Ν. Π. Οικονομίδη
Χ. Κωνσταντιλάκη - Σαββοπούλου

Στοιχεία Μιγαδικών Συναρτήσεων

τόμος Ι

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
Θεσσαλονίκη

Εισαγωγή

Το βιβλίο αυτό περιέχει την ύλη του εξαμηνιαίου μαθήματος «Στοιχεία Μιγαδικών Συναρτήσεων», που διδάσκεται στους φοιτητές του Τμήματος Μαθηματικών του Αριστοτέλειου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης.

Σκοπός του είναι η εισαγωγή σε ορισμένα βασικά κεφάλαια της θεωρίας των Μιγαδικών Συναρτήσεων μιας μιγαδικής μεταβλητής, τα οποία είναι χρήσιμα και σε άλλους κλάδους των Μαθηματικών, καθώς επίσης και σε εφαρμογές στην ηλεκτρομαγνητική θεωρία, στην αεροδυναμική, στην μηχανική ρευστών, κ.ά.

Το πρώτο κεφάλαιο με τίτλο «Μιγαδικοί αριθμοί» αναφέρεται στην κατασκευή του σώματος $\mathbb{C}$ *των μιγαδικών αριθμών, σε διάφορες ιδιότητές τους, στη διανυσματική παράσταση των μιγαδικών αριθμών και στη σφαίρα του Riemann.*

Στο δεύτερο κεφάλαιο, που τιτλοφορείται «Ακολουθίες και σειρές μιγαδικών αριθμών», εξετάζεται η σύγκλιση ακολουθιών και σειρών μιγαδικών αριθμών και δίνονται διάφορα κριτήρια σύγκλισης, όπως του D' Alembert, του Cauchy, που είναι επεκτάσεις αντίστοιχων γνωστών προτάσεων που ισχύουν στην Πραγματική Ανάλυση.

Το κεφάλαιο τρία με τίτλο «Στοιχειώδεις μιγαδικές συναρτήσεις» αναφέρεται τις ρητές, εκθετικές, τριγωνομετρικές, υπερβολικές συναρτήσεις και στους ομογραφικούς μετασχηματισμούς.

Στο τέταρτο κεφάλαιο με τίτλο «Όρια και συνέχεια μιγαδικών συναρτήσεων» ορίζονται αρχικά οι στοιχειώδεις τοπολογικές έννοιες που είναι απαραίτητες για την ανάπτυξη της υπόλοιπης ύλης και στη συνέχεια μελετάται το όριο και η συνέχεια μιγαδικής συνάρτησης μιγαδικής μεταβλητής.

Στο κεφάλαιο πέντε, που τιτλοφορείται «Ολόμορφες μιγαδικές συναρτήσεις», εισάγεται αρχικά η έννοια της παραγώγου μιγαδικής συνάρτησης μιγαδικής μεταβλητής. Κατόπιν ορίζονται οι ολόμορφες μιγαδικές συναρτήσεις και δίνονται συνθήκες ολομορφίας οι οποίες είναι γνωστές και ως συνθήκες

Cauchy - Riemann. Τέλος, συσχετίζεται η έννοια της αρμονικότητας με την έννοια της ολομορφίας.

Τέλος, στο έκτο κεφάλαιο με τίτλο «Ολοκλήρωση», αφού αναφερθούν ορισμένα στοιχεία (ορισμοί και ιδιότητες) από τη θεωρία ολοκλήρωσης πραγματικών συναρτήσεων πραγματικής μεταβλητής, αναφέρεται η έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος μιγαδικής συνάρτησης πραγματικής μεταβλητής. Στη συνέχεια, μετά από τη μελέτη των δρόμων, ορίζεται το μιγαδικό ολοκλήρωμα συνεχών μιγαδικών συναρτήσεων μιγαδικής μεταβλητής κατά μήκος λείου ή τμηματικού λείου δρόμου. Εξετάζονται αξιοσημείωτες ιδιότητες των επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων και τέλος εισάγεται και μελετάται η έννοια του απόλυτου μιγαδικού ολοκληρώματος.

Κατά τη συγγραφή του βιβλίου καταβλήθηκε ιδιαίτερη προσπάθεια για την απλή παρουσίαση του κειμένου, γιαυτό πολλές αποδείξεις θεωρημάτων που ήταν επίπονες και απαιτούσαν πολλές γνώσεις Τοπολογίας παραλείφθηκαν.

Πριν αρχίσει να τυπώνεται το βιβλίο αυτό πέθανε ο καθηγητής κ. Ν. Οικονομίδης. Το ελάχιστο που μπορώ να κάνω για το δάσκαλό μου, εκφράζοντας τη λύπη μου για το θάνατό του, είναι να αφιερώσω αυτή τη δουλειά στη μνήμη του.

Τελειώνοντας, θέλω να ευχαριστήσω το συνάδελφο κ. Χρ. Καρυοφύλλη για τις υποδείξεις του και τις χρήσιμες παρατηρήσεις του στο κείμενο, το τυπογραφείο Π. Ζήτη για την ικανοποιητική εμφάνιση του βιβλίου, την κ. Μ. Χανιώτη για τα επιμελημένα σχέδια και την οικογένειά μου για την κατανόηση και την υπομονή που έδειξε τις ώρες που δούλευα το βιβλίο.

Θεσσαλονίκη, 1984

Χαρ. Κωνσταντιλάκη-Σαββοπούλου

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Μιγαδικοί αριθμοί

1.1. Το σώμα των μιγαδικών αριθμών

1.1.1. Θεωρούμε το σύνολο $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 = \{ (x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ όπου $\mathbb{R}$ το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Στο $\mathbb{R}^2$ ορίζουμε δυο *πράξεις* την *πρόσθεση* και τον *πολλαπλασιασμό* ως εξής:

(i) Πρόσθεση : Σε κάθε ζεύγος στοιχείων $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$ του $\mathbb{R}^2$ αντιστοιχεί μονότιμα το στοιχείο $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ του $\mathbb{R}^2$, το οποίο παριστάνεται με το $z_1 + z_2$ και ονομάζεται *άθροισμα* των z_1, z_2.

(ii) Πολλαπλασιασμός : Σε κάθε ζεύγος στοιχείων $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$ του $\mathbb{R}^2$ αντιστοιχεί μονότιμα το στοιχείο $(x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$ του $\mathbb{R}^2$, το οποίο παριστάνεται με το $z_1 \cdot z_2$ και ονομάζεται γινόμενο των z_1, z_2.

1.1.2. Διαπιστώνεται εύκολα ότι:

Θεώρημα I.

1. *Το $\mathbb{R}^2$ έχει δυο τουλάχιστο στοιχεία.*
2. $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{R}^2$, $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$
3. $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{R}^2$, $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.
4. *Αν* $0 = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$, *τότε* $\forall z \in \mathbb{R}^2$, $0 + z = z$.
5. $\forall z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $-z + z = 0$, *όπου* $-z = (-x, -y)$.
6. $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{R}^2$, $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$.
7. $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{R}^2$, $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$.

8. $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{R}^2,\ z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$.

9. *Αν* $1 = (1, 0) \in \mathbb{R}^2$, *τότε* $\forall z \in \mathbb{R}^2,\ 1 \cdot z = z$.

10. *Τέλος*, $\forall z = (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{ (0, 0) \},\ z^{-1} \cdot z = 1$, *όπου*

$$z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2} \ ,\ \frac{-y}{x^2+y^2} \right)$$

Από την Άλγεβρα είναι γνωστή η έννοια του *σώματος*.
Άμεση συνέπεια του προηγούμενου θεωρήματος είναι προφανώς ότι:

Πόρισμα Ι. *Το* $\mathbb{R}^2$, *εφοδιασμένο με τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού* [1.1.1], *αποτελεί σώμα.*

Το σώμα αυτό παριστάνεται με το συμβολισμό $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$, τα στοιχεία του $\mathbb{R}^2$ λέγονται *μιγαδικοί αριθμοί* και το $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ *σώμα των μιγαδικών αριθμών.*

Για διάκριση, αντί του $\mathbb{R}^2$ θα χρησιμοποιούμε σχεδόν πάντοτε το $\mathbb{C}$, οπότε το $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ θα γράφεται $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ή, για συντομία, $\mathbb{C}$. Ώστε το $\mathbb{C}$ θα παριστάνει (αδιάφορα) το *σώμα* ή *το σύνολο των μιγαδικών αριθμών.*

1.1.3. Δεχόμαστε ότι $\forall x \in \mathbb{R},\ x = (x, 0) \in \mathbb{C}$, και συνεπώς

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Κατόπιν αυτού είναι φανερό [Θεώρ. 1/1.1.] ότι

(i) Το *μηδενικό στοιχείο* του σώματος $\mathbb{C}$ είναι ο πραγματικός αριθμός 0 (μηδέν).

(ii) Το *μοναδιαίο στοιχείο* του σώματος $\mathbb{C}$ είναι ο πραγματικός αριθμός 1 (ένα).

Επίσης είναι φανερό [Θεώρ. 1/1.1] ότι

(iii) $\forall z = (x, y) \in \mathbb{C}$, το *αντίθετο* (ή ο *αντίθετος*) του z, είναι ο μιγαδικός αριθμός $-z = (-x, -y) \in \mathbb{C}$.

(iv) Τέλος, $\forall z = (x, y) \in \mathbb{C} - \{0\}$, το *αντίστροφο* (ή ο *αντίστροφος*) του z, είναι ο μιγαδικός αριθμός $z^{-1} = \left(\dfrac{x}{x^2+y^2} \ ,\ \dfrac{-y}{x^2+y^2} \right) \in \mathbb{C}$.

1.1.4. Στο $\mathbb{C}$ ορίζονται δυο νέες πράξεις, η *αφαίρεση* και η *διαίρεση* ως εξής:

(i) Αφαίρεση : Σε κάθε ζεύγος, z_1 , $z_2 \in \mathbb{C}$, αντιστοιχεί μονότιμα το $z_1 + (-z_2) \in \mathbb{C}$, το οποίο παριστάνεται με το $z_1 - z_2$ και ονομάζεται *διαφορά* των z_1 , z_2 .

(ii) Διαίρεση : Σε κάθε $z_1 \in \mathbb{C}$ και κάθε $z_2 \in \mathbb{C} - \{0\}$, αντιστοιχεί μονότιμα το $z_1 \cdot z_2^{-1} \in \mathbb{C}$, το οποίο παριστάνεται με το $z_1 : z_2$ (ή $\frac{z_1}{z_2}$) και ονομάζεται *πηλίκο* των z_1 , z_2 .

Άμεση συνέπεια των *(i)* και *(ii)* είναι οι δυο παρακάτω ιδιότητες:

(1) $\forall\, z_1 , z_2 , z_3 \in \mathbb{C},\ z_1 + z_2 = z_2 + z_3 \ \Rightarrow\ z_1 = z_3$

(2) $\forall\, z_1 , z_2 , z_3 \in \mathbb{C}$ και $z_3 \neq 0,\ (z_1 \cdot z_3) : (z_2 \cdot z_3) = z_1 : z_2$.

1.1.5. Αποδεικνύεται εύκολα ότι:

Θεώρημα ΙΙ. *Αν* $(0, 1) = i \in \mathbb{C}$, *τότε*

$$\forall\, z = (x, y) \in \mathbb{C}\ ,\quad z = x + i\, y.$$

Απόδειξη. Σύμφωνα με την 1.1.1 *(ii)* και την 1.1.3

$$\forall\, z = (x, y) \in \mathbb{C}\ ,\quad (x, y) = (x, 0) + (0, 1)\,(y, 0) = x + i\, y,$$

δηλαδή $\forall\, z = (x, y) \in \mathbb{C},\ z = x + i\, y.$ ■

Επομένως [Θεώρ. ΙΙ/1.1] $\mathbb{C} = \{x + iy \mid x \in \mathbb{R}$ και $y \in \mathbb{R}\}$. Το στοιχείο $(0, 1) = i \in \mathbb{C}$ λέγεται φανταστική μονάδα του $\mathbb{C}$.

Κατόπιν αυτού είναι φανερό ότι, αν $z_1 = x_1 + i\, y_1 \in \mathbb{C}$ και $z_2 = x_2 + i\, y_2 \in \mathbb{C}$, τότε

(i) $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i\ (y_1 + y_2)$,

(ii) $z_1 \cdot z_2 = (x_1\, x_2 - y_1\, y_2) + i\, (x_1\, y_2 + x_2\, y_1)$,

(iii) $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i\ (y_1 - y_2)$

και

(iv) $z_1 : z_2 = \dfrac{x_1\, x_2 + y_1\, y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\, \dfrac{x_2\, y_1 - x_1\, y_2}{x_2^2 + y_2^2}$ (όταν $z_2 \neq 0$).

Επίσης, εύκολα διαπιστώνεται ότι :

Το i είναι ρίζα της εξίσωσης $z^2 + 1 = 0$, δηλαδή ότι $z^2 = -1$ και, γενικότερα, ότι:

$$i^m = \begin{cases} 1, & \text{όταν } m = 4\nu \quad \text{και } \nu \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ i, & \text{όταν } m = 4\nu+1 \quad \text{και } \nu \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ -1, & \text{όταν } m = 4\nu+2 \quad \text{και } \nu \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ -i, & \text{όταν } m = 4\nu+3 \quad \text{και } \nu \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{cases}$$

Τέλος, εφόσον $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ είναι φανερό ότι:

$$z = x + iy = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$$

και γενικότερα, αν $z_1 = x_1 + i\,y_1 \in \mathbb{C}$ και $z_2 = x_2 + i\,y_2 \in \mathbb{C}$, τότε

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow (x_1 = x_2 \text{ και } y_1 = y_2).$$

1.2. Πραγματικό και φανταστικό μέρος, μέτρο και συζυγής μιγαδικού αριθμού

1.2.1. Αν $z = x + iy \in \mathbb{C}$, ο πραγματικός αριθμός x λέγεται *πραγματικό μέρος* του z και παριστάνεται με το $Re\,(z)$, ενώ ο πραγματικός αριθμός y λέγεται *φανταστικό μέρος* του z και παριστάνεται με το $Im\,(z)$. Ώστε

$$\forall\, z = x + iy \in \mathbb{C}, \quad Re\,(z) = x \text{ και } Im\,(z) = y.$$

Αποδεικνύεται εύκολα ότι:

Θεώρημα Ι.

$\forall\, z, w \in \mathbb{C}, \ \forall\, a \in \mathbb{R},$

(i) $Re\,(z \pm w) = Re\,(z) \pm Re\,(w), \quad Im\,(z \pm w) = Im\,(z) \pm Im\,(w),$

(ii) $Re\,(az) = a\,Re\,(z)$ *και* $Im\,(az) = a\,Im\,(z).$

Άμεση συνέπεια του θεωρήματος αυτού είναι προφανώς ότι:

Πόρισμα Ι.

$\forall\, z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}, \ \forall\, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R},$

$$Re\,(a_1 z_1 + a_2 z_2 + \ldots + a_n z_n) = a_1\,Re\,(z_1) + a_2\,Re\,(z_2) + \ldots + a_n\,Re\,(z_n)$$

και

$$Im\,(a_1 z_1 + a_2 z_2 + \ldots + a_n z_n) = a_1\,Im\,(z_1) + a_2\,Im\,(z_2) + \ldots + a_n\,Im\,(z_n).$$

1.2.2. Αν $z = x + i\,y$, τότε ο μη αρνητικός αριθμός $\sqrt{x^2 + y^2}$ λέγεται *μέτρο* του z και παριστάνεται με το $|z|$. Ώστε

$$\forall\, z = x + iy \in \mathbb{C}\ ,\ |z| = \sqrt{x^2 + y^2}\ .$$

Αν $z = x \in \mathbb{R}$, είναι φανερό ότι $|z| = \sqrt{x^2} = |x|$, δηλαδή το μέτρο $|z|$ του z είναι η (γνωστή) *απόλυτη τιμή* $|x|$ του πραγματικού αριθμού x. Επομένως η έννοια του μέτρου (του $z \in \mathbb{C}$) είναι *γενίκευση* της έννοιας της απόλυτης τιμής $|x|$ (όταν $z = x \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$).

Διαπιστώνεται εύκολα ότι:

Θεώρημα ΙΙ.

$\forall\, z,\ w \in \mathbb{C}$,

(i) $|z-w| = |w-z|$,

(ii) $|z-w| = 0 \Leftrightarrow z = w$,

(iii) $Re\,(z) \leqq |\,Re\,(z)\,| \leqq |z|$ και

(iv) $Im(z) \leqq |\,Im\,(z)\,| \leqq |z|$.

Για $w = 0$, έχουμε:

Πόρισμα ΙΙ.

$\forall\, z \in \mathbb{C}\ ,\ |z| = |-z|$ και $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

Θα αποδείξουμε ότι:

Θεώρημα ΙΙΙ.

$\forall\, z\ ,\ w \in \mathbb{C}$,

(i) $|z\cdot w| = |z|\cdot|w|$ και

(ii) $w \neq 0 \Rightarrow |z : w| = |z| : |w|$.

Απόδειξη.

(i) Αν $z = x_1 + i\,y_1$ και $w = x_2 + iy_2$ $(x_1\ ,\ y_1\ ,\ x_2\ ,\ y_2 \in \mathbb{R})$, τότε [1.1.5 *(ii)*].

$$|z\cdot w|^2 = |\,(x_1 x_2 - y_1 y_2) + i\ (x_1 y_2 + x_2 y_1)\,|^2 =$$

$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2)^2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1)^2 = (x_1^2 + y_1^2)\cdot(x_2^2 + y_2^2) =$$

$$= |z|^2\cdot|w|^2,$$

δηλαδή

$$|z\cdot w|^2 = |z|^2\cdot|w|^2$$

και συνεπώς

$$|z\cdot w| = |z|\cdot|w|$$

(ii) Σύμφωνα με την *(i)* που αποδείχθηκε και την (2) της 1.1.4 έχουμε

$$|z : w|\cdot|w| = |(z : w)\cdot w| = |z|$$

και επειδή $|w| \neq 0$, αφού $w \neq 0$ [Πορ. II/1.2], προκύπτει τελικά ότι

$$|z : w| = |z| : |w| . \quad \blacksquare$$

Πόρισμα III.

(i) $\forall\, z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$,

$$|z_1\cdot z_2 \ldots z_n| = |z_1|\cdot|z_2| \ldots |z_n|$$

(ii) $\forall\, z \in \mathbb{C}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$,

$$|z^n| = |z|^n \quad \text{και} \quad z \neq 0 \Rightarrow |z^{-n}| = |z|^{-n}.$$

1.2.3. Αν $z = x + iy \in \mathbb{C}$, ο μιγαδικός αριθμός $x-iy$ λέγεται *συζυγής* του z και παριστάνεται με το $\bar{z}$. Ώστε

$$\forall\, z = x + iy \in \mathbb{C}\,, \quad \bar{z} = x-iy.$$

Διαπιστώνεται εύκολα ότι:

Θεώρημα IV.

$\forall\, z \in \mathbb{C}$,

(i) $Re\,(z) = \dfrac{1}{2}(z+\bar{z})$ *και* $Im\,(z) = \dfrac{1}{2i}(z-\bar{z})$,

(ii) $|\bar{z}| = |z|$,

(iii) $|z|^2 = z\cdot\bar{z}$,

(iv) $\bar{\bar{z}} = z$, *όπου* $\bar{\bar{z}}$ *ο συζυγής του* $\bar{z}$ *και*

(v) $z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

Επίσης, εύκολα διαπιστώνεται ότι:

Θεώρημα V.

$\forall\, z, w \in \mathbb{C}$,

(i) $\overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w}$,

(ii) $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$ *και*

(iii) $w \neq 0 \Rightarrow \overline{z : w} = \bar{z} : \bar{w}$.

Πόρισμα IV.

$\forall z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}, \ \forall a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$,

(i) $\overline{a_1 z_1 + a_2 z_2 + \ldots + a_n z_n} = a_1 \bar{z}_1 + a_2 \bar{z}_2 + \ldots + a_n \bar{z}_n$ *και*

(ii) $\overline{z_1 \cdot z_2 \ldots z_n} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \ldots \bar{z}_n$.

Θα αποδείξουμε ότι:

Θεώρημα VI.

$\forall z, w \in \mathbb{C}$,

(i) $|z \pm w|^2 = |z|^2 \pm 2 Re (z \cdot \bar{w}) + |w|^2$ *και*

(ii) $Re (z \cdot \bar{w}) = Re (\bar{z} \cdot w)$.

Απόδειξη

(i) Χάρη στην *(iii)* του Θεωρ. *IV*/1.2 και την *(i)* του Θεωρ. *V*/1.2, έχουμε

$$|z \pm w|^2 = (z \pm w) (\overline{z \pm w}) = (z \pm w) \cdot (\bar{z} \pm \bar{w}) =$$
$$= z \bar{z} \pm (z \bar{w} + \bar{z} w) + w \cdot \bar{w} = |z|^2 \pm (z \bar{w} + \bar{z} w) + |w|^2,$$

δηλαδή

(1) $$|z \pm w|^2 = |z|^2 \pm (z \bar{w} + \bar{z} w) + |w|^2.$$

Αλλά, λόγω της *(ii)* του Θεωρ. *V*/1.2 και των *(i)*, *(iv)* του Θεωρ. *IV*/1.2,

(2) $$z \bar{w} + \bar{z} w = z \bar{w} + \overline{z \bar{w}} = 2Re (z \bar{w}),$$

οπότε, χάρη στην (1), έχουμε τελικά

$$|z \pm w|^2 = |z|^2 \pm 2Re (z \bar{w}) + |w|^2.$$

(ii) Όμοια με τη (2), παρατηρούμε ότι

(3) $$z \bar{w} + \bar{z} w = \overline{\bar{z} w} + \bar{z} w = 2Re (\bar{z} w).$$

Από τις (2) και (3) προκύπτει προφανώς ότι

(4) $$Re (z \bar{w}) = Re (\bar{z} \cdot w). \quad \blacksquare$$

Παρατήρηση 1. Στο Θεώρ. *VI*/1.2, η *(i)*, χάρη στην (4), γράφεται

$$|z \pm w|^2 = |z|^2 \pm 2Re\,(\bar{z}\,w) + |w|^2. \quad \blacksquare$$

Παράδειγμα 1

Αν $\forall\ z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$ ισχύει η σχέση $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$ και $z_2 \neq 0$, νά δειχθεί ότι $Re\,\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = 0$.

Λύση. Είναι γνωστό από την υπόθεση ότι

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1 - z_2|^2,$$

οπότε, χάρη στο θεωρ. *VI*/1.2,

$$(1) \quad |z_1|^2 + 2Re\,(z_1 \cdot \bar{z}_2) + |z_2|^2 = |z_1|^2 - 2Re\,(z_1 \cdot \bar{z}_2) + |z_2|^2,$$

ή μετά τις πράξεις

$$4Re\,(z_1 \cdot \bar{z}_2) = 0,$$

δηλαδή

$$(2) \qquad Re\,(z_1 \cdot \bar{z}_2) = 0.$$

Αλλά, λόγω της *(iii)* του Θεωρ. *IV*/1.2, $\bar{z}_2 = \dfrac{|z_2|^2}{z_2}$ και συνεπώς η (2) γράφεται

$$Re\,\left(z_1 \frac{|z_2|^2}{z_2}\right) = 0$$

και επειδή $|z_2|^2 \in \mathbb{R}^+$ έχουμε

$$(3) \qquad |z_2|^2\, Re\,\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = 0.$$

Αλλά $|z_2| \neq 0$, άρα η (3) γίνεται

$$Re\,\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = 0\,. \quad \blacksquare$$

Με τη βοήθεια του προηγούμενου θεωρήματος θα αποδείξουμε ότι:

Θεώρημα VII.

$\forall\ z_1,\ z_2, \ldots, z_n,\ w_1,\ w_2, \ldots, w_n \in \mathbb{C}$,