

ΠΕΤΡΟΣ ΟΙΚΟΝΟΜΟΥ

ΣΥΓΧΡΟΝΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΗΣ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

Απευθύνεται:

- Σε κάθε εκπαιδευτικό που ενδιαφέρεται να βελτιώσει και να εκσυγχρονίσει τη διδασκαλία του/της.
- Στους/ις υποψήφιους/ες για τις εξετάσεις του Α.Σ.Ε.Π.
- Στους/ις υποψήφιους/ες για τα Διδασκαλεία Δημοτικής Εκπαίδευσης, καθώς και σε όσους ήδη φοιτούν σ' αυτά.
- Στους φοιτητές των Παιδαγωγικών Τμημάτων Δημοτικής Εκπαίδευσης, ως βοήθημα για το μάθημα της Διδακτικής των Μαθηματικών.

Περιέχονται:

- ▶ Συνοπτική θεωρία της Διδακτικής των Μαθηματικών, παραδείγματα και εφαρμογές
- ▶ Σχεδιασμός της διδασκαλίας με αναλυτικά παραδείγματα
- ▶ Λύσεις όλων των θεμάτων Α.Σ.Ε.Π. 1998 - 2006
- ▶ 61 προτεινόμενα θέματα Διδακτικής με τις λύσεις τους



Για τον/την δάσκαλο/α που υπηρετεί:

Το βιβλίο αποτελεί ένα χρήσιμο εργαλείο - οδηγό για κάθε δάσκαλο ή δασκάλα που ήδη υπηρετεί, παρέχοντας τόσο τα θεωρητικά εφόδια όσο και την πρακτική άσκηση που είναι απαραίτητα για την προσαρμογή της δουλειάς του/της στη σχολική τάξη, σύμφωνα με τις επιταγές του νέου Αναλυτικού Προγράμματος και των νέων σχολικών βιβλίων. Οι ασκήσεις σχεδιασμού μαθήματος και αντιμετώπισης λαθών αφορούν πραγματικές καταστάσεις που συμβαίνουν στις σχολικές τάξεις και η προτεινόμενη αντιμετώπιση μπορεί να βελτιώσει σημαντικά τον εξοπλισμό με τον οποίο ο/η διδάσκων/ουσα προσεγγίζει την καθημερινή δουλειά του.

Για τον/την υποψήφιο/α του ΑΣΕΠ:

Το βιβλίο αυτό στοχεύει στη μύηση του υποψηφίου δασκάλου/ας στη Διδακτική των Μαθηματικών, με τρόπο απλό και κατανοητό, χωρίς όμως να παραγνωρίζει τη θεωρητική κάλυψη των θεμάτων που πραγματεύεται.

Ο/Η αναγνώστης/ρια εισάγεται καταρχήν στη θεωρητική προσέγγιση του φαινομένου της διδασκαλίας των Μαθηματικών και των βασικών παραμέτρων της, ενώ στη συνέχεια ασκείται στην αντιμετώπιση διδακτικών καταστάσεων και φαινομένων τα οποία ζητούνται στις εξετάσεις του ΑΣΕΠ (σχεδιασμός μαθήματος με Δραστηριότητες και ενεργοποίηση του μαθητή, ερμηνεία και αντιμετώπιση λαθών).

Για την καλύτερη προετοιμασία των υποψηφίων, περιλαμβάνεται ένας σημαντικός αριθμός λυμένων ασκήσεων - θεμάτων, παρόμοιου τύπου με τα θέματα των εξετάσεων. Ο/Η υποψήφιος/α καλείται, αφού μελετήσει συστηματικά τη θεωρία, να απαντήσει στα προτεινόμενα θέματα και στη συνέχεια να αντιπαραβάλλει τις απαντήσεις του/της με τις προτεινόμενες.

Για τον/την υποψήφιο/α και τον/την σπουδαστή/ρια των Διδασκαλείων Δημοτικής Εκπαίδευσης:

Τόσο το θεωρητικό μέρος όσο και οι ασκήσεις του βιβλίου μπορούν να βοηθήσουν τον/την υποψήφιο/α στην αντιμετώπιση θέματος από τη Διδακτική των Μαθηματικών.

Αλλά και στη διάρκεια της φοίτησης, η χρησιμότητά ενός βοηθήματος Διδακτικής Μαθηματικών είναι προφανής. Ιδιαίτερα οι ασκήσεις, σε συνδυασμό με την εκτενή βιβλιογραφία, συνιστούν μια βάση δεδομένων στην οποία μπορεί να στηριχθεί η εκπόνηση μιας ερευνητικής εργασίας.

Για τον/την φοιτητή/α των Παιδαγωγικών Τμημάτων Δημοτικής Εκπαίδευσης:

Το βιβλίο αποτελεί ένα χρήσιμο βοήθημα για το μάθημα της Διδακτικής των Μαθηματικών και μπορεί να συμβάλλει σημαντικά στη βελτίωση της επίδοσης του φοιτητή/τριας στο μάθημα αυτό. Η έγκαιρη και συστηματική ενασχόληση με τη Διδακτική των Μαθηματικών, αποτελεί βασική παράμετρο της προετοιμασίας για τις εξετάσεις του Α.Σ.Ε.Π. που θα αντιμετωπίσει στο μέλλον.

Επίσης, τα θεωρητικά ζητήματα που πραγματεύεται, οι ασκήσεις, καθώς και η πλούσια βιβλιογραφία του, μπορούν να χρησιμοποιηθούν στην εκπόνηση εργασιών που σχετίζονται με το μάθημα.



A. ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

A.1.	Η παραδοσιακή αντίληψη για τη διδασκαλία των Μαθηματικών	11
A.2.	Η θεωρία της οικοδόμησης της γνώσης (κονστрукτιβισμός)	12
A.3.	Η έννοια του προβλήματος – δραστηριότητας και ο ρόλος του στη μαθηματική εκπαίδευση	13
A.4.	Ένα παράδειγμα διδασκαλίας μέσω προβλήματος – δραστηριότητας	17
A.5.	Από την υπολογιστική προς την εννοιολογική προσέγγιση της μαθηματικής γνώσης	18
A.6.	Λεκτικά διατυπωμένα προβλήματα και μοντελοποίηση	19
A.7.	Οι σύγχρονες αντιλήψεις για το ρόλο διδάσκοντος και διδασκόμενου	
A.7.1.	Η παραδοσιακή τάξη των Μαθηματικών	21
A.7.2.	Ο μαθητής στη σύγχρονη τάξη των Μαθηματικών	23
A.7.3.	Ο δάσκαλος στη σύγχρονη τάξη των Μαθηματικών	24
A.7.4.	Δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι διδάσκοντες στην εφαρμογή ενός σύγχρονου τρόπου διδασκαλίας	26
A.8.	Οργάνωση της σύγχρονης τάξης των Μαθηματικών	33
A.9.	Αξιολόγηση	34
A.10.	Διαθεματική προσέγγιση της μαθηματικής γνώσης	35
A.11.	Ερμηνεία και αντιμετώπιση του λάθους του μαθητή	37
A.11.1.	Από το λάθος - εκτροπή στο λάθος - εμπόδιο	37
A.11.2.	Διδακτικά εμπόδια	40
A.11.3.	Επιστημολογικά εμπόδια	43
A.11.4.	Διδακτικά εμπόδια στη Γεωμετρία	44
A.12.	Προϋποθέσεις που πρέπει να ικανοποιούνται ώστε μία Δραστηριότητα να χαρακτηριστεί αποτελεσματική	47

Β. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ

B.1. Γενικό σχέδιο μαθήματος	51
B.2. Αναλυτικό σχέδιο μαθήματος	51
B.3. Μελέτη των επιμέρους στοιχείων του σχεδιασμού	52
B.4. Παραδείγματα αναλυτικού σχεδιασμού μαθήματος	54

Γ. ΘΕΜΑΤΑ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΤΟΥ Α.Σ.Ε.Π. ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα 1998	71
Θέμα 2000	74
Θέμα 2002	78
Θέμα 2004	79
Θέμα 2006	80

Δ. ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Δ.1. Ασκήσεις θεωρίας	85
Δ. 2. Ασκήσεις σχεδιασμού μαθήματος	99
Δ. 3. Ασκήσεις αντιμετώπισης λαθών	106

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	123
-------------------------------	-----

Η διδασκαλία των Μαθηματικών σε όλη τη διάρκεια του εικοστού αιώνα χαρακτηρίζεται από μια ανεπίτρεπτη στασιμότητα, στην οποία κυριαρχεί η πρακτική της παρουσίασης της μαθηματικής γνώσης από τον διδάσκοντα. Ο διδάσκων «παρουσιάζει και εξηγεί», ο μαθητής «ακούει, μαθαίνει και ασκείται». Ο διδάσκων, παντογνώστης και κυρίαρχος στη σχολική τάξη, μεταφέρει γνώση στο μαθητή, εκθέτοντάς την, ο μαθητής μελετά τη γνώση, την απομνημονεύει και ασκείται σ' αυτήν ώστε να βελτιώσει την επίδοσή του.

Η εκπαιδευτική πρακτική εξακολουθεί, σε μεγάλο βαθμό, να καθορίζεται από τους τρεις περίφημους νόμους που διατύπωσε ο Thorndike στις αρχές του εικοστού αιώνα για τη διαδικασία μάθησης:

- ✓ **Νόμος της προπαρασκευής:** ο μαθητής που θα δεχτεί την ερώτηση πρέπει να έχει προετοιμαστεί κατάλληλα ώστε να απαντήσει.
- ✓ **Νόμος της άσκησης:** όσο περισσότερες απαντήσεις δοθούν στην ίδια ερώτηση, τόσο πιο επιτυχημένη είναι η πρόσκτηση της γνώσης.
- ✓ **Νόμος του αποτελέσματος:** η μάθηση βελτιώνεται όταν το αποτέλεσμα είναι ευχάριστο και αντίθετα. Με αυτόν τον τρόπο η γνώση εντυπώνεται ή διαγράφεται από τη μνήμη.

Βέβαια η έννοια του «ενεργού» μαθητή, η οποία εισάγεται από μεταγενέστερες μαθησιακές θεωρίες, δεν μπορεί παρά να επηρεάσει τη διδασκαλία των Μαθηματικών, η επίδραση αυτή όμως είναι εντελώς μερική και κατά συνέπεια ατελέσφορη. Τόσο η «ανακάλυψη της γνώσης από το μαθητή» της σχολής της Γενεύης (Piaget), όσο και ο «ενεργός μαθητής» των μιχεβιοριστών (Skinner), δεν επηρεάζουν τη διδασκαλία παρά μόνο στο γεγονός ότι ο «από καθέδρας διδάσκων» μεταβάλλεται στον διδάσκοντα που υποβάλλει ερωτήσεις στους μαθητές του, εκμαιεύοντας από αυτούς τη νέα γνώση. Η διδασκαλία αποκτά τη μορφή της «ερωταπόκρισης», χωρίς ουσιαστικές μεταβολές στο δασκαλοκεντρικό χαρακτήρα της.

Η ολοκληρωτική ανατροπή του παθητικού ρόλου που επιφυλάσσει στο μαθητή η παραδοσιακή διδασκαλία αρχίζει να διαμορφώνεται στη δεκαετία του ογδόντα, με την υιοθέτηση, εκ μέρους της Διδακτικής των Μαθηματικών, των αρχών της θεωρίας της οικοδόμησης της γνώσης.

Η θεωρία της οικοδόμησης της γνώσης στηρίζεται στις παρακάτω δύο γενικές αρχές (von Glaserfeld, 1991 και Lerman, 1989):

- ✓ Η γνώση δεν προσλαμβάνεται παθητικά, αλλά οικοδομείται δυναμικά από το υποκείμενο που μαθαίνει. Ο μαθητής, επομένως, δεν μαθαίνει όταν ο διδάσκων παρουσιάζει τη νέα γνώση, αλλά μόνο όταν δραστηριοποιείται στο πλαίσιο του μαθήματος, αντιμετωπίζοντας καταστάσεις οι οποίες απαιτούν την ανάληψη δράσης εκ μέρους του.
- ✓ Η μάθηση έχει προσαρμοστικό χαρακτήρα, δηλαδή το υποκείμενο δεν ανακαλύπτει μια προϋπάρχουσα πραγματικότητα αλλά οργανώνει τον εμπειρικό του κόσμο.

Οι θεωρητικές αυτές αρχές έχουν σημαντικές συνέπειες στη μελέτη της διαδικασίας μάθησης, αλλά και στη διδασκαλία. Ιδιαίτερα σημαντικές είναι οι συνέπειες αυτών των αρχών στη λειτουργία της σχολικής τάξης (Jaworski, 1994):

1. Το ενδιαφέρον επικεντρώνεται όχι στην επανάληψη συμπεριφορών από τη μεριά των μαθητών (λύση ασκήσεων), αλλά στην κατανόηση των εννοιών.
2. Ο εκπαιδευτικός συνειδητοποιεί ότι η γνώση δεν μεταδίδεται με την απλή παρουσίασή της, αλλά κατακτάται μέσα από την προσωπική δραστηριοποίηση των μαθητών.
3. Ο εκπαιδευτικός υποστηρίζει τη δραστηριότητα των μαθητών και παρακολουθεί τα λάθη που υποδηλώνουν με ποιο τρόπο οι μαθητές αντιλαμβάνονται την εργασία και τις έννοιες που αντιμετωπίζουν.

Άμεση συνέπεια αυτών των αρχών είναι η μετακίνηση του κέντρου βάρους της διδασκαλίας των Μαθηματικών από το μαθηματικό περιεχόμενο προς το υποκείμενο της μάθησης, το μαθητή.

Βεβαίως αυτή η διδακτική πρακτική δημιουργεί σοβαρά ερωτήματα ως προς τον τρόπο με τον οποίο θα συνδεθούν οι εμπειρίες των μαθητών με την ίδια τη μαθηματική γνώση. Ο εκπαιδευτικός αναγνωρίζει ότι δεν «διδάσκει» στους μαθητές αλλά τους μαθαίνει να κατασκευάζουν μαθηματικές γνώσεις. Παραμένει όμως το ερώτημα για το πώς η δραστηριότητα των μαθητών, τους οδηγεί σε κατασκευές και γενικεύσεις και, κατά συνέπεια, σε έννοιες που συνδέονται με το συγκεκριμένο μαθηματικό περιεχόμενο - στόχο (von Glasersfeld, 1991).

Στο ερώτημα αυτό απαντούν οι θεωρίες των **διδακτικών καταστάσεων** και του **εγνωσιολογικού πεδίου** (Brousseau, 1997 και Vergnaud, 1996). Σύμφωνα με αυτές:

- ☐ Οι μαθηματικές έννοιες αναδεικνύονται μέσα από κατάλληλα σχεδιασμένες καταστάσεις - προβλήματα, οι οποίες περιγράφονται με τον όρο «**Δραστηριότητες**».
- ☐ Για την προσέγγιση μιας έννοιας είναι απαραίτητο να μελετηθεί το εννοιολογικό της πεδίο, δηλαδή, το σύνολο των καταστάσεων και προβλημάτων μέσα στο οποίο η έννοια λειτουργεί και ολοκληρώνει το νόημά της (π.χ. η ποικιλία των εφαρμογών μιας μαθηματικής έννοιας). Η αποσπασματική ή μονόπλευρη κατανόηση μιας μαθηματικής έννοιας εμπεριέχει τον κίνδυνο να δημιουργήσει στους μαθητές «εμπόδια», δηλαδή, αντιλήψεις και ερμηνείες που περιορίζουν την πλήρη κατανόηση και χρήση της.

Οι συνέπειες των παραπάνω στη διδασκαλία είναι οι εξής:

1. Οργάνωση «Δραστηριοτήτων» οι οποίες καλύπτουν, κατά το δυνατόν, το εννοιολογικό πεδίο της αντιμετωπιζόμενης έννοιας.
2. Διάκριση του μαθηματικού περιεχομένου (ορισμοί, ιδιότητες, κ.λπ.) από το σύνολο των παραδειγμάτων και εφαρμογών.
3. Διατήρηση μιας μαθηματικής ακρίβειας που αποτελεί τη χρυσή τομή ανάμεσα στο μαθηματικά ορθό και στο επίπεδο των δυνατοτήτων των μαθητών.

A.3

Η έννοια του προβλήματος – δραστηριότητας και ο ρόλος του στη μαθηματική εκπαίδευση

Ο μαθητής στη διάρκεια της φοίτησής του, αντιμετωπίζει καθημερινά ένα ικανό αριθμό ασκήσεων - προβλημάτων. Η φύση και ο ρόλος αυτών των ασκήσεων - προβλημάτων αποτελούν αντικείμενο ιδιαίτερου ενδιαφέροντος για τη Διδακτική των Μαθηματικών και συνιστούν ιδιαίτερο ερευνητικό κλάδο που περιγράφεται με τον όρο «επίλυση προβλήματος» (problem solving).

Ο Polya (1944), στον οποίο δίκαια αποδίδεται η πατρότητα της θεωρίας «επίλυσης προβλήματος», εισάγει την έννοια «πρόβλημα ρουτίνας» (ασκήσεις) για να περιγράψει προβλήματα στα οποία ο μαθητής καλείται να εφαρμόσει μια γνωστή εκ των προτέρων τεχνική, επισημαίνοντας την περιορισμένη σημασία τους για τη Μαθηματική Εκπαίδευση σε αντιδιαστολή με το σημαντικό ρόλο που κατέχει η επίλυση «μη συνηθισμένων» προβλημάτων.

Στη διάρκεια της μεταρρύθμισης του 60 το ενδιαφέρον της Διδακτικής των Μαθηματικών για την «επίλυση προβλημάτων» περιορίζεται αισθητά, γεγονός που αποτελεί φυσική συνέπεια της στροφής της Μαθηματικής Εκπαίδευσης προς την επιστήμη των Μαθηματικών και την αυστηρότητά της. Το πρόβλημα λει-

τουργεί μόνο επικουρικά, ως δείκτης της κατανόησης της θεωρίας των Μαθηματικών. Δεν είναι τυχαίο το γεγονός ότι η υποβάθμιση του προβλήματος αποτελεί παράμετρο της επιχειρηματολογίας των αντιπάλων της μεταρρύθμισης.

Η ανατροπή της μεταρρύθμισης και ο αναπροσανατολισμός της Μαθηματικής Εκπαίδευσης προς την πραγματικότητα και τις ανάγκες της καθημερινής ζωής, στη διάρκεια της δεκαετίας του 70, φέρνουν ξανά στην επικαιρότητα την «επίλυση προβλήματος», το ερευνητικό όμως ενδιαφέρον περιορίζεται, κατά κύριο λόγο, στη βελτίωση της ικανότητας επίλυσης προβλημάτων εκ μέρους των μαθητών.

Στη διάρκεια της δεκαετίας του 80 η «επίλυση προβλήματος» βρίσκεται στο κέντρο του ενδιαφέροντος της έρευνας για τη διδασκαλία των Μαθηματικών, ιδιαίτερα στις ΗΠΑ, όπου το Εθνικό Συμβούλιο των Δασκάλων των Μαθηματικών (N.C.T.M., 1980) τονίζει ότι «η επίλυση προβλημάτων πρέπει να είναι ο στόχος των σχολικών μαθηματικών για τη δεκαετία του 80». Παράλληλα αποσαφηνίζεται το περιεχόμενο της «επίλυσης προβλημάτων» με τον αποκλεισμό της εφαρμογής «τυποποιημένων μηχανισμών» (Skemp, 1981).

Στο 5^ο Διεθνές Συνέδριο για τη Μαθηματική Εκπαίδευση (Adelaide, 1984) αναγνωρίζεται διεθνώς ο ρόλος και η σημασία της «επίλυσης προβλημάτων» και επισημαίνονται τρεις σχετικές παράμετροι που αφορούν τη διδακτική πράξη.

- α. Διδασκαλία με στόχο την επίλυση συγκεκριμένων προβλημάτων τα οποία θεωρούνται ιδιαίτερης σημασίας.
- β. Διδασκαλία γύρω από την επίλυση προβλημάτων, με στόχο τη βελτίωση της ικανότητας επίλυσης προβλημάτων.
- γ. Διδασκαλία μέσω της επίλυσης προβλημάτων, με στόχο την εκμάθηση εννοιών και δεξιοτήτων που αναφέρονται στο Αναλυτικό Πρόγραμμα.

Το κέντρο βάρους της ερευνητικής προσπάθειας μετατοπίζεται από την πρώτη και τη δεύτερη παράμετρο προς την τρίτη. Ο Vergnaud (1982) τονίζει ότι το πρόβλημα κατέχει αποφασιστικό ρόλο στην οικοδόμηση των γνώσεων, ενώ διαπιστώνει (1981) ότι «η λύση του προβλήματος είναι η πηγή και το κριτήριο της μάθησης».

Ο Brousseau (1986) εισάγει την έννοια της «αδιδασκτικής κατάστασης» υποστηρίζοντας ότι: «Η σύγχρονη αντίληψη ζητάει από το διδάσκοντα να οργανώσει μια σειρά προβληματικών καταστάσεων, πάνω στις οποίες ο μαθητής θα κινητοποιηθεί, θα συζητήσει, θα σκεφθεί και θα αναπτύξει την προσωπική του δραστηριότητα. Στη διαδικασία αυτή ο διδάσκων δεν παρεμβαίνει. Αυτή η κατάσταση ονομάζεται αδιδασκτική ...»

Η Laborde (1987) εξετάζοντας το ρόλο του προβλήματος στην οικοδόμηση των μαθηματικών εννοιών σημειώνει ότι «από επιστημολογική άποψη, η γέννηση