Ν. Π. Οικονομίδη - Χ. Γ. Καρυοφύλλη

Ολοκληρωτικός Λογισμός Ι

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

Πρόλογος

Το βιβλίο αυτό περιέχει την ύλη του εξαμηνιαίου μαθήματος «Ολοκληρωτικός Λογισμός Ι» πού διδάσκεται στους φοιτητές του Τμήματος Μαθηματικών του Αριστοτέλειου Πανεπιστήμιου Θεσσαλονίκης και είναι συνέχεια του βιβλίου «Διαφορικός Λογισμός Ι» των ίδιων συγγραφέων.

Στο Κεφάλαιο 1 με τίτλο «Το ορισμένο ολοκλήρωμα» ορίζεται αρχικά η έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος και διαπιστώνεται ότι κάθε συνεχής συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη.

Στη συνέχεια αποδεικνύονται οι ιδιότητες των ορισμένων ολοκληρωμάτων και τα δύο Θεωρήματα της μέσης τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού και τέλος εισάγεται η έννοια της αντιπαραγώγου και αναφέρονται τα δύο Θεμελιώδη Θεωρήματα του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

Στο Κεφάλαιο 2 με τίτλο «Το αόριστο ολοκλήρωμα» ορίζεται το αόριστο ολοκλήρωμα συνάρτησης σε διάστημα και αναπτύσσονται δύο βασικές μέθοδοι υπολογισμού αόριστων ολοκληρωμάτων, η μέθοδος της αντικατάστασης και η μέθοδος της παραγοντικής ολοκλήρωσης.

Ακολουθεί η συστηματική μελέτη του τρόπου υπολογισμού αόριστων ολοκληρωμάτων. Για τον σκοπό αυτό αναφέρονται μέθοδοι υπολογισμού ολοκληρωμάτων ρητών συναρτήσεων, συναρτήσεων που περιέχουν ρίζες, τριγωνομετρικών συναρτήσεων και υπερβολικών συναρτήσεων.

Τέλος γίνεται αναφορά σε αόριστα ολοκληρώματα, τα οποία δεν εκφράζονται ως στοιχειώδεις συναρτήσεις (ελλειπτικά ολοκληρώματα).

Στο Κεφάλαιο 3 με τίτλο «Εφαρμογές του ορισμένου ολοκληρώματος» αντιμετωπίζεται το πρόβλημα του υπολογισμού εμβαδού χωρίου, μήκους καμπύλης, όγκου στερεού από περιστροφή και επιφάνειας από περιστροφή.

Στη συνέχεια εισάγεται η έννοια της καμπύλης συνάρτησης σε πολικές συντεταγμένες και υπολογίζονται το εμβαδό πολικού τομέα και το μήκος πολικής καμπύλης.

Στο κεφάλαιο 4 με τίτλο «Μη γνήσια ολοκληρώματα» ορίζονται οι διάφορες έννοιες μη γνήσιων ολοκληρωμάτων και αναφέρονται δύο κριτήρια *σύγκλισης μη γνήσιων ολοκληρωμάτων, το κριτήριο σύγκρισης και το κριτήριο σύγκρισης του λόγου.*

Στο Κεφάλαιο 5 με τίτλο «Αναπτύγματα συναρτήσεων σε δυναμοσειρές» διαπιστώνεται ότι οι δυναμοσειρές παραγωγίζονται και ολοκληρώνονται όρο προς όρο και επίσης ότι το ανάπτυγμα μιας συνάρτησης σε δυναμοσειρά είναι μοναδικό.

Τέλος, στο Κεφάλαιο 6 με τίτλο «Παράρτημα» περιέχονται συμπληρώματα της ύλης, ενώ παράλληλα αποδεικνύονται και όλα τα Θεωρήματα, τα οποία αναφέρθηκαν στα προηγούμενα Κεφάλαια χωρίς απόδειξη.

Κατά την συγγραφή του βιβλίου καταβλήθηκε ιδιαίτερη προσπάθεια για την όσο το δυνατό πιο απλή παρουσίαση του κειμένου. Επίσης για να διευκολυνθεί η καλύτερη κατανόηση του κειμένου υπάρχουν πολλά Παραδείγματα και Παρατηρήσεις.

Σημειώνεται ότι οι συμβολισμοί εννοιών που έχουν αναφερθεί στο βιβλίο «Διαφορικός Λογισμός Ι» των Ν. Π. Οικονομίδη και Χ. Γ. Καρυοφύλλη παραμένουν οι ίδιοι.

Τέλος, οι παραπομπές σε γνωστές Προτάσεις του Διαφορικού Λογισμού μιας πραγματικής μεταβλητής αναφέρονται αποκλειστικά στο παραπάνω βιβλίο.

Επιθυμώ να ευχαριστήσω τη λέκτορα κ. Χ. Κωνσταντιλάκη - Σαββοπούλου για τη συμβολή της στη διόρθωση του κειμένου, το Τυπογραφείο Ν. Μαυρογένης και Υιοί για την ικανοποιητική εμφάνιση του βιβλίου και την κ. Μ. Χανιώτη για τα επιμελημένα σχέδια.

Θεσσαλονίκη, 1984 *Χ. Γ. Καρυοφύλλης*

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Το ορισμένο ολοκλήρωμα

1.1. Ορισμός της έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος

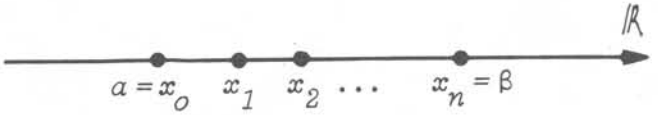
1.1.1. Αν $[\alpha, \beta]$ $(\mathbb{R} \ni \alpha < \beta \in \mathbb{R})$ είναι ένα κλειστό και φραγμένο διάστημα και

$$\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_\eta = \beta[\sigma\chi.\ 1],$$

το σύνολο

$$\Delta = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_\eta\}$$

λέγεται *διαίρεση* του διαστήματος $[\alpha, \beta]$.



σχ. 1

Ο θετικός αριθμός

$$max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \ldots, x_\eta - x_{\eta-1}\}$$

θα παριστάνεται στα επόμενα με το $|\Delta|$.

Τέλος, μια ακολουθία διαιρέσεων (Δ_η) του $[\alpha, \beta]$ λέγεται *κανονική*, όταν $\lim\limits_{n \to \infty} |\Delta_\eta| = 0$.

1.1.2 Ας θεωρήσουμε μια πραγματική συνάρτηση f, η οποία ορίζεται στο $[a, \beta]$.

Αν

$$\Delta = \{x_0, x_1, x_2, \ldots., x_{\nu-1}, x_\nu, \ldots, x_{\eta-1}, x_\eta\}$$

είναι μια οποιαδήποτε διαίρεση του $[a, \beta]$ και

$$\forall \nu \in \{1, 2, \ldots, n\},\ \xi_\nu \in [x_{\nu-1}, x_\nu],$$

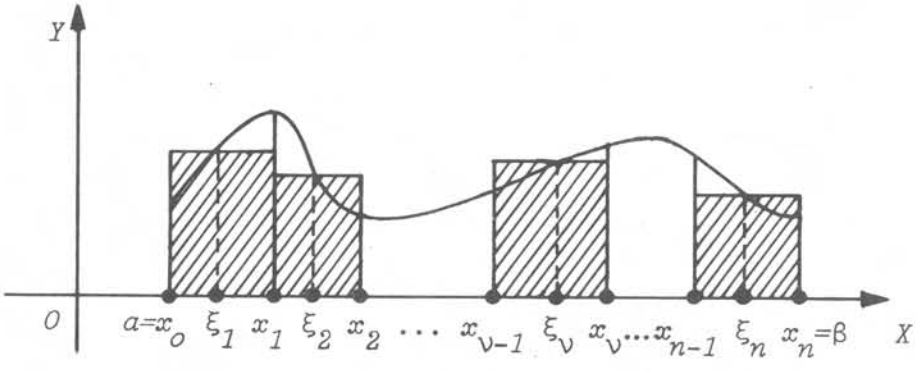
το άθροισμα

$$\sum_{\nu=1}^{n} f(\xi_\nu)(x_\nu - x_{\nu-1}) = f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \ldots + f(\xi_\nu)(x_\nu - x_{\nu-1}) + \ldots + \\ + f(\xi_\eta)(x_\eta - x_{\eta-1})$$

λέγεται *άθροισμα του Riemann* της f στο διάστημα $[a, \beta]$. Το άθροισμα αυτό, το οποίο εξαρτάται προφανώς από τη διαίρεση Δ και τα σημεία ξ_1, $\xi_2, \ldots, \xi_\eta$, παριστάνεται με το συμβολισμό $S(f, \Delta)$, *δηλαδή*

$$S(f, \Delta) = \sum_{\nu=1}^{n} f(\xi_\nu)(x_\nu - x_{\nu-1}). \tag{1}$$

Παρατήρηση 1. Αν $\forall x \in [a, \beta]$, $f(x) \geq 0$, το $S(f, \Delta)$ είναι προφανώς το άθροισμα των εμβαδών των γραμμοσκιασμένων ορθογωνίων του σχ. 2.



σχ. 2

Στο σχ. 2 παρατηρούμε ότι, αν τα σημεία της Δ πληθαίνουν με οποιοδήποτε τρόπο, έτσι ώστε ο θετικός αριθμός

$$|\Delta| = max\{x_1 - x_0,\ x_2 - x_1, \ldots, x_\eta - x_{\eta-1}\}$$

να *τείνει* στο *0*, η ένωση των γραμμοσκιασμένων ορθογωνίων τείνει να συμπέσει με το σύνολο των σημείων του τμήματος του επιπέδου που περικλείεται από τον άξονα $X'OX$, τις ευθείες $x - a = 0$, $x - \beta = 0$ και τη γραφική παράσταση της f.

Το σύνολο αυτό λέγεται και *χωρίο* που περικλείεται από τον άξονα $X'OX$, τις ευθείες $x - a = 0$, $x - \beta = 0$ και τη γραφική παράσταση της f και παριστάνεται με το συμβολισμό $X(f, a, \beta)$. •

1.1.3 Η πραγματική συνάρτηση f λέγεται *ολοκληρώσιμη* στο $[a, \beta]$, όταν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ (\Delta \text{ διαίρεση του } [a, \beta] \text{ και } |\Delta| < \delta) \Rightarrow |S(f, \Delta) - \lambda| < \varepsilon,$$

ανεξάρτητα από την επιλογή των $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\eta$ στο άθροισμα του *Riemann* $S(f, \Delta)$.

Το γεγονός αυτό, για συντομία, γράφεται

$$\lim_{|\Delta| \to 0} S(f, \Delta) = \lambda \qquad \text{ή} \qquad |\Delta| \to 0 \Rightarrow S(f, \Delta) \to \lambda$$

και χρησιμοποιείται η έκφραση «*$S(f, \Delta)$ τείνει στο λ όταν $|\Delta|$ τείνει στο 0*».

Διαπιστώνεται εύκολα ότι ο λ, εφόσον υπάρχει, είναι μοναδικός. Ο μοναδικός αυτός αριθμός λ ονομάζεται *ορισμένο ολοκλήρωμα* της f στο $[a, \beta]$ (ή *από a έως β*) και παριστάνεται με τους συμβολισμούς

$$\int_a^\beta f \quad \text{και} \quad \int_a^\beta f(x)dx, \text{ όπου } x \text{ μεταβλητή στο } [a, \beta].$$

Τα a, β λέγονται *όρια* (ολοκλήρωσης) και συγκεκριμένα το a *κάτω* και το β *πάνω* όριο του $\int_a^\beta f$.

Παρατήρηση 2. Αν

$$\forall x \in [a, \beta],\ f(x) \geq 0 \ [\text{σχ. } 2]$$

και η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, \beta]$, δηλαδή

$$|\Delta| \to 0 \Rightarrow S(f, \Delta) \to \int_{\alpha}^{\beta} f,$$

σύμφωνα με την Παρατ. 1/1.1., το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f$ μπορεί να θεωρηθεί, δηλαδή να *ορισθεί*, ως το *εμβαδό* του χωρίου, το οποίο περικλείεται από τον άξονα $X'OX$, τις ευθείες $x-\alpha = 0$, $x-\beta = 0$ και τη γραφική παράσταση c της f. •

Αποδεικνύεται ότι:

Θεώρημα I. *Η συνάρτηση f, η οποία ορίζεται στο $[\alpha, \beta]$, είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha, \beta]$, ανν*[1] *υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$, τέτοιος ώστε για κάθε κανονική [1.1.1.] ακολουθία διαιρέσεων (Δ_n) του $[\alpha, \beta]$,*

$$\lim_{n\to\infty} S(f, \Delta_n) = \lambda,$$

ανεξάρτητα από την επιλογή των σημείων ξ_ν για το σχηματισμό των αθροισμάτων του Riemann $S(f, \Delta_n)$.

Στην περίπτωση αυτή, ο λ (εφόσον υπάρχει) είναι μοναδικός και μάλιστα $\lambda = \int_{\alpha}^{\beta} f$.

Απόδειξη. Παρόμοια με την απόδειξη του Θεωρ. I/3.2. του Δ.Λ.I[2]. •

Ασκήσεις

1. Αν η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha, \beta]$, να αποδειχθεί ότι η f είναι φραγμένη στο $[\alpha, \beta]$.

Υπόδειξη: Υποθέστε ότι η f δεν είναι φραγμένη στο $[\alpha, \beta]$ και παρατηρήστε [Ασκ. 1/2.2. του Δ.Λ.I] ότι, αν $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ είναι μια οποιαδήποτε διαίρεση του $[\alpha, \beta]$, η f δεν θα είναι φραγμένη σε ένα τουλάχιστο από τα διαστήματα $[x_{\nu-1}, x_\nu]$, οπότε

$$\forall M > 0,\ \exists \xi_\nu \in [x_{\nu-1}, x_\nu],\ f(\xi_\nu) > M.$$

Αλλά τότε είναι φανερό ότι για κάθε $M > 0$ και για κάθε διαίρεση $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ του $[\alpha, \beta]$, υπάρχει ένα τουλάχιστο άθροισμα του *Riemann* $S(f, \Delta)$ της f στο $[\alpha, \beta]$, τέτοιο ώστε $S(f, \Delta) > M$. •

---

(1) Το «ανν» σημαίνει «αν και μόνο αν».
(2) Στο εξής κάθε παραπομπή στο Δ.Λ.I αναφέρεται στο βιβλίο «Διαφορικός Λογισμός I» των Ν. Π. Οικονομίδη και Χ. Γ. Καρυοφύλλη.

Σημείωση. Στο εξής όταν λέμε ότι η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha, \beta]$ υπονοούμε πάντοτε [βλ. Ασκ. 1/1.1.] ότι η f είναι φραγμένη στο $[\alpha, \beta]$. •

2. Αν η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, αποδείξτε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f = \lim_{n\to\infty} \frac{\beta-\alpha}{n} \sum_{\nu=1}^{n} f(\alpha + \frac{\nu(\beta-\alpha)}{n})$$

Υπόδειξη: Θεωρήστε την κανονική ακολουθία διαιρέσεων (Δ_n) του $[\alpha, \beta]$, όπου, για κάθε n του $\mathbb{N}$, η Δ_n διαιρεί το $[\alpha, \beta]$ σε n διαστήματα ίσου μήκους $\frac{\beta-\alpha}{n}$. Στη συνέχεια για κάθε n του $\mathbb{N}$ σχηματίστε το άθροισμα του *Riemann* $S(f, \Delta_n)$, παίρνοντας ως σημείο $\xi_\nu (\nu = 1, 2, \ldots, n)$ το δεξιό άκρο καθενός από τα διαστήματα $[x_{\nu-1}, x_\nu]$, στα οποία η Δ_n διαιρεί το $[\alpha, \beta]$, και εφαρμόστε το Θεώρ. I/1.1. •

1.2. Θεωρήματα ύπαρξης ορισμένου ολοκληρώματος

1.2.1 Ας θεωρήσουμε μια συνάρτηση f, η οποία είναι φραγμένη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ $(\mathbb{R} \ni \alpha < \beta \in \mathbb{R})$.

Αν

$$\Delta = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{\nu-1}, x_\nu, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$$

είναι μια οποιαδήποτε διαίρεση του $[\alpha, \beta]$ και $\forall \nu \in \{1, 2, \ldots, n\}$, m_ν και M_ν είναι αντίστοιχα το κάτω και το πάνω πέρας της f στο διάστημα $[x_{\nu-1}, x_\nu]$ [σχ. 3], σχηματίζουμε τα αθροίσματα

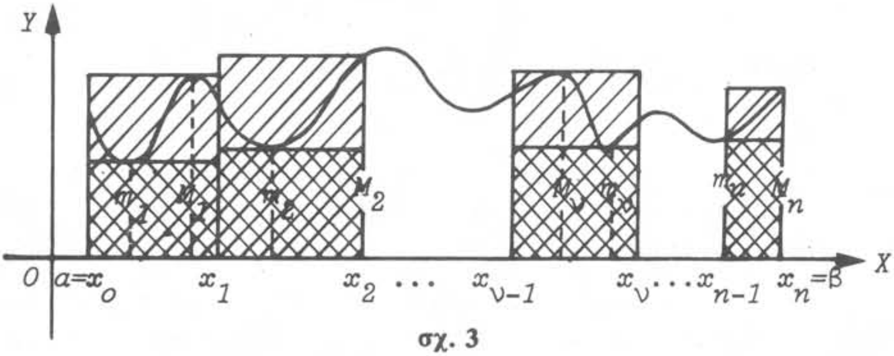
$$L(f, \Delta) = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu (x_\nu - x_{\nu-1}) = m_1(x_1 - x_0) + \ldots + m_\nu(x_\nu - x_{\nu-1}) + \ldots + m_n(x_n - x_{n-1})$$

και

$$U(f, \Delta) = \sum_{\nu=1}^{n} M_\nu (x_\nu - x_{\nu-1}) = M_1(x_1 - x_0) + \ldots + M_\nu(x_\nu - x_{\nu-1}) + \ldots + M_n(x_n - x_{n-1}).$$

Τα $L(f, \Delta)$, $U(f, \Delta)$ λέγονται *αθροίσματα του Darboux* και συγκεκριμένα το $L(f, \Delta)$ *κάτω*, ενώ το $U(f, \Delta)$ *πάνω άθροισμα του Darboux* της f στο $[\alpha, \beta]$.

Παρατήρηση 1. Αν $\forall x \in [\alpha, \beta]$, $f(x) \geq 0$ [σχ. 3], είναι φανερό ότι το $L(f, \Delta)$ είναι το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων με βάσεις τα διαστήματα $[x_{\nu-1}, x_\nu]$ και ύψη m_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$, ενώ το $U(f, \Delta)$ είναι το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων με τις ίδιες βάσεις και ύψη $M_\nu (\nu = 1, 2, \ldots, n)$. •



σχ. 3

Επειδή

$$\forall \nu \in \{1, 2, \ldots, n\},\ x_{\nu-1} \leq \xi_\nu \leq x_\nu \Rightarrow m_\nu \leq f(\xi_\nu) \leq M_\nu$$

είναι φανερό ότι:

Θεώρημα ΙΙ. *Η συνάρτηση f, η οποία είναι φραγμένη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha, \beta]$, ανν*

(1) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, (\Delta$ *διαίρεση του* $[\alpha, \beta]$ *και* $|\Delta| < \delta) \Rightarrow U(f, \Delta) - L(f, \Delta) < \varepsilon$.

Απόδειξη. Βλ. 6.1.1. •

Το Θεώρ. ΙΙ/1.2. είναι γνωστό ως *Θεώρημα του Darboux*. Η *(1)* του Θεωρήματος για συντομία γράφεται

$$\lim_{|\Delta| \to 0} [U(f, \Delta) - L(f, \Delta)] = 0 .$$

Από το Θεώρημα του *Darboux* προκύπτει εύκολα ότι:

Θεώρημα ΙΙΙ. *Η συνάρτηση f, η οποία είναι φραγμένη στο $[\alpha, \beta]$, είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha, \beta]$, ανν για κάθε κανονική [1.1.1] ακολουθία διαιρέσεων (Δ_n) του $[\alpha, \beta]$ είναι*

$$\lim_{n \to \infty} [U(f, \Delta_n) - L(f, \Delta_n)] = 0.$$

Απόδειξη. Παρόμοια με την απόδειξη του Θεωρ. Ι/3.2. του Δ.Λ.Ι •

1.2.2. Θα αποδείξουμε ότι:

Θεώρημα IV. *Αν η f είναι μονότονη και φραγμένη στο $[\alpha, \beta]$, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha, \beta]$.*

Απόδειξη. Αν $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ είναι μία οποιαδήποτε διαίρεση του $[\alpha, \beta]$, προφανώς ισχύει ότι

$$(1) \qquad U(f, \Delta) - L(f, \Delta) = \sum_{\nu=1}^{n} (M_\nu - m_\nu)(x_\nu - x_{\nu-1}).$$

Αν τώρα υποθέσουμε ότι η f είναι αύξουσα στο $[\alpha, \beta]$ [σχ. 4], είναι φανερό ότι

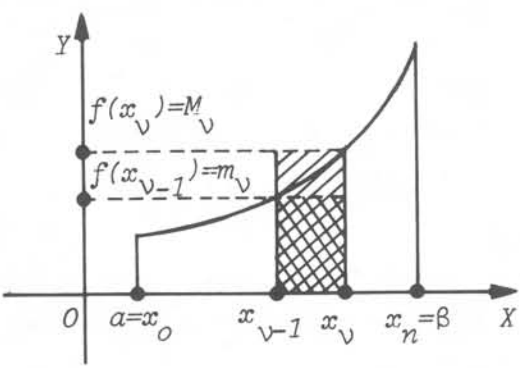
$$\forall \nu \in \{1, 2, \ldots, n\},\ m_\nu = f(x_{\nu-1}) \text{ και } M_\nu = f(x_\nu),$$

οπότε, χάρη στην (1),

$$(2) \qquad U(f, \Delta) - L(f, \Delta) \le |\Delta| \sum_{\nu=1}^{n} [f(x_\nu) - f(x_{\nu-1})] = |\Delta| [f(\beta) - f(\alpha)].$$

Αλλά τότε από το Θεώρ. III/1.2 προκύπτει ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha, \beta]$.

Αν η f είναι φθίνουσα στο $[\alpha, \beta]$, η απόδειξη είναι παρόμοια. •



σχ. 4

Στις εφαρμογές σχεδόν αποκλειστικό ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι συνεχείς συναρτήσεις. Αποδεικνύεται ότι:

Θεώρημα V. *Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha, \beta]$.*

Απόδειξη. Η f ως συνεχής είναι φραγμένη στο $[\alpha, \beta]$ [βλ. Θεώρ. VI/4.4. του Δ.Λ.Ι]. Ας θεωρήσουμε τώρα μια οποιαδήποτε διαίρεση $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ του $[\alpha, \beta]$. Εφόσον η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, επομένως και στο $[x_{\nu-1}, x_\nu]$ $(\nu \in \{1, 2, \dots, n\})$, είναι γνωστό [Θεώρ. VI/4.4. του Δ.Λ.Ι] ότι

(1) $$\exists \mu_\nu, \xi_\nu \in [x_{\nu-1}, x_\nu], M_\nu = f(\mu_\nu) \text{ και } m_\nu = f(\xi_\nu),$$

οπότε προφανώς

(2) $$U(f, \Delta) - L(f, \Delta) = \sum_{\nu=1}^{n} [f(\mu_\nu) - f(\xi_\nu)](x_\nu - x_{\nu-1}).$$

Τώρα η f, ως συνεχής στο κλειστό και φραγμένο διάστημα $[\alpha, \beta]$, είναι ομοιόμορφα συνεχής [Θεώρ. II/4.5. του Δ.Λ.Ι] στο $[\alpha, \beta]$, επομένως

(3) $$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, (x', x'' \in [\alpha, \beta] \text{ και } |x' - x''| < \delta) \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{\beta - \alpha}.$$

Χάρη στις (1) και (3) είναι φανερό ότι $\forall \nu \in \{1, 2, \dots, n\}$,

$$|\Delta| < \delta \Rightarrow |\mu_\nu - \xi_\nu| \leq |x_\nu - x_{\nu-1}| < \delta \Rightarrow |f(\mu_\nu) - f(\xi_\nu)| < \frac{\varepsilon}{\beta - \alpha},$$

οπότε, λόγω της (2),

$$|\Delta| < \delta \Rightarrow U(f, \Delta) - L(f, \Delta) < \frac{\varepsilon}{\beta - \alpha} \sum_{\nu=1}^{n} (x_\nu - x_{\nu-1}) = \frac{\varepsilon}{\beta - \alpha} (\beta - \alpha) = \varepsilon.$$

Επομένως,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, (\Delta \text{ διαίρεση του } [\alpha, \beta] \text{ και } |\Delta| < \delta) \Rightarrow U(f, \Delta) - L(f, \Delta) < \varepsilon$$

και συνεπώς [Θεώρ. II/1.2.] η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha, \beta]$. •

1.2.3. Μέχρι τώρα υποθέταμε διαρκώς ότι $\mathbb{R} \ni \alpha < \beta \in \mathbb{R}$.

Αν $\alpha = \beta$, τότε ως ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f$ της f από α έως α ορίζεται ο αριθμός 0 (μηδέν).

Αν $\alpha > \beta$ και η f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[\beta, \alpha]$, τότε ως ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f$ της f από α έως β, ορίζεται ο αριθμός $-\int_\beta^\alpha f$.

Ώστε:

(1) $$\int_\alpha^\beta f = 0, \text{ όταν } \alpha = \beta,$$

και

(2) $$\int_\alpha^\beta f = -\int_\beta^\alpha f, \text{ όταν } \alpha > \beta.$$