ΓΕΩΡΓΙΟΥ Μ. ΝΙΤΣΙΩΤΑ
ΚΑΘΗΓΗΤΗ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ

ΣΤΑΤΙΚΗ
ΤΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΦΟΡΕΩΝ

ΔΕΥΤΕΡΟΣ ΤΟΜΟΣ
ΜΗΤΡΩΙΚΗ ΣΤΑΤΙΚΗ

Γ΄ ΕΚΔΟΣΗ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ 1995

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ ΤΟΥ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΤΟΜΟΥ

ΕΚΤΟ ΜΕΡΟΣ

ΤΑ ΜΗΤΡΩΑ ΣΤΗ ΣΤΑΤΙΚΗ

16. Κεφ. ΤΑ ΒΑΣΙΚΑ ΑΠΟ ΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΜΗΤΡΩΩΝ

17. Κεφ. Ο ΚΛΑΣΙΚΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΦΟΡΕΩΝ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ

18. Κεφ. ΤΟ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΔΟΜΙΚΟ ΣΤΟΙΧΕΙΟ

ΕΒΔΟΜΟ ΜΕΡΟΣ

Η ΜΗΤΡΩΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΦΟΡΕΩΝ

19. Κεφ. ΟΙ ΦΟΡΕΙΣ ΜΕ ΣΗΜΕΙΑΚΗ ΣΥΝΔΕΣΗ ΤΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

20. Κεφ. ΟΙ ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΠΙΛΥΣΕΩΣ

21. Κεφ. ΟΙ ΕΡΓΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ

Ἐπεξηγηματική σημείωση

Ὁ δεύτερος τόμος ἀποτελεῖται ἀπό δύο μέρη, ἀπό τά ὁποῖα τό ἕνα ὑποδιαιρεῖται σέ τρία κεφάλαια καί τό ἄλλο σέ τέσσερα, ἀριθμημένα συνεχῶς. Οἱ ἀριθμοί καί οἱ τίτλοι εἶναι γραμμένοι στό πάνω μέρος τῶν ζυγῶν σελίδων, γιά τά κεφάλαια, καί τῶν μονῶν σελίδων γιά τά ἄρθρα. Ἡ ἀρίθμηση τῶν ἄρθρων, τῶν ἐξισώσεων καί τῶν σχημάτων εἶναι συνεχής καί ἀνεξάρτητη γιά κάθε κεφάλαιο. Ἡ παραπομπή σέ μιά ἐξίσωση ἤ σ' ἕνα σχῆμα γίνεται μέ τήν ἀναφορά τοῦ ἀριθμοῦ τους, π.χ. ἐξ. (16) ἤ σχ. 2, ἐκτός ἄν ἀνήκουν σέ ἄλλο κεφάλαιο, ὁπότε προτάσσεται ὁ ἀριθμός τοῦ κεφαλαίου, π.χ. ἐξ. (17.16) ἤ σχ. (17.2).

Ἡ παραπομπή στά τρία συγγράμματα :

ΝΙΤΣΙΩΤΑ Γ. : Στατική τῶν γραμμικῶν φορέων, 1. τομ. καί 2. τομ. Α΄ ἔκδοση 1970 καί Β΄ ἔκδοση 1976

ΝΙΤΣΙΩΤΑ Γ. : Ἐλαστοστατική, 1. τομ. καί 2. τομ. 1978

ΝΙΤΣΙΩΤΑ Γ. καί ΤΣΑΜΚΙΡΑΝΗ-ΓΕΩΡΓΑΝΟΠΟΥΛΟΥ, Α. : Στατική τῶν Κατασκευῶν, 1977

γίνεται συντομογραφικά ἀντιστοίχως ὡς ἑξῆς :

«Β΄ ἔκδοση», «Ἐλαστοστατική» καί «Στατ. τῶν Κατασκευῶν».

ΕΚΤΟ ΜΕΡΟΣ

ΤΑ ΜΗΤΡΩΑ ΣΤΗ ΣΤΑΤΙΚΗ

ΔΕΚΑΤΟ ΕΚΤΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΤΑ ΒΑΣΙΚΑ ΑΠΟ ΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΜΗΤΡΩΩΝ

16.1. Θέση τοῦ προβλήματος

Ἡ τεχνική τῶν μητρώων ἐφαρμόστηκε πρῶτα στήν ἀεροναυπηγική, γιά τήν ἀντιμετώπιση μέ τόν ἠλεκτρονικό ὑπολογιστή (Η/Υ) τῶν πολύ ἐκτεταμένων ὑπολογισμῶν, πολύ δέ γρήγορα, περίπου ἀπό τίς ἀρχές τῆς δεκαετίας τοῦ πενήντα, μεταφυτεύθηκε καί στή δομική στατική. Ἀναφορικά μέ αὐτή τήν προσπάθεια πρέπει νά τονιστοῦν τά ὀνόματα τοῦ *LANGEFORS* καί τοῦ ἕλληνα καθηγητῆ κ. *ΑΡΓΥΡΗ*, ὁ ὁποῖος μέ τίς θεμελιώδεις ἐργασίες του ἄνοιξε νέους ὁρίζοντες γιά τή στατική. Σήμερα ἡ μητρωική στατική τῶν γραμμικῶν φορέων εἶναι μιά ἐρευνητικά ἐξαντλημένη ἐπιστημονική περιοχή, σ' ὅ,τι ἀφορᾶ τό πρόβλημα τῆς δομικῆς στατικῆς, καί κατά κανόνα παρουσιάζεται στά συγγράμματα σάν μιά εἰδική περίπτωση τῆς θεωρίας τῶν πεπερασμένων στοιχείων.*

---

* Αὐτός εἶναι καί ὁ βασικότερος λόγος πού μᾶς ὁδήγησε νά παραιτηθοῦμε ἀπό τήν παράθεση τῆς, ἱστορικῆς πιά σημασίας, βιβλιογραφίας τῆς μητρωικῆς στατικῆς. Ἐξάλλου στήν «Ἐλαστοστατική», 2. τομ. περιέχονται τά βασικότερα ἀπό τή βιβλιογραφία τῶν πεπερασμένων στοιχείων, πού μερικῶς ἀφορᾶ καί τά γραμμικά στοιχεῖα. Πάντως ἰδιαίτερο ἐνδιαφέρον παρουσιάζουν γιά τό θέμα μας τά ἑξῆς τρία κλασικά συγγράμματα :

LIVESLEY, R. K.: Matrix methods of structural analysis, Pergamon Press, Oxford, 1975. Ἑλλην. μεταφρ. : Ἡ στατική μέ μητρῶα, ἐκδ. οἴκου Μ. Γκιούρδα.

PESTEL, E. C. and LECKIE, F. A.: Matrix methods in elastomechanics, McGraw - Hill, New York 1963.

PRZEMIENIECKI, J. S.: Theory of matrix structural analysis. McGraw - Hill, New York, 1968.

Ἡ μητρωική στατική ἀναπτύσει, βάσει μητρωικῶν σχέσεων, μιά μεθοδολογία κατάλληλη μόνο γιά τόν προγραμματισμό στόν *Η/Υ*. Ἀλλά μέ τόν τρόπο αὐτόν ἡ ἐφαρμογή τῆς μεθόδου ἐπιλύσεως γιά ἕνα δοσμένο φορέα, μαζί μέ τήν ἐκτέλεση τῶν πράξεων, μεταφέρεται ἀπό τόν ἄνθρωπο στή μηχανή. Μέ τό ὁρισμένο πρόγραμμά της ἡ μηχανή βέβαια δέν ἔχει τή δυνατότητα τῆς ἐπιλογῆς ἐκείνης τῆς μεθόδου πού εἶναι καί ἡ πιό πρόσφορη γιά ἕνα συγκεκριμένο πρόβλημα, ἐκτελεῖ ὅμως τίς πράξεις ἀστραπιαία. Τό ἀντίθετο συμβαίνει μέ τόν ἄνθρωπο, γι' αὐτό διαφοροποιοῦνται τά κριτήρια γιά τό πρόσφορο μιᾶς μεθόδου. Συγκεκριμένα γιά τόν Η/Υ ἡ καταλληλότητα μιᾶς μεθόδου κρίνεται πρῶτα ἀπό τή γενικότητά της, γιατί μέ τό ἴδιο πρόγραμμα πρέπει νά ἐπιλύνεται μία ὅσο τό δυνατό εὐρύτερη κατηγορία φορέων.

Μέ τήν ἐπιδίωξη τῆς διατυπώσεως γενικευμένων μητρωικῶν μεθόδων ἐπιτεύχθηκε, ὅπως εἶναι ἑπόμενο, ὄχι μόνο ἡ συμπύκνωση ἀλλά καί ἡ ἁπλούστευση τῆς γραμμικῆς θεωρίας, γιατί ἡ στατική ἀπαλλάχθηκε ἀπό τίς περιπτωσιακές μεθόδους. Οἱ τελευταῖες, πού συσσωρεύτηκαν στήν τελευταία φάση τῆς ἐξελίξεως τῆς κλασικῆς στατικῆς, ἀναπτύχθηκαν κυρίως γιά νά παρακαμφθεῖ ἡ ἐπίλυση τῶν διογκωμένων γραμμικῶν συστημάτων. Τέτοιο ὅμως πρόβλημα δέν ὑπάρχει γιά τόν Η/Υ κι ἔτσι ἡ μητρωική στατική δέν ἔρχεται γιά νά μεταγλωττίσει ὅλες τίς εἰδικές μεθόδους τῆς κλασικῆς στατικῆς ἀλλά γιά νά διατυπώσει μόνο τίς πιό γενικές μεθόδους, γι' αὐτό καί ξεκινᾶ ἀπό τίς βασικές ἀρχές τῆς στατικῆς, πού τέθηκαν ἀπό τήν ἐποχή τῶν *Maxwell, Mohr, Castigliano* καί *Müller-Breslau*. Πρόσθετα ἡ μητρωική στατική μέ τίς γενικές καί συμπυκνωμένες συνθῆκες της ἔχει συμβάλει οὐσιαστικά στήν ἀνάπτυξη ἀλλά καί στήν ἐφαρμογή –σέ συνδυασμό μέ τόν *Η/Υ*– τῆς θεωρίας τῶν μεγάλων παραμορφώσεων, τῆς δυναμικῆς τῶν φορέων καί ἄλλων προβλημάτων.

Ἡ ἐπάνοδος στίς ἁπλές ἀρχές τῆς στατικῆς ἀπαιτεῖ καί μιά ἐπανεξέταση τοῦ τρόπου πού τίθεται τό πρόβλημα. Κατά τήν κλασική στατική καί ἰδιαίτερα στή μέθοδο δυνάμεων σάν συνθετικό στοιχεῖο τοῦ φορέα θεωρεῖται τό ἀπειροστό στοιχεῖο καί μέ ἀφετηρία τίς ἰδιότητες αὐτοῦ τοῦ στοιχείου βρίσκονται καί οἱ ἰδιότητες τοῦ πολυσύνθετου φορέα. Χωρίς αὐτή τήν ἀναδρομή, ἀπευθείας ἀπό τή γνωστή συμπεριφορά τῆς πεπερασμένης δοκοῦ, ἐξετάζεται τό πρόβλημα, πιό οἰκονομικά σέ σκέψη καί σέ ὑπολογιστική ἐργασία, ἀπό τή μέθοδο μετακινήσεων τῆς κλασικῆς στατικῆς, πού ἀποβλέπει ὅμως μόνο στή συγκεκριμένη κατηγορία τῶν πλαισιωτῶν φορέων. Κατά τόν ἴδιο ἀκριβῶς τρόπο τίθεται τό πρόβλημα καί ἀπό τή μητρωική στατική ἀλλά γιά κάθε φορέα. Αὐτός θεωρεῖται σάν ἕνα πλέγμα ἑνός πεπερασμένου ἀριθμοῦ δομικῶν στοιχείου ἤ μελῶν ***(members)***, πού συνδέονται μεταξύ τους σέ ὁρισμένα διακριτά σημεῖα τους. Ὡς δομικά στοιχεῖα θεωροῦνται οἱ εὐθύγραμμες ἤ καμπύλες δοκοί, οἱ ἀρθρωτές ράβδοι, οἱ ἄτρακτοι, τά τεμάχια ἐπιφανειακῶν φορέων, δηλαδή δίσκων, πλακῶν καί κελυφῶν, ἀκόμη καί ἄλλοι ὁλόκληροι φορεῖς. Ἔτσι ἡ πραγμάτευση τοῦ θέματος γίνεται σέ δύο στάδια.

Μέ τίς μεθόδους τῆς κλασικῆς στατικῆς ἤ τῆς ἀντοχῆς τῶν ὑλικῶν ἤ τῆς θεωρίας ἐλαστικότητας καί μέ ἀφετηρία τό ἀπειροστό στοιχεῖο, στό πρῶτο στάδιο καταστρώνονται οἱ στατικές, οἱ κινηματικές καί οἱ καταστατικές συνθῆκες τοῦ δομικοῦ στοιχείου· στή γραμμική θεωρία οἱ τελευταῖες ἐκφράζουν τό νόμο ἐλαστικότητας. Μέ τήν ἀρχειοθέτηση τῶν συνθηκῶν αὐτῶν, γραμμένων μέ μητρωική μορφή γιά τούς βασικούς τύπους δομικῶν στοιχείων, ἡ ἀντιμετώπιση τοῦ προβλήματος ἑνός δοσμένου φορέα μπορεῖ νά ἀρχίσει κάθε φορά ἀπευθείας ἀπό τό πεπερασμένο δομικό στοιχεῖο.

Στό δεύτερο στάδιο μελετοῦμε τή συμπεριφορά ὁλόκληρου τοῦ φορέα, θεωρώντας τον ὡς δόμημα πού συγκροτεῖται ἀπό δομικά στοιχεῖα. Γενικά ἡ συμπεριφορά ἑνός δομήματος καθορίζεται ἀπό τίς ἰδιότητες τῶν δομικῶν στοιχείων —πού ἐδῶ μπορεῖ νά ληφθοῦν ἀπό τό ἀρχεῖο τους— καί ἀπό τό νόμο δομῆς. Εἰδικότερα στήν περίπτωση τοῦ μηχανικοῦ δομήματος ὁ νόμος δομῆς θά ἀναφέρεται στόν ἀμοιβαῖο συμβιβασμό τῆς κινηματικῆς καί τῆς στατικῆς συμπεριφορᾶς τῶν δομικῶν στοιχείων στίς θέσεις συνάφειάς τους. Ἡ μαθηματική διατύπωση τοῦ συμβιβασμοῦ αὐτοῦ γίνεται μέ τή βοήθεια τῶν λεγόμενων μητρώων δομῆς μέ τά ὁποῖα περιγράφεται ἡ δομή τοῦ φορέα, δηλαδή ἡ τοπολογία τοῦ πλέγματος. Ἔτσι μιά γιά πάντα δίνεται ἡ λύση ὁποιουδήποτε φορέα, ἐκφρασμένη συναρτήσει τοῦ μητρώου δομῆς του καί τῶν συνθηκῶν τῶν δομικῶν στοιχείων του. Σέ κάθε ἐφαρμογή μόνο αὐτά τά δύο δεδομένα μπορεῖ νά ἀλλάξουν.

Ἡ προϋπόθεση τῆς γνώσεως τῶν βασικῶν ἀπό τή θεωρία τῶν μητρώων γιά τήν ἐπίτευξη τῶν πιό πάνω σκοπῶν εἶναι βέβαια αὐτονόητη. Γιά τή διευκόλυνση τοῦ ἀναγνώστη ἀλλά καί τῆς ἀναπτύξεως τοῦ κύριου θέματος ἔχει προταχθεῖ, σ' ἕνα ἰδιαίτερο κεφάλαιο, μιά σύντομη καί προσαρμοσμένη στίς ἀνάγκες τῆς στατικῆς περίληψη τῶν κυριότερων ἀπό τή θεωρία τῶν μητρώων. Ἡ διαφοροποίηση τοῦ κειμένου μέ δύο μεγέθη ψηφίων ἀποσκοπεῖ στό νά ἐπισημάνει ἀπό τή μιά τά ἀναγκαῖα καί ἀπό τήν ἄλλη τά ἐπαρκή γιά μιά ἐμβάθυνση στή μελέτη τοῦ θέματος.

16.2. Τό μητρωικό διάνυσμα

Στή θεωρία τῶν μητρώων ὀνομάζουμε διάνυσμα τό σύνολο m μεγεθῶν a_1, a_2, ..., a_m τά ὁποῖα εἶναι διατεταγμένα μέ μιά ὁρισμένη σειρά σέ μιά στήλη. Τά μεγέθη a_i μπορεῖ νά εἶναι ὁμοειδή ἤ ἀνομοιοειδή, φυσικά ἤ γεωμετρικά μεγέθη κάθε φύσεως*. Ἑπομένως θά εἶναι καθαροί ἀριθμοί, διανύσματα, μητρῶα ἤ ἀκόμη καί συναρτήσεις. Ἡ διάταξη τῶν a_i στό διάνυσμα $\mathbf{a} = \{a_i\}$ γίνεται κατά τό σχῆμα

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = \{a_i\} \,, \tag{1}$$

τό ὁποῖο καί ἀποτελεῖ τό εὑρετήριο καθενός ἀπό τά μεγέθη a_i.

Ἐκτός ἀπό τό πιό πάνω διάνυσμα στήλης, μποροῦμε νά ὁρίσουμε μέ τά ἴδια ἀκριβῶς μεγέθη a_i κι ἕνα διάνυσμα στίχου. Αὐτό λέγεται ἀνάστροφο τοῦ διανύσματος στήλης, συμβολίζεται μέ τό $\mathbf{a}^{\mathrm{T}}$ καί ἔχει ὅλα τά στοιχεῖα του γραμμένα σ' ἕνα στίχο :

$$\mathbf{a}^{\mathrm{T}} = [\, a_1 \; a_2 \; \dots \; a_m \,] = \{a_i\}^{\mathrm{T}} \,. \tag{2}$$

Λόγοι οἰκονομίας χώρου μᾶς ὑποχρεώνουν πολλές φορές νά γράφουμε ἕνα διάνυσμα στήλης σέ μία σειρά τοῦ κειμένου. Τότε, γιά νά γίνει σαφές ὅτι πρόκειται γιά διάνυσμα στήλης καί ὄχι στίχου, ἀντικαθιστοῦμε τίς ἀγγύλες μέ μύστακες καί γράφουμε

$$\mathbf{a} = \{\, a_1 \;\; a_2 \; \dots \; a_m \,\} = \{a_i\} \,. \tag{3}$$

Ὁ ἀριθμός m τῶν μεγεθῶν a_i ὀνομάζεται διάσταση τοῦ διανύσματός τους $\mathbf{a}$. Ὅταν ὑπάρχει ἀνάγκη, ἡ διάσταση τοῦ διανύσματος

---

* Πρέπει νά ἔχουμε ὑπόψη ὅτι ἕνα μητρωικό διάνυσμα δέν εἶναι ὑποχρεωτικά ἕνα φυσικό διανυσματικό μέγεθος, πού ἀκολουθεῖ, κατά τήν ἀλλαγή τοῦ συστήματος ἀναφορᾶς, τούς νόμους μετασχηματισμοῦ τῶν τανυστῶν. Βλ. Ἐλαστοστατική, 1. τομ. σ. 24 - 28.

δηλώνεται δίπλα ἤ πάνω σ' αὐτό κατά τόν τρόπο

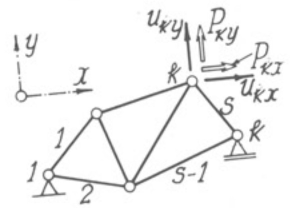
$$\mathbf{a} = {}_m\mathbf{a}\,, \qquad \mathbf{a}^{\mathrm{T}} = \overset{m}{\mathbf{a}}{}^{\mathrm{T}}\,.$$

Ὁ συνοπτικός συμβολισμός μ' ἕνα διάνυσμα μιᾶς ὁμάδας μεγεθῶν πού καθορίζουν μιά ὁρισμένη κατάσταση χρησιμοποιεῖται μέ πολύ ἐπιτυχία στά προβλήματα τῆς στατικῆς. Ἡ σύμπτυξη τῶν πολλῶν συγγενῶν μεγεθῶν σ' ἕνα διάνυσμα μπορεῖ νά γίνει κατά πολλούς τρόπους, ἐκλέγεται ὅμως αὐτός πού ἐξυπηρετεῖ περισσότερο.

Παράδειγμα : Ἡ ὑπεροχή τῶν μητρωικῶν συμβολισμῶν γίνεται ἐμφανής στό συμβολισμό τῶν καταστάσεων ἑνός φορέα. Π.χ. ἡ ἐντατική κατάσταση ἑνός ἐπίπεδου δικυώματος (σχ. 1) μέ s ράβδους καί k κόμβους περιγράφεται μέ τό s - διαστάσεων διάνυσμα ἐντάσεως $\mathbf{s}$ πού ἔχει ὡς συνιστῶσες τίς τάσεις S_i τῶν s ράβδων, ἀριθμημένες βέβαια κατά μιά ὁρισμένη σειρά :

$$\mathbf{s} = [\, S_1\ S_2\ \dots\ S_s\,]^{\mathrm{T}} = \{\, S_1\ S_2\ \dots\ S_s\,\}. \qquad (4)$$

Ἐδῶ χρησιμοποιήσαμε γιά τό συμβολισμό καί τό ἀνάστροφο διάνυσμα.



Σχ. 1. Μητρωικά μεγέθη ἑνός δικτυώματος.

Κάθε κόμβος κ ἐμφανίζει τίς δύο συνιστῶσες μετατοπίσεως $u_{\kappa x}$, $u_{\kappa y}$, μέ τίς ὁποῖες μποροῦμε νά ὁρίσουμε τό διάνυσμα μετατοπίσεως $\mathbf{u}_\kappa = \{u_{\kappa x}\ \ u_{\kappa y}\}$ τοῦ κόμβου κ. Τό διάνυσμα μετακινήσεως τοῦ δικτυώματος $\mathbf{u}$ ἀπαρτίζεται ἀπό τίς μετατοπίσεις ὅλων τῶν κόμβων καί μπορεῖ ἑπομένως νά ὁριστεῖ μέ τήν ἰσότητα $\mathbf{u} = \{\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2 \dots \mathbf{u}_\kappa \dots \mathbf{u}_k\} = \{u_{1x}\ \ u_{1y}\ \ u_{2x}\ \ u_{2y} \dots \}$. (5α)

Ἕνας ἄλλος τρόπος εἶναι νά ὁριστεῖ ἡ μετατόπιση τῶν κόμβων πρῶτα κατά τή διεύθυνση x καί μετά κατά τήν y :

$$\mathbf{u}_x = \{u_{1x}\, u_{2x} \dots u_{\kappa x} \dots u_{kx}\}\,, \qquad \mathbf{u}_y = \{u_{1y}\, u_{2y} \dots u_{\kappa y} \dots u_{ky}\}\,. \qquad (5\beta)$$

Μέ αὐτές τίς σχέσεις ὁρίζεται πάλι τό $\mathbf{u}$ ἀλλά μέ τήν ἰσότητα τώρα

$$\mathbf{u} = \{\mathbf{u}_x \mid \mathbf{u}_y\} = \{u_{1x}\, u_{2x} \dots u_{kx} \mid u_{1y}\, u_{2y} \dots u_{ky}\}\,. \qquad (5\gamma)$$

Ἀνάλογα, καί τό διάνυσμα φορτίσεως $\mathbf{p}_\kappa = \{P_{\kappa x}\, P_{\kappa y}\}$ τοῦ κόμβου κ ὁρίζεται μέ τίς δύο συνιστῶσες $P_{\kappa x}$, $P_{\kappa y}$ τοῦ φορτίου, ἐνῶ τό διάνυσμα φορτίσεως τοῦ δικτυώματος μπορεῖ νά ὁριστεῖ μέ τήν ἰσότητα

$$\mathbf{p} = \{\mathbf{p}_1\ \mathbf{p}_2 \dots \mathbf{p}_\kappa \dots \mathbf{p}_k\} = \{P_{1x}\, P_{1y}\, P_{2x}\, P_{2y} \dots P_{kx}\, P_{ky}\} \qquad (6\alpha)$$

ἤ μέ τήν ἰσότητα

$$\mathbf{p} = \{\mathbf{p}_x \,\vdots\, \mathbf{p}_y\} = \{P_{1x}\, P_{2x} \cdots P_{kx} \,\vdots\, P_{1y}\, P_{2y} \cdots P_{ky}\}, \qquad (6\beta)$$

πού περιλαμβάνει τά δύο διανύσματα φορτίσεως

$$\mathbf{p}_x = \{P_{1x}\, P_{2x} \cdots P_{\kappa x} \cdots P_{kx}\}, \quad \mathbf{p}_y = \{P_{1y}\, P_{2y} \cdots P_{\kappa y} \cdots P_{ky}\} \qquad (6\gamma)$$

τοῦ δικτυώματος κατά τίς διευθύνσεις ἀντίστοιχα x καί y.

Οἱ συνιστῶσες ἑνός διανύσματος m διαστάσεων μποροῦν νά θεωρηθοῦν σάν οἱ συντεταγμένες ἑνός σημείου τοῦ m-διάστατου χώρου R^m. Ἔτσι σέ κάθε διάνυσμα $\{a_i\}$ ἀνταποκρίνεται ἀμφιμονοσήμαντα ἕνα σημεῖο τοῦ χώρου R^m, πράμα πού ἐπιτρέπει νά θεωροῦμε πολλές φορές τίς ἔννοιες διάνυσμα καί σημεῖο ὡς ταυτόσημες. Στήν ἀρχή τῶν συντεταγμένων τοῦ χώρου R^m θά ἀνταποκρίνεται προφανῶς τό μηδενικό διάνυσμα

$$_m\mathbf{0} = \{\, 0\; 0 \cdots 0 \,\}.$$

Ὅμοια μέ τόν τριδιάστατο χῶρο καί στό χῶρο m διαστάσεων τό ἄθροισμα δύο διανυσμάτων $_m\mathbf{a}$, $_m\mathbf{b}$ σχηματίζεται μέ τήν ἄθροιση τῶν ὁμόλογων συνιστωσῶν τους, τό δέ γινόμενο διανύσματος $\mathbf{a}$ ἐπί τό βαθμωτό μέγεθος λ μέ τόν πολλαπλασιασμό ὅλων τῶν συνιστωσῶν του ἐπί τό λ:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \{a_i + b_i\}, \qquad (7\alpha)$$

$$\mathbf{a}\,\lambda = \lambda\mathbf{a} = \{\lambda\, a_i\}, \qquad (7\beta)$$

$$\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} = \{\lambda\, a_i + \mu\, b_i\}. \qquad (7\gamma)$$

Τό ἐσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $_m\mathbf{a}$ καί $_m\mathbf{b}$ ἰσοῦται μέ τό ἄθροισμα τῶν γινομένων ὅλων τῶν ὁμόλογων συνιστωσῶν τους καί γράφεται ὡς ἑξῆς:

$$\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_m\, b_m\,. \qquad (8\alpha)$$

Προφανῶς ἰσχύει ἡ ταυτότητα

$$\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{b} = \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{a}\,, \qquad (8\beta)$$

πού δηλώνει ὅτι στό ἐσωτερικό γινόμενο ὡς πρῶτος παράγοντας (ὁ ἀριστερός) τίθεται τό ἀνάστροφο τοῦ ἑνός ἀπό τά δύο διανύσματα.

Ἡ τετραγωνική ρίζα τοῦ γινομένου ἑνός διανύσματος ἐπί τόν ἑαυτό του ὀνομάζεται μέτρο ἤ νόρμα καί παριστάνεται μέ τό

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{a}} = \sqrt{\Sigma\, a_i^{\,2}}\,. \tag{8γ}$$

Τό μοναδιαῖο διάνυσμα, $|\mathbf{a}| = 1$, θεωρεῖται ὡς κανονικοποιημένο. Δύο διανύσματα μέ μηδενικό ἐσωτερικό γινόμενο λέγονται γενικῶς ὀρθογωνικά καί εἰδικῶς, ἄν εἶναι καί τά δύο κανονικοποιημένα, ὀρθοκανονικά.

Στίς πιό πάνω πράξεις τό μηδενικό διάνυσμα διατηρεῖ τίς γνωστές ἰδιότητες πού ἔχει τό μηδέν στίς πράξεις μέ τούς ἀριθμούς. Ἀπό τήν ἄλλη πλευρά ἡ ἐκτέλεση τῶν πράξεων σέ δύο διανύσματα ${}_m\mathbf{a}$, ${}_n\mathbf{b}$, μέ διαφορετικό ἀριθμό διαστάσεων $m > n$ ἀπαιτεῖ πρῶτα τό μετασχηματισμό τοῦ ${}_n\mathbf{b}$ σέ διάνυσμα m διαστάσεων. Αὐτό γίνεται, ὅπως στά κοινά διανύσματα, μέ τή συμπλήρωση μέ μηδενικές συνιστῶσες :

$${}_m\mathbf{b} = \{\,{}_n\mathbf{b} \,\vdots\, \mathbf{0}\} = \{b_1\, b_2 \,\cdots\, b_n \,\vdots\, \overbrace{0\; 0 \,\cdots\, 0}^{m-n}\}\,.$$

Παράδειγμα : Τό ἐσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων τῶν ὁποίων οἱ ὁμόλογες συνιστῶσες ἀνταποκρίνονται ἐργικά ἰσοῦται μέ τό δυνατό ἔργο τους. Ἄν λοιπόν $\mathbf{p}$ εἶναι τό διάνυσμα φορτίσεως καί $\mathbf{u}$ τό ἐργικό του διάνυσμα μετακινήσεως, τό δυνατό ἔργο θά εἶναι ἴσο μέ μία ἀπό τίς δύο ἴσες ἐκφράσεις

$$\mathbf{p}^{\mathrm{T}}\mathbf{u} = \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{p}\,. \tag{9α}$$

Ὁ τύπος αὐτός θά ἰσχύει βέβαια καί γιά τό ἔργο τῶν φορτίσεων τοῦ δικτυώματος τοῦ σχ. 1. Σ' αὐτόν μπορεῖ νά εἰσαχθεῖ τό $\mathbf{u}$ μέ τήν ἔκφραση (5α) ἤ (5γ), ὁπότε τό $\mathbf{p}$ εἰσάγεται ὑποχρεωτικά μέ τίς ἐκφράσεις ἀντίστοιχα (6α) καί (6β). Ἀναλυτικά τό ἔργο τῶν φορτίων εἶναι ἴσο μέ τήν ἔκφραση

$$\sum_{\kappa} P_{\kappa x}\, u_{\kappa x} + \sum_{\kappa} P_{\kappa y}\, u_{\kappa y}\,,$$

ἡ ὁποία μπορεῖ νά γραφεῖ καί μέ τή μορφή

$$\sum_{\kappa} \mathbf{p}_{\kappa}^{\mathrm{T}}\, \mathbf{u}_{\kappa} \tag{9β}$$

Ἔτσι συνάγεται ὅτι ὁ ἐσωτερικός πολλαπλασιασμός ἐκτελεῖται μέ τόν ἴδιο κανόνα καί στήν περίπτωση πού οἱ συνιστῶσες τῶν διανυσμάτων εἶναι καί αὐτές διανύσματα, μέ τήν προϋπόθεση ὅμως ὅτι οἱ ὁμόλογες συνιστῶσες θά ἀνταποκρίνονται ἐργικά.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Γιά τό δικύωμα τοῦ παραδείγματος νά σχηματιστεῖ ἕνα διάνυσμα παραμορφώσεως **e**, τοῦ ὁποίου οἱ συνιστῶσες εἶναι οἱ ἐπιμηκύνσεις Δl_i τῶν ράβδων του. Μέ τί εἶναι ἴσο τό δυνατό ἔργο παραμορφώσεως ; Νά γραφεῖ ἡ συνθήκη τῆς ἀρχῆς τῶν δυνατῶν ἔργων γιά τό δικτύωμα.
2. Ἑνός ἐπίπεδου πάγιου πλαισίου οἱ μετακινήσεις τῶν κόμβων εἶναι οἱ γωνίες στροφῆς τους φ_i. Νά σχηματιστεῖ τό διάνυσμα μετακινήσεως **u** τοῦ πλαισίου καί κατόπιν τό ἐργικό διάνυσμα φορτίσεως **p**. Νά γραφεῖ τό δυνατό ἔργο τους.
3. Ποιό εἶναι τό διάνυσμα μετακινήσεως ἑνός ἐπίπεδου κινητοῦ πλαισίου καί ποιό τό ἐργικό διάνυσμα φορτίσεως ;

16.3. Οἱ βασικές ἔννοιες τοῦ μητρώου

Ὡς $(m \times n)$- μητρῶο **A** ἐννοοῦμε γενικά τό σύνολο $m \times n$ μεγεθῶν a_{ik} $(i = 1, \ldots, m$ καί $k = 1, \ldots, n)$ πού εἶναι διατεταγμένα σ' ἕνα ὀρθογώνιο σχῆμα μέ m στίχους καί n στῆλες. Τό στοιχεῖο a_{ik} βρίσκεται στή διασταύρωση τοῦ i - στοῦ στίχου μέ τήν k - στή στήλη :

$$\mathbf{A} = {}_m\overset{n}{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [\, a_{ik} \,]. \qquad (10\alpha)$$

Τό μητρῶο μπορεῖ νά ὁριστεῖ καί σάν ἕνα διάνυσμα στίχου n διαστάσεων μέ συνιστῶσες τά διανύσματα στηλῶν $\mathbf{a}_k$ πού ἔχουν m διαστάσεις :

$$\mathbf{A} = [\, \mathbf{a}_1 \; \mathbf{a}_2 \; \ldots \; \mathbf{a}_n \,], \qquad \text{ὅπου} \quad \mathbf{a}_k = \begin{bmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{bmatrix}. \qquad (10\beta)$$