ΓΕΩΡΓΙΟΥ Ν. ΠΑΝΤΕΛΙΔΗ
ΚΑΘΗΓΗΤΗ Ε.Μ. ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ

ΑΝΑΛΥΣΗ

ΤΟΜΟΣ II

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ

Κάθε γνήσιο αντίτυπο φέρει την υπογραφή του συγγραφέα

ISBN set 960-431-658-3
ISBN τ.ΙΙ 960-431-657-5

www.ziti.gr

Φωτοστοιχειοθεσία
Εκτύπωση

Π. ΖΗΤΗ & Σια ΟΕ
18ο χλμ Θεσ/νίκης-Περαίας
Τ.Θ. 171 • Νέοι Επιβάτες Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19
Τηλ.: 03920 72.222 (5 γραμ.) - Fax: 03920 72.229
e-mail: info@ziti.gr

Βιβλιοπωλείο

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
Αρμενοπούλου 27 • 546 35 Θεσσαλονίκη
Τηλ. 0310 203.720, Fax 0310 211.305
e-mail: sales@ziti.gr

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Στον τόμο αυτό, ***ΑΝΑΛΥΣΗ* ΙΙ,** που αποτελεί συνέχεια του τόμου ***ΑΝΑΛΥΣΗ* Ι,** γίνεται εντονότερα κατανοητό ότι ***η υψηλή Τεχνολογία είναι μαθηματική Τεχνολογία*** και ως εκ τούτου δεν μπορεί να υπάρξει σημαντική Τεχνολογική εξέλιξη χωρίς τη βαθύτερη γνώση των Μαθηματικών.

Ο τόμος ***ΑΝΑΛΥΣΗ* ΙΙ** περιέχει κυρίως το *Διαφορικό και Ολοκληρωτικό Λογισμό πολλών μεταβλητών.*

Σε όλο το βιβλίο όταν χρησιμοποιούμε σχέσεις, προτάσεις και έννοιες που αναφέρονται στον τόμο ***ΑΝΑΛΥΣΗ* Ι** δεν τις σχολιάζουμε, γιατί θεωρούμε ότι είναι γνωστές. Παραθέτουμε πολλά λυμένα παραδείγματα, που η γνώση τους είναι απαραίτητη για την κατανόηση της ύλης. Στο τέλος ορισμένων κεφαλαίων υπάρχουν παραρτήματα (με σκιασμένο περιθώριο), όπου παρατίθενται αποδείξεις και σχόλια, που θεωρούμε ότι δεν είναι απαραίτητα σε πρώτη ανάγνωση και ενδιαφέρουν εκείνους που θα ήθελαν να εμβαθύνουν στα περιεχόμενα του αντίστοιχου κεφαλαίου.

Η έννοια του n-διάστατου Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^n$, η τοπολογία του και η σύγκλιση των ακολουθιών του μελετάται στο Κεφ. 16 κατά τέτοιο τρόπο, ώστε ο αναγνώστης να “αναγνωρίζει” τη φυσική επέκταση των αντίστοιχων εννοιών του συνόλου των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$. Τα συστήματα συντεταγμένων στο επίπεδο και στο χώρο αναλύονται στο Κεφ. 17.

Στο Κεφ. 18 γίνεται η μελέτη των πραγματικών και διανυσματικών συναρτήσεων (όριο, συνέχεια). Για να αποφύγουμε περίπλοκες εκφράσεις και να διατρέξουμε τον κίνδυνο να μη γίνουν κατανοητοί οι μαθηματικοί συλλογισμοί περιορίσαμε τη μελέτη στους χώρους $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}^3$, ενώ, όταν είναι απαραίτητο, παρατίθενται οι προτάσεις και οι ιδιότητες στη γενική περίπτωση.

Η διαφορισιμότητα συναρτήσεων πολλών μεταβλητών μελετάται στο Κεφ. 19 με παρουσίαση των προτάσεων κυρίως για συναρτήσεις δύο ή τριών μεταβλητών. Στο παράρτημα του κεφαλαίου αυτού παρατίθενται οι γενικές περιπτώσεις. Στο Κεφ. 20 αναλύονται οι έννοιες της καμπύλης και της επιφάνειας, όπως αυτές ορίζονται στην Ανάλυση, και ορίζεται η εφαπτομένη ευθεία και το εφαπτόμενο επίπεδο.

Οι εφαρμογές του Διαφορικού Λογισμού (θεώρημα μέσης τιμής, τύπος *Taylor,* ακρότατα συναρτήσεων πολλών μεταβλητών) παρατίθενται στο Κεφ. 21. Η μελέτη συναρτήσεων που ορίζονται πεπλεγμένα καθώς και το θεώρημα της αντιστροφής ενός μετασχηματισμού και τα ακρότατα συναρτήσεως υπό συνθήκη παρατίθενται στα Κεφ. 22 και 23.

Τέλος στοιχεία Διαφορικής Γεωμετρίας παρατίθενται στο Κεφ. 24. Τα στοιχεία αυτά είναι απαραίτητα στην κατανόηση των επικαμπύλιων, των πολλαπλών και επιφανειακών ολοκληρωμάτων (Κεφ. 25, 26, 27 και 28) καθώς και στη μελέτη των διανυσματικών πεδίων (Κεφ. 29).

Επειδή η αρίθμηση των κεφαλαίων των δύο τόμων (I και II) είναι ενιαία η παραπομπή σε κεφάλαιο και παράγραφο θα είναι ενιαία και για τους δύο τόμους, οπότε «*η πρόταση* 5.3.2» σημαίνει «*η πρόταση 3.2 του κεφαλαίου 5*», ενώ «*η πρόταση 6.4*» σημαίνει «*η πρόταση 6.4 της παραγράφου αυτής*» και «η §17.3» η παράγραφος 3 του κεφαλαίου 17. Η παραπομπή «βλ. [15]» παραπέμπει στη βιβλιογραφία.

Θεωρώ υποχρέωσή μου να ευχαριστήσω όλους τους συναδέλφους μου, που με τις εύστοχες υποδείξεις τους συνέβαλαν στην καλύτερη παρουσίαση της ύλης.

Θέλω να ευχαριστήσω θερμά τον ***Εκδοτικό Οίκο ΖΗΤΗ*** και τους συνεργάτες του για την εξαιρετική εμφάνιση του βιβλίου αυτού, που ήταν συνέπεια της διάθεσης συνεργασίας τους και της υπομονής τους.

Αθήνα, Μάιος 2001 *Γεώργιος Ν. Παντελίδης*

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κεφάλαιο 27

ΤΟ ΤΡΙΠΛΌ ΟΛΟΚΛΉΡΩΜΑ - ΠΟΛΛΑΠΛΆ ΟΛΟΚΛΗΡΏΜΑΤΑ

Κεφάλαιο 28

ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΆ ΟΛΟΚΛΗΡΏΜΑΤΑ

Κεφάλαιο 29

ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΊ ΤΎΠΟΙ

Κεφάλαιο 16

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ n-ΔΙΑΣΤΑΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΥ ΧΩΡΟΥ $\mathbb{R}^n$

1. Γενικά

Με τον όρο ***Ευκλείδειος χώρος*** $\mathbb{R}^n$ εννοούμε το σύνολο των διατεταγμένων *n*-άδων $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ από πραγματικούς αριθμούς $x_1, \ldots, x_n$, οι οποίοι αποτελούν τις *συντεταγμένες* του $\mathbf{x}$. Ο $\mathbb{R}^n$ εφοδιασμένος με την *πρόσθεση*

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n), \quad \text{για} \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \quad \mathbb{R}^n,$$

και το *βαθμωτό πολλαπλασιασμό*

$$\lambda\mathbf{x} = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n), \quad \text{για} \quad \mathbf{x} \quad \mathbb{R}^n \quad \text{και} \quad \lambda \quad \mathbb{R}$$

είναι ένας *γραμμικός* ή *διανυσματικός χώρος* πάνω στον $\mathbb{R}$ με το μηδενικό στοιχείο $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$. Τα στοιχεία του $\mathbb{R}^n$ ονομάζονται *σημεία* ή, πολλές φορές, *διανύσματα* του $\mathbb{R}^n$. Ο χώρος είναι ακόμη εφοδιασμένος με το *εσωτερικό γινόμενο*

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$$

και την *ευκλείδεια νορμ*

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2},$$

η οποία ονομάζεται και *μήκος* του στοιχείου $\mathbf{x}$. Με τη βοήθεια της ευκλείδειας νορμ ορίζουμε και την (*ευκλείδεια*) *απόσταση*

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}$$

των σημείων $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$.

Ο χώρος $\mathbb{R}^n$ εφοδιασμένος με την ευκλείδεια νορμ αποτελεί ένα *χώρο νορμέ*, δηλαδή για κάθε $\mathbf{x}, \mathbf{y} \quad \mathbb{R}^n$ και $\lambda \quad \mathbb{R}$ ισχύουν:

$$\|\mathbf{x}\| \geq \mathbf{0} \quad \text{και} \quad \|\mathbf{x}\| = \mathbf{0} \qquad \mathbf{x} = \mathbf{0},$$

$$\|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda|\,\|\mathbf{x}\|,$$

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \ (\textit{τριγωνική ιδιότητα}).$$

Τα διανύσματα μήκους *1* ονομάζονται *μοναδιαία διανύσματα,* όπως για παράδειγμα τα διανύσματα

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0),\ \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0),\ \ldots,\ \mathbf{e}_n = (0, \ldots, 0, 1)\ .$$

Τα διανύσματα αυτά αποτελούν μια *βάση* του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^n$, που σημαίνει ότι κάθε στοιχείο $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο με τη μορφή

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n\ .$$

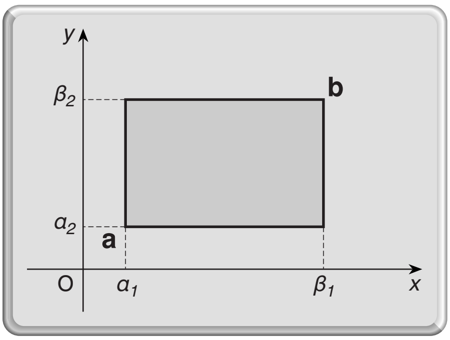
Ειδικότερα η βάση αυτή ονομάζεται και *κανονική βάση* του $\mathbb{R}^n$.

Για δύο σημεία $\mathbf{a} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\mathbf{b} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ του $\mathbb{R}^n$ θα γράφουμε

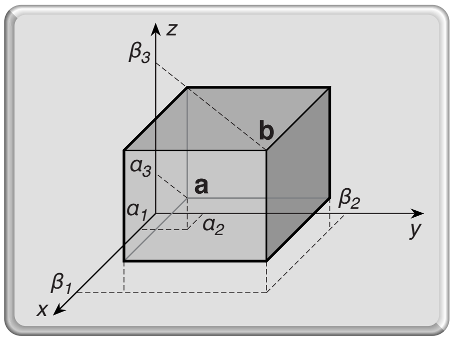
$$\mathbf{a} < \mathbf{b} \text{ (αντ. } \mathbf{a} \le \mathbf{b}) \qquad \alpha_j < \beta_j \text{ (αντ. } \alpha_j \le \beta_j) \quad \text{για } j = 1, \ldots, n.$$

Είναι φανερό ότι μεταξύ δύο σημείων του $\mathbb{R}^n$, με $n \ge 2,$ δεν υπάρχει πάντοτε μια ανισωτική σχέση, π.χ. μεταξύ των σημείων $(0, 1)$ και $(1, 0)$.

Αν $I_1, \ldots, I_n$ είναι n διαστήματα του $\mathbb{R}$, τότε το καρτεσιανό γινόμενο $I = I_1 \ \ldots \ I_n$ ονομάζεται *n-διάστατο διάστημα* (σχ. 1). Στην περίπτωση που όλα τα διαστήματα I_j είναι ανοιχτά (αντ. κλειστά), τότε το διάστημα I ονομάζεται *ανοιχτό* (αντ. *κλειστό*).



Σχήμα 1α : Διάστημα του $\mathbb{R}^2$



Σχήμα 1β: Διάστημα του $\mathbb{R}^3$

Αν $\mathbf{a} = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\mathbf{b} = (\beta_1, \beta_2)$ $\mathbb{R}^2$ και $\mathbf{a} \le \mathbf{b}$, τότε συμβολίζουμε με $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ το διάστημα $[\alpha_1, \beta_1]$ $[\alpha_2, \beta_2]$. Ανάλογος είναι και ο συμβολισμός στον $\mathbb{R}^n$.

Παρατήρηση: Στο εξής θα περιορίσουμε τη μελέτη μας (ορισμούς, προτάσεις κ.λπ.) στους χώρους $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}^3$. Προφανώς οι προτάσεις ισχύουν και στην περίπτωση του $\mathbb{R}^n$. Μόνο όταν η γενική περίπτωση παρουσιάζει κάποια δυσκολία θα παραθέτουμε την πρόταση ή την απόδειξή της.

Με παχιά γράμματα $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \ldots$ θα συμβολίζουμε τα στοιχεία του $\mathbb{R}^2$ και του $\mathbb{R}^3$ ανάλογα, ενώ με απλά πλάγια τα στοιχεία του $\mathbb{R}$, δηλαδή $\mathbf{x} = (x, y)$, $\mathbf{a} = (\alpha, \beta)$, $\mathbf{x} = (x, y, z)$, $\mathbf{b} = (\alpha, \beta, \gamma)$, ...

2. Η τοπολογια των Ευκλεiδειων χώρων

Οι τοπολογικές έννοιες των χώρων $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}^3$ που θα παραθέσουμε είναι αντίστοιχες των ανάλογων εννοιών του χώρου $\mathbb{R}$. Ο αναγνώστης μπορεί, διατηρώντας το συμβολισμό, να διατυπώσει τις έννοιες αυτές και στη γενική περίπτωση $\mathbb{R}^n$ (συγκ. επίσης με § 2.5).
Ονομάζουμε ***ανοιχτή σφαίρα*** *κέντρου* **a** *και ακτίνας* $\rho > 0$ το σύνολο

$$B(\mathbf{a}, \rho) := \{\mathbf{x} \quad \mathbb{R}^n : \Omega\Omega \mathbf{x} - \mathbf{a} \Omega\Omega < \rho\} .$$

Ειδικότερα,

Σ Στον $\mathbb{R}^2$ για $\mathbf{a} = (\alpha, \beta)$ και $\mathbf{x} = (x, y)$ είναι

$$B(\mathbf{a}, \rho) := \{\mathbf{x} \quad \mathbb{R}^2 : = \Omega\Omega \mathbf{x} - \mathbf{a} \Omega\Omega = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2} < \rho\} ,$$

δηλαδή είναι το εσωτερικό ενός κυκλικού δίσκου κέντρου **a** και ακτίνας *ρ.*

Σ Στον $\mathbb{R}^3$ για $\mathbf{a} = (\alpha, \beta, \gamma)$ και $\mathbf{x} = (x, y, z) \quad \mathbb{R}^3$ είναι

$$B(\mathbf{a}, \rho) := \{\mathbf{x} \quad \mathbb{R}^3 : \Omega\Omega \mathbf{x} - \mathbf{a} \Omega\Omega = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2} < \rho\} ,$$

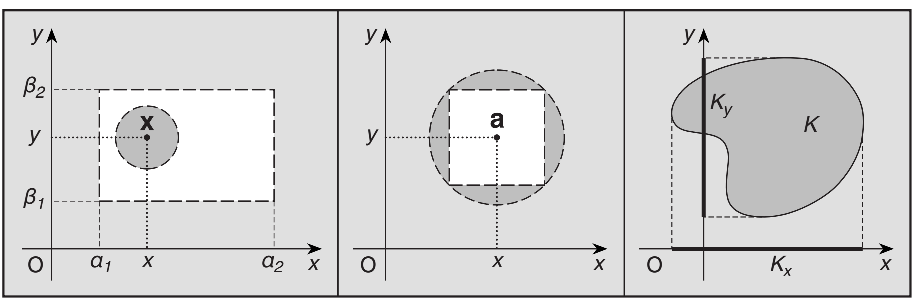
δηλαδή είναι το εσωτερικό μιας σφαίρας κέντρου **a** και ακτίνας *ρ.*

Σημείωση: Όταν στο εξής γράφουμε «ένα σημείο του χώρου» ή «ένα υποσύνολο του χώρου», τότε εννοούμε του χώρου $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ ή και $\mathbb{R}^n$ ανάλογα στο που αναφερόμαστε.

Ονομάζουμε *περιοχή ενός σημείου* **a** και τη συμβολίζουμε $U(\mathbf{a})$ κάθε υποσύνολο του χώρου που περιέχει μια ανοιχτή σφαίρα κέντρου **a**.
Κάθε ανοιχτό διάστημα $I = (\alpha_1, \alpha_2) \quad (\beta_1, \beta_2)$ είναι περιοχή κάθε σημείου του $\mathbf{x} = (x, y)$.

Πράγματι, η ανοιχτή σφαίρα $B(\mathbf{x}, \rho)$, με $\rho = min\{\Omega\alpha_i - x\,\Omega, \Omega\beta_i - y\,\Omega, i = 1, 2\}$, ανήκει στο διάστημα I (σχ. 2).

Κάθε ανοιχτή σφαίρα $B(\mathbf{a}, \rho)$ είναι περιοχή κάθε σημείου της **b**. Πράγματι, για $\rho_1 = \rho - \Omega\Omega \mathbf{a} - \mathbf{b} \Omega\Omega > 0$ ισχύει $B(\mathbf{b}, \rho_1) \quad B(\mathbf{a}, \rho)$ (σχ. 3).



Σχήμα 2 *Σχήμα 3* *Σχήμα 4. Προβολές στους Ox, Oy*

Για κάθε δύο διαφορετικά σημεία **a, b** του χώρου υπάρχουν δύο περιοχές Β(**a**, ρ_1) και Β(**b**, ρ_2) που είναι ξένες μεταξύ τους, αρκεί ρ_1 και $\rho_2 < \frac{1}{2}\|\mathbf{a}-\mathbf{b}\|$

Ένα υποσύνολο K του χώρου λέμε ότι είναι *φραγμένο*, όταν υπάρχει $M>0$ τέτοιο, ώστε για κάθε $x \in K$ να ισχύει:

$$\|\mathbf{x}\| \leq M\,.$$

Στην περίπτωση αυτή οι προβολές του K πάνω στους άξονες, που για την περίπτωση του $\mathbb{R}^2$ είναι τα σύνολα

$K_x = \{\alpha \in \mathbb{R}\text{:}\ \exists\, y \in \mathbb{R}$ με $(\alpha, y) \in K\}$, $K_y = \{\beta \in \mathbb{R}\text{:}\ \exists\, x \in \mathbb{R}$ με $(x, \beta) \in K\}$ (σχ.4),

είναι φραγμένα, αφού $|\alpha|, |\beta| \leq \|\mathbf{x}\| \leq M.$

Χαρακτηριστικά σημεία ενός υποσυνόλου X ***του χώρου***:

Εσωτερικό σημείο. Ένα σημείο $\mathbf{a} \in X$ ονομάζεται εσωτερικό σημείο του, όταν υπάρχει περιοχή $U(\mathbf{a})$ που περιέχεται στο X. Το σύνολο των εσωτερικών σημείων του X συμβολίζεται με X^o και προφανώς ισχύει $X^o \subseteq X$. Επομένως όλα τα σημεία ανοιχτών διαστημάτων και σφαιρών είναι εσωτερικά τους.

Σημείο συσσωρεύσεως. Ένα σημείο **a** του χώρου ονομάζεται σημείο συσσωρεύσεως του συνόλου X, όταν σε κάθε περιοχή του υπάρχουν άπειρα σημεία του X. Επομένως, κάθε εσωτερικό σημείο ενός συνόλου είναι και σημείο συσσωρεύσεώς του. Το αντίστροφο δεν ισχύει. Ένα σημείο συσσωρεύσεως συνόλου μπορεί να ανήκει ή να μην ανήκει στο σύνολο. Όλα τα σημεία **x** του χώρου, για τα οποία ισχύει $\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| = \rho$, είναι σημεία συσσωρεύσεως της ανοιχτής σφαίρας Β(**a**, ρ).

Συνοριακό σημείο. Ένα σημείο **a** του χώρου ονομάζεται συνοριακό σημείο του συνόλου X, όταν σε κάθε περιοχή $U(\mathbf{a})$ υπάρχουν στοιχεία του Χ και του $CX = \mathbb{R}^n \backslash X$, δηλαδή $U(\mathbf{a}) \cap X \neq \emptyset$ και $U(\mathbf{a}) \cap CX \neq \emptyset$. Το σύνολο των συνοριακών σημείων ενός συνόλου X ονομάζεται *σύνορο* του X και συμβολίζεται με ∂X. Από τον ορισμό του συνοριακού σημείου προκύπτει ότι $\partial X \cap X^o = \emptyset$. Ονομάζουμε *κλειστό περίβλημα* ενός συνόλου X και το συμβολίζουμε $\overline{X}$ το σύνολο $X \cup \partial X$.

Μεμονωμένο σημείο. Ένα σημείο $\mathbf{a} \in X$ ονομάζεται μεμονωμένο σημείο του X, όταν υπάρχει περιοχή $U(\mathbf{a})$ τέτοια, ώστε $U(\mathbf{a}) \cap X = \{\mathbf{a}\}$.

Ανοιχτό σύνολο. Ένα υποσύνολο A του χώρου ονομάζεται ανοιχτό, όταν αποτελείται μόνο από εσωτερικά σημεία, δηλαδή όταν $A^o = A$, που σημαίνει ότι το ανοιχτό σύνολο είναι περιοχή κάθε σημείου του. Έτσι, κάθε ανοιχτή σφαίρα και ανοιχτό διάστημα είναι ανοιχτά σύνολα.

Κλειστό σύνολο. Ένα υποσύνολο του χώρου ονομάζεται κλειστό, όταν το συμπλήρωμά του είναι ανοιχτό. Ένα σύνολο X είναι κλειστό όταν $\overline{X}=X$.

Οι σχέσεις που συνδέουν ένα σύνολο X του χώρου με τα σύνολα X^o, ∂X και $\overline{X}=X$ δίνονται από την επόμενη πρόταση, που δίνεται ως άσκηση:

Πρόταση 2.1:
(i) Το X είναι κλειστό μόνο, όταν $\overline{X}=X$.
*(ii) Αν **a** X, τότε το **a** είναι σημείο συσσωρεύσεως του X μόνο, όταν **a** ∂ X.*
(iii) Για κάθε σύνολο X ισχύει $X^o = X\backslash\partial X$.
(iv) Αν το σύνολο X είναι κλειστό, τότε ∂X X.
(v) Το σύνολο ∂X είναι κλειστό

Το σύνολο των ανοιχτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$ (ειδικότερα, $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}^3$) ορίζει μια *τοπολογία* πάνω στο χώρο, αφού

Σ Ο $\mathbb{R}^n$ και το κενό σύνολο Δ είναι ανοιχτά σύνολα.

Σ Η τομή πεπερασμένου πλήθους και η ένωση άπειρου πλήθους ανοιχτών συνόλων είναι ανοιχτό σύνολο.

3. Σύγκλιση ακολουθιών του χώρου – Συμπαγή σύνολα

Η έννοια της συγκλίσεως μιας ακολουθίας του χώρου ($\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ ή, πιο γενικά, $\mathbb{R}^n$) ορίζεται με τη βοήθεια της αποστάσεως και επομένως της περιοχής. Όπως θα παρατηρήσει ο αναγνώστης, η διατύπωση του ορισμού και των διαφόρων προτάσεων είναι τελείως ανάλογη, αν λάβουμε υπόψη μας τη μορφή που έχει κάθε έννοια στο χώρο, με εκείνες στο χώρο των πραγματικών αριθμών.

Ορισμός: Θα λέμε ότι η ακολουθία $(\mathbf{a}_\nu)$ στοιχείων του χώρου ***συγκλίνει*** ή ότι ***είναι συγκλίνουσα***, όταν υπάρχει στοιχείο **a** του χώρου τέτοιο, ώστε για κάθε $\varepsilon>0$ να υπάρχει φυσικός αριθμός $\nu_0(\varepsilon)$ [που εξαρτάται από το ε] με την ιδιότητα:

για κάθε $\nu \geq \nu_0(\varepsilon)$ ισχύει $Ω\mathbf{a}_\nu - \mathbf{a}Ω < \varepsilon$ ή, ισοδύναμα, $\mathbf{a}_\nu$ $B(\mathbf{a}, \varepsilon)$,

δηλαδή όταν $\lim\limits_{\nu \bullet} Ω\mathbf{a}_\nu - \mathbf{a}Ω = 0$.

Στην περίπτωση αυτή λέμε ακόμη ότι η ακολουθία $(\mathbf{a}_\nu)$ *συγκλίνει στο* **a,** το οποίο ονομάζεται *όριο* της ακολουθίας, και γράφουμε $\mathbf{a}_\nu$ **a.** Θα λέμε ότι η ακολουθία $(\mathbf{a}_\nu)$ *αποκλίνει* ή ότι είναι *αποκλίνουσα,* όταν δε συγκλίνει.

Μια ακολουθία $(\mathbf{a}_\nu)$ του χώρου λέμε ότι είναι *φραγμένη,* όταν υπάρχει $M>0$ τέτοιο, ώστε για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ να ισχύει $\|\mathbf{a}_\nu\| \leq M$. Η ακολουθία $(\mathbf{a}_\nu)$ θα λέμε ότι είναι *αύξουσα* (αντ. *φθίνουσα*), όταν $\mathbf{a}_\nu \leq \mathbf{a}_{\nu+1}$ (αντ. $\mathbf{a}_\nu \geq \mathbf{a}_{\nu+1}$).

Η επόμενη πρόταση, που χάριν απλότητας διατυπώνεται στον $\mathbb{R}^2$, ανάγει τη σύγκλιση μιας ακολουθίας του χώρου στη σύγκλιση ακολουθιών πραγματικών αριθμών.

Πρόταση 3.1: *Η ακολουθία* $(\mathbf{a}_\nu)$, $\mathbf{a}_\nu = (\alpha_\nu, \beta_\nu) \in \mathbb{R}^2$ *και* $\nu \in \mathbb{N}$, *συγκλίνει στο* $\mathbf{a} = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, *όταν, και μόνο όταν,*

$$\lim_{\nu\to\infty} \alpha_\nu = \alpha \quad \text{και} \quad \lim_{\nu\to\infty} \beta_\nu = \beta .$$

Η απόδειξη είναι άμεση συνέπεια των ανισοτήτων

$$\left.\begin{matrix} |\alpha_\nu - \alpha| \\ |\beta_\nu - \beta| \end{matrix}\right\} \leq \|\mathbf{a}_\nu - \mathbf{a}\| = \sqrt{(\alpha_\nu - \alpha)^2 + (\beta_\nu - \beta)^2} \leq |\alpha_\nu - \alpha| + |\beta_\nu - \beta| .$$

Επομένως, η ακολουθία $(\mathbf{a}_\nu)$ συγκλίνει στο $\mathbf{a}$, μόνο όταν οι ακολουθίες των συντεταγμένων των $\mathbf{a}_\nu$ συγκλίνουν στις αντίστοιχες συντεταγμένες του $\mathbf{a}$.

Μια ακολουθία $(\mathbf{a}_\nu)$ του χώρου ονομάζεται *ακολουθία Cauchy* ή *βασική ακολουθία,* όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει φυσικός αριθμός $\nu_0(\varepsilon)$ τέτοιος, ώστε για κάθε $\mu, \nu \geq \nu_0$ να ισχύει:

$$\|\mathbf{a}_\nu - \mathbf{a}_\mu\| < \varepsilon .$$

Κριτήριο Cauchy: *Η ακολουθία* $(\mathbf{a}_\nu)$ *του χώρου συγκλίνει, όταν, και μόνο όταν, είναι ακολουθία Cauchy.*

Απόδειξη: Έστω ότι η ακολουθία $(\mathbf{a}_\nu)$ συγκλίνει στο $\mathbf{a}$, δηλαδή για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\nu_0(\varepsilon)$ τέτοιος, ώστε για κάθε $\mu, \nu \geq \nu_0$ ισχύουν

$$\|\mathbf{a}_\nu - \mathbf{a}\| < \varepsilon \quad \text{και} \quad \|\mathbf{a}_\mu - \mathbf{a}\| < \varepsilon .$$

Τότε για κάθε $\mu, \nu \geq \nu_o$ ισχύει

$$\|\mathbf{a}_\nu - \mathbf{a}_\mu\| \leq \|\mathbf{a}_\nu - \mathbf{a}\| + \|\mathbf{a}_\mu - \mathbf{a}\| < 2\varepsilon ,$$

που σημαίνει ότι η ακολουθία $(\mathbf{a}_\nu)$ είναι ακολουθία *Cauchy.*

Έστω ότι η $(\mathbf{a}_\nu)$, με $\mathbf{a}_\nu = (\alpha_\nu, \beta_\nu)$, είναι ακολουθία *Cauchy*. Τότε από τις ανισότητες $|\alpha_\nu - \alpha_\mu| \leq \|\mathbf{a}_\nu - \mathbf{a}_\mu\|$ και $|\beta_\nu - \beta_\mu| \leq \|\mathbf{a}_\nu - \mathbf{a}_\mu\|$ προκύπτει ότι και οι ακολουθίες πραγματικών αριθμών (α_ν) και (β_ν) είναι ακολουθίες Cauchy και επομένως συγκλίνουν, έστω στο α και β αντίστοιχα. Έτσι, σύμφωνα με την πρόταση 3.1, η ακολουθία $(\mathbf{a}_\nu)$ συγκλίνει στο $\mathbf{a} = (\alpha, \beta)$. ■

Ένας γραμμικός χώρος εφοδιασμένος με νορμ που ικανοποιεί το κριτήριο *Cauchy* ονομάζεται *πλήρης* ή *χώρος Banach.* Επομένως όλοι οι χώροι $\mathbb{R}^n$ είναι χώροι *Banach* (βλ. [22]).

Οι αποδείξεις των παρακάτω προτάσεων είναι ανάλογες των αντίστοιχων προτάσεων για ακολουθίες πραγματικών αριθμών και δίνονται ως ασκήσεις.

- *Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία του χώρου έχει ακριβώς ένα όριο.*
- *Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία του χώρου είναι φραγμένη.*
- *Αν* $\lim\limits_{\nu\to\infty} \mathbf{a}_\nu = \mathbf{a}$ *και* $\lim\limits_{\nu\to\infty} \mathbf{b}_\nu = \mathbf{b}$, *τότε*

$$\lim_{\nu\to\infty} [\lambda\mathbf{a}_\nu + \mu\mathbf{b}_\nu] = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \text{ και } \lim_{\nu\to\infty} \|\mathbf{a}_\nu\| = \|\mathbf{a}\|$$

- *Το σημείο* $\mathbf{a}$ *είναι σημείο συσσωρεύσεως του συνόλου X, όταν, και μόνο όταν, υπάρχει ακολουθία* $(\mathbf{a}_\nu)$, $\mathbf{a}_\nu \in X \setminus \{\mathbf{a}\}$, *που συγκλίνει στο* $\mathbf{a}$.

Στην τελευταία πρόταση αρκεί για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ να επιλέγουμε ένα στοιχείο $\mathbf{a}_\nu \in B\left(\mathbf{a}, \frac{1}{\nu}\right)$ που ανήκει στο $X \setminus \{\mathbf{a}\}$. Η ακολουθία $(\mathbf{a}_\nu)$ είναι η ζητούμενη.

Λήμμα Cesaro: *Κάθε φραγμένη ακολουθία του χώρου περιέχει μια (τουλάχιστον) υπακολουθία που συγκλίνει.*

Απόδειξη: Θα παραθέσουμε την απόδειξη για το χώρο $\mathbb{R}^2$. Αν η ακολουθία $(\mathbf{a}_\nu)$, με $\mathbf{a}_\nu = (\alpha_\nu, \beta_\nu)$, είναι φραγμένη, τότε και οι ακολουθίες (α_ν) και (β_ν) είναι φραγμένες, αφού ισχύουν $|\alpha_\nu|, |\beta_\nu| \le \|\mathbf{a}_\nu\|$. Η ακολουθία (α_ν), ως φραγμένη, περιέχει μια υπακολουθία (α_ν) που συγκλίνει, έστω στο α (βλ. το ίδιο θεώρημα για τον $\mathbb{R}$). Η αντίστοιχή της υπακολουθία (β_ν) της (β_ν), ως επίσης φραγμένη, περιέχει μια υπακολουθία (β_ν) που συγκλίνει, έστω στο β. Τότε η ακολουθία $(\mathbf{a}_\nu)$, με $\mathbf{a}_\nu = (\alpha_\nu, \beta_\nu)$, συγκλίνει στο $\mathbf{a} = (\alpha, \beta)$. ■

Θεώρημα Bolzano-Weierstrass: *Κάθε άπειρο και φραγμένο υποσύνολο K του χώρου έχει ένα τουλάχιστο σημείο συσσωρεύσεως.*

Απόδειξη: Αφού το σύνολο K είναι άπειρο επιλέγουμε μια ακολουθία $(\mathbf{x}_\nu)$ διάφορων μεταξύ τους στοιχείων του K, η οποία επειδή είναι φραγμένη έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία (λήμμα *Cesaro*). Το όριο αυτό είναι ένα σημείο συσσωρεύσεως του K. ■

Εφαρμογή: Θεώρημα σταθερού σημείου: *Αν για την απεικόνιση (συνάρτηση)* $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *υπάρχει* $\tau \in \mathbb{R}$, *με* $0<\tau<1$, *τέτοιο, ώστε για κάθε* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ *να ισχύει*

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{f}(\mathbf{y})\|<\tau\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|,$$

τότε υπάρχει μοναδικό στοιχείο $\mathbf{a}$ *του* $\mathbb{R}^n$ *για το οποίο ισχύει* $\mathbf{f}(\mathbf{a})=\mathbf{a}$.

Απόδειξη: Έστω $\mathbf{a}_0$ ένα οποιοδήποτε σημείο του χώρου $\mathbb{R}^n$. Τότε για την ακολουθία $(\mathbf{a}_\nu)$ που ορίζεται από τον αναγωγικό τύπο $\mathbf{a}_\nu=\mathbf{f}(\mathbf{a}_{\nu-1})$, $\nu \in \mathbb{N}$, ισχύουν:

$$\|\mathbf{a}_{\nu+1}-\mathbf{a}_\nu\|=\|\mathbf{f}(\mathbf{a}_\nu)-\mathbf{f}(\mathbf{a}_{\nu-1})\|<\tau\|\mathbf{a}_\nu-\mathbf{a}_{\nu-1}\|<\ \dots\ <\tau^\nu\|\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_0\|$$

Επομένως για κάθε ν, μ, με $\mu>\nu$ ισχύουν

$$\|\mathbf{a}_\mu-\mathbf{a}_\nu\|\le\|\mathbf{a}_\mu-\mathbf{a}_{\mu-1}\|+\|\mathbf{a}_{\mu-1}-\mathbf{a}_{\mu-2}\|+\dots+\|\mathbf{a}_{\nu+1}-\mathbf{a}_\nu\|\le(\tau^{\mu-1}+\dots+\tau^\nu)\|\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_0\|<$$

$$<\frac{\tau^\nu-\tau^\mu}{1-\tau}\|\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_0\|<\frac{\tau^\nu}{1-\tau}\|\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_0\|,$$

που σημαίνει ότι η ακολουθία $(\mathbf{a}_\nu)$ είναι ακολουθία *Cauchy* και έστω $\mathbf{a}$ το όριό της. Από τις ανισότητες

$$0\le\|\mathbf{a}-\mathbf{f}(\mathbf{a})\|\le\|\mathbf{a}-\mathbf{a}_{\nu+1}\|+\|\mathbf{a}_{\nu+1}-\mathbf{f}(\mathbf{a})\|=\|\mathbf{a}-\mathbf{a}_{\nu+1}\|+\|\mathbf{f}(\mathbf{a}_\nu)-\mathbf{f}(\mathbf{a})\|\le$$

$$\le\|\mathbf{a}-\mathbf{a}_{\nu+1}\|+\tau\|\mathbf{a}_\nu-\mathbf{a}\|$$

προκύπτει $0\le\|\mathbf{a}-\mathbf{f}(\mathbf{a})\|\le\lim\limits_{\nu\to\infty}\|\mathbf{a}-\mathbf{a}_{\nu+1}\|+\tau\lim\limits_{\nu\to\infty}\|\mathbf{a}_\nu-\mathbf{a}\|=0$, που σημαίνει $\mathbf{a}=\mathbf{f}(\mathbf{a})$.

Αν υπήρχε και άλλο σημείο $\mathbf{b}\neq\mathbf{a}$, με $\mathbf{f}(\mathbf{b})=\mathbf{b}$, τότε

$$\|\mathbf{a}-\mathbf{b}\|=\|\mathbf{f}(\mathbf{a})-\mathbf{f}(\mathbf{b})\|<\tau\|\mathbf{a}-\mathbf{b}\|,$$

που δεν είναι δυνατόν, αφού $0<\tau<1$. Επομένως το σταθερό σημείο της $\mathbf{f}$ είναι μοναδικό και ανεξάρτητο από το σημείο εκκίνησης $\mathbf{a}_0$. ■

Ένα υποσύνολο K του χώρου θα λέμε ότι είναι ***συμπαγές***, όταν είναι κλειστό και φραγμένο.[1]

- *Κάθε πεπερασμένο σύνολο είναι κλειστό και φραγμένο, οπότε είναι συμπαγές.*
- *Κάθε κλειστή σφαίρα και κάθε κλειστό και φραγμένο διάστημα είναι σύνολα συμπαγή.*
- *Κάθε κλειστό υποσύνολο συμπαγούς συνόλου είναι συμπαγές.*

1) Στην περίπτωση απειροδιάστατων χώρων ένα σύνολο είναι συμπαγές, όταν κάθε ακολουθία στοιχείων του περιέχει μια υπακολουθία που συγκλίνει σ' ένα στοιχείο του. Στη γενική αυτή περίπτωση δεν είναι ισοδύναμοι οι ορισμοί.

Σ *Αν το σύνολο $K \subseteq \mathbb{R}^2$ είναι συμπαγές, τότε και οι προβολές του K πάνω στους άξονες*

$$K_x = \{\alpha \in \mathbb{R} : \exists\, y \in \mathbb{R} \text{ με } (\alpha, y) \in K\},$$

$$K_y = \{\beta \in \mathbb{R} : \exists\, x \in \mathbb{R} \text{ με } (x, \beta) \in K\},$$

(βλ. σχ. 4) είναι σύνολα συμπαγή.

Θα λέμε ότι η μια οικογένεια υποσυνόλων $(O_m)_{m \in M}$ (όχι κατ' ανάγκην αριθμήσιμη) του χώρου αποτελεί μια *κάλυψη* του συνόλου X, όταν $X \subseteq \bigcup_{m \in M} O_m$.

Τις αποδείξεις των επόμενων προτάσεων, που αναφέρονται στην πεπερασμένη κάλυψη των συμπαγών συνόλων, θα παραθέσουμε στο παράρτημα.

Το θεώρημα *Borel-Lebesgue*, που ισχύει και ως ικανή και αναγκαία συνθήκη, δίνεται πολλές φορές και ως ορισμός του συμπαγούς συνόλου.

Θεώρημα Borel-Lebesgue: *Αν η οικογένεια $(O_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ των ανοιχτών υποσυνόλων του χώρου αποτελεί μια κάλυψη του συμπαγούς συνόλου K, τότε αρκούν πεπερασμένου πλήθους από αυτά για να καλύψουν το σύνολο K.*

Πόρισμα 3.1: *Έστω K ένα συμπαγές υποσύνολο του χώρου. Τότε για κάθε $\rho > 0$ υπάρχουν πεπερασμένου πλήθους στοιχεία $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$ του K τέτοια, ώστε*

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} B(\mathbf{x}_i, \rho).$$

Η οικογένεια των ανοιχτών σφαιρών $(B(\mathbf{x}, \rho))_{\mathbf{x} \in K}$ αποτελεί μια κάλυψη του K με ανοιχτά σύνολα. Επομένως αρκούν πεπερασμένου πλήθους από αυτές για να καλυφθεί το K. Προφανώς στη θέση των ανοιχτών σφαιρών μπορούμε να θεωρήσουμε ανοιχτά διαστήματα που περιέχουν τα στοιχεία $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$.

Αρχή του εγκλωβισμού: *Αν (K_ν) είναι μια φθίνουσα ακολουθία μη κενών συμπαγών υποσυνόλων του χώρου, δηλαδή $K_1 \supseteq K_2 \supseteq \ldots \supseteq K_\nu \supseteq \ldots$, τότε η τομή $\bigcap_{i=1}^{\infty} K_i$ είναι μη κενό συμπαγές υποσύνολο του χώρου.*

Ειδική περίπτωση της αρχής του εγκλωβισμού αποτελεί η επόμενη ειδική περίπτωση (βλ. §2.4):

Πόρισμα 3.2: *Αν* $\Delta_\nu = [\mathbf{a}_\nu, \mathbf{b}_\nu]$ *είναι μια φθίνουσα ακολουθία κλειστών και φραγμένων διαστημάτων του* $\mathbb{R}^2$ *(ενδεχομένως εκφυλισμένων), δηλαδή* $\mathbf{a}_\nu \leq \mathbf{a}_{\nu+1} \leq \mathbf{b}_{\nu+1} \leq \mathbf{b}_\nu$, *τότε*

$$\underset{\nu \quad \mathbb{N}}{} \Delta_\nu \,\pi\, \Delta \ .$$

Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι στην περίπτωση που $\lim_\nu \|\mathbf{a}_\nu - \mathbf{b}_\nu\| = 0$, τότε η τομή αποτελείται από ένα μοναδικό σημείο.

Ασκήσεις:

1) Αποδείξτε ότι για κάθε δύο σημεία $\mathbf{x}, \mathbf{y} \quad \mathbb{R}^n$ ισχύουν:

   (α) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$ (ανισότητα Schwarz),

   (β) $\big| \|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\| \big| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$

2) Αποδείξτε ότι το σύνολο $X \quad \mathbb{R}^n$ είναι φραγμένο, όταν, και μόνο όταν, για κάθε $\mathbf{a} \quad \mathbb{R}^n$ υπάρχει $M > 0$ τέτοιο, ώστε για κάθε $\mathbf{x} \quad X$ να ισχύει $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \leq M$.

3) Αποδείξτε ότι οι προβολές A_x, A_y στους άξονες Ox και Oy αντίστοιχα του ανοιχτού συνόλου $A \quad \mathbb{R}^2$ είναι ανοιχτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Ανάλογα ισχύουν και για τις προβολές των ανοιχτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$ πάνω στους άξονες Ox_i, $i = 1, \ldots, n$.

4) Ποια από τα παρακάτω σύνολα του $\mathbb{R}^2$ είναι ανοιχτά, κλειστά, συμπαγή; Σε κάθε περίπτωση προσδιορίστε το εσωτερικό, το σύνορο και το κλειστό περίβλημά τους.

   (α) $A = \{(x, y): 1 < x^2 + y^2 < 2\}$, (β) $B = \{(x, y): 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$, (γ) $\Gamma = \{(x, y): xy = -1\}$, (δ) $\Delta = \{(x, y): xy \leq 1\}$, (ε) $E = \{(x, y): y = \sin \frac{1}{x}\}$, (ζ) $Z = \mathbf{Q} \quad \mathbf{Q}$, $\mathbf{Q}$ = ρητοί αριθμοί.

5) Αποδείξτε ότι κάθε σημείο του κλειστού περιβλήματος $\overline{X}$ ενός συνόλου X είναι όριο ακολουθίας στοιχείων του X.

6) Αποδείξτε ότι το σύνολο X είναι κλειστό, όταν, και μόνο όταν, περιέχει το όριο κάθε συγκλίνουσας ακολουθίας στοιχείων του.

7) Αποδείξτε ότι, αν η ακολουθία $(\mathbf{a}_\nu)$ στοιχείων του χώρου είναι μονότονη και φραγμένη, τότε συγκλίνει.

8) Δίνεται το κλειστό και φραγμένο διάστημα $\Delta = [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \quad \mathbb{R}^2$, του οποίου διχοτομούμε τις πλευρές. Επιλέγουμε ένα από τα υποδιαστήματα, έστω Δ_1, στο οποίο επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία. Με τον τρόπο αυτό παίρνουμε μια ακολουθία διαστημάτων (Δ_ν). Να αποδείξετε ότι η τομή $\quad \Delta_\nu$ αποτελείται από ένα μοναδικό στοιχείο του Δ.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

3. Σύγκλιση ακολουθιών του χώρου – Συμπαγή σύνολα

Θεώρημα Borel–Lebesgue: *Αν η οικογένεια* $(O_\lambda)_{\lambda \quad \Lambda}$ *των ανοιχτών υποσυνόλων του χώρου αποτελεί μια κάλυψη του συμπαγούς συνόλου* K*, τότε αρκούν πεπερασμένου πλήθους από αυτά για να καλύψουν το σύνολο* K*.*

Απόδειξη: Για κάθε $\mathbf{a} = (\alpha, \beta) \quad K$ υπάρχει ένα στοιχείο $O_{\mathbf{a}}$ της οικογένειας ώστε $\mathbf{a} \quad O_{\mathbf{a}}$ και προφανώς το $\mathbf{a}$ είναι εσωτερικό σημείο του $O_{\mathbf{a}}$. Υπάρχει λοιπόν ένα ανοιχτό διάστημα $\mathrm{I}_\alpha \quad \mathrm{I}_\beta$ που περιέχει το $\mathbf{a}$ και περιέχεται στο $O_{\mathbf{a}}$. Με τον τρόπο αυτό κατασκευάσαμε μια οικογένεια ανοιχτών διαστημάτων $(\mathrm{I}^i_\alpha \quad \mathrm{I}^i_\beta)_i$ που καλύπτει το K. Αυτό σημαίνει ότι η οικογένεια των ανοιχτών διαστημάτων (I^i_α) $\left(\text{αντ. } (\mathrm{I}^i_\beta)\right)$ αποτελεί μια ανοιχτή κάλυψη του συμπαγούς συνόλου K_x (αντ. K_y). Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα *Heine–Borel* στον $\mathbb{R}$ (βλ. ασκ. 2.14), αρκούν πεπερασμένου πλήθους $\mathrm{I}^1_\alpha, \mathrm{I}^2_\alpha, \ldots, \mathrm{I}^k_\alpha$ (αντ. $\mathrm{I}^1_\beta, \mathrm{I}^2_\beta, \ldots, \mathrm{I}^\ell_\beta$) για να καλύψουν το K_x (αντ. K_y). Επομένως τα διαστήματα $\mathrm{I}^i_\alpha \quad \mathrm{I}^j_\beta$, $i = 1, \ldots, k, j = 1, \ldots, \ell$, αποτελούν μια πεπερασμένη κάλυψη του $K_x \quad K_y \,.. K$ από ανοιχτά ορθογώνια, κάθε ένα από τα οποία περιέχεται σε ένα O_λ. Επομένως αρκούν πεπερασμένου πλήθους O_λ για να καλυφθεί το K. ■

Πόρισμα 3.1: *Έστω* K *ένα συμπαγές υποσύνολο του χώρου. Τότε για κάθε* $\rho > 0$ *υπάρχουν πεπερασμένου πλήθους στοιχεία* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$ *του* K *τέτοια, ώστε*

$$K \quad \bigcup_{i=1}^{k} B(x_i, \rho) .$$

Η οικογένεια των ανοιχτών σφαιρών $\left(B(\mathbf{x}, \rho)\right)_{\mathbf{x} \quad K}$ αποτελεί μια κάλυψη του K με ανοιχτά σύνολα. Επομένως αρκούν πεπερασμένου πλήθους από αυτές για να καλυφθεί το K.

Αρχή του εγκλωβισμού: *Αν* (K_ν) *είναι μια φθίνουσα ακολουθία μη κενών συμπαγών υποσυνόλων του χώρου, δηλαδή* $K_1 \,.. K_2 \ldots\ldots K_\nu \ldots..$*, τότε η τομή*

$$\bigcap_{i=1}^{\bullet} K_i$$ *είναι μη κενό συμπαγές υποσύνολο του χώρου.*

Απόδειξη: Το σύνολο $K = \overset{\bullet}{\underset{i=1}{}} K_i$ είναι συμπαγές (είναι κλειστό, ως τομή κλειστών συνόλων, και φραγμένο, ως υποσύνολο φραγμένου συνόλου).

Αν $K = \Delta$, τότε για κάθε $\mathbf{x} \; K_1$ υπάρχει K_v με $\mathbf{x} \; K_v$, οπότε το $\mathbf{x}$ ανήκει στο ανοιχτό σύνολο $O_v = \mathbb{R}^2 \backslash K_v$. Με τον τρόπο αυτό κατασκευάζουμε μια οικογένεια (O_v) με ανοιχτά σύνολα, για την οποία ισχύει $K_1 \quad O_v$. Επομένως αρκούν πεπερασμένου πλήθους από τα ανοιχτά σύνολα για να καλύψουν το συμπαγές K_1.

Επειδή $O_1 \; O_2 \; \ldots$ υπάρχει ένα O_N (εκείνο από τα πεπερασμένου πλήθους O_v που έχει το μεγαλύτερο δείκτη) ώστε $O_N .. K_1 \quad \mathbb{R}^2 \backslash K_N .. K_1$ ή $K_N \; K_1$. Αυτό όμως είναι άτοπο και επομένως $K \pi \Delta$. ■

Ειδική περίπτωση της αρχής του εγκλωβισμού αποτελεί η επόμενη ειδική περίπτωση εγκλωβισμού (βλ. §2.4):

Πόρισμα 3.2: *Αν* $\Delta_v = [\mathbf{a}_v, \mathbf{b}_v]$ *είναι μια φθίνουσα ακολουθία κλειστών και φραγμένων διαστημάτων του* $\mathbb{R}^2$ *(ενδεχομένως εκφυλισμένων), δηλαδή* $\mathbf{a}_v \le \mathbf{a}_{v+1} \le \mathbf{b}_{v+1} \le \mathbf{b}_v$, *τότε*

$$\underset{v \; \mathbb{N}}{} \Delta_v \pi \Delta .$$