



ΓΕΩΡΓΙΟΥ Ν. ΠΑΝΤΕΛΙΔΗ
ΚΑΘΗΓΗΤΗ Ε.Μ. ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ

ΑΝΑΛΥΣΗ

ΤΕΥΧΟΣ Γ΄

 ΕΚΔΟΣΕΙΣ
ΖΗΤΗ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ

Κάθε γνήσιο αντίτυπο φέρει την υπογραφή του συγγραφέα

ISBN set 960-431-662-1

ISBN τ.Γ 960-431-661-3

© Copyright: Γ. Παντελίδης, Εκδόσεις Ζήτη, Νοέμβριος 2001, Θεσσαλονίκη

Το παρόν έργο πνευματικής ιδιοκτησίας προστατεύεται κατά τις διατάξεις του Ελληνικού νόμου (Ν.2121/1993 όπως έχει τροποποιηθεί και ισχύει σήμερα) και τις διεθνείς συμβάσεις περί πνευματικής ιδιοκτησίας. Απαγορεύεται απολύτως η άνευ γραπτής άδειας του εκδότη κατά οποιοδήποτε τρόπο ή μέσο αντιγραφή, φωτοανατύπωση και εν γένει αναπαραγωγή, εκμίσθωση ή δανεισμός, μετάφραση, διασκευή, αναμετάδοση στο κοινό σε οποιαδήποτε μορφή (ηλεκτρονική, μηχανική ή άλλη) και η εν γένει εκμετάλλευση του συνόλου ή μέρους του έργου.



www.ziti.gr

**Φωτοστοιχειοθεσία
Εκτύπωση**

Π. ΖΗΤΗ & Σια ΟΕ

18ο χλμ Θεσ/νίκης-Περαιάς

Τ.Θ. 171 • Νέοι Επιβάτες Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19

Τηλ.: 03920 72.222 (5 γραμ.) - Fax: 03920 72.229

e-mail: info@ziti.gr

Βιβλιοπωλείο

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

Αρμενοπούλου 27 • 546 35 Θεσσαλονίκη

Τηλ. 0310 203.720, Fax 0310 211.305

e-mail: sales@ziti.gr

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η αυξανόμενη σημασία των Μαθηματικών στο σύγχρονο κόσμο κατοπτρίζεται έντονα στο ενδιαφέρον των επιστημόνων να εισάγουν τα Μαθηματικά στις σπουδές τους και να μαθηματοποιήσουν την επιστήμη τους. Κατά το τελευταίο τέταρτο του 20ου αιώνα οι θετικές επιστήμες παρουσίασαν μια εντυπωσιακή ανάπτυξη, σε έκταση και βάθος. Οι μαθηματικές τεχνικές έχουν διεισδύσει σε επιστημονικές περιοχές εκτός της μαθηματικής Επιστήμης, όπως π.χ. στη Φυσική, στην Τεχνολογία, στη Βιολογία ακόμη και στην Οικονομία και στις άλλες Κοινωνικές Επιστήμες. Ηλεκτρονικοί υπολογιστές και υπολογιστικές τεχνικές δίνουν ερευνητικά ερεθίσματα σε περιοχές, των οποίων η σημασία για τα ίδια τα Μαθηματικά και για άλλες Επιστήμες είναι πολύ μεγάλη. Έτσι σήμερα μπορούμε να πούμε ότι **η υψηλή Τεχνολογία είναι μαθηματική Τεχνολογία** και ως εκ τούτου δεν μπορεί να υπάρξει σημαντική Τεχνολογική εξέλιξη χωρίς τη βαθύτερη γνώση των Μαθηματικών.

Το τεύχος **ΑΝΑΛΥΣΗ Γ** μαζί με τα τεύχη **ΑΝΑΛΥΣΗ Α** και **ΑΝΑΛΥΣΗ Β** πραγματεύονται το Διαφορικό και Ολοκληρωτικό Λογισμό συναρτήσεων μιας και πολλών μεταβλητών και αποτελούν επεξεργασία και βελτίωση των βιβλίων ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ I & II και III (Εκδόσεων ΖΗΤΗ, 1989-1996) και είναι εμπλουτισμένα με περισσότερα κατάλληλα επιλεγμένα παραδείγματα. Περιλαμβάνουν την ύλη της ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ που διδάσκεται στα Μαθηματικά και Τεχνολογικά Τμήματα των Πανεπιστημίων και Πολυτεχνείων. Το βιβλίο απευθύνεται και στους πτυχιούχους των Τμημάτων αυτών που ασκούν ήδη το επάγγελμά τους, γιατί αποτελεί ένα χρήσιμο βιβλίο αναφοράς. Η κατανομή της ύλης στα τρία τεύχη ανταποκρίνεται στην αντίστοιχη κατανομή της ύλης στα εξάμηνα 1^ο, 2^ο και 3^ο του Τμήματος Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Εθνικού Μετσοβίου Πολυτεχνείου.

Σε όλο το βιβλίο όταν χρησιμοποιούμε σχέσεις, προτάσεις και έννοιες που είναι γνωστές από το Λύκειο δεν τις σχολιάζουμε, εφόσον θεωρούμε ότι οι σχολικές γνώσεις είναι ικανοποιητικές. Παραθέτουμε πολλά λυμένα παραδείγματα, που η γνώση τους είναι απαραίτητη για την κατανόηση της ύλης. Ορισμένα από αυτά θα μπορούσαν να αποτελούν προτάσεις ή πορίσματα στο αντίστοιχο κεφάλαιο. Πολλές ασκήσεις αποτελούν σημαντικό στοιχείο της ύλης του βιβλίου και γι' αυτό, όταν είναι απαραίτητο, θα παραπέμπουμε σ' αυτές.

Στο τέλος ορισμένων κεφαλαίων υπάρχουν παραρτήματα (με σκιασμένο περιθώριο), όπου παρατίθενται αποδείξεις και σχόλια, που θεωρούμε ότι δεν είναι απαραίτητα σε πρώτη ανάγνωση και ενδιαφέρουν εκείνους που θα ήθελαν να εμβαθύνουν στα περιεχόμενα του αντίστοιχου κεφαλαίου.

Η παραπομπή «η πρόταση 5.3.2» σημαίνει «η πρόταση 3.2 του κεφαλαίου 5», ενώ «η πρόταση 6.4» σημαίνει «η πρόταση 6.4 της παραγράφου αυτής» και «η §7.3» η παράγραφος 3 του κεφαλαίου 7. Η αρίθμηση των κεφαλαίων των τριών τευχών είναι ενιαία. Στο τεύχος Α περιλαμβάνονται τα κεφάλαια 1-12, στο τεύχος Β τα κεφάλαια 13-24 και στο Γ τα κεφάλαια 25-29.

Ειδικότερα, στο ανά χείρας τεύχος Γ περιλαμβάνονται τα κεφάλαια 25 (Επικαμπύλια Ολοκληρώματα), 26 (Διπλό Ολοκλήρωμα), 27 (Τριπλό και Πολλαπλό Ολοκλήρωμα), 28 (Επιφανειακά Ολοκληρώματα) και 29 (Ολοκληρωματικοί Τύποι). Η μελέτη των διανυσματικών πεδίων και οι εφαρμογές τους περιλαμβάνονται στο τελευταίο κεφάλαιο.

Επειδή η αρίθμηση των κεφαλαίων των τριών τευχών (Α, Β & Γ) είναι ενιαία η παραπομπή σε κεφάλαιο και παράγραφο θα είναι ενιαία και για τα τρία τεύχη, οπότε «η πρόταση 5.3.2» σημαίνει «η πρόταση 3.2 του κεφαλαίου 5»

Θέλω για μια ακόμη φορά να ευχαριστήσω θερμά τον Εκδοτικό Οίκο ΖΗΤΗ και τους συνεργάτες του για την εξαιρετική εμφάνιση του βιβλίου αυτού, που, επαναλαμβάνω, ήταν συνέπεια της διάθεσης συνεργασίας τους, της υπομονής τους και της εμπειρίας τους.

Αθήνα, Οκτώβριος 2001

Γεώργιος Ν. Παντελίδης

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κεφάλαιο 25

ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

1. Επικαμπύλιο Ολοκλήρωμα 1ου είδους	7
2. Εφαρμογές του Επικαμπύλιου Ολοκληρώματος 1ου είδους	12
3. Διανυσματικά πεδία	16
4. Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα 2ου είδους	19
5. Επικαμπύλια ολοκληρώματα ανεξάρτητα από το δρόμο ολοκλήρωσης	27
6. Το θεώρημα διατηρήσεως της ενέργειας	43
7. Παράγωγος επικαμπύλιου ολοκληρώματος που εξαρτάται από παράμετρο	45
Ασκήσεις	46

Κεφάλαιο 26

ΤΟ ΔΙΠΛΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

1. Σύνολα μηδενικού μέτρου του \mathbb{R}^2	49
2. Το διπλό ολοκλήρωμα	50
3. Κριτήρια ολοκληρωσιμότητας και συνέπειές τους	54
4. Το θεώρημα Fubini	56
5. Ολοκλήρωση σε Jordan μετρήσιμα σύνολα	62
6. Υπολογισμός του διπλού ολοκληρώματος	69
7. Αλλαγή μεταβλητών στο διπλό ολοκλήρωμα	74
8. Εφαρμογές του διπλού ολοκληρώματος	85
9. Ο τύπος του Green	91
10. Το διπλό ολοκλήρωμα ως συνάρτηση των ορίων του	97
11. Γενικευμένα διπλά ολοκληρώματα	100
Ασκήσεις	110
Παράρτημα.....	117

Κεφάλαιο 27**ΤΟ ΤΡΙΠΛΌ ΟΛΟΚΛΉΡΩΜΑ - ΠΟΛΛΑΠΛΆ ΟΛΟΚΛΗΡΏΜΑΤΑ**

1. Σύνολα μηδενικού μέτρου	127
2. Ορισμός του τριπλού ολοκληρώματος	128
3. Υπολογισμός του τριπλού ολοκληρώματος	130
4. Αλλαγή μεταβλητών στο τριπλό ολοκλήρωμα	134
5. Εφαρμογές του τριπλού ολοκληρώματος	137
6. Το τριπλό ολοκλήρωμα ως συνάρτηση των ορίων του	141
7. Γενικευμένα τριπλά ολοκληρώματα	142
8. Το πολλαπλό ολοκλήρωμα	144
Ασκήσεις	147

Κεφάλαιο 28**ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΆ ΟΛΟΚΛΗΡΏΜΑΤΑ**

1. Εμβαδόν επιφάνειας	149
2. Το επιφανειακό ολοκλήρωμα 1ου είδους	153
3. Επιφανειακό ολοκλήρωμα 2ου είδους	158
Ασκήσεις	165

Κεφάλαιο 29**ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΌΙ ΤΎΠΟΙ**

1. Απόκλιση και περιστροφή διανυσματικού πεδίου	169
2. Θεώρημα Stokes	172
3. Θεώρημα Gauss	178
4. Ειδικά διανυσματικά πεδία	187
Ασκήσεις	193

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	197
---------------------------	-----

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΟΝΟΜΑΤΩΝ	199
---------------------------------	-----

ΛΗΜΜΑΤΟΛΟΓΙΟ	199
---------------------------	-----

Κεφάλαιο 25

ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

1. Επικαμπύλιο Ολοκλήρωμα 1ου είδους

Θεωρούμε ένα υλικό σύρμα \widehat{AB} με αμελητέο πάχος, που δεχόμαστε ότι είναι το ίχνος μίας ευθυγραμμίσιμης καμπύλης, όπως, πιο απλά θα λέγαμε, μια υλική γραμμή. Χάρην απλότητας θα θεωρήσουμε ότι η καμπύλη καταρχάς είναι επίπεδη, δηλαδή

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}, \quad t \in [\alpha, \beta].$$

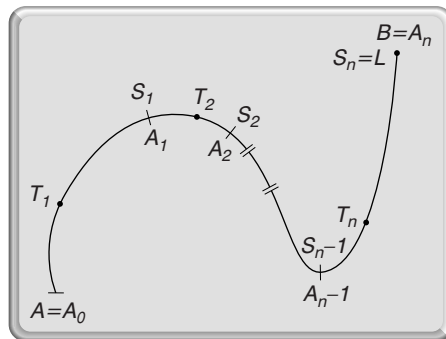
Για ένα σημείο T του \widehat{AB} θεωρούμε ένα τμήμα S αυτού, που περιέχει το T και έχει μήκος Δs και μάζα Δm . Ονομάζουμε μέση πυκνότητα^(*) του τμήματος S το πηλίκο $\frac{\Delta s}{\Delta m}$. Όταν το τμήμα S συρρικνώνεται στο σημείο T , οπότε τα Δs και Δm τείνουν στο μηδέν, υπάρχει η οριακή τιμή του κλάσματος $\frac{\Delta s}{\Delta m}$ και είναι πεπερασμένη, τότε ονομάζουμε την οριακή αυτή τιμή γραμμική πυκνότητα^(*) στο σημείο T της υλικής γραμμής.

Υποθέτουμε ότι σε κάθε σημείο T του \widehat{AB} με συντεταγμένες x, y δίνεται η γραμμική πυκνότητα $f(x, y)$ της υλικής γραμμής. Θα επιδιώξουμε κάτω από κατάλληλες συνθήκες, να ορίσουμε (υπολογίσουμε) τη συνολική μάζα του σύρματος.

Θεωρούμε πάνω στο \widehat{AB} τα σημεία $A_0 = A, A_1, \dots, A_{n-1}, A_n = B$, που διαιρούν το τόξο \widehat{AB} στα τμήματα $\widehat{A_{k-1}B_k}$ $k = 1, 2, \dots, n$, με μήκη Δs_k αντίστοιχα.

Τα σημεία $A_k(x_k, y_k)$, $k = 0, 1, \dots, n$, αποτελούν μία διαμέριση d_n του \widehat{AB} , για

την οποία συμβολίζουμε $\mu(d_n) = \max\{\Delta s_k; k = 1, \dots, n\}$. Αν υποθέσουμε ότι σε



Σχήμα 1

^{*}) Ανάλογοι ορισμοί ισχύουν και για άλλα βαθμωτά πεδία

κάθε ένα από τα τμήματα $\widehat{A_{k-1}A_k}$ η πυκνότητα είναι σταθερή και ίση με εκείνη στο τυχαίο σημείο $T_k(\xi_k, \eta_k)$ του $\widehat{A_{k-1}A_k}$, δηλαδή $f(\xi_k, \eta_k)$, τότε η μάζα του σύρματος προσεγγίζεται από το άθροισμα

$$(1) \quad \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta s_k.$$

Στο παραπάνω άθροισμα (1) μπορούμε να φτάσουμε χωρίς να συνδέσουμε τη συνάρτηση $f(x, y)$ με οποιοδήποτε βαθμωτό μέγεθος, όπως εδώ την πυκνότητα, οπότε από καθαρά μαθηματικής σκοπιάς τίθεται το ερώτημα υπό ποιές συνθήκες υπάρχει το όριο του αθροίσματος (1), όταν $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(d_n) = 0$.

Ορισμός 1.1: Αν για κάθε ακολουθία διαμερίσεων $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ του \widehat{AB} , για την οποία $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(d_n) = 0$, υπάρχει το όριο

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta s_k$$

είναι πεπερασμένο και ανεξάρτητο από την ακολουθία των διαμερίσεων και των ενδιαμέσων σημείων T_k , τότε ονομάζουμε το κοινό αυτό όριο **επικαμπύλιο ολοκλήρωμα** ή **επικαμπύλιο ολοκλήρωμα 1^{ου} είδους της f** κατά μήκος του \widehat{AB} και το συμβολίζουμε

$$(3) \quad \int_{\widehat{AB}} f(x, y) ds.$$

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η συνάρτηση f είναι **ολοκληρώσιμη πάνω στο \widehat{AB}** .

Η συνάρτηση μήκους $s(t) = \int_a^t |\mathbf{r}'(t)| dt$ ευθυγραμμίσιμης (ειδικότερα με συνεχή παράγωγο) καμπύλης $\mathbf{r}(t)$, $t \in [a, \beta]$, έχει τις προφανείς ιδιότητες, που είναι συνέπειες του ολοκληρώματος *Riemann* (βλ. §24.1):

- Σ Η συνάρτηση $s(t)$ μιας ευθυγραμμίσιμης καμπύλης, της οποίας τα πολλαπλά σημεία δεν αποτελούν υποδιαστήματα του $[a, \beta]$, είναι γνησίως αύξουσα (επομένως αμφιμονοσήμαντη) και συνεχής.
- Σ Το μήκος μιας ευθυγραμμίσιμης καμπύλης είναι ανεξάρτητο από την παραμετρική παράστασή της.

Σύμφωνα με τις παραπάνω προτάσεις για τη συνάρτηση $s = s(t)$, $t \in [a, \beta]$, η αντίστροφη της $t = \varphi(s)$, $s \in [0, L]$, είναι επίσης γνησίως αύξουσα και συνεχής.

Επομένως σε κάθε διαμέριση $d_n = \{A_0 = A, A_1, \dots, A_{n-1}, A_n = B\}$ του \widehat{AB} , όπου $A_k(x_k, y_k)$, υπάρχει μια διαμέριση $P_n = \{s_0 = 0, s_1, \dots, s_n = L\}$ του $[0, L]$ τέτοια, ώστε $x_k = x(\varphi(s_k))$, $y_k = y(\varphi(s_k))$ και για τα ενδιάμεσα σημεία $T_k(\xi_k, \eta_k) \in \widehat{A_{k-1}A_k}$ υπάρχει $\sigma_k \in [s_{k-1}, s_k]$ τέτοιο, ώστε $\xi_k = x(\varphi(\sigma_k))$, $\eta_k = y(\varphi(\sigma_k))$, $k = 1, \dots, n$. Επομένως το άθροισμα (1) γράφεται

$$(4) \quad \sum_{k=1}^n f(x(\varphi(\sigma_k)), y(\varphi(\sigma_k))) \Delta s_k$$

που είναι το άθροισμα *Riemann* της συναρτήσεως

$$(f \circ \mathbf{r} \circ \varphi)(s) = f(x(\varphi(s)), y(\varphi(s)))$$

της μεταβλητής s στο διάστημα $[0, L]$.

Ισχύει η πρόταση:

Πρόταση 1.1: Αν η πραγματική συνάρτηση $f(x, y)$ είναι συνεχής στο πεδίο D που περιέχει το ίχνος \widehat{AB} μιας ευθυγραμμίσιμης καμπύλης $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$, $t \in [\alpha, \beta]$, τότε υπάρχει το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$(3) \quad \int_{\widehat{AB}} f(x, y) ds.$$

Αν η καμπύλη έχει συνεχή παράγωγο, τότε ισχύει η ισότητα

$$(5) \quad \int_{\widehat{AB}} f(x, y) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(\mathbf{r}(t)) \|\mathbf{r}'(t)\| dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t)) \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt.$$

Απόδειξη: Η ύπαρξη του επικαμπύλιου ολοκληρώματος είναι άμεση συνέπεια του γεγονότος ότι το άθροισμα (4) είναι το άθροισμα *Riemann* της συνεχούς συναρτήσεως $(f \circ \mathbf{r} \circ \varphi)(s)$. Επομένως ισχύει

$$(6) \quad \int_{\widehat{AB}} f(x, y) ds = \int_0^L f(x(\varphi(s)), y(\varphi(s))) ds.$$

Αν ειδικότερα η καμπύλη έχει συνεχή παράγωγο, τότε $ds = \|\mathbf{r}'(t)\| dt$, όπου $t = \varphi(s)$, οπότε η τελευταία ισότητα παίρνει τη μορφή (5). ■

Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα, όταν υπάρχει, είναι ανεξάρτητο από ισοδύναμη παραμετρική παράσταση της καμπύλης, αφού το δεύτερο μέλος εξαρτάται από το μήκος s που είναι ανεξάρτητο από την παράμετρο.

Η πρόταση στην περίπτωση καμπύλης του \mathbb{R}^3 διατυπώνεται ως εξής:

Πρόταση 1.1 : Αν η πραγματική συνάρτηση $f(x, y, z)$ είναι συνεχής στο πεδίο D που περιέχει το ίχνος \widehat{AB} μιας ευθυγραμμίσιμης καμπύλης $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$, $t \in [\alpha, \beta]$, τότε υπάρχει το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$(3) \quad \int_{\widehat{AB}} f(x, y, z) \, ds .$$

Αν η καμπύλη έχει συνεχή παράγωγο, τότε ισχύει η ισότητα

$$(6) \quad \begin{aligned} \int_{\widehat{AB}} f(x, y, z) \, ds &= \int_{\alpha}^{\beta} f(\mathbf{r}(t)) \|\mathbf{r}'(t)\| \, dt = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)} \, dt . \end{aligned}$$

Ορίζουμε ως μάζα του υλικού σύρματος \widehat{AB} (αμελητέο πάχος) και με συνεχή γραμμική πυκνότητα $f(x, y)$ (αντ. $f(x, y, z)$) σε κάθε σημείο (x, y) (αντ. (x, y, z)) του \widehat{AB} να είναι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_{\widehat{AB}} f(x, y) \, ds \quad \left(\text{αντ.} \int_{\widehat{AB}} f(x, y, z) \, ds \right),$$

οπότε η συνάρτηση μάζας δίνεται από την ισότητα:

$$(7) \quad m(t) = \int_{\alpha}^t f(\mathbf{r}(\tau)) \|\mathbf{r}'(\tau)\| \, d\tau, \quad t \in [\alpha, \beta] .$$

Παρατήρηση 1.1: Ο ορισμός και οι προτάσεις ισχύουν, κατά φυσικό τρόπο, και για βαθμωτά πεδία (συναρτήσεις) $f(\mathbf{x}) \in \Phi(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ και καμπύλες $\mathbf{r}(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, του \mathbb{R}^n . ■

Παράδειγμα 1.1: Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της συναρτήσεως $f(x, y) = y^2$ κατά μήκος της κυκλοειδούς

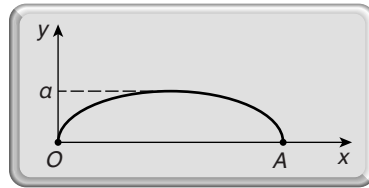
$$\mathbf{r}(t): \quad x(t) = a(t - \sin t), \quad y(t) = a(1 - \cos t) \quad (\text{σχ. 2})$$

μεταξύ των σημείων $O(0, 0)$ και $A(2\pi a, 0)$.

Λύση: Η συνάρτηση $f(x, y) = y^2$ είναι συνεχής στο επίπεδο \mathbb{R}^2 , οπότε και κατά μήκος του ίχνους \widehat{OA} . Τα σημεία $O(0, 0)$ και $A(2\pi a, 0)$ αντιστοιχούν στις τιμές $t=0$ και

$t = 2\pi$. Στο διάστημα $[0, 2\pi]$ η κυκλοειδής έχει συνεχή παράγωγο, οπότε από το ολοκλήρωμα (5) παίρνουμε

$$\begin{aligned} \int_{\widehat{OA}} y^2 ds &= \int_0^{2\pi} \frac{a^2(1-\cos t)^2}{\sin^2 t} a \sqrt{(1-\cos t)^2 +} \\ &= 8a^3 \int_0^{2\pi} \sin^5 \frac{t}{2} dt = \frac{256}{15} a^3 \quad \blacksquare \end{aligned}$$



Σχήμα 2

Παράδειγμα 1.2: Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$I = \int_C z(x^2 + y^2) ds, \text{ όπου } C \text{ είναι το ίχνος της καμπύλης}$$

$$x = t \cos t, \quad y = t \sin t, \quad z = t, \quad t \in [0, 1].$$

Λύση: Η καμπύλη έχει συνεχή παράγωγο και η συνάρτηση $z(x^2 + y^2)$ είναι συνεχής στο επίπεδο και στο ίχνος της C . Επομένως από την (5) παίρνουμε

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 t^3 \sqrt{2 + t^2} dt = (\text{θέτουμε } \sqrt{2 + t^2} = u) = \\ &= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} u^2(u^2 - 2) du = \frac{4\sqrt{3}}{5} + \frac{8\sqrt{2}}{5}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα 1^{ου} είδους έχει ιδιότητες ανάλογες με εκείνες του ολοκληρώματος Riemann, ως συνέπειες του ορισμού.

Πρόταση 1.2: Δίνονται οι πραγματικές συναρτήσεις f, g , οι οποίες είναι συνεχείς στο πεδίο D και $\widehat{AB} \subset D$ το ίχνος καμπύλης με συνεχή παράγωγο. Τότε ισχύουν

- $\int_{\widehat{AB}} (\lambda f + \mu g) ds = \lambda \int_{\widehat{AB}} f ds + \mu \int_{\widehat{AB}} g ds, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ σταθεροί,}$
- $\int_{\widehat{AB}} f ds = \int_{\widehat{A\Gamma}} f ds + \int_{\widehat{\Gamma B}} f ds, \text{ όπου } \Gamma \text{ ένα σημείο του ίχνους } \widehat{AB} \text{ και}$
- $\int_{\widehat{AB}} f ds = \int_{\widehat{BA}} f ds.$

Παρατήρηση 1.2: Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μιας συναρτήσεως, όπως ορίστηκε, ισχύει και στην περίπτωση κλειστής καμπύλης, οπότε ισχύουν οι

προηγούμενες προτάσεις. ■

Πόρισμα 1.1: Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο πεδίο D και \widehat{AB} D το ίχνος μιας κατά τα τμήματα $\widehat{AA_1}, \widehat{A_1A_2}, \dots, \widehat{A_{k-1}B}$ ευθυγραμμίσιμης καμπύλης, τότε ισχύει

$$\int_{\widehat{AB}} f ds = \int_{\widehat{AA_1}} f ds + \int_{\widehat{A_1A_2}} f ds + \dots + \int_{\widehat{A_{k-1}B}} f ds .$$

Σημαντική Παρατήρηση: Επειδή ο υπολογισμός του επικαμπύλιου ολοκληρώματος με τη βοήθεια του ολοκληρώματος *Riemann* είναι δυνατός μόνο όταν η καμπύλη έχει συνεχή παράγωγο ή, σύμφωνα με το πόρισμα 1.1, όταν αποτελείται από πεπερασμένου πλήθους τέτοια τμήματα, δηλαδή έχει **κατά τμήματα συνεχή παράγωγο**. Για λόγο αυτό σ' όλο το κεφάλαιο με τον όρο “**καμπύλη**” θα εννοούμε τέτοιες καμπύλες.

2. Εφαρμογές του Επικαμπύλιου Ολοκληρώματος 1ου είδους

A. Υπολογισμός του κέντρου βάρους (μάζης) υλικής γραμμής

Είναι γνωστό από τη Στατική ότι, αν $M_k(x_k, y_k)$ (αντ. $M_k(x_k, y_k, z_k)$), $k = 1, 2, \dots, n$, είναι ένα σύστημα υλικών σημείων του \mathbb{R}^2 (αντ. \mathbb{R}^3) με μάζες m_1, \dots, m_n αντίστοιχα, τότε οι συντεταγμένες (\bar{x}, \bar{y}) (αντ. $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$) του κέντρου βάρους του συστήματος δίνονται από τους τύπους

$$(*) \quad \bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^n x_k m_k}{\sum_{k=1}^n m_k}, \quad \bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^n y_k m_k}{\sum_{k=1}^n m_k}, \quad \left(\text{αντ. } \bar{x}, \bar{y} \text{ και } \bar{z} = \frac{\sum_{k=1}^n z_k m_k}{\sum_{k=1}^n m_k} \right).$$

I. Θεωρούμε μια υλική γραμμή, την οποία ταυτίζουμε με το ίχνος \widehat{AB} μιας επίπεδης καμπύλης $\mathbf{r}(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, με γραμμική πυκνότητα που δίνεται από τη συνεχή συνάρτηση $\rho(x, y)$. Αν $d_n = \{A_0 = A, A_1, \dots, A_{n-1}, A_n = B\}$ είναι μια διαμέριση του \widehat{AB} και υποθέσουμε ότι σε κάθε ένα από τα τμήματα $\widehat{A_{k-1}A_k}$ η πυκνότητα είναι σταθερή και ίση με εκείνη σε ένα τυχαίο σημείο του $T_k(\xi_k, \eta_k)$, τότε η μάζα του $\widehat{A_{k-1}A_k}$ προσεγγίζεται από την ποσότητα $m_k = \rho(\xi_k, \eta_k) \Delta s_k$, όπου Δs_k είναι το μήκος του $\widehat{A_{k-1}A_k}$. Αν υποθέσουμε ότι η μάζα m_k είναι συγκεντρωμένη στο σημείο T_k , τότε το κέντρο βάρους των υλικών σημείων T_1, \dots, T_n έχει συντεταγμένες

$$\bar{x}(d_n) = \frac{\sum_{k=1}^n \xi_k \rho(\xi_k, \eta_k) \Delta s_k}{\sum_{k=1}^n \rho(\xi_k, \eta_k) \Delta s_k} \quad \text{και} \quad \bar{y}(d_n) = \frac{\sum_{k=1}^n \eta_k \rho(\xi_k, \eta_k) \Delta s_k}{\sum_{k=1}^n \rho(\xi_k, \eta_k) \Delta s_k} .$$

Οι παραπάνω εκφράσεις δίνουν κατά προσέγγιση τις συντεταγμένες του κέντρου βάρους της υλικής γραμμής. Οι όροι των παραπάνω κλασμάτων είναι αθροίσματα *Riemann* από τα οποία ορίζονται τα επικαμπύλια ολοκληρώματα, τα οποία υπάρχουν (βλ. πρότ. 1.1.). Επομένως για κάθε ακολουθία διαμερισμών (d_n) , με $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(d_n) = 0$ ισχύουν

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \xi_k \rho(\xi_k, \eta_k) \Delta s_k = \int_{\widehat{AB}} x \rho(x, y) ds ,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \eta_k \rho(\xi_k, \eta_k) \Delta s_k = \int_{\widehat{AB}} y \rho(x, y) ds$$

και $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \rho(\xi_k, \eta_k) \Delta s_k = \int_{\widehat{AB}} \rho(x, y) ds = m$ (η μάζα της υλικής γραμμής).

Ορίζουμε ως **συντεταγμένες του κέντρου βάρους** της υλικής γραμμής

$$(1) \quad \bar{x} = \frac{1}{m} \int_{\widehat{AB}} x \rho(x, y) ds , \quad \bar{y} = \frac{1}{m} \int_{\widehat{AB}} y \rho(x, y) ds .$$

II. Στην περίπτωση μιας υλικής γραμμής του χώρου με γραμμική πυκνότητα $\rho(x, y, z)$ οι συντεταγμένες του κέντρου βάρους δίνονται από τις ισότητες:

$$(2) \quad \bar{x} = \frac{1}{m} \int_{\widehat{AB}} x \rho(x, y, z) ds, \quad \bar{y} = \frac{1}{m} \int_{\widehat{AB}} y \rho(x, y, z) ds \quad \text{και} \quad \bar{z} = \frac{1}{m} \int_{\widehat{AB}} z \rho(x, y, z) ds$$

όπου $m = \int_{\widehat{AB}} \rho(x, y, z) ds$ είναι η μάζα της υλικής γραμμής.

III. Στην περίπτωση ομογενούς επίπεδης υλικής γραμμής, $\rho(x, y) = \text{σταθ.}$, οι συντεταγμένες του κέντρου βάρους δίνονται από τις ισότητες

$$(3) \quad \bar{x} = \frac{1}{L} \int_{\widehat{AB}} x ds , \quad \bar{y} = \frac{1}{L} \int_{\widehat{AB}} y ds ,$$

όπου $L = \int_{\widehat{AB}} ds$ είναι το μήκος της καμπύλης, από τις οποίες παίρνουμε

$$(4) \quad \begin{cases} 2\pi\bar{x}L = 2\pi \int_{\widehat{AB}} x ds \\ 2\pi\bar{y}L = 2\pi \int_{\widehat{AB}} y ds \end{cases} \quad \eta \quad \begin{cases} 2\pi\bar{x}L = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} x(t) \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt \\ 2\pi\bar{y}L = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} y(t) \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt \end{cases}.$$

Οι ισότητες (4), όταν $x(t) \geq 0$ (αντ. $y(t) \geq 0$), $t \in [\alpha, \beta]$, εκφράζουν το ακόλουθο θεώρημα (βλ. §11.4):

Θεώρημα Πάππου: Το εμβαδόν της επιφάνειας που παράγεται από την περιστροφή του ίχνους \widehat{AB} μιας καμπύλης γύρω από άξονα (που δεν τέμνει το \widehat{AB}) είναι ίσο με το γινόμενο του μήκους L του \widehat{AB} και του μήκους του κύκλου που διαγράφει το κέντρο βάρους της υλικής γραμμής κατά την περιστροφή αυτή.

Οι ισότητες (4) αναφέρονται στους άξονες Ox και Oy , αλλά μπορούμε πάντοτε να κάνουμε κατάλληλο μετασχηματισμό (στροφή, μετατόπιση) ώστε ο άξονας, που αναφέρεται στο θεώρημα να ταυτιστεί με έναν από τους άξονες Ox , Oy . Στην περίπτωση στροφής το μήκος L και το κέντρο βάρους (σχετικά με την καμπύλη) δε μεταβάλλονται.

Παράδειγμα 2.1: Να προσδιοριστεί το κέντρο βάρους σύρματος, του οποίου το ίχνος C είναι το ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$, με $A(1, 1)$, $B(5, 1)$, $\Gamma(5, 3)$, $\Delta(1, 3)$ και έχει γραμμική πυκνότητα $\rho(x, y) = xy$.

Λύση: Η καμπύλη αποτελείται από τα ευθύγραμμα τμήματα AB , $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ και ΔA . Επομένως τα ολοκληρώματα που εμφανίζονται στις ισότητες (1) αναλύονται σε αθροίσματα της μορφής $\int_C = \int_{\widehat{AB}} + \int_{\widehat{B\Gamma}} + \int_{\widehat{\Gamma\Delta}} + \int_{\widehat{\Delta A}}$.

Οι πλευρές του ορθογωνίου είναι τα ίχνη των καμπυλών

$$\widehat{AB}: \begin{cases} x=t \\ y=1 \end{cases}, t \in [1, 5], \quad \widehat{B\Gamma}: \begin{cases} x=5 \\ y=t \end{cases}, t \in [1, 3],$$

$$\widehat{\Gamma\Delta}: \begin{cases} x=t \\ y=3 \end{cases}, t \in [1, 5], \quad \widehat{\Delta A}: \begin{cases} x=1 \\ y=t \end{cases}, t \in [1, 3],$$

οπότε

$$\int_C x(xy) ds = \int_1^5 t^2 dt + \int_1^3 25t dt + \int_1^5 3t^2 dt + \int_1^3 t dt = \frac{808}{3}$$

$$\int_C y(xy) ds = \dots = 144 \quad \text{και} \quad \int_C xy ds = \dots = 72.$$

Επομένως έχουμε

$$\bar{x} = \frac{\int_C x^2 y ds}{\int_C xy ds} = \frac{101}{27} \quad \text{και} \quad \bar{y} = \frac{\int_C xy^2 ds}{\int_C xy ds} = 2. \blacksquare$$

Παράδειγμα 2.2: Ο προσδιορισμός του κέντρου βάρους του ημικυκλίου

$$x = R \cos t, \quad y = R \sin t, \quad t \in [0, \pi].$$

μπορεί να γίνει με τη βοήθεια του θεωρήματος Πάππου.

Πράγματι, η περιστροφή του ημικυκλίου περί τον άξονα Ox παράγει την επιφάνεια της σφαίρας με ακτίνα R , που είναι $4\pi R^2$. Επομένως

$$2\pi \bar{y}(\pi R) = 4\pi R^2 \quad \bar{y} = \frac{2R}{\pi} \quad \text{και} \quad \bar{x} = 0 \quad (\text{ένεκα συμμετρίας}). \blacksquare$$

B. Ροπή αδρανείας υλικής γραμμής

Είναι γνωστό από τη Μηχανική ότι η ροπή αδρανείας συστήματος υλικών σημείων M_k με μάζες $m_k, k = 1, 2, \dots, n$, ως προς ένα σημείο P (αντ. ευθεία (ε) ή επίπεδο (Π)) δίνεται από το άθροισμα

$$\sum_{k=1}^n m_k \delta_k^2,$$

όπου δ_k είναι η απόσταση του σημείου M_k από το σημείο P (αντ. την ευθεία (ε) ή το επίπεδο (Π)).

Αν εργαστούμε όπως και στην περίπτωση του κέντρου βάρους, ορίζουμε τη **ροπή αδρανείας** μιας υλικής γραμμής \widehat{AB} , η οποία έχει γραμμική πυκνότητα $\rho(x, y, z)$ ως προς το σημείο $P(a, \beta, \gamma)$, τους άξονες Ox, Oy, Oz ή τα επίπεδα Oxy, Oyz, Oxz τις ποσότητες

$$(5) \quad I_P = \int_{\widehat{AB}} [(x-a)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2] \rho(x, y, z) ds$$

$$(6) \quad \begin{cases} I_{Ox} = \int_{\widehat{AB}} [y^2 + z^2] \rho(x, y, z) ds \\ I_{Oy} = \int_{\widehat{AB}} [x^2 + z^2] \rho(x, y, z) ds \\ I_{Oz} = \int_{\widehat{AB}} [x^2 + y^2] \rho(x, y, z) ds \end{cases} \quad \text{και} \quad \begin{cases} I_{Oxy} = \int_{\widehat{AB}} z^2 \rho(x, y, z) ds \\ I_{Oyz} = \int_{\widehat{AB}} x^2 \rho(x, y, z) ds \\ I_{Oxz} = \int_{\widehat{AB}} y^2 \rho(x, y, z) ds \end{cases}$$

αντίστοιχα.

Στην περίπτωση υλικής γραμμής του επιπέδου Oxy η ροπή αδρανείας ως προς το σημείο $P(\alpha, \beta)$ και τους άξονες Ox, Oy είναι

$$(7) \quad I_P = \int_{\widehat{AB}} [(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2] \rho(x, y) ds$$

$$(8) \quad I_{Ox} = \int_{\widehat{AB}} y^2 \rho(x, y) ds, \quad I_{Oy} = \int_{\widehat{AB}} x^2 \rho(x, y) ds$$

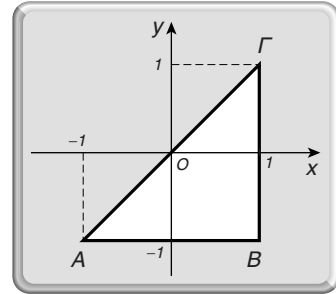
Παράδειγμα 2.3: Να υπολογιστεί η ροπή αδρανείας του υλικού τριγώνου $AB\Gamma$ με γραμμική πυκνότητα $\rho(x, y) = x + y^2$ ως προς την αρχή των αξόνων και τους άξονες Ox και Oy , όπου $A(-1, -1)$, $B(1, -1)$ και $\Gamma(1, 1)$ (σχ. 3).

Απάντηση: Τα ευθύγραμμα τμήματα $AB, B\Gamma, \Gamma A$ έχουν τις παραμετρικές εξισώσεις:

$$AB: \begin{cases} x = t \\ y = -1 \end{cases}, t \in [-1, 1],$$

$$B\Gamma: \begin{cases} x = 1 \\ y = t \end{cases}, t \in [-1, 1],$$

$$\Gamma A: \begin{cases} x = -t \\ y = -t \end{cases}, t \in [-1, 1].$$



Σχήμα 3

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_{\widehat{AB\Gamma A}} (x^2 + y^2)(x + y^2) ds = \\ &= \int_{\widehat{AB}} (x^2 + y^2)(x + y^2) ds + \int_{\widehat{B\Gamma}} (x^2 + y^2)(x + y^2) ds + \int_{\widehat{\Gamma A}} (x^2 + y^2)(x + y^2) ds = \\ &= \int_{-1}^1 (t^2 + 1)(t + 1) dt + \int_{-1}^1 (1 + t^2)(1 + t^2) dt + \int_{-1}^1 2t^2(-t + t^2)\sqrt{2} dt = \frac{96}{15} + \frac{4\sqrt{2}}{5}. \end{aligned}$$

Όμοια βρίσκουμε

$$I_{Ox} = \int_{\widehat{AB\Gamma A}} y^2(x + y^2) ds = \frac{46}{15} + \frac{2\sqrt{2}}{5} \quad \text{και} \quad I_{Oy} = \int_{\widehat{AB\Gamma A}} x^2(x + y^2) ds = \frac{10}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{5}. \blacksquare$$

3. Διανυσματικά πεδία

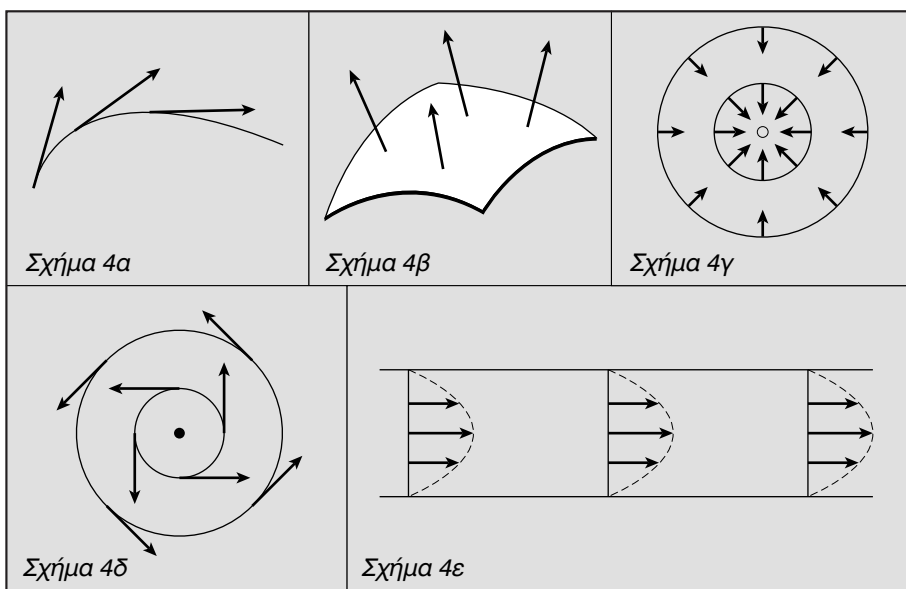
Μια διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_n) : \Phi(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ ορισμένη στο σύνολο $X \subseteq \mathbb{R}^n$ λέμε ότι είναι ένα **διανυσματικό πεδίο**, κυρίως όταν εκφράζει ένα διανυσματικό μέγεθος της Φυσικής. Για παράδειγμα, το διανυσματικό πεδίο των

εφαπτόμενων διανυσμάτων μιας καμπύλης (σχ. 4α), των κλίσεων μιας επιφανείας (σχ. 4β), το διανυσματικό πεδίο βαρύτητας (σχ. 4γ). Ειδικότερα, το διανυσματικό **πεδίο στροβιλισμού** δίνεται από τη συνάρτηση

$$(1) \quad \mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \quad (\text{σχ. 4δ}),$$

και το διανυσματικό **πεδίο ροής** που δίνεται από τη συνάρτηση

$$(2) \quad \mathbf{F}(x, y) = (1 - y^2, 0), \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times [-1, 1] \quad (\text{σχ. 4ε}).$$



Ένα διανυσματικό πεδίο ορισμένο σ' ένα υποσύνολο $X \subset \mathbb{R}^2$ (αντ. $X \subset \mathbb{R}^3$) θα το συμβολίζουμε συνήθως ως εξής:

$$\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j} \quad (\text{αντ. } \mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}).$$

Ένα διανυσματικό πεδίο \mathbf{F} , ορισμένο στο ανοιχτό σύνολο D , θα λέμε ότι είναι ένα **πεδίο κλίσεων**, όταν υπάρχει ένα βαθμωτό πεδίο f , διαφορίσιμο στο X τέτοιο, ώστε να ισχύει

$$(3) \quad \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \text{grad}f(\mathbf{x}) \quad \text{ή} \quad F_j(\mathbf{x}) = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j}, \quad j = 1, \dots, n, \quad \text{για κάθε } \mathbf{x} \in D.$$

Στην περίπτωση των διανυσματικών πεδίων $\mathbf{F}(x, y)$ και $\mathbf{F}(x, y, z)$ η (3) γράφεται

$$P(x, y) = f_x(x, y), \quad Q(x, y) = f_y(x, y)$$

και

$$P(x, y, z) = f_x(x, y, z), \quad Q(x, y, z) = f_y(x, y, z), \quad R(x, y, z) = f_z(x, y, z)$$

αντίστοιχα. Οι τελευταίες σχέσεις θα γράφονται πολλές φορές και με την ισοδύναμη γραφή

$$df(x, y, z) = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz,$$

$$df(x, y, z) = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz.$$

Η f ονομάζεται **αρχική συνάρτηση** της \mathbf{F} στο D (επεκτείνοντας τον αντίστοιχο ορισμό για πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής). Στη Φυσική η συνάρτηση $U(\mathbf{x}) := -f(\mathbf{x})$ ονομάζεται **δυναμικό** του διανυσματικού πεδίου \mathbf{F} , οπότε λέμε ότι η \mathbf{F} έχει **δυναμικό**. Στην περίπτωση αυτή η (3) γράφεται

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\text{grad}U(\mathbf{x}).$$

Είναι φανερό ότι και κάθε συνάρτηση της μορφής $U(\mathbf{x}) + c$, c σταθερά, είναι δυναμικό του διανυσματικού πεδίου \mathbf{F} .

Η ισοσταθμική επιφάνεια $U(x, y, z) = c$ ενός διαφορίσιμου βαθμωτού πεδίου $U \in \Phi(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ αποτελεί την ισοδυναμική επιφάνεια του διανυσματικού πεδίου $\text{grad}U(x, y, z)$, όταν $\text{grad}U(x, y, z) \neq \mathbf{0}$, και η οποία είναι κάθετη στο διανυσματικό πεδίο κλίσεων (βλ. §22.3).

Παράδειγμα 3.1: Υποθέτουμε ότι η μάζα m , π.χ. της γης, είναι συγκεντρωμένη στην αρχή των αξόνων $Oxyz$. Σύμφωνα με το νόμο της παγκόσμιας έλξης του Νεύτωνα η μάζα m ασκεί πάνω σε μάζα 1 στο σημείο $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ με διάνυσμα θέσεως $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ και μέτρο $r = \|\mathbf{r}\|$, τη δύναμη

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -gm \frac{\mathbf{r}}{r^3} = -gm \left(\frac{x}{r^3} \mathbf{i} + \frac{y}{r^3} \mathbf{j} + \frac{z}{r^3} \mathbf{k} \right),$$

όπου g είναι η σταθερά της βαρύτητας. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η μάζα m προκαλεί (παράγει) το **πεδίο βαρύτητας** \mathbf{F} , του οποίου το δυναμικό είναι

$$U(x, y, z) = -gm \frac{1}{r}.$$

Γενικά, κάθε διανυσματικό πεδίο της μορφής

$$\mathbf{F}(x, y, z) = M \frac{\mathbf{r}}{r^3} = M \left(\frac{x}{r^3} \mathbf{i} + \frac{y}{r^3} \mathbf{j} + \frac{z}{r^3} \mathbf{k} \right),$$

όπου M είναι σταθερός αριθμός, ονομάζεται **νευτώνειο πεδίο** με το **νευτώ-**

νείο δυναμικό

$$U(x, y, z) = M \frac{1}{r}.$$

Το (νευτώνειο) **ηλεκτροστατικό πεδίο**, που παράγεται από το φορτίο q είναι $\mathbf{E}(x, y, z) = -\frac{q}{\varepsilon} \frac{\mathbf{r}}{r^3}$, όπου ε είναι η διηλεκτρική σταθερά, με **το ηλεκτροστατικό δυναμικό** $V(x, y, z) = -\frac{q}{\varepsilon} \frac{1}{r}$.

Το **λογαριθμικό δυναμικό** είναι της μορφής $V(x, y, z) = \ln\left(\frac{1}{r}\right)$ και είναι δυναμικό του πεδίου $\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{\mathbf{r}}{r^2}$.

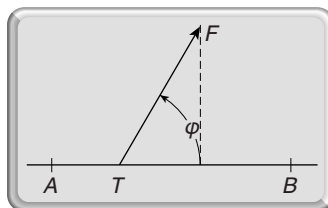
Γενικά ένα διανυσματικό πεδίο στον \mathbb{R}^n , $n \geq 3$, της μορφής

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (n-2) \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^n}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\},$$

ονομάζεται **γενικευμένο νευτώνειο πεδίο** με δυναμικό $V(\mathbf{x}) = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^{2-n}}$. ■

4. Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα 2ου είδους

Το έργο W που παράγει υλικό σημείο T με μάζα 1 όταν κινηθεί ευθύγραμμα



Σχήμα 5

υπό την επίδραση σταθερής δύναμης $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ από το σημείο $A(a_1, a_2, a_3)$ στο σημείο $B(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ δίνεται, κατά τη Μηχανική, από τη σχέση

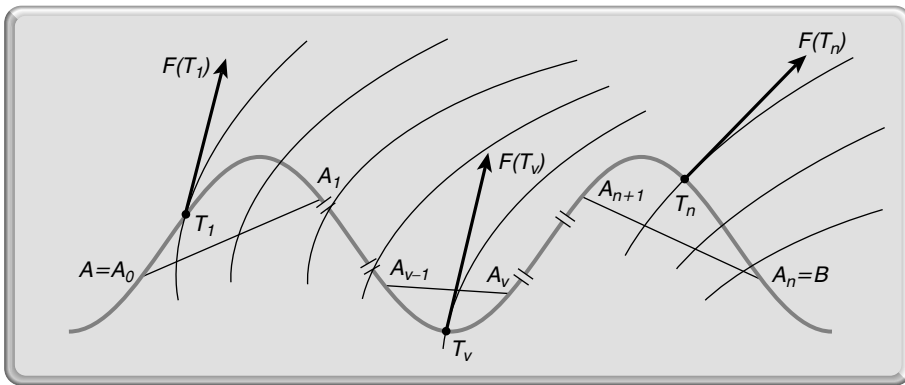
$$(1) \quad W = \mathbf{F} \cdot \overrightarrow{AB} = \|\mathbf{F}\| \|\overrightarrow{AB}\| \cos \varphi,$$

όπου φ είναι η σταθερή γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα της δύναμης \mathbf{F} με το διάνυσμα \overrightarrow{AB} (σχ. 5). Αν $\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B$ είναι τα διανύσματα θέσεως των A και B , τότε η (1) γράφεται

$$(2) \quad W = P(\beta_1 - a_1) + Q(\beta_2 - a_2) + R(\beta_3 - a_3) = \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A).$$

Όπως και στην περίπτωση του επικαμπύλιου ολοκληρώματος 1^{ου} είδους τίθεται εδώ το πρόβλημα: Πως ορίζεται και ποιο το έργο που παράγει υλικό σημείο

Τ όταν κινηθεί (ή απαιτείται για να κινηθεί) υπό την επίδραση πεδίου δυνάμεων $\mathbf{F}(x, y)$ ή $\mathbf{F}(x, y, z)$ κατά μήκος του ίχνους \widehat{AB} μιας καμπύλης $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$. Θεωρούμε ένα διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$, ορισμένο στο ίχνος \widehat{AB} μιας καμπύλης $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$, $t \in [\alpha, \beta]$. Θεωρούμε ακόμη πάνω στο ίχνος τα σημεία $A_0 = A, A_1, \dots, A_{n-1}, A_n = B$ με συντεταγμένες (x_k, y_k) , $k = 0, 1, \dots, n$. Τα σημεία αυτά αποτελούν μια διαμέριση d_n του \widehat{AB} με $\mu(d_n) = \max\{\Omega A_{k-1}A_k \mid 1 \leq k \leq n\}$, όπου $\Omega A_{k-1}A_k \Omega$ είναι το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος $\overline{A_{k-1}A_k}$.



Σχήμα 6

Αν υποθέσουμε ότι σε κάθε ένα από τα ευθύγραμμα τμήματα $\overline{A_{k-1}A_k}$ το διανυσματικό πεδίο \mathbf{F} είναι σταθερό και ίσο με την τιμή του πεδίου $\mathbf{F}(T_k) = P(\xi_k, \eta_k)\mathbf{i} + Q(\xi_k, \eta_k)\mathbf{j}$ σ' ένα τυχαίο σημείο $T_k(\xi_k, \eta_k)$ του τόξου $\widehat{A_{k-1}A_k}$ (σχ. 6), τότε το έργο W της δυνάμεως \mathbf{F} κατά μήκος του τόξου \widehat{AB} προσεγγίζεται από το άθροισμα

$$W(d_n) = \sum_{k=1}^n \mathbf{F}(T_k) \cdot \overrightarrow{A_{k-1}A_k} = \sum_{k=1}^n [P(\xi_k, \eta_k)(x_k - x_{k-1}) + Q(\xi_k, \eta_k)(y_k - y_{k-1})].$$

Και στην περίπτωση αυτή, όπως και στην περίπτωση του ολοκληρώματος 1^{ου} είδους, ξεκινώντας από την περίπτωση του πεδίου δυνάμεων μπορούμε να θεωρήσουμε το μαθηματικό ανάλογό του για ένα οποιοδήποτε διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}(x, y)$ ή $\mathbf{F}(x, y, z)$.