Ν. Π. Οικονομίδη
Χ. Κωνσταντιλάκη - Σαββοπούλου

# Στοιχεία Μιγαδικών Συναρτήσεων

τόμος ΙΙ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
Θεσσαλονίκη

# Εισαγωγή

Το βιβλίο αυτό περιέχει τμήμα της ύλης του εξαμηνιαίου μαθήματος «Στοιχεία Μιγαδικών Συναρτήσεων» που διδάσκεται στους φοιτητές του Τμήματος Μαθηματικών του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσ/νίκης και είναι συνέχεια του βιβλίου, το οποίο τιτλοφορείται «Στοιχεία Μιγαδικών Συναρτήσεων», τόμος Ι. Γιαυτό και η αρίθμηση των κεφαλαίων και των σχημάτων είναι συνέχεια των αντίστοιχων αριθμήσεων του πρώτου τόμου.

Σκοπός των δύο αυτών βιβλίων είναι η εισαγωγή στα βασικότερα κεφάλαια της Θεωρίας των Μιγαδικών Συναρτήσεων μιας μιγαδικής μεταβλητής, τα οποία είναι χρήσιμα σε πολλούς κλάδους των Μαθηματικών και της Φυσικής.

Κατά τη συγγραφή του βιβλίου αυτού καταβλήθηκε ιδιαίτερη προσπάθεια για την απλή παρουσίαση του κειμένου. Γιαυτό πολλές αποδείξεις θεωρημάτων που υπερέβαιναν τα όρια του στοιχειώδους αυτού βιβλίου παραλείφθηκαν και δόθηκαν όσο το δυνατό περισσότερα παραδείγματα για να γίνουν πιο κατανοητές διάφορες καινούργιες έννοιες.

Στο έβδομο κεφάλαιο με τίτλο «Γενίκευση του μιγαδικού επικαμπύλιου ολοκληρώματος» αναφέρεται πληροφοριακά η γενική περίπτωση του μιγαδικού ολοκληρώματος και του μιγαδικού απόλυτου ολοκληρώματος. Επίσης, επισημαίνεται το γεγονός ότι οι ορισμοί του μιγαδικού (αντίστ. μιγαδικού απόλυτου) ολοκληρώματος που δόθηκαν στο έκτο κεφάλαιο είναι ειδικές περιπτώσεις των αντίστοιχων γενικών ορισμών που δίνονται στο κεφάλαιο αυτό.

Στο όγδοο κεφάλαιο που τιτλοφορείται «Θεώρημα και ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy» ορίζονται αρχικά οι έννοιες του απλού δρόμου και του α-

*πλού συναφούς τόπου και στη συνέχεια δίνεται ένα από τα βασικότερα θεωρήματα της θεωρίας των Μιγαδικών Συναρτήσεων, το θεώρημα του Cauchy. Το θεώρημα αυτό διατυπώθηκε και αποδείχτηκε από τον Cauchy το 1825. Το 1900 όμως ο Goursat βελτίωσε σημαντικά το θεώρημα αυτό. Γιαυτό λέγεται και θεώρημα των Cauchy-Goursat. Η σημασία του θεωρήματος των Cauchy-Goursat ήταν πολύ σημαντική στην ανάπτυξη της θεωρίας των Μιγαδικών Συναρτήσεων, γιατί πολλά θεωρήματα εξαρτώνται άμεσα ή έμμεσα από το θεώρημα αυτό. Κατόπιν αναφέρεται και αποδεικνύεται ο ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy καθώς επίσης και ορισμένα αξιοσημείωτα θεωρήματα, όπως το θεώρημα του Liouville, το θεμελιώδες θεώρημα της Άλγεβρας, το θεώρημα της μέσης τιμής του Gauss για τις μιγαδικές συναρτήσεις, κ.α.*

*Το ένατο κεφάλαιο με τίτλο «Δυναμοσειρές» ασχολείται με μια από τις πιο ενδιαφέρουσες κατηγορίες σειρών συναρτήσεων, τις δυναμοσειρές. Εισάγεται η έννοια της ακτίνας σύγκλισης δυναμοσειράς, δίνεται το θεώρημα των Cauchy-Hadamard και ορισμένα άλλα θεωρήματα που αναφέρονται στην παραγώγιση και ολοκλήρωση δυναμοσειρών.*

*Το κεφάλαιο δέκα έχει τίτλο «Αναπτύγματα του Taylor και του Laurent». Αφού αναφερθεί το ανάπτυγμα Taylor, επεκτείνεται η έννοια της αναλυτικότητας των πραγματικών συναρτήσεων στις μιγαδικές συναρτήσεις και στη συνέχεια αποδεικνύεται ότι η έννοια της αναλυτικότητας των μιγαδικών συναρτήσεων ταυτίζεται με την έννοια της ολομορφίας. Επίσης αναφέρονται θεωρήματα σχετικά με τις ρίζες των αναλυτικών συναρτήσεων, όπως η αρχή του ορίσματος, το θεώρημα του Rouché κ.α.*

*Κατόπιν δίνονται προτάσεις που οδηγούν στα αξιοσημείωτα θεωρήματα της ταυτότητας των αναλυτικών συναρτήσεων και στην αρχή του μεγίστου (αντίστ. ελαχίστου) μέτρου.*

*Μελετάται το ανάπτυγμα Laurent σε ανοικτό δακτύλιο, εισάγεται η έννοια του απομονωμένου ανώμαλου σημείου και εξετάζονται οι τρεις κατηγορίες απομονωμένων ανώμαλων σημείων, τα απαλείψιμα ανώμαλα σημεία, οι πόλοι και τα ουσιώδη ανώμαλα σημεία. Επίσης, μελετάται το ∞ ως απομονωμένο ανώμαλο σημείο μιγαδικής συνάρτησης. Τέλος, αναφέρονται δύο ενδιαφέρουσες κατηγορίες μιγαδικών συναρτήσεων, οι ακέραιες και οι μερόμορφες συναρτήσεις.*

*Στο τελευταίο κεφάλαιο, το έντεκα, που έχει τίτλο «Ολοκληρωτικά υ-*

*πόλοιπα - Εφαρμογές» εισάγεται αρχικά η έννοια του ολοκληρωτικού υπολοίπου και στη συνέχεια εξετάζονται περιπτώσεις υπολογισμού ορισμένων ολοκληρωμάτων, όπως ολοκληρωμάτων της μορφής* $\int_0^{2\pi} F(cost, sint)dt$. *Επίσης μελετάται ο υπολογισμός μη γνησίων ολοκληρωμάτων της μορφής*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx, \text{ όπου } f(x)= \frac{P(x)}{Q(x)} \text{ ή } f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}\, e^{iax},$$

*P(x), Q(x) πολυώνυμα και* $a > 0$.

*Τελειώνοντας, θέλω και πάλι να ευχαριστήσω το συνάδελφο κ. Χρ. Καρυοφύλλη για τις εύστοχες παρατηρήσεις του και την πολύτιμη βοήθειά του στη διόρθωση του κειμένου, το τυπογραφείο Ν. Μαυρογένης και Υιοί για την ικανοποιητική εμφάνιση του βιβλίου, την κ. Μ. Χανιώτη για τα επιμελημένα σχέδια και την οικογένειά μου για την κατανόηση και υπομονή που έδειξε τις ώρες που δούλευα το βιβλίο αυτό.*

*Θεσ/νίκη 1984* *Χαρ. Κωνσταντιλάκη - Σαββοπούλου*

# *Περιεχόμενα*

# *Γενίκευση του μιγαδικού επικαμπύλιου ολοκληρώματος*

## *7.1. Η έννοια του μιγαδικού ολοκληρώματος με προσαρτημένα αθροίσματα*

7.1.1. Ας θεωρήσουμε μια συνάρτηση $f{:}E \to \mathbb{C}, (E \subset \mathbb{C})$, ένα δρόμο $c(t) : [a, \beta] \to \mathbb{C}$ στο $E$ $(\hat{c} \subset E)$ και μια οποιαδήποτε διαίρεση $\Delta = \{t_0, t_1, t_2, \dots, t_n\}$ του $[a, \beta]$.

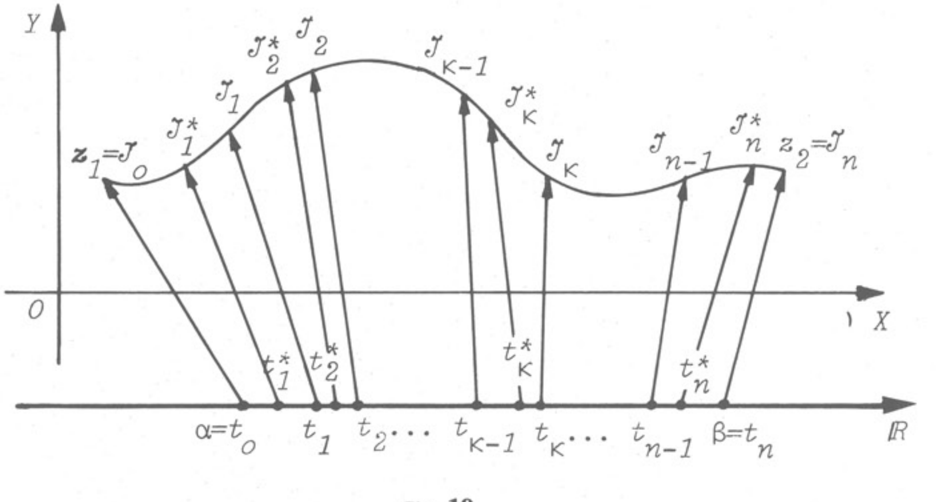
Αν τώρα

$$\forall k \in \{1, 2, \dots, n\},\ t^*_k \in [t_{k-1}, t_k],$$

σχηματίζουμε το άθροισμα

$$S(\Delta) = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta^*_k)(\zeta_k - \zeta_{k-1}),$$

όπου $\zeta_k = c(t_k)$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$ και $\zeta^*_k = c(t^*_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$ (σχ. 19).




**σχ. 19**

Το $S(\Delta)$ λέγεται *προσαρτημένο άθροισμα της $f$* στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και εξαρτάται προφανώς από τη διαίρεση $\Delta$, τη συνάρτηση $f$ και την εκλογή των σημείων $t^*_\kappa$, όπου $k = 1, 2, \ldots, n$.

**7.1.2.** Η συνάρτηση $f : E \to \mathbb{C}$ $(E \subset \mathbb{C})$ λέγεται *ολοκληρώσιμη* στο δρόμο $c(t) : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ (ή κατά μήκος του δρόμου $c$), ο οποίος είναι μέσα στο $E$ $(\hat{c} \subset E)$, όταν υπάρχει αριθμός $\lambda \in \mathbb{C}$, τέτοιος ώστε

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0, \ (\Delta \text{ διαίρεση του } [\alpha, \beta] \text{ και } |\Delta| < \delta) \Rightarrow |S(\Delta) - \lambda| < \varepsilon,$$

ανεξάρτητα από την εκλογή των σημείων $t^*_\kappa$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ στο προσαρτημένο άθροισμα $S(\Delta) = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta^*_\kappa)(\zeta_\kappa - \zeta_{\kappa-1})$ της $f$, όπου

$$|\Delta| = \max\{t_\kappa - t_{\kappa-1} : k = 1, 2, \ldots, n\}$$

$$\zeta^*_\kappa = c(t^*_\kappa) \ (k = 1, 2, \ldots, n) \text{ και } \zeta_\kappa = c(t_\kappa)(k = 0, 1, \ldots, n).$$

Το γεγονός αυτό, για συντομία γράφεται

$$\lim_{|\Delta| \to 0} S(\Delta) = \lambda \quad \text{ή} \quad |\Delta| \to 0 \Rightarrow S(\Delta) \to \lambda.$$

Διαπιστώνεται εύκολα ότι ο $\lambda$, εφόσον υπάρχει, είναι μοναδικός και ονομάζεται *επικαμπύλιο μιγαδικό ολοκλήρωμα της $f$* ή απλούστερα *ολοκλήρωμα της $f$ στο δρόμο $c$* (ή *κατά μήκος του $c$*), παριστάνεται δε με το συμβολισμό

$$\int_c f(z)dz \text{ ή απλούστερα } \int_c fdz,$$

όπου $z$ μεταβλητή στο $\hat{c}$.

**7.1.3.** Αν στον ορισμό του μιγαδικού ολοκληρώματος [7.1.2] αντί για το προσαρτημένο άθροισμα

$$S(\Delta) = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta^*_\kappa)(\zeta_\kappa - \zeta_{\kappa-1})$$

θεωρήσουμε το άθροισμα

$$S^*(\Delta) = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta^*_\kappa)|\zeta_\kappa - \zeta_{\kappa-1}|$$

έχουμε τον ορισμό του απόλυτου μιγαδικού ολοκληρώματος.

Συγκεκριμένα, η συνάρτηση $f : E \to \mathbb{C}$ $(E \subset \mathbb{C})$ λέγεται *απόλυτα ολοκληρώσιμη* στο δρόμο $c(t) : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ (ή κατά μήκος του $c$), ο οποίος είναι μέσα στο $E$ $(\hat{c} \in E)$, όταν υπάρχει αριθμός $\lambda^* \in \mathbb{C}$, έτσι ώστε

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, (\Delta$ διαίρεση του $[\alpha, \beta]$ και $|\Delta| < \delta) \Rightarrow |S^*(\Delta) - \lambda^*| < \varepsilon$,

ανεξάρτητα από την εκλογή των σημείων $t^*_\kappa$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ στο άθροισμα

$$S^*(\Delta) = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta^*_\kappa)|\zeta_\kappa - \zeta_{\kappa-1}|,$$

όπου $|\Delta| = max\{t_\kappa - t_{\kappa-1} : k = 1, 2, \dots, n\}$, $\zeta^*_\kappa = c(t^*_\kappa)$, $(k = 1, 2, \dots, n)$ και $\zeta_\kappa = c(t_\kappa)$, $(k = 0, 1, \dots, n)$.

Το γεγονός αυτό, για συντομία γράφεται

$$\lim_{|\Delta| \to 0} S^*(\Delta) = \lambda^* \quad \text{ή} \quad |\Delta| \to 0 \Rightarrow S^*(\Delta) \to \lambda^*.$$

Διαπιστώνεται εύκολα ότι ο $\lambda^*$, εφόσον υπάρχει, είναι μοναδικός και ονομάζεται *απόλυτο επικαμπύλιο μιγαδικό ολοκλήρωμα της f κατά μήκος του δρόμου c* ή απλούστερα *απόλυτο μιγαδικό ολοκλήρωμα της f στο c*, παριστάνεται δε με το συμβολισμό

$$\int_c f(z)|dz| \text{ ή απλούστερα } \int_c f|dz|,$$

όπου $z$ μεταβλητή στο $\hat{c}$.

Ειδικότερα, αν $\forall z \in \hat{c}$, $f(z) = 1 : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, όπου $c : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ ένας οποιοσδήποτε δρόμος μέσα στο $\mathbb{C}$, το απόλυτο μιγαδικό ολοκλήρωμα της $f$ στο $c$ γράφεται

$$\int_c |dz|. \tag{1}$$

Αν υπάρχει το ολοκλήρωμα της (1), τότε ο δρόμος $c$ λέγεται *ευθυγραμμίσιμος*.

Είναι φανερό ότι, αν ο δρόμος $c : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ είναι ευθυγραμμίσιμος, το απόλυτο ολοκλήρωμα $\int_c |dz|$ είναι ένας μη αρνητικός πραγματικός αριθμός. Στην περίπτωση αυτή ο $\lambda$ λέγεται *μήκος* του δρόμου $c$ και παριστάνεται με το συμβολισμό $l(c)$, δηλαδή

$$l(c) = \int_c |dz|.$$

Αποδεικνύεται ότι:

**Θεώρημα Ι.**

*Αν ο δρόμος $c(t) : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ είναι λείος ή τμηματικά λείος, τότε*

$$l(c) = \int_c |dz| = \int_\alpha^\beta |c'(t)|dt.$$

Άμεση συνέπεια του Θεωρ. I είναι ότι ο ορισμός [6.2.4] του μήκους δρόμου είναι ειδική περίπτωση του ορισμού [7.1.3].

Επίσης, αποδεικνύεται ότι:

**Θεώρημα II.**

*Αν η συνάρτηση $f : E \to \mathbb{C}$ $(E \subset \mathbb{C})$ είναι συνεχής στον ευθυγραμμίσιμο δρόμο $c(t) : [a, \beta] \to \mathbb{C}$ $(\hat{c} \subset E)$, τότε η $f$ είναι ολοκληρώσιμη και απόλυτα ολοκληρώσιμη στο δρόμο $c$.*

Από τα Θεωρ. I, II/7.1 προκύπτει εύκολα ότι:

**Θεώρημα III.**

*Αν η συνάρτηση $f(z) : E \to \mathbb{C}$ $(E \subset \mathbb{C})$ είναι συνεχής στο λείο ή τμηματικά λείο δρόμο $c(t) : [a, \beta] \to \mathbb{C}$ $(\hat{c} \subset E)$, τότε η $f(z)$ είναι ολοκληρώσιμη και απόλυτα ολοκληρώσιμη στο $c$ και μάλιστα*

*(i)*
$$\int_c f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(c(t))c'(t)dt \text{ και}$$

*(ii)*
$$\int_c f(z)|dz| = \int_\alpha^\beta f(c(t))|c'(t)|dt.$$

Επομένως, οι ορισμοί [6.3.1] και [6.6.1] του επικαμπύλιου μιγαδικού ολοκληρώματος και του απόλυτου επικαμπύλιου μιγαδικού ολοκληρώματος της $f$ στο $\mathbb{C}$ αντίστοιχα, είναι ειδικές περιπτώσεις των ορισμών [7.1.2] και [7.1.3].

*Σημείωση 1.*

Οι αποδείξεις των Θεωρ. I, II/7.1 παραλείπονται, επειδή είναι αρκετά επίπονες και υπερβαίνουν τα όρια του βιβλίου αυτού.

## *7.2. Ισοδύναμοι δρόμοι*

7.2.1. Ας θεωρήσουμε δυο δρόμους $c_1 : [a_1, \beta_1] \to \mathbb{C}$ και $c_2 : [a_2, \beta_2] \to \mathbb{C}$ στο $\mathbb{C}$. Ο $c_1$ λέγεται *ισοδύναμος* του $c_2$, όταν υπάρχει μια συνεχής αύξουσα πραγματική συνάρτηση $\varphi(t) : [a_1, \beta_1] \to [a_2, \beta_2]$, τέτοια ώστε

$$\forall t \in [a_1, \beta_1],\ c_1(t) = c_2(\varphi(t)).$$

Επειδή $c_1(a_1) = c_2(\varphi(a_1)) = c_2(a_2)$ και $c_1(\beta_1) = c_2(\varphi(\beta_1)) = c_2(\beta_2)$, οι δρόμοι $c_1$, $c_2$ έχουν τα ίδια άκρα. Αφετέρου, εφόσον η $\varphi(t)$ είναι συνεχής και αύξουσα στο $[a_1, \beta_1]$, οι $c_1$, $c_2$ έχουν το ίδιο ίχνος στο $\mathbb{C}$, δηλαδή $\hat{c}_1 = \hat{c}_2$.

Αν $c_1$, $c_2$ είναι δυο δρόμοι στο $\mathbb{C}$, τέτοιοι ώστε ο $c_1$ να είναι ευθυγραμμίσιμος και ισοδύναμος του $c_2$, τότε είναι φανερό ότι και ο $c_2$ είναι ευθυγραμμίσιμος και επιπλέον $l(c_1) = l(c_2)$.

Από τους ορισμούς της ολοκληρώσιμης [7.1.2] και της απόλυτα ολοκληρώσιμης [7.1.3] συνάρτησης $f$ στο δρόμο $c$ και από την έννοια του ισοδύναμου δρόμου προκύπτει εύκολα ότι:

**Θεώρημα Ι.**

*Αν $c_1$, $c_2$ είναι δυο δρόμοι στο $E$, $f : E \to \mathbb{C}$ $(E \subset \mathbb{C})$ μια συνάρτηση ολοκληρώσιμη (αντίστ. απόλυτα ολοκληρώσιμη) στο δρόμο $c_1$, ο οποίος είναι ισοδύναμος του $c_2$, τότε η $f$ είναι ολοκληρώσιμη (αντίστ. απόλυτα ολοκληρώσιμη) στο $c_2$ και επιπλέον*

$$\int_{c_1} f(z)dz = \int_{c_2} f(z)dz \text{ (αντιστ. } \int_{c_1} f(z)|dz| = \int_{c_2} f(z)|dz|).$$

Ας θεωρήσουμε τους δρόμους $c_1(t) : [a_1, \beta_1] \to \mathbb{C}$ και $c_2(t) : [a_2, \beta_2] \to \mathbb{C}$ στο $\mathbb{C}$. Αν υπάρχει μια παραγωγίσιμη αύξουσα πραγματική συνάρτηση $\varphi(t) : [a_1, \beta_1] \to [a_2, \beta_2]$, τέτοια ώστε

(i) $\forall t \in [a_1, \beta_1]$, $c_1(t) = c_2(\varphi(t))$ και

(ii) η παράγωγος $\varphi'(t)$ της $\varphi(t)$ να είναι συνεχής στο $[a_1, \beta_1]$, τότε προφανώς προκύπτει ότι:

(1) $c_2$ λείος (αντίστ. τμηματικά λείος) $\Rightarrow$ $c_1$ λείος (αντίστ. τμηματικά λείος).

Χάρη στο Θεώρ. Ι/7.2 και την (1) της 7.2.1 αποδεικνύεται εύκολα ότι:

**Θεώρημα ΙΙ.**

*Αν $c(t) : [a, \beta] \to \mathbb{C}$ είναι ένας οποιοσδήποτε δρόμος στο $\mathbb{C}$ και $\varphi(t) : [\gamma, \delta] \to [a, \beta]$ μια γραμμική συνάρτηση του $[\gamma, \delta]$ στο $[a, \beta]$, $(\mathbb{R} \ni \gamma < \delta \in \mathbb{R})$, τέτοια ώστε*

$$\forall t \in [\gamma, \delta],\ \varphi(t) = \frac{1}{\delta - \gamma}\ [(\beta - a)t + (a\delta - \beta\gamma)],$$

*τότε*

*(i) η συνάρτηση $c^*(t) = c(\varphi(t)) : [\gamma, \delta] \to \mathbb{C}$ είναι δρόμος,*

*(ii) ο δρόμος $c^*$ είναι ισοδύναμος του δρόμου $c$,*

*(iii) $c$ λείος (αντίστ. τμηματικά λείος) $\Rightarrow$ $c^*$ λείος (αντίστ. τμηματικά*

*λείος).*

*Επιπλέον, αν η συνάρτηση* $f : E \to \mathbb{C}$ $(E \subset \mathbb{C})$ *είναι συνεχής στο δρόμο* $c(\hat{c} \subset E)$, *τότε*

$$\int_c f(z)dz = \int_{c^*} f(z)dz.$$

Τέλος, οι δρόμοι

$$c_1 : [a_1, \beta_1] \to \mathbb{C},\ c_2 : [a_2, \beta_2] \to \mathbb{C}, \ldots,\ c_\eta : [a_\eta, \beta_\eta] \to \mathbb{C}$$

λέγονται *διαδοχικοί*, όταν το τέλος του ενός είναι αρχή του επομένου του, δηλαδή όταν

$$\forall k \in \{1, 2, \ldots, n-1\},\ c_\kappa(\beta_\kappa) = c_{\kappa+1}(a_{\kappa+1}).$$

Χάρη στην έννοια των διαδοχικών δρόμων και το Θεώρ. ΙΙ/7.2 έχουμε ότι:

**Θεώρημα ΙΙΙ.**

*Αν* $c_1, c_2, \ldots, c_\eta$ *είναι n διαδοχικοί δρόμοι μέσα στο E* $(E \subset \mathbb{C})$, *τέτοιοι ώστε* $\forall k \in \{1, 2, \ldots, n\}$,

*(i) ο δρόμος* $c_\kappa : [a_\kappa, \beta_\kappa] \to \mathbb{C}$ *να είναι λείος ή τμηματικά λείος και*

*(ii) η συνάρτηση* $f : E \to \mathbb{C}$ *να είναι συνεχής στο δρόμο* $c_\kappa$,

*τότε υπάρχει ένας τουλάχιστο δρόμος* $c : [a, \beta] \to \mathbb{C}$, *τέτοιος ώστε*

*(α)* $c(a) = c_1(a_1)$ *καί* $c(\beta) = c_\eta(\beta_\eta)$,

*(β)* $\hat{c} = \hat{c}_1 \cup \hat{c}_2 \cup \ldots \cup \hat{c}_\eta$,

*(γ) ο c να είναι λείος ή τμηματικά λείος και*

*(δ)* $\int_c f(z)dz = \int_{c_1} f(z)dz + \int_{c_2} f(z)dz + \ldots + \int_{c_\eta} f(z)dz.$

*Απόδειξη.*

Θεωρούμε ως δρόμο $c$ τη συνάρτηση $c(t) : [a, \beta] \to \mathbb{C}$, όπου

$$c(t) = \begin{cases} c_1(\varphi_1(t)), & \text{όταν } t \in [a, t_1] \\ c_2(\varphi_2(t)), & \text{όταν } t \in ]t_1, t_2] \\ \cdots\cdots\cdots & \\ c_\eta(\varphi_\eta(t)), & \text{όταν } t \in ]t_{\eta-1}, \beta], \end{cases}$$

$$a < t_1 < t_2 < \ldots < t_{\eta-1} < \beta,$$

$$\forall \lambda \in \{1, 2, \ldots, n\},\ \varphi_\lambda(t) : [t_{\lambda-1}, t_\lambda] \to [a_\lambda, \beta_\lambda] \text{ και}$$

$$\varphi_\lambda(t) = \frac{1}{t_\lambda - t_{\lambda-1}} [(\beta_\lambda - a_\lambda)t + (a_\lambda t_\lambda - \beta_\lambda t_{\lambda-1})],$$

οπότε, χάρη στο Θεώρ. ΙΙ/7.2, αποδεικνύεται το ζητούμενο. •

Άμεση συνέπεια του Θεωρ. ΙΙΙ/7.2 είναι ότι ο ορισμός [6.7.1] του επικαμπύλιου μιγαδικού ολοκληρώματος κατά μήκος τμηματικά λείου δρόμου μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι ειδική περίπτωση του προηγούμενου θεωρήματος.

* * *