned}$$

Από τις εξισώσεις αυτές παίρνουμε και τις επιταχύνσεις

$$\begin{aligned} &\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{\partial u_x}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_x}{\partial z}\\ (2.14)\qquad &\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{\partial u_y}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_y}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_y}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_y}{\partial z}\,,\\ &\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{\partial u_z}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_z}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_z}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z} \end{aligned}$$

όπου $u_x=\dfrac{dx}{dt}$, $u_y=\dfrac{dy}{dt}$, $u_z=\dfrac{dz}{dt}$.

Έστω G ένα φραγμένο πεδίο του χώρου $\mathbf{R}^3$, όπου υπάρχει ρευστό, και $\rho(t,x,y,z)$ η πυκνότητα του ρευστού κατά τη χρονική στιγμή t στο σημείο P(x,y,z). Τότε η ποσότητα του ρευστού που βρίσκεται στο πεδίο G κατά τη χρονική στιγμή t είναι (βλ. [8],II, §27.5)

$$Q(t)=\iiint_G \rho(t,x,y,z)dv\text{ , όπου } dv=dxdydz.$$

Κατά τη χρονική στιγμή $t+\Delta t$ η μάζα στο ίδιο πεδίο είναι

$$Q(t+\Delta t)=\iiint_G \rho(t+\Delta t,x,y,z)dv\,.$$

Υποθέτουμε ότι στο πεδίο G δεν υπάρχει πηγή ή καταβόθρα, οπότε η διαφορά $Q(t+\Delta t)-Q(t)$ είναι μόνο εκροή ή εισροή του ρευστού. Αυτή η εκροή-εισροή μπορεί να υπολογιστεί όπως στην περίπτωση της **Α**), και βρίσκουμε

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{Q(t+\Delta t)-Q(t)}{\Delta t}=-\iint_{\partial G}\rho\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}d\sigma\,.$$

Υποθέτουμε ότι οι $\rho(t,x,y,z)$ και $\mathbf{u}(t,x,y,z)$ είναι κατάλληλες ώστε να υπάρχει το επιφανειακό ολοκλήρωμα και η $\rho(t,x,y,z)$ παραγωγίσιμη ως προς t, οπότε από τις τελευταίες ισότητες παίρνουμε:

$$\iiint_G \frac{\partial\rho}{\partial t}dv=-\iint_{\partial G}\rho\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}d\sigma\,.$$

Με τη χρήση του τύπου του *Gauss* η τελευταία ισότητα παίρνει τη μορφή

(2.15) $$\iiint_G\left\{\frac{\partial\rho}{\partial t}+div(\rho\mathbf{u})\right\}dv=0.$$

Και επειδή η (2.15) ισχύει για οποιοδήποτε πεδίο $G\subset\mathbf{R}^3$ και με την προϋπόθεση ότι η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι συνεχής παίρνουμε την ***εξίσωση συνεχείας***

(2.16) $$\frac{\partial\rho}{\partial t}+div(\rho\mathbf{u})=0.$$

Για να πάρουμε την εξίσωση της κινήσεως πρέπει να υπολογίσουμε τις δυνάμεις που ενεργούν στο πεδίο G:

α) Το ρευστό που βρίσκεται εξωτερικά του G πιέζει το ρευστό που βρίσκεται στο εσωτερικό του. Θεωρούμε ότι η πίεση αυτή ενεργεί κάθετα στο εφαπτόμενο επίπεδο στο σημείο αυτό και είναι $p(t,x,y,z)$. Τότε η πίεση σε όλο το πεδίο G δίνεται από το επιφανειακό ολοκλήρωμα:

$$\mathbf{F}_1=-\iint_{\partial G}p(t,x,y,z)\mathbf{n}d\sigma=$$ (Ολοκληρωτικός τύπος κατά *grad*, βλ.[8], §29.4)

$$=-\iiint_G grad p\, dv\,,$$

όπου **n** το εξωτερικό μοναδιαίο διάνυσμα.

Σημείωση: Τα ρευστά, τα οποία έχουν την ιδιότητα η πίεση σ΄ ένα σημείο P να είναι κάθετη στο εφαπτόμενο επίπεδο στο P ονομάζονται *πραγματικά ρευστά.*

β) Σε κάθε σημείο ενός υποπεδίου του G ενεργεί μια δύναμη ανάλογη της μάζας του υποπεδίου και μιας μοναδιαίας δυνάμεως $\mathbf{F}=F_x\mathbf{i}+F_y\mathbf{j}+F_z\mathbf{k}$, οπότε η δύναμη που ενεργεί πάνω στο G είναι

$$\mathbf{F}_2=\iiint_G \rho\mathbf{F}dv .$$

γ) Πάνω στο G ενεργούν οι δυνάμεις αδρανείας, οι οποίες είναι ανάλογες της επιταχύνσεως και της μάζας, οπότε

$$\mathbf{F}_3=-\iiint_G \rho\frac{d\mathbf{u}}{dt}dv .$$

Το αποτέλεσμα των δυνάμεων αυτών πρέπει, σύμφωνα με τους νόμους της Μηχανικής, να είναι μηδέν, που σημαίνει

$$\iiint_G \left\{\rho\frac{d\mathbf{u}}{dt}+gradp-\rho\mathbf{F}\right\}dv=0.$$

Όταν η συνάρτηση της αγκύλης είναι συνεχής, τότε, όπως και στα προηγούμενα παραδείγματα, ισχύει

(2.17) $$\rho\frac{d\mathbf{u}}{dt}+gradp-\rho\mathbf{F}=0.$$

Επομένως οι εξισώσεις της κινήσεως θα πρέπει να προκύψουν από τη βαθμωτή εξίσωση (2.16) και τη διανυσματική εξίσωση (2.17), οι οποίες δίνουν ένα σύστημα τεσσάρων εξισώσεων με άγνωστες συναρτήσεις τις u_x, u_y, u_z, p και ρ. Υποθέτουμε ακόμη ότι μεταξύ των p και ρ υφίσταται μια σχέση

(2.18) $$p=\varphi(\rho),$$

η οποία είναι η *καταστατική εξίσωση* του ρευστού.

Έχουμε λοιπόν τις πέντε εξισώσεις με πέντε αγνώστους

(2.19)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \dfrac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \dfrac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \dfrac{\partial u_x}{\partial z} = F_x - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \dfrac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \dfrac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \dfrac{\partial u_y}{\partial z} = F_y - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \dfrac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \dfrac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \dfrac{\partial u_z}{\partial z} = F_z - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + u_x \dfrac{\partial \rho}{\partial x} + u_y \dfrac{\partial \rho}{\partial y} + u_z \dfrac{\partial \rho}{\partial z} + \rho\left(\dfrac{\partial u_x}{\partial x} + \dfrac{\partial u_y}{\partial x} + \dfrac{\partial u_z}{\partial x} \right) = 0 \\ p = \varphi(\rho) \end{cases}.$$

Κάνουμε την υπόθεση ότι οι συνιστώσες της ταχύτητος **u** και οι παράγωγοί τους ως προς *x, y* και *z* είναι αρκετά μικρές, ώστε το γινόμενο δύο τέτοιων να είναι αμελητέο και μπορεί να παραλειφθεί (Αυτό βέβαια πρέπει να αποδειχθεί με τη βοήθεια του τύπου *Taylor*). Μια δεύτερη υπόθεση είναι ότι οι συναρτήσεις p και ρ έχουν μικρές αποκλίσεις από τις σταθερές τιμές p_o και ρ_o. Αυτό σημαίνει ότι, αν $p=p_o+\overline{p}$, $\rho=\rho_o+\overline{\rho}$, τότε τα $\overline{p}$ και $\overline{\rho}$ και οι παράγωγοί τους είναι τόσο μικρές, ώστε τα γινόμενα $\overline{p}\cdot\overline{\rho}$, $\overline{p}\dfrac{\partial \rho}{\partial x}$, ..., $\overline{p}\dfrac{\partial u_x}{\partial x}$,... μπορούν να παραλειφθούν. Στην περίπτωση αυτή και με την προϋπόθεση ότι η συνάρτηση φ είναι και παραγωγίσιμη συνάρτηση το σύστημα (2.19) παίρνει τη μορφή:

(2.20)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_x}{\partial t} = F_x - \dfrac{1}{\rho_o}\dfrac{\partial \overline{p}}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u_y}{\partial t} = F_y - \dfrac{1}{\rho_o}\dfrac{\partial \overline{p}}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u_z}{\partial t} = F_z - \dfrac{1}{\rho_o}\dfrac{\partial \overline{p}}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \overline{\rho}}{\partial t} + \rho_o\left(\dfrac{\partial u_x}{\partial x} + \dfrac{\partial u_y}{\partial y} + \dfrac{\partial u_z}{\partial z} \right) = 0 \\ p_o + \overline{p} = \varphi(\rho_o + \overline{\rho}) = \varphi(\rho_o) + \overline{\rho}\varphi'(\rho_o + \theta\overline{\rho}) \end{cases}, \text{ όπου } 0<\theta<1.$$

Επειδή $p_o=\varphi(\rho_o)$ και επειδή μπορούμε να παραλείψουμε την ποσότητα $\theta\overline{\rho}$ η τελευταία εξίσωση παίρνει τη μορφή $\overline{p} = \overline{\rho}\varphi'(\rho_o)$. Συμβολίζουμε ακόμη $\varphi'(\rho_o)=a^2$ και $s = \dfrac{\overline{\rho}}{\rho_o} = \dfrac{\rho - \rho_o}{\rho_o}$, οπότε το σύστημα παίρνει τη μορφή:

$$(2.21)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \upsilon_x}{\partial t} = F_x - \alpha^2 \dfrac{\partial s}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \upsilon_y}{\partial t} = F_y - \alpha^2 \dfrac{\partial s}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \upsilon_z}{\partial t} = F_z - \alpha^2 \dfrac{\partial s}{\partial z} \\ \dfrac{\partial s}{\partial t} + \dfrac{\partial \upsilon_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \upsilon_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \upsilon_z}{\partial z} = 0 \\ \overline{p} = \alpha^2 \overline{\rho} \end{cases} .$$

Παραγωγίζουμε την 1η ως προς x, την 2η ως προς y και την 3η ως προς z, προσθέτουμε τις εξισώσεις που προέκυψαν και τη θέτουμε στην τελευταία εξίσωση, οπότε παίρνουμε

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \upsilon_x}{\partial x} + \frac{\partial \upsilon_y}{\partial y} + \frac{\partial \upsilon_z}{\partial z}\right) = -\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} - \alpha^2\left(\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2}\right).$$

Αν συμβολίσουμε με $-f(t,x,y,z) = \dfrac{\partial F_x}{\partial x} + \dfrac{\partial F_y}{\partial y} + \dfrac{\partial F_z}{\partial z}$, τότε η τελευταία εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$(2.22)\qquad \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} - \alpha^2 \Delta s = f(t,x,y,z),$$ όπου Δ είναι ο *τελεστής Laplace*.

Η εξίσωση (2.22) ονομάζεται ***εξίσωση κύματος.*** Αν κατά κάποιο τρόπο γνωρίζουμε τη συνάρτηση s, τότε μπορούμε από το σύστημα (2.21) με ολοκλήρωση ως προς x, y, z να υπολογίσουμε τις συνιστώσες υ_x, υ_y, υ_z και με μια ακόμη ολοκλήρωση τα x, y, z από τις

$$\frac{dx}{dt} = \upsilon_x, \quad \frac{dy}{dt} = \upsilon_y, \quad \frac{dz}{dt} = \upsilon_z .$$

Πρώτη ειδική περίπτωση**: **Παλλόμενη Μεμβράνη. Δεχόμαστε ότι πάνω σε επίπεδο παράλληλο προς τον z-άξονα η πυκνότητα, η πίεση και οι συνιστώσες της ταχύτητος είναι ανεξάρτητες από το z. Αυτό σημαίνει ότι η ενεργώς δύναμη **F** και οι άλλες συνθήκες είναι τέτοιες, ώστε οι λύσεις υ_x, υ_y, υ_z, p και ρ να είναι ανεξάρτητες από το z. Από την εξίσωση (2.22) προκύπτει ότι και η f πρέπει να είναι ανεξάρτητη από το z, οπότε αυτή γράφεται:

(2.23) $$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} - \alpha^2 \Delta s = f(t,x,y) \quad \text{ή} \quad \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} - \alpha^2\left(\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2}\right) = f(t,x,y)$$

Στην ίδια εξίσωση οδηγεί και το ακόλουθο πρόβλημα:

Θεωρούμε μια μεμβράνη, η οποία ταυτίζεται, σε κατάσταση ηρεμίας, με ένα πεδίο D του επιπέδου Oxy. Υποθέτουμε ότι:

α) Κατά μια αρχική στιγμή $t=t_o$ η μεμβράνη έχει τη μορφή μιας επιφάνειας $u=\varphi_o(x,y)$ και σε κάθε σημείο P(x,y) προκαλούμε ένα αρχικό παλμό $\varphi_1(x,y)$ κάθετο στο επίπεδο Oxy.

β) Σε κάθε χρονική στιγμή t και σε κάθε σημείο P(x,y) ενεργεί μια δύναμη κάθετη στο επίπεδο Oxy με μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{F}(t,x,y)$.

γ) Οι αρχικές συνθήκες, που δόθηκαν με τις $\varphi_o(x,y)$ και $\varphi_1(x,y)$ και η δύναμη $\mathbf{F}(t,x,y)$ είναι τέτοιες, ώστε η κίνηση της μεμβράνης να λαμβάνει χώρα κάθετα στην κατάσταση ηρεμίας, που σημαίνει ένα σημείο P$(x,y)\in D$ κινείται μόνο πάνω σε μια παράλληλη προς τον z-άξονα. Ονομάζουμε *απόκλιση* την απόσταση, την οποία συμβολίζουμε με u, μεταξύ της θέσεως του σημείου P της μεμβράνης κατά τη στιγμή t και της θέσεως ηρεμίας. Επομένως η απόκλιση είναι συνάρτηση του χρόνου t και της θέσεως ηρεμίας (x,y), δηλαδή $u=u(t,x,y)$.

Η εξίσωση που δίνει το u είναι

(2.24) $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \alpha^2 \Delta u = f(t,x,y), \quad \text{όπου} \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

δηλαδή η ίδια εξίσωση με την (2.22). Οι συνθήκες που έχουμε διατυπώσει στην α) μας οδηγούν στις

$$u(0,x,y)=\varphi_o(x,y) \quad \text{και} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x,y) = \varphi_1(x,y).$$

Δεύτερη ειδική περίπτωση*: *Παλλόμενη Χορδή. Στη δεύτερη αυτή ειδική περίπτωση υποθέτουμε ότι, κατα μήκος κάθε παράλληλης προς τον x-άξονα, η πίεση, η πυκνότητα και οι συνιστώσες της ταχύτητος ως συνέπειες της ενεργούσης δυνάμεως είναι μόνο συναρτήσεις της μεταβλητής x (δηλαδή, είναι ανεξάρτητες των y,z). Τότε η εξίσωση (2.22) παίρνει τη μορφή:

(2.25) $$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} - \alpha^2 \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = f(t,x).$$

Στην ίδια εξίσωση μας οδηγεί το πρόβλημα της παλλόμενης χορδής, που είναι παρόμοιο με το πρόβλημα της παλλόμενης μεμβράνης, όπου αντικαθιστούμε το πεδίο D του Oxy με το διάστημα $[\alpha,\beta]$ του x-άξονα. Έτσι για την απόκλιση $u=u(t,x)$ παίρνουμε την εξίσωση

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(t,x), \tag{2.26}$$

η οποία έχει πολλές ομοιότητες με την εξίσωση του τηλεγράφου (2.12).

Δ. Οι εξισώσεις Maxwell για ηρεμούντα σώματα

Έστω G πεδίο του χώρου με ηλεκτρομαγνητικές ιδιότητες, οι οποίες χαρακτηρίζονται από τη *διηλεκτρική σταθερά* ε, τη *μαγνητική διαπερατότητα* μ και την αγωγιμότητα σ και έστω

- $\mathbf{H}=(H_x, H_y, H_z)$ το διάνυσμα του μαγνητικού πεδίου,
- $\mathbf{E}=(E_x, E_y, E_z)$ το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου,
- $\mathbf{i}=(i_x, i_y, i_z)$ το διάνυσμα της ηλεκτρικής πυκνότητας,
- $\mathbf{E}^{(e)}=\left(E_x^{(e)}, E_y^{(e)}, E_z^{(e)}\right)$ το διάνυσμα των επενεργουσών δυνάμεων,
- $\mathbf{D}=(D_x, D_y, D_z)$ το διάνυσμα μετατόπισης,
- $\mathbf{B}=(B_x, B_y, B_z)$ το διάνυσμα της μαγνητικής επαγωγής και
- ρ η ηλεκτρική πυκνότητα φόρτισης.

Ως συνέπεια των επενεργουσών δυνάμεων, της αρχικής καταστάσεως και ορισμένων αρχικών συνθηκών το πεδίο G βρίσκεται σε ηλεκτρομαγνητική κατάσταση, η οποία χαρακτηρίζεται από τα διανύσματα **H, E, i, D, B.** Αυτά τα διανύσματα είναι συνδεδεμένα μεταξύ τους με τις ***εξισώσεις Maxwell***, οι οποίες είναι:

$$\begin{cases} rot\mathbf{H} = \dfrac{4\pi}{c}\mathbf{i} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \\ rot\mathbf{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ div\mathbf{D} = 4\pi\rho, \\ div\mathbf{B} = 0, \\ \mathbf{i} = \sigma\left(\mathbf{E} + \mathbf{E}^{(e)}\right), \\ \mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}, \\ \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}. \end{cases} , \tag{2.27}$$

(c είναι σταθερά, η ταχύτητα του φωτός).
Οι τρεις τελευταίες ισότητες ισχύουν μόνο σε ισότροπα και μη σιδηρομαγνητικά σώματα.

Υπενθυμίζουμε ακόμη ότι, για τη βαθμωτή συνάρτηση $f(x,y,z)$ και τη διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{F}(x,y,z)=(P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z))$, στο καρτεσιανό σύστημα ισχύουν οι ισότητες (βλ. [8],II, §29.1):

$$grad f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right),\quad div\mathbf{F}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z},\quad rot\mathbf{F}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\ \frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

Μεταξύ των διανυσμάτων αυτών ισχύουν οι σχέσεις:

$$(*)\qquad \begin{cases} rot(rot\mathbf{F})=-\Delta\mathbf{F}+grad(div\mathbf{F}) \\ div(grad f)=\Delta f \\ div(rot\mathbf{F})=0 \\ rot(grad f)=0 \end{cases}.$$

Είναι ενδιαφέρον να δώσουμε ορισμένες ειδικές περιπτώσεις των *εξισώσεων Maxwell*:

I. Υποθέτουμε ότι το πεδίο G είναι ένα κενό, οπότε $\varepsilon=\mu=1$ και $\sigma=0$. Τότε το σύστημα (2.27) γίνεται:

$$(2.28)\qquad \begin{cases} (\alpha)\ c\cdot rot\mathbf{H}=\dfrac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \\ (\beta)\ c\cdot rot\mathbf{E}=-\dfrac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} \\ (\gamma)\ div\mathbf{H}=0 \\ (\delta)\ div\mathbf{E}=4\pi\rho=0 \\ (\varepsilon)\ \mathbf{i}=\mathbf{0},\ \mathbf{D}=\mathbf{E},\ \mathbf{B}=\mathbf{H} \end{cases}.$$

Αν παραγωγίσουμε την (α) ως προς t, τότε παίρνουμε:

$$(2.29)\qquad \frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}=c^2\cdot\Delta\mathbf{E},$$

όπου $c\cdot rot\left(\dfrac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}\right)=(\beta)=-c^2\cdot rot(rot\mathbf{E})=c^2\cdot\left(\Delta\mathbf{E}-grad(div\mathbf{E})\right)=(\delta)=c^2\cdot\Delta\mathbf{E}$, ή με τη βοήθεια των συνιστωσών

(2.30) $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} = c^2 \Delta E_x \\ \dfrac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} = c^2 \Delta E_y \\ \dfrac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} = c^2 \Delta E_z \end{cases} ,$$

που σημαίνει ότι στην περίπτωση του κενού οι συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου ικανοποιούν την εξίσωση κύματος.

II. Θεωρούμε ακόμη την περίπτωση $\mathbf{E}^{(e)}=\mathbf{0}$ και ε, μ, σ σταθερές. Παίρνουμε την περιστροφή αμφοτέρων των μελών της πρώτης εξισώσεως του συστήματος (2.27)

$$rot(rot\mathbf{H}) = \frac{4\pi}{c} rot\mathbf{i} + \frac{1}{c} rot\left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right) = \frac{4\pi}{c} rot(\sigma\mathbf{E}) + \frac{\varepsilon}{c} rot\left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right).$$

Αν λάβουμε υπόψη μας τις ισότητες (*) και τις (2.27), τότε έχουμε

$$-\Delta\mathbf{H} + grad(div\mathbf{H}) = -\frac{4\pi\sigma}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial}{\partial t}(rot\mathbf{E}) = -\frac{4\pi\sigma}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2},$$

και επειδή $div\mathbf{H}=0$ η ισότητα παίρνει τη μορφή

(2.31) $$\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} + \frac{4\pi\sigma}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \Delta\mathbf{H}.$$

Μπορούμε ακόμη να παραλείψουμε τον όρο $\dfrac{4\pi\sigma}{c}\dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$ επειδή το σ είναι πολύ μικρό ως προς το c και συμβολίζοντας με $\alpha^2 = \dfrac{c^2}{\varepsilon\mu}$, τότε παίρνουμε την εξίσωση

(2.32) $$\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = \alpha^2 \Delta\mathbf{H},$$

που σημαίνει ότι κάθε συνιστώσα του **H** ικανοποιεί την εξίσωση κύματος.

Αν ακόμη παραλείψουμε το $\varepsilon\mu$ ως προς c^2, τότε απομένει η εξίσωση:

(2.33) $$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \beta^2 \Delta\mathbf{H}, \text{ όπου } \beta^2 = \frac{c}{4\pi\sigma},$$

η οποία είναι μια εξίσωση όμοια εκείνης της θερμικής αγωγιμότητας (2.7).

Με ανάλογο τρόπο παίρνουμε την εξίσωση

(2.34) $$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \alpha^2 \Delta \mathbf{E}$$ στην πρώτη περίπτωση και

(2.35) $$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \beta^2 \Delta \mathbf{E}$$ στη δεύτερη περίπτωση.

Ανάλογα, όταν $\mathbf{E}^{(e)} \neq \mathbf{0}$ αντί της (2.31) παίρνουμε για το **E** μια εξίσωση της μορφής

(2.36) $$\alpha^2 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \beta^2 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \Delta \mathbf{E} + f(t,x,y,z)$$

και όταν το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο μεταβάλλεται μόνο κατά τη διεύθυνση του x-άξονα, τότε παίρνει τη μορφή

(2.37) $$\alpha^2 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \beta^2 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} = f(t,x)$$ (η εξίσωση του τηλεγράφου).

Ε. Η εξίσωση Schrödinger

Στην Κβαντομηχανική η κατάσταση ενός στοιχειώδους σωματιδίου περιγράφεται από την *εξίσωση Schrödinger*:

(2.38) $$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar}{2\mu} \Delta \psi + V(t,x,y,z)\psi, \quad i = \sqrt{-1}\,,$$

όπου

- $V(t,x,y,z)$ είναι η δυναμική ενέργεια,
- $\hbar$ είναι η *σταθερά Planck* ($=1{,}05 \cdot 10^{-27} erg \cdot sec$)
- μ η μάζα του σωματιδίου,
- t η συντεταγμένη του χρόνου,
- x, y, z οι χωρικές συντεταγμένες και

ψ είναι η συνάρτηση του κύματος, η οποία είναι τέτοια, ώστε η πιθανότητα το στοιχειώδες σωματίδιο κατά το χρόνο t να βρίσκεται στο πεδίο G να είναι $\iiint_G |\psi|^2 \,dxdydz$. Επειδή το σωματίδιο βρίσκεται οπωσδήποτε στο χώρο $\mathbf{R}^3$ έχουμε $\iiint_{\mathbf{R}^3} |\psi|^2 \,dxdydz = 1$.

Όπως βλέπουμε η εξίσωση (2.38) είναι εντελώς παρόμοια με την εξίσωση της θερμικής αγωγιμότητος (2.7).

Ζ. Στατικά φαινόμενα

α) Στην εξίσωση της θερμικής αγωγιμότητος (2.7) θεωρούμε την περίπτωση που η πηγή, η εξωτερική επίδραση και η συνάρτηση u, δηλαδή η θερμοκρασία, δεν εξαρτάται από το χρόνο αλλά μόνο από τις χωρικές συντεταγμένες x, y, z. Μια τέτοια κατάσταση ονομάζεται ***στατική***. Η εξίσωση (2.7) παίρνει τη μορφή

(2.39) $\Delta u = f(x,y,z).$

β) Σε μια παρόμοια εξίσωση μετατρέπεται η εξίσωση κύματος (2.22), όταν η s είναι ανεξάρτητη του χρόνου t και εξαρτάται μόνο από τη θέση:

(2.40) $\Delta s = f_1(x,y,z),$ όπου $f_1 = -\dfrac{1}{\alpha^2} f$

Όπως είναι φανερό είναι σημαντικό στο σύστημα *Maxwell*, όταν τα διανύσματα **B, D, E, H** και η συνάρτηση ρ είναι ανεξάρτητες του t.