ΓΕΩΡΓΙΟΥ Ν. ΠΑΝΤΕΛΙΔΗ
ΚΑΘΗΓΗΤΗ Ε.Μ. ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ

ΑΝΑΛΥΣΗ

ΤΕΥΧΟΣ Β΄

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ

Κάθε γνήσιο αντίτυπο φέρει την υπογραφή του συγγραφέα

ISBN set 960-431-662-1
ISBN τ.Β 960-431-660-5

www.ziti.gr

Φωτοστοιχειοθεσία Εκτύπωση

Π. ΖΗΤΗ & Σια ΟΕ
18ο χλμ Θεσ/νίκης-Περαίας
Τ.Θ. 171 • Νέοι Επιβάτες Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19
Τηλ.: 0392-72.222 (3 γραμ.) - Fax: 0392-72.229
e-mail: info@ziti.gr

Βιβλιοπωλείο

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
Αρμενοπούλου 27 • 546 35 Θεσσαλονίκη
Τηλ. (031) 203.720, Fax (031) 211.305
e-mail: sales@ziti.gr

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Στο τεύχος αυτό, ***ΑΝΑΛΥΣΗ* Β ,** που αποτελεί συνέχεια του τεύχους ***ΑΝΑΛΥΣΗ* Α ,** γίνεται εντονότερα κατανοητό ότι ***η υψηλή Τεχνολογία είναι μαθηματική Τεχνολογία*** και ως εκ τούτου δεν μπορεί να υπάρξει σημαντική Τεχνολογική εξέλιξη χωρίς τη βαθύτερη γνώση των Μαθηματικών.

Το τεύχος ***ΑΝΑΛΥΣΗ* Β** περιλαμβάνει τα Κεφ. 13 - 24 (η αρίθμηση των κεφαλαίων είναι συνέχεια εκείνης του τεύχους Α) και περιλαμβάνει την ύλη που διδάσκεται στο 2° εξάμηνο του Τμήματος Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Εθνικού Μετσοβίου Πολυτεχνείου.

Σε όλο το βιβλίο όταν χρησιμοποιούμε σχέσεις, προτάσεις και έννοιες που αναφέρονται στο τεύχος ***ΑΝΑΛΥΣΗ* Α** δεν τις σχολιάζουμε, γιατί θεωρούμε ότι είναι γνωστές. Παραθέτουμε πολλά λυμένα παραδείγματα, που η γνώση τους είναι απαραίτητη για την κατανόηση της ύλης. Στο τέλος ορισμένων κεφαλαίων υπάρχουν παραρτήματα (με σκιασμένο περιθώριο), όπου παρατίθενται αποδείξεις και σχόλια, που θεωρούμε ότι δεν είναι απαραίτητα σε πρώτη ανάγνωση και ενδιαφέρουν εκείνους που θα ήθελαν να εμβαθύνουν στα περιεχόμενα του αντίστοιχου κεφαλαίου.

Στα Κεφ. 13 και 14 γίνεται η ανάπτυξη των ακολουθιών και σειρών συναρτήσεων καθώς και των δυναμοσειρών.

Τα γενικευμένα ολοκληρώματα σε μη φραγμένα διαστήματα καθώς και εκείνα των μη φραγμένων συναρτήσεων παρατίθενται στο Κεφ. 15, όπου ορίζεται και το εμβαδόν μη φραγμένου χωρίου.

Η έννοια του n-διάστατου Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^n$, η τοπολογία του και η σύγκλιση των ακολουθιών του μελετάται στο Κεφ. 16 κατά τέτοιο τρόπο, ώστε ο αναγνώστης να "αναγνωρίζει" τη φυσική επέκταση των αντίστοιχων εννοιών του συνόλου των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$. Τα συστήματα συντεταγμένων στο επίπεδο και στο χώρο αναλύονται στο Κεφ. 17.

Στο Κεφ. 18 γίνεται η μελέτη των πραγματικών και διανυσματικών συναρτήσεων (όριο και συνέχεια). Για να αποφύγουμε περίπλοκες εκφράσεις και να διατρέξουμε τον κίνδυνο να μη γίνουν κατανοητοί οι μαθηματικοί συλλογισμοί περιορίσαμε τη μελέτη στους χώρους $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}^3$, ενώ, όταν είναι απαραίτητο, παρατίθενται οι προτάσεις και οι ιδιότητες στη γενική περίπτωση.

Η διαφορισιμότητα συναρτήσεων πολλών μεταβλητών μελετάται στο Κεφ. 19 με παρουσίαση των προτάσεων κυρίως για συναρτήσεις δύο ή τριών μεταβλητών. Στο παράρτημα του κεφαλαίου αυτού παρατίθενται οι γενικές περιπτώσεις. Στο Κεφ. 20 αναλύονται οι έννοιες της καμπύλης και της επιφάνειας, όπως αυτές ορίζονται στην Ανάλυση, και ορίζεται η εφαπτομένη ευθεία και το εφαπτόμενο επίπεδο.

Οι εφαρμογές του Διαφορικού Λογισμού (θεώρημα μέσης τιμής, τύπος *Taylor,* ακρότατα συναρτήσεων πολλών μεταβλητών) παρατίθενται στο Κεφ. 21. Η μελέτη συναρτήσεων που ορίζονται πεπλεγμένα καθώς και το θεώρημα της αντιστροφής ενός μετασχηματισμού και τα ακρότατα συναρτήσεως υπό συνθήκη παρατίθενται στα Κεφ. 22 και 23.

Τέλος στοιχεία Διαφορικής Γεωμετρίας παρατίθενται στο Κεφ. 24. Τα στοιχεία αυτά είναι απαραίτητα στην κατανόηση των πολλαπλών, των επικαμπύλιων και επιφανειακών ολοκληρωμάτων (Κεφ. 25, 26, 27 και 28) καθώς και στη μελέτη των διανυσματικών πεδίων (Κεφ. 29).

Επειδή η αρίθμηση των κεφαλαίων των δύο τευχών (Α και Β) είναι ενιαία η παραπομπή σε κεφάλαιο και παράγραφο θα είναι ενιαία και για τα δύο τεύχη, οπότε «*η πρόταση* 5.3.2» σημαίνει «*η πρόταση 3.2 του κεφαλαίου 5*», ενώ «*η πρόταση 6.4*» σημαίνει «*η πρόταση 6.4 της παραγράφου αυτής*» και «η §17.3» η παράγραφος 3 του κεφαλαίου 17.

Θεωρώ υποχρέωσή μου να ευχαριστήσω όλους τους συναδέλφους μου, που με τις εύστοχες υποδείξεις τους συνέβαλαν στην καλύτερη παρουσίαση της ύλης.

Θέλω να ευχαριστήσω θερμά τον ***Εκδοτικό Οίκο ΖΗΤΗ*** και τους συνεργάτες του για την εξαιρετική εμφάνιση του βιβλίου αυτού, που ήταν συνέπεια της διάθεσης συνεργασίας τους και της υπομονής τους.

Αθήνα, Φεβρουάριος 2001 *Γεώργιος Ν. Παντελίδης*

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κεφάλαιο 16

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ n–ΔΙΑΣΤΑΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΥ ΧΩΡΟΥ $\mathbb{R}^n$

Κεφάλαιο 17

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ & ΣΤΟ ΧΩΡΟ

Κεφάλαιο 18

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Κεφάλαιο 19

ΔΙΑΦΟΡΙΣΙΜΟΤΗΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Κεφάλαιο 20

ΚΑΜΠΥΛΕΣ & ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ

Κεφάλαιο 21

ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ – ΤΥΠΟΣ TAYLOR – ΑΚΡΟΤΑΤΑ

Κεφάλαιο 22

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΟΡΙΣΜΕΝΕΣ ΠΕΠΛΕΓΜΕΝΑ – ΘΕΩΡΗΜΑ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗΣ

Κεφάλαιο 23

ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΥΠΟ ΣΥΝΘΗΚΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Κεφάλαιο 13

ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ ΚΑΙ ΣΕΙΡΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

1. Γενικά - Ορισμοί

Έχουμε παρατηρήσει στο κεφάλαιο 10 ότι το σύνολο των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων, που τα ολοκληρώματά τους είναι στοιχειώδεις συναρτήσεις, είναι σχετικά περιορισμένο. Υπάρχουν όμως συναρτήσεις, που δεν ανήκουν στο σύνολο αυτό αλλά η χρησιμότητά τους είναι μεγάλη (βλ. Ελλειπτικά Ολοκληρώματα). Επίσης πολύ λίγων συναρτήσεων γνωρίζουμε όλες τις ιδιότητες, ενώ ακόμη λιγότερων μπορούμε να κάνουμε χρήση των ιδιοτήτων. Για το λόγο αυτό θα ήταν σκόπιμο να εκφράσουμε μια τέτοια συνάρτηση με τη βοήθεια πιο απλών συναρτήσεων, όπως π.χ. ως όριο μιας ακολουθίας ή σειράς απλών συναρτήσεων x^n, *cosnx, sinnx,* $(n \quad \mathbb{N})$, κ.ά.

Οι εφαρμογές των ιδιοτήτων των ακολουθιών και σειρών συναρτήσεων και ειδικότερα των δυναμοσειρών, των σειρών *Taylor* και *Fourier* παρουσιάζουν ενδιαφέρον τόσο θεωρητικό, όπως είναι ο προσδιορισμός των ιδιοτήτων μιας συναρτήσεως από τις ιδιότητες των συναρτήσεων της ακολουθίας ή της σειράς, της οποίας είναι όριο ή άθροισμα, όσο και πρακτικό, όπως είναι ο υπολογισμός ολοκληρωμάτων ή τιμών συναρτήσεων, π.χ. το μήκος τόξου της ελλείψεως, ο αριθμός π κ.ά.

Για συντομία θα συμβολίζουμε το σύνολο των συναρτήσεων που είναι ορισμένες στο σύνολο $X \quad \mathbb{R}$ με $F(X)$. Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων (f_n) από το σύνολο $F(X)$. Θα λέμε ότι το $\alpha \quad X$ είναι ***σημείο συγκλίσεως*** της ακολουθίας, όταν η αριθμητική ακολουθία $\big(f_n(\alpha)\big)_n$ συγκλίνει. Το σύνολο όλων αυτών των σημείων ονομάζεται ***σύνολο συγκλίσεως*** της (f_n).

Έτσι, για παράδειγμα, η ακολουθία (f_n), με $f_n(x) = x^n$, έχει σύνολο συγκλίσεως το διάστημα $(-1, 1]$ (βλ. 3.2), ενώ η (g_n), με $g_n(x) = \dfrac{x}{n^2}$, έχει σύνολο συγκλίσεως το $\mathbb{R}$.

Δίνεται η ακολουθία (f_n) με σύνολο συγκλίσεως το X [προφανώς υποσύνολο του πεδίου ορισμού της ακολουθίας]. Τότε σε κάθε σημείο $x \quad X$ μπορούμε να αντιστοιχίσουμε το όριο $\lim_n f_n(x) \quad \mathbb{R}$, που είναι μονοσήμαντα ορισμένο.

Με τον τρόπο αυτό ορίζουμε τη συνάρτηση

$$f: X \quad \mathbb{R} \quad \text{με} \quad f(x) = \lim_{n} f_n(x),$$

την οποία ονομάζουμε ***όριο της ακολουθίας*** (f_n). Λέμε επίσης ότι η ακολουθία (f_n) ***συγκλίνει στην*** f στο X. Η σύγκλιση αυτή ονομάζεται και *σημειακή σύγκλιση* και συμβολίζεται $f_n \quad f$.

Με άλλα λόγια: Η ακολουθία συναρτήσεων (f_n) ***συγκλίνει*** στην f στο X, όταν για κάθε ένα $x \quad X$ και κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0(\varepsilon, x) \quad \mathbb{N}$ τέτοιο, ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει

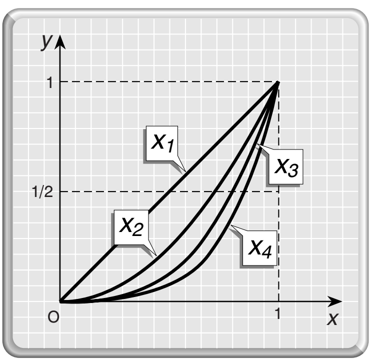
$$f_n(x) - f(x) \quad < \varepsilon.$$

Είναι φανερό ότι ο φυσικός αριθμός n_0 εξαρτάται, γενικά, από το ε και το x και γι’ αυτό γράφουμε $n_0(x, \varepsilon)$.

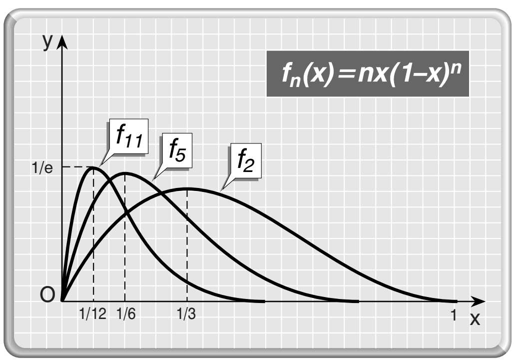
Παράδειγμα 1.1: Η ακολουθία (f_n), με $f_n(x) = x^n$ συγκλίνει στη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \quad x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases} \qquad (\text{σχ.}1)$$

στο $[0, 1]$, αφού για κάθε n είναι $f_n(1) = 1 \quad 1$, $f_n(0) = 0 \quad 0$, ενώ η ακολουθία (x^n) για $0 < x < 1$ συγκλίνει στο 0 (βλ. 3.2). ■



Σχήμα 1



Σχήμα 2

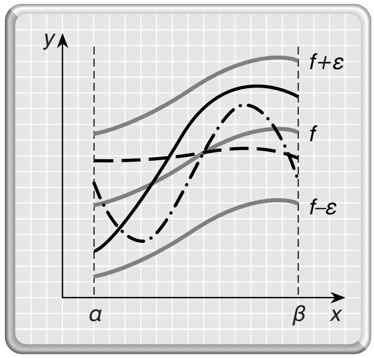
Παράδειγμα 1.2: Η ακολουθία των συναρτήσεων $f_n(x) = nx(1-x)^n$ (σχ. 2) συγκλίνει στη συνάρτηση $f(x) = 0$ στο διάστημα $[0, 1]$, αφού για κάθε n είναι $f_n(1) = f_n(0) = 0$ και για κάθε $x \quad (0, 1)$ ισχύει $nx(1-x)^n \quad 0$. ■

Όπως παρατηρήσαμε πιο πάνω, η σημειακή σύγκλιση χαρακτηρίζεται από το γεγονός ότι το n_0 εξαρτάται τόσο από το ε, όσο και από το x για το οποίο θεωρούμε τη σύγκλιση. Σε αντίθεση με τη σημειακή σύγκλιση είναι πολύ ενδιαφέρον, όπως θα δούμε πιο κάτω, το n_0 να εξαρτάται μόνο από το ε, δηλαδή να είναι ενιαίο για όλα τα x του συνόλου συγκλίσεως.

Θα λέμε ότι η ακολουθία συναρτήσεων (f_n) ***συγκλίνει ομοιόμορφα*** στην f στο X, όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0(\varepsilon)\ \mathbb{N}$ τέτοιο, ώστε να ισχύει

$$f_n(x) - f(x) \quad < \varepsilon \quad \text{για κάθε } n \geq n_0 \quad \text{και κάθε } x \ \ X.$$

Την ομοιόμορφη σύγκλιση της (f_n) στην f στο X τη συμβολίζουμε $f_n \overset{X}{\ } f$ ή, απλά, $f_n \ \ f$ όταν υπονοείται το σύνολο X.



Σχήμα 3

Εποπτικά, η $f_n \overset{X}{\ } f$ σημαίνει ότι για $\varepsilon > 0$ οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f_n(x)$, όταν $n \geq n_0$, βρίσκονται εξολοκλήρου μέσα στη ζώνη που ορίζεται από τις συναρτήσεις $f+\varepsilon$ και $f-\varepsilon$ (σχ. 3).

Η επόμενη πρόταση είναι προφανής.

Πρόταση 1.1: *Αν μια ακολουθία (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στην f στο X, τότε συγκλίνει και σημειακά.*

Το αντίστροφο της προτάσεως δεν ισχύει (βλ. παράδ. 2.1).

2. Κριτήρια ομοιόμορφης συγκλίσεως

Επειδή η ομοιόμορφη σύγκλιση μιας ακολουθίας (f_n) "μεταφέρει", όπως θα δούμε στη συνέχεια, τις βασικές ιδιότητες των συναρτήσεων f_n στο όριό τους f, γι' αυτό θα παραθέσουμε ορισμένα κριτήρια ομοιόμορφης συγκλίσεως.

Πρόταση 2.1: *Η ακολουθία (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στην f στο X, όταν, και μόνον όταν, υπάρχει μηδενική ακολουθία θετικών αριθμών (α_n) και $n_0(\varepsilon)\ \mathbb{N}$ τέτοια, ώστε για κάθε $n \geq n_0(\varepsilon)$ να ισχύει*

$$f_n(x) - f(x) \quad \leq \alpha_n \quad \text{για κάθε } x \ \ X \quad \text{ή} \quad \sup_x \ f_n(x) - f(x) \quad \leq \alpha_n.$$

Απόδειξη: Έστω $f_n \ \ f$ στο X. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0(\varepsilon)$ τέτοιο, ώστε $f_n(x) - f(x) \ < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0(\varepsilon)$ και κάθε $x \ \ X$ ή $\sup_x \ f_n(x) - f(x) \ \leq \varepsilon$. Επομένως, η ακολουθία (α_n), με $\alpha_n := \sup_x \ f_n(x) - f(x)$, είναι μηδενική και $f_n(x) - f(x) \ \leq \alpha_n$ *για κάθε* $n \geq n_0(\varepsilon)$ και κάθε $x \ \ X$.

Το αντίστροφο είναι συνέπεια της παραπάνω αποδείξεως που είναι αντιστρεπτή. ■

Παράδειγμα 2.1: Η ακολουθία των συναρτήσεων $f_n(x)=nx(1-x)^n$ (σχ. 2) συγκλίνει στη συνάρτηση $f(x)=0$ στο $[0,\ 1]$. Η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη.

Πράγματι, οι συναρτήσεις $f_n(x)=nx(1-x)^n$ έχουν μέγιστο $M_n=\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}$, δηλαδή $\sup|f_n(x)-f(x)|=\sup|f_n(x)|=M_n$. Η ακολουθία όμως (M_n) τείνει στο $e^{-1}\neq 0$. Επομένως, αν θέσουμε $\varepsilon<e^{-1}$, τότε για αρκετά μεγάλο n θα υπάρχουν τιμές των συναρτήσεων $>\varepsilon$, δηλαδή δε θα ισχύει ο ορισμός. ■

Παράδειγμα 2.2: Η ακολουθία των συναρτήσεων (f_n), με $f_n(x)=x^n$, (παραδ. 1.1) συγκλίνει στη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}0, & 0\le x<1\\ 1, & x=1\end{cases}$ (σχ.1) στο $[0,\ 1]$. Η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη, αφού $\sup\limits_{0\le x\le 1}|f_n(x)-f(x)|=\sup\limits_{0\le x<1}x^n=1$.

Η ακολουθία όμως συγκλίνει ομοιόμορφα στη συνάρτηση $g(x)=0$ σε κάθε διάστημα της μορφής $[0,\ \alpha]$, με $0<\alpha<1$. Πράγματι, στην περίπτωση αυτή $|x^n-0|\le\alpha^n$ και $\alpha^n\to 0$. ■

Παράδειγμα 2.3: Η ακολουθία των συναρτήσεων (f_n), με $f_n(x)=n\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)$, συγκλίνει στη συνάρτηση $f(x)=x$ στο διάστημα $[0,\ +\infty)$. Η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη σε κάθε φραγμένο διάστημα $[0,\ \alpha]$.

Απόδειξη: Για κάθε $x\ge 0$ ισχύουν οι σχέσεις (βλ. εφαρμογή 8.3.4):

$$x-\frac{x^2}{2n}\le n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)=\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\le\ln e^x=x,$$

από τις οποίες προκύπτει ότι $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=x$. Από τις ισότητες

$$f_n(x)-f(x)=\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)^n-\ln e^x=\ln\frac{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}{e^x}\quad\text{και}\quad\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}{e^x}=0.$$

προκύπτει ότι $\sup\limits_{0\le x}|f_n(x)-f(x)|=+\infty$, που σημαίνει ότι η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη.

Εξάλλου, για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και $x\in[0,\ \alpha]$ ισχύει

$$|f_n(x)-f(x)|=\left|n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)-x\right|\le\frac{x^2}{2n}\le\frac{\alpha^2}{2n}$$

και η ακολουθία $\left(\dfrac{\alpha^2}{2n}\right)$ είναι μηδενική, οπότε η σύγκλιση στο διάστημα $[0,\ \alpha]$ είναι ομοιόμορφη. ■

Στο προηγούμενο κριτήριο γνωρίζαμε το όριο της ακολουθίας των συναρτήσεων. Όπως ήταν φυσικό, ο *Cauchy* διετύπωσε και για την περίπτωση που δε γνωρίζουμε το όριο το σχετικό κριτήριο:

Προταση 2.2 (Κριτήριο Cauchy): *Η ακολουθία των συναρτήσεων* $(f_n(x))$ *συγκλίνει ομοιόμορφα στο* X *μόνον, όταν για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει* $n_0(\varepsilon)\ \ \mathbb{N}$, *ώστε*

(*) $$f_m(x) - f_n(x) \ < \varepsilon \ \text{ για κάθε } m, n \geq n_0(\varepsilon) \ \text{ και κάθε } x \ \ X.$$

Απόδειξη: Έστω f η οριακή συνάρτηση και $f_n \ \ f$. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0(\varepsilon)$ τέτοιο, ώστε

$$f_m(x) - f(x) \ < \frac{\varepsilon}{2} \ \text{ και } \ f_n(x) - f(x) \ < \frac{\varepsilon}{2} \ \text{ για κάθε } m, n \geq n_0(\varepsilon) \ \text{ και κάθε } x \ \ X.$$

Επομένως

$$f_m(x) - f_n(x) \ < \ f_m(x) - f(x) \ + \ f_n(x) - f(x) \ < \varepsilon \ \text{ για κάθε } m, n \geq n_0(\varepsilon) \ \text{ και κάθε } x \ \ X.$$

Από την (*) προκύπτει ότι για κάθε $x \ \ X$ η $(f_n(x))$ είναι ακολουθία *Cauchy* και επομένως συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $f(x)$. Η (*) ισχύει για κάθε $m, \ n \geq n_0(\varepsilon)$. Διατηρούμε το m σταθερό, οπότε έχουμε

$$\varepsilon \geq \lim_{n \ \ +\bullet} \ f_m(x) - f_n(x) \ = \ f_m(x) - f(x) \ .$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει για κάθε $m \geq n_0(\varepsilon)$ και κάθε $x \ \ X$, που σημαίνει ότι η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη. ■

Θεώρημα Dini: *Αν η μονότονη ακολουθία συνεχών συναρτήσεων* f_n *συγκλίνει στη συνεχή συνάρτηση* f *στο συμπαγές σύνολο* K, *τότε η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη.*

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι η ακολουθία είναι αύξουσα, οπότε η ακολουθία $g_n(x) = f(x) - f_n(x) \geq 0$ είναι φθίνουσα και συγκλίνει στη συνάρτηση $g(x) = 0$ στο K. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $g_n(x) \ \ 0$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Για $\xi \ \ K$ υπάρχει δείκτης $m = m(\varepsilon, \xi)$ ώστε $0 \leq g_m(\xi) < \varepsilon$. Επειδή η $g_n(x)$ είναι συνεχής, υπάρχει ανοιχτό διάστημα $\mathrm{U}(\xi) := \mathrm{U}(\xi, \delta)$ τέτοιο, ώστε

(*) $$g_m(x) < \varepsilon \ \text{ για κάθε } \ x \ \ \mathrm{U}(\xi) \ \ K.$$

Τα ανοιχτά διαστήματα $\mathrm{U}(\xi)$, $\xi \ \ K$, αποτελούν μια κάλυψη του συμπαγούς συνόλου K, επομένως (θεώρημα *Heine-Borel* (Ασκ. 2.14)) αρκούν πεπερασμένου πλήθους από αυτά για να καλύψουν το K και έστω $\mathrm{U}_i(\xi_i)$, $i = 1, 2, \ldots, p$, τα διαστήματα αυτά.

Αν συμβολίσουμε με $n_0 = max\{m(\varepsilon, \xi_1), \ldots, m(\varepsilon, \xi_p)\}$, τότε για κάθε $x \ \ K$ υπάρχει $\mathrm{U}_i(\xi_i)$ τέτοιο, ώστε $x \ \ \mathrm{U}_i(\xi_i)$, που σημαίνει $g_{n_0} < \varepsilon$.

Επομένως

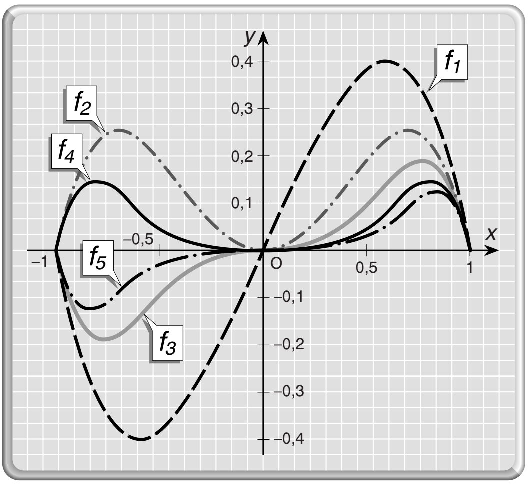
$$0 \le g_n(x) \le g_{n_0} < \varepsilon \quad \text{για κάθε} \quad n > n_0 \quad \text{και κάθε} \quad x \quad K,$$

που σημαίνει ότι $g_n(x)$ 0 στο K. ■

Παράδειγμα 2.4: Η ακολουθία των συναρτήσεων $(f_n(x))$, με $f_n(x) = (1-x^2)x^n$, συγκλίνει ομοιόμορφα στη συνάρτηση $f(x) = 0$ στο $[-1, 1]$ (Σχ. 4).

Πράγματι, για κάθε x $(-1, 1)$ ισχύει $f_n(x)$ 0, ενώ $f_n(-1) = f_n(1) = 0$, *δηλαδή* f_n 0. ■

Η ακολουθία των συνεχών συναρτήσεων $f_n(x)$ είναι φθίνουσα και συγκλίνει στη συνεχή συνάρτηση $f(x) = 0$ στο $[-1, 1]$. Επομένως η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη.



Σχήμα 4

Από τον ορισμό της ομοιόμορφης σύγκλισης προκύπτουν άμεσα οι συνεπαγωγές:

Σ *Αν* $f_n \;^{x}\; f$, *τότε και* $f_n \;^{x}\; f$.

Σ *Αν* $f_n \;^{x}\; f$, *τότε και* $\lambda f_n \;^{x}\; \lambda f$, λ $\mathbb{R}$.

Σ *Αν* $f_n \;^{x}\; f$ *και* $g_n \;^{x}\; g$, *τότε και* $f_n + g_n \;^{x}\; f + g$.

Η τελευταία πρόταση δεν ισχύει γενικά στην περίπτωση του γινομένου των ακολουθιών. Ισχύει όμως κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις τις οποίες θα παρουσιάσουμε εδώ. Για παράδειγμα, οι ακολουθίες (f_n), με $f_n(x) = x + \frac{1}{n}$, και (g_n), με $g_n(x) = \frac{1}{n}$, συγκλίνουν ομοιόμορφα στις συναρτήσεις $f(x) = x$ και $g(x) = 0$ αντίστοιχα, όμως οι ακολουθίες $\left(\frac{1}{n} f_n\right)$ και (f_n^2) δε συγκλίνουν ομοιόμορφα.

Η ακολουθία των συναρτήσεων (f_n) λέμε ότι είναι ***ομοιόμορφα φραγμένη*** στο X, όταν υπάρχει θετικός Μ τέτοιος, ώστε $f_n(x) \leq M$ για κάθε $n \quad \mathbb{N}$ και κάθε $x \quad X$. Για παράδειγμα, η ακολουθία των συναρτήσεων $(sinnx)$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη στο $\mathbb{R}$.

Λήμμα: *Αν η ακολουθία των φραγμένων στο X συναρτήσεων (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στην f στο X, τότε η f είναι φραγμένη και η (f_n) ομοιόμορφα φραγμένη.*

Απόδειξη: Επειδή $f_n \overset{X}{\quad} f$ για $\varepsilon = 1$ υπάρχει $n_0 \quad \mathbb{N}$ ώστε

$$f(x) \;\leq\; f_{n_0}(x) - f(x) \;+\; f_{n_0}(x) \;\leq\; 1 + M_{n_0} \text{ για κάθε } x \quad X,$$

όπου M_{n_0} το φράγμα της συναρτήσεως $f_{n_0}(x)$ στο X, δηλαδή η f είναι φραγμένη στο X. Έτσι, για κάθε $n \geq n_0$ και κάθε $x \quad X$ ισχύει

$$f_n(x) \;\leq\; f_n(x) - f(x) \;+\; f(x) \;\leq\; 1 + 1 + M_{n_0} = 2 + M_{n_0},$$

Επομένως, για κάθε $n \quad \mathbb{N}$ και για κάθε $x \quad X$ ισχύει

$$f_n(x) \;\leq M := max\{M_1, M_2, ..., M_{n_0}, 2 + M_{n_0}\},$$

όπου M_i είναι το φράγμα της συναρτήσεως f_i. Συνεπώς, η ακολουθία είναι ομοιόμορφα φραγμένη. ■

Πρόταση 2.3: *Αν οι ακολουθίες (f_n), (g_n) είναι ομοιόμορφα φραγμένες στο X και συγκλίνουν ομοιόμορφα στις f και g αντίστοιχα στο X, τότε η ακολουθία $(f_n \cdot g_n)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην $f \cdot g$ στο X.*

Απόδειξη: Αν M_1 και M_2 είναι τα φράγματα των ακολουθιών (f_n) και (g_n) αντίστοιχα, τότε για κάθε $n \quad \mathbb{N}$ και κάθε $x \quad X$ ισχύουν

$$f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x) \;\leq\; f_n(x)g_n(x) - f_n(x)g(x) \;+\; f_n(x)g(x) - f(x)g(x) \;\leq$$

$$\leq\; f_n(x) \quad g_n(x) - g(x) \;+\; g(x) \quad f_n(x) - f(x) \;\leq$$

$$M_1 \; g_n(x) - g(x) \;+ M_2 \; f_n(x) - f(x) \;.$$

Για $\varepsilon > 0$ και n αρκετά μεγάλο οι τελευταίες απόλυτες τιμές είναι μικρότερες από ε, οπότε $f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x) \leq M_1\varepsilon + M_2\varepsilon$, που σημαίνει ότι η ακολουθία του γινομένου των συναρτήσεων συγκλίνει ομοιόμορφα. ■

Η πρόταση ισχύει ειδικότερα, όταν η (g_n) είναι μια αριθμητική ακολουθία (α_n), που συγκλίνει στο α.

Η προϋπόθεση ότι οι ακολουθίες είναι ομοιόμορφα φραγμένες είναι απαραίτητη. Πράγματι, η σταθερή ακολουθία $f_n(x)=(1-x^2)^{-1}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στη συνάρτηση $f(x)=(1-x^2)^{-1}$ στο $[0, 1)$ και η ακολουθία $g_n(x)=(1-x^2)x^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στη συνάρτηση $g(x)=0$ στο $[0, 1)$ (παράδ. 2.4). Το γινόμενό τους $f_n(x)g_n(x)=x^n$ δε συγκλίνει ομοιόμορφα στην $f(x)g(x)=0$. Αυτό συμβαίνει, γιατί η συνάρτηση $(1-x^2)^{-1}$ δεν είναι φραγμένη στο $[0, 1)$.

3. Συνέπειες της ομοιόμορφης συγκλίσεως ακολουθίας

Όπως αναφέραμε στην εισαγωγή αυτού του κεφαλαίου, ένας από τους στόχους μας είναι να μελετήσουμε τις ιδιότητες της οριακής συναρτήσεως μιας ακολουθίας συναρτήσεων με τη βοήθεια των ιδιοτήτων των συναρτήσεων της ακολουθίας. Οι επόμενες προτάσεις δίνουν τις προϋποθέσεις κάτω από τις οποίες η συνέχεια, η παραγωγισιμότητα και η ολοκληρωσιμότητα στων συναρτήσεων "μεταφέρονται" στην οριακή συνάρτηση.

Πρόταση 3.1: *Αν* $f_n \overset{X}{\ } f$ *και οι συναρτήσεις* f_n *είναι συνεχείς στο* $\xi \ \ X$, *τότε και η συνάρτηση* f *είναι συνεχής στο* ξ. *Ειδικότερα, αν οι* f_n *είναι συνεχείς στο* X, *τότε και η* f *είναι συνεχής στο* X.

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon>0$. Επειδή $f_n \ \ f$ υπάρχει $n_0 \ \ \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $x \ \ X$ να ισχύει

$$f_{n_0}(x)-f(x) \ \ <\frac{\varepsilon}{3}.$$

Επειδή η $f_{n_0}(x)$ είναι συνεχής στο ξ, υπάρχει περιοχή $U(\xi, \delta)$ τέτοια, ώστε για κάθε $x \ \ U(\xi, \delta) \ \ X$ να ισχύει

$$f_{n_0}(x)-f_{n_0}(\xi) \ \ <\frac{\varepsilon}{3}.$$

Επομένως για το δοθέν $\varepsilon>0$ υπάρχει περιοχή $U(\xi, \delta)$ τέτοια, ώστε για κάθε $x \ \ U(\xi, \delta) \ \ X$ να ισχύει

$$f(x)-f(\xi) \ \ \leq \ f_{n_0}(x)-f(x) \ + \ f_{n_0}(x)-f_{n_0}(\xi) \ + \ f_{n_0}(\xi)-f(\xi) \ <\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}<\varepsilon,$$

που σημαίνει ότι η f είναι συνεχής στο ξ. ■

Η ακολουθία των συνεχών συναρτήσεων $f_n(x)=x^n$ δε συγκλίνει ομοιόμορφα στο διάστημα $[0, 1]$ γιατί η οριακή συνάρτηση δεν είναι συνεχής στο διάστημα αυτό.

Επίσης, η συνθήκη $f_n \overset{X}{\ } f$ είναι είναι ικανή για να είναι η f συνεχής, δεν είναι όμως αναγκαία. Για παράδειγμα, η ακολουθία του παραδείγματος 2.1 συγκλίνει, όχι ομοιόμορφα, στη συνεχή συνάρτηση $f(x)=0$.

Πρόταση 3.2: *Αν $f_n \rightrightarrows f$ στο $[\alpha, \beta]$ και οι συναρτήσεις f_n είναι ολοκληρώσιμες στο $[\alpha, \beta]$, τότε και η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha, \beta]$ και*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\alpha^\beta f_n(x)dx = \int_\alpha^\beta \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx\ .$$

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή $f_n \rightrightarrows f$ στο $[\alpha, \beta]$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$f_n(x) - \varepsilon \le f(x) \le f_n(x) + \varepsilon \quad \text{για κάθε} \quad n \ge n_0 \quad \text{και} \quad x \in [\alpha, \beta].$$

Επομένως η f είναι φραγμένη στο $[\alpha, \beta]$ (βλ. επίσης λήμμα) και

$$(*) \quad \int_\alpha^\beta f_n(x)dx - \varepsilon(\beta-\alpha) = \sigma(f_n-\varepsilon) \le \sigma(f) \le \Sigma(f) \le \Sigma(f_n+\varepsilon) = \int_\alpha^\beta f_n(x)dx + \varepsilon(\beta-\alpha),$$

όπου $\sigma(f)$, $\Sigma(f)$ είναι το κατώτερο και ανώτερο ολοκλήρωμα της f, (βλ. 10.2)

Επομένως $0 \le \Sigma(f) - \sigma(f) \le 2\varepsilon(\beta-\alpha)$, που σημαίνει ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha, \beta]$ με $\Sigma(f) = \sigma(f) = \int_\alpha^\beta f(x)dx$.

Τέλος, από την (*) προκύπτει ότι για κάθε $n \ge n_0$ ισχύει

$$\left| \int_\alpha^\beta f_n(x)dx - \int_\alpha^\beta f(x)dx \right| \le \varepsilon(\beta-\alpha), \text{ δηλαδή } \int_\alpha^\beta \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx. \ \blacksquare$$

Η πρόταση 3.2 δηλώνει ότι στην περίπτωση ομοιόμορφης συγκλίσεως μπορούμε να ολοκληρώσουμε μια σειρά όρου προς όρον ή, πιο απλά, *το όριο του ολοκληρώματος ισούται με το ολοκλήρωμα του ορίου.*

Η συνθήκη της ομοιόμορφης συγκλίσεως είναι ικανή για την πρόταση 3.2 δεν είναι όμως αναγκαία. Για παράδειγμα, η ακολουθία των συναρτήσεων του παραδείγματος 2.1 συγκλίνει, όχι ομοιόμορφα, στη συνάρτηση $f(x) = 0$ στο $[0, 1]$ και ισχύει $\lim \int_0^1 nx(1-x)^n dx = \lim \dfrac{n}{(n+2)(n+1)} = \int_0^1 0dx = 0.$.

Παράδειγμα 3.1: Η ακολουθία των συναρτήσεων

$$f_n(x) = \frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x} = e^x \frac{n}{n+x} + \frac{x}{n+x} e^{-x}$$

συγκλίνει στην e^x για κάθε $x \in [0, 1]$. Η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη, αφού για κάθε $x \in [0, 1]$ ισχύει $\left|f_n(x) - e^x\right| = x \dfrac{e^x - e^{-x}}{n+x} \le \dfrac{e}{n}$.

Επίσης και η ακολουθία των συναρτήσεων $(1+x^2)f_n(x) \quad (1+x^2)e^x$. Επομένως ισχύει η ισότητα

$$\lim_{n} \int_0^1 (1+x^2)f_n(x)dx = \int_0^1 (1+x^2)e^x dx = 2e-3.$$

Πόρισμα 3.1: *Με τις προϋποθέσεις της προτάσεως 3.2 η ακολουθία των συναρτήσεων* (F_n), *με* $F_n(x) = \int_\alpha^x f_n(t)dt$, $t \quad [\alpha, \beta]$, *συγκλίνει ομοιόμορφα στη συνάρτηση* $F(x) = \int_\alpha^x f(t)dt$ *στο* $[\alpha, \beta]$.

Απόδειξη: Για κάθε $x \quad [\alpha, \beta]$, σύμφωνα με την πρόταση 3.2 για το διάστημα $[\alpha, x]$, ισχύει $\lim_{n} F_n(x) = F(x)$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε, επειδή $f_n \quad f$, υπάρχει $n_0(\varepsilon) \quad \mathbb{N}$ τέτοιο, ώστε για κάθε $n, m \geq n_0(\varepsilon)$ και όλα τα $t \quad [\alpha, \beta]$ να ισχύει $f_n(t) - f_m(t) \leq \dfrac{\varepsilon}{\beta - \alpha}$.

Επομένως

$$F_n(x) - F_m(x) \leq \int_\alpha^\beta f_n(t) - f_m(t) \, dt < \frac{\varepsilon}{\beta-\alpha}(\beta-\alpha) = \varepsilon,$$

δηλαδή η (F_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[\alpha, \beta]$ (κριτήριο *Cauchy*). ■

Προκειμένου για την παραγώγιση μιας ακολουθίας συναρτήσεων όρου προς όρον ισχύει η πρόταση:

Πρόταση 3.3:* *Δίνεται η ακολουθία συναρτήσεων* (f_n), *οι οποίες έχουν συνεχείς παραγώγους στο διάστημα* $[\alpha, \beta]$, *και της οποίας η ακολουθία των παραγώγων* (f_n) *συγκλίνει ομοιόμορφα στο* $[\alpha, \beta]$. *Αν υπάρχει σημείο* $\xi \quad [\alpha, \beta]$ *ώστε η ακολουθία* $(f_n(\xi))$ *να συγκλίνει, τότε*

(α) Η (f_n) *συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια παραγωγίσιμη συνάρτηση* f *στο* $[\alpha, \beta]$ *και*

(β) Η (f_n) *συγκλίνει ομοιόμορφα στην παράγωγο* f.

Απόδειξη: Ας συμβολίσουμε με $g(x)$, $x \quad [\alpha, \beta]$, τη συνάρτηση προς την οποία συγκλίνει ομοιόμορφα η ακολουθία $(f_n(x))$, η οποία είναι ως εκ τούτου συνεχής (πρότ. 3.1).

Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή η $(f_n(\xi))$ συγκλίνει, υπάρχει $n_0(\varepsilon) \quad \mathbb{N}$ τέτοιο, ώστε

$$f_m(\xi) - f_n(\xi) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{για κάθε} \quad m, n \geq n_0.$$

---

*) Η πρόταση ισχύει και πιο γενικά χωρίς την προϋπόθεση της συνέχειας των f_n'.

Εξάλλου, επειδή η (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα έπεται (πρόταση 2.1) ότι

$$|f_m(x)-f_n(x)| \le \sup_{[\alpha,\,\beta]} |f_m(x)-f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2(\beta-\alpha)} \quad \text{για κάθε } m, n \ge n_0 \text{ και } x \in [\alpha, \beta].$$

Αν εφαρμόσουμε το θεώρημα μέσης τιμής για τη συνάρτηση $f_m - f_n$ *για* το ξ και $x \in [\alpha, \beta]$, τότε παίρνουμε

$$\left|\big(f_m(x)-f_n(x)\big)-\big(f_m(\xi)-f_n(\xi)\big)\right| \le \frac{\varepsilon}{2(\beta-\alpha)}\,|x-\xi| \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Επομένως για κάθε $m, n \ge n_0$ και κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ ισχύει

$$|f_m(x)-f_n(x)| \le \left|\big(f_m(x)-f_n(x)\big)-\big(f_m(\xi)-f_n(\xi)\big)\right| + |f_m(\xi)-f_n(\xi)| \le \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

που σημαίνει η (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[\alpha, \beta]$ σε μια συνάρτηση f.

Εξάλλου $(f_n') \to g$ σε κάθε υποδιάστημα του $[\alpha, \beta]$. Επομένως για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, σύμφωνα με το πόρ. 3.1 και επειδή οι f_n' είναι συνεχείς, ισχύει

$$\lim_{n} \int_{\xi}^{x} f_n'(t)dt = \lim_{n}[f_n(x)-f_n(\xi)] = \int_{\xi}^{x} g(t)dt.$$

Από την τελευταία ισότητα προκύπτει ότι για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ ισχύει

$$f(x) - f(\xi) = \int_{\xi}^{x} g(t)dt \quad \text{ή} \quad f'(x) = g(x),$$

δηλαδή η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = g(x)$. ■

Η σύγκλιση της ακολουθίας των παραγωγίσιμων συναρτήσεων (f_n) στη συνάρτηση f, ακόμη και η ομοιόμορφη, δε συνεπάγεται τη σύγκλιση, πολύ περισσότερο την ομοιόμορφη σύγκλιση, της ακολουθίας (f_n'). Για παράδειγμα, η ακολουθία $\left(\frac{\cos nx}{n}\right)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στη συνάρτηση $f(x) = 0$ στο $[0, 2\pi]$, ενώ η ακολουθία των παραγώγων $(-\sin nx)$ δε συγκλίνει, ούτε σημειακά γιατί για $x = \pi/2$ δίνει την ακολουθία $-1, 0, 1, 0, \ldots$

Η συνθήκη $f_n' \to f'$ είναι ικανή όχι όμως και αναγκαία για να ισχύει η πρόταση. Για παράδειγμα, η ακολουθία των παραγωγίσιμων συναρτήσεων

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\, e^{-n^2x^2}$$

συγκλίνει και μάλιστα ομοιόμορφα στη συνάρτηση $f(x) = 0$ στο διάστημα $[-1, 1]$ και η ακολουθία των παραγώγων της συγκλίνει στην $f'(x) = 0$. Η τελευταία όμως σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη.

Η ομοιόμορφη σύγκλιση της ακολουθίας των παραγώγων είναι απαραίτητη, διαφορετικά η f δε θα είναι παραγωγίσιμη ή $f' \neq g$.

Πόρισμα 3.2: *Το όριο g μιας ομοιόμορφα συγκλίνουσας ακολουθίας (g_n) παραγωγίσιμων συναρτήσεων σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ είναι παράγωγος μιας συναρτήσεως, δηλαδή έχει αρχική.*

Απόδειξη: Για κάθε $n \quad \mathbb{N}$ συμβολίζουμε με $f_n(x)$ εκείνη την αρχική της g_n για την οποία ισχύει $f_n(\alpha) = 0$, οπότε $f_n(\alpha) \quad 0$. Εξάλλου $f_n = g_n \quad g$ στο $[\alpha, \beta]$. Επομένως ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις της προτάσεως 3.3 και ως εκ τούτου η (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f, για την οποία ισχύει $f = g$. ■

4. Σειρές συναρτήσεων

Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων (f_n), ορισμένων στο σύνολο Y. Ονομάζουμε ***σειρά συναρτήσεων*** ορισμένων στο Y, την ακολουθία των *μερικών αθροισμάτων*

$$S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x), \quad x \quad Y,\ n = 1, 2, \ldots.$$

και την οποία συμβολίζουμε

$$\sum_{n=1} f_n(x) \quad ή \quad f_1(x) + f_2(x) + \ldots$$

Ισχύουν και εδώ όλες οι παρατηρήσεις για τους διάφορους τρόπους συμβολισμού που έχουμε περιγράψει στο κεφάλαιο 12.

Ονομάζουμε *σύνολο συγκλίσεως* της σειράς $\sum f_n(x)$ το σύνολο συγκλίσεως X της ακολουθίας των συναρτήσεων (S_n) και *άθροισμα* της σειράς τη συνάρτηση $f(x)$ προς την οποία συγκλίνει η ακολουθία αυτή. Στην περίπτωση αυτή γράφουμε

$$\sum f_n(x) = f(x), \quad x \quad X, \text{ ή, πιο απλά, } \quad \sum f_n = f.$$

Αν η ακολουθία (S_n) συγκλίνει σημειακά (αντ. ομοιόμορφα) στη συνάρτηση f στο X, τότε λέμε ότι η σειρά συγκλίνει σημειακά (αντ. ομοιόμορφα) στη συνάρτηση $f(x)$ στο X. Αν, τέλος, συγκλίνει η σειρά των απόλυτων τιμών των συναρτήσεων $\sum f_n(x)$, τότε λέμε ότι η σειρά *συγκλίνει απολύτως*.

5. Ομοιόμορφη σύγκλιση σειράς συναρτήσεων

Από τον τρόπο που ορίστηκε το άθροισμα μιας σειράς συναρτήσεων, ως όριο της ακολουθίας των συναρτήσεων $(S_n(x))$, έπεται ότι ισχύουν όλες οι προτάσεις και κριτήρια, που έχουμε αναφέρει για τις ακολουθίες. Για παράδειγμα:

Σ *Αν η σειρά συναρτήσεων* $\sum f_n(x)$ *συγκλίνει ομοιόμορφα στην* $f(x)$ *στο* X, *τότε η ακολουθία των υπολοίπων* $r_n(x) = \sum_{k=n+1} f_k(x)$ *συγκλίνει ομοιόμορφα στο μηδέν.*

Πράγματι, αφού για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0(\varepsilon) \quad \mathbb{N}$, ώστε

$$f(x) - S_n(x) \ = \ r_n(x) \ < \varepsilon \quad \text{για κάθε} \quad n > n_0(\varepsilon) \quad \text{και κάθε} \quad x \quad X.$$

Πρόταση 5.1 (Κριτήριο Cauchy): *Η σειρά* $\sum f_n(x)$ *συγκλίνει ομοιόμορφα στο* X *μόνον, όταν για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει* $n_0(\varepsilon)$ $\mathbb{N}$, *ώστε*

$$S_m(x) - S_n(x) \quad f_{m+1}(x) + \ldots + f_n(x) \quad < \varepsilon \text{ για κάθε } m,\, n > n_0(\varepsilon) \text{ και κάθε } x \quad X.$$

Η πρόταση είναι άμεση συνέπεια του κριτηρίου *Cauchy* (πρόταση 2.2) για την ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $(S_n(x))$.

Πρόταση 5.2 (Κριτήριο Weierstrass): *Δίνονται οι σειρές συναρτήσεων* $\sum f_n$ *και* $\sum \varphi_n$ *ορισμένες στο* X*. Αν*

$$f_n(x) \quad \leq \varphi_n(x) \quad \text{για κάθε } n \quad \mathbb{N} \quad \text{και κάθε } x \quad X$$

και η σειρά $\sum \varphi_n$ *συγκλίνει ομοιόμορφα στο* X*, τότε και η σειρά* $\sum f_n$ *συγκλίνει ομοιόμορφα στο* X*.*

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$. Σύμφωνα με το κριτήριο *Cauchy* για τη σειρά $\sum \varphi_n$ υπάρχει $n_0(\varepsilon)$ $\mathbb{N}$, *ώστε*

$$\varphi_{m+1}(x) + \ldots + \varphi_n(x) < \varepsilon \quad \text{για κάθε } m,\, n > n_0(\varepsilon) \quad \text{και κάθε } x \quad X.$$

Επομένως για κάθε $m,\, n > n_0(\varepsilon)$ και κάθε x X ισχύει

$$f_{m+1}(x) + \ldots + f_n(x) \quad \leq \quad f_{m+1}(x) \quad + \ldots + \quad f_n(x) \qquad \varphi_{m+1}(x) + \ldots + \varphi_n(x) < \varepsilon,$$

που σημαίνει ότι η σειρά $\sum f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα. ■

Στην περίπτωση που η σειρά $\sum \varphi_n$ είναι συγκλίνουσα σειρά αριθμών, τότε προφανώς η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη και το κριτήριο παίρνει τη μορφή:

Πόρισμα 5.1: *Αν* $f_n(x) \leq \alpha_n$ *για κάθε* n $\mathbb{N}$ *και* x X *και συγκλίνει η σειρά* $\sum \alpha_n$, *τότε η σειρά* $\sum f_n(x)$ *συγκλίνει (απολύτως και) ομοιόμορφα στο* X*.*

Παράδειγμα 5.1: Η σειρά $\sum\limits_{n=1} (-1)^{n+1} \dfrac{x^n}{n} = \dfrac{x}{1} - \dfrac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n+1} \dfrac{x^n}{n} + \ldots$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα $[0,\, \alpha]$, $\alpha < 1$, αφού για κάθε n $\mathbb{N}$ και x $[0,\, \alpha]$ ισχύει $f_n(x) \quad = \dfrac{x^n}{n} \quad \dfrac{\alpha^n}{n}$ και η σειρά $\sum \dfrac{\alpha^n}{n}$ συγκλίνει. ■

Παράδειγμα 5.2: Η σειρά $\sum\limits_{n=1} f_n(x)$, όπου $f_n(x) = \dfrac{x^n \ln x}{n}$, όταν $0 < x \leq 1$, και $f_n(0) = 0$, συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,\, 1]$. Πράγματι, για κάθε x $[0,\, 1]$ ισχύει