

ΓΕΩΡΓΙΟΥ Μ. ΝΙΤΣΙΩΤΑ  
ΚΑΘΗΓΗΤΗ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ

# ΣΤΑΤΙΚΗ ΤΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΦΟΡΕΩΝ

ΠΡΩΤΟΣ ΤΟΜΟΣ  
ΚΛΑΣΙΚΗ ΣΤΑΤΙΚΗ

Γ' ΕΚΔΟΣΗ

 ΕΚΔΟΣΕΙΣ  
**ZHTH**

ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ 1995

## ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΤΗΣ Γ' ΕΚΔΟΣΕΩΣ

Μετά τήν εξάντληση καί τῆς Β' ἐκδόσεως ἔκρινα ὅτι ἐπιβάλλονταν μιά ριζική ἀναθεώρηση τῆς ὕλης τοῦ συγγράμματος μου, ὥστε αὐτό ἀφενός νά ἀπαλλαγεῖ ἀπό τίς πεπαλαιωμένες μεθόδους καί ἀφετέρου νά περιλάβει τίς νεώτερες μητρικές μεθόδους. Ἡ στατική μέ τά μητρῶα (ἀφηρημένη στατική) ἄρχισε νά ἐπιβάλλεται στήν πράξη τοῦ εὐρωπαϊκοῦ χώρου ἤδη ἀπό τίς ἀρχές τοῦ ἐξήντα, χωρίς ὁμως μέχρι σήμερα νά ἐκτοπίσει τήν κλασική στατική (ἐποπτική στατική). Ἐτσι στά γερμανόφωνα πολυτεχνεῖα ἀλλά προπάντων σ' αὐτά τῶν ἀνατολικῶν χωρῶν ἡ κλασική στατική ἐξακολουθεῖ νά κατέχει στή διδασκαλία ἀκλόνητα τήν κυρίαρχή της θέση, ἐνῶ ἡ μητρική στατική εἶναι προσαρτημένη σ' αὐτήν, σάν μιά ἄλλη μεθοδολογία. Ἀντιθετα, στίς ἀγγλόφωνες χῶρες ἡ μητρική στατική ἔχει ἀποκτήσει πλήρη αὐτοτέλεια, μέ τό ἀποτέλεσμα νά ἀποδυναμώσει τελειῶς τήν κλασική στατική.

Στήν Πολυτεχνική Σχολή τῆς Θεσσαλονίκης τά βασικά τῆς μητρικῆς στατικῆς διδάσκονται ἀπό τό 1965, ἀρχικά βάσει πρόχειρων σημειώσεων. Αὐτές ἀπέτελεσαν τήν ὕλη ἑνός ἰδιαίτερου κεφαλαίου τοῦ βιβλίου μου «Υπερστατικοί φορεῖς». Ἀργότερα, τό 1973, τό κεφάλαιο αὐτό κυκλοφόρησε σέ αὐτοτελές τεῦχος μέ τόν τίτλο «Στατική τῶν μητρῶων». Οἱ ἐξελίξεις ὁμως στή διδασκαλία καί στή πράξη ἐπέβαλαν τήν προώθηση τῆς μητρικῆς στατικῆς καί τήν ἔνταξή της στήν κύρια ὕλη διδασκαλίας. Τό ἐρώτημα βέβαια ἦταν ἂν σ' αὐτήν θά δινόταν τό προβάδισμα. Ὑστερα ἀπό προβληματισμούς μιᾶς ὀλόκληρης δεκαετίας ἐνστερνίστηκα τήν ἄποψη ὅτι ὑπό τίς σημερινές συνθήκες διδακτικά πιό σκόπιμη ἦταν ἡ ὑπαγωγή τῆς μητρικῆς στήν κλασική στατική. Διότι, ἡ δεύτερη ἐκτός πού ἀποτελεῖ τό καθημερινό ἐργαλεῖο τοῦ στατικοῦ γιά τήν ἀντιμετώπιση τῶν τρεχόντων προβλημάτων του, εἶναι ἡ μόνη πού ἐξασφαλίζει σ' αὐτόν τή δυνατότητα νά ἀντιλαμβάνεται τή λειτουργία τοῦ φορέα καί νά προβλέπει σέ γενικές γραμμές τή συμπεριφορά του. Ἐξάλλου ἡ μετάβαση ἀπό τήν κλασική στή μητρική στατική ἐπιτελεῖται μέ μιά ἐλάχιστη προσπάθεια, χωρίς ὁμως νά ἰσχύει καί τό ἀντίστροφο.

Μέ γνώμονα τίς πιό πάνω σκέψεις ἡ ὕλη τῶν δύο τόμων τῶν δύο προηγούμενων ἐκδόσεων συγχωνεύτηκε σ' ἕνα τόμο, μέ τόν τίτλο «κλασική στατική». Αὐτό ἐπιτεύχθηκε ἀφενός μέ τήν παράλειψη ἐκεῖνων τῶν κεφαλαίων πού μερικῶς τουλάχιστον εἶναι γνωστά ἀπό τήν τεχνική μηχανική καί ἀφετέρου μέ τόν περιορισμό σ' ἐκεῖνα ἀπό τήν κλασική στατική πού σήμερα

είναι θεωρητικῶς καί πρακτικῶς ἀπαραίτητα. Ἔτσι ὁ δεύτερος τόμος, πολὺ πρὶο συνοπτικός, μπόρεσε νά διατεθεῖ γιά τήν ἀνάπτυξη τῆς μητρωικῆς στατικῆς τῶν γραμμικῶν φορέων.

Βασικά ἡ διάρθρωση τῆς ὕλης τῆς κλασικῆς στατικῆς αὐτῆς τῆς ἐκδόσεως δέν διαφέρει ἀπό τίς δύο προηγούμενες ἐκδόσεις. Ὁ δεύτερος τόμος, δηλαδή ὁ τόμος τῆς μητρωικῆς στατικῆς, ἔχει ὑποδιαιρεθεῖ σέ δύο μέρη. Τό πρῶτο ἀπό αὐτά εἶναι ἀφιερωμένο σέ γενικά κάπως θέματα καί συγκεκριμένα σέ μιά συνοπτική περίληψη τῶν κυριότερων ἀπό τή θεωρία τῶν μητρῶων, στόν κλασικό τρόπο ὑπολογισμοῦ τῶν φορέων τοῦ χώρου καί σέ μιά ἀνάπτυξη τῆς μητρωικῆς θεωρίας τοῦ γραμμικοῦ δομικοῦ στοιχείου. Τό δεύτερο μέρος τοῦ ὑπόψη τόμου καί ἑβδομο τοῦ συγγράμματος ἀναφέρεται στή μητρωική θεωρία τῶν γραμμικῶν φορέων. Αὐτό περιλαμβάνει τούς φορεῖς μέ σημειακή σύνδεση τῶν στοιχείων τους, τίς μεθόδους ἐπιλύσεως, τίς ἐργικῆς μεθόδους καί μιά εἰσαγωγή στή θεωρία τῶν φορέων μέ μονόπλευρους συνδέσμοις.

Θεωρῶ καθήκον μου νά ἐκφράσω ἐντεῦθεν τίς εὐχαριστίες μου ἀφενός πρὸς τίς ἀρμόδιες ὑπηρεσίες τοῦ Ἀριστοτέλειου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης, μερίμνη τοῦ ὁποίου πραγματοποιήθηκε ἡ παρούσα Γ' ἐκδοση, ἀφετέρου πρὸς τήν ἀπογράφο κ. Π. Ζήτη, ἡ ὁποία ἐπιμελήθηκε τήν ἐκτύπωση.

Θεσσαλονίκη, Σεπτέμβριος 1980

ΓΕΩΡΓΙΟΣ Μ. ΝΙΤΣΙΩΤΑΣ

## ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΤΗΣ Α΄ ΕΚΔΟΣΕΩΣ

Ἐνῶ ἡ δομικὴ τέχνη εἶναι τόσο παλαιά ὅσον ὁ πολιτισμός, ἡ Στατικὴ τῶν δομικῶν κατασκευῶν ἀριθμεῖ θίον μόλις μιᾶς ἑκατονταετίας. Εἰς τοῦτο συνετέλεσαν δύο γεγονότα: Κατὰ τὸ παρελθόν, ἀφ' ἑνός ἢ μετάβασις ἀπὸ τήν, ἀκόμη καὶ προηγμένην, θεωρίαν εἰς τήν πρᾶξιν συνετελεῖτο βραδέως, ἀφ' ἑτέρου ἢ ἐπὶ αἰῶνας συσσωρευθεῖσα ἐμπειρία ἐπέτρεπε τήν πραγμάτων καὶ τῶν πλέον ἐπιβλητικῶν κατὰ τὰς τότε ἀντιλήψεις κατασκευῶν, ἄνευ προσφυγῆς εἰς τὸν ἐπιστημονικῶς ἐδραιωμένον ὑπολογισμόν. Ὅταν πλέον, περὶ τὰ μέσα τοῦ παρελθόντος αἰῶνος, κατέστη ἀναγκαία μία ριζικὴ ἀναπροσαρμογὴ, ἤρχισεν ἡ διαμόρφωσις τῆς Στατικῆς, ἡ ὁποία καὶ συνετελέσθη, εἰς ὃ,τι ἀφορᾷ τὰς θεμελιώδεις μεθόδους, εἰς σχετικῶς βραχὺ χρονικόν διάστημα. Ἐπηκολούθησε, μέχρι προσφάτως, ἓν μακρὸν στάδιον ἀναζητήσεων βελτιώσεως τῶν μεθόδων ἐξ ἀπόψεως καθαρῶς ὑπολογιστικῆς. Ἡ προσπάθεια ὁμως αὕτη ὀλίγον ἐποικοδομητικὴ ὑπῆρξε, διότι ἀπεμάκρυνεν οὐσιαστικῶς ἀπὸ τὸ κεντρικόν θέμα, τὸ ὁποῖον παρέμενε πάντοτε πρόβλημα φυσικόν, καὶ εἶχε ὡς συνέπειαν τήν ὑπέρμετρον διόγκωσιν τῆς Στατικῆς δι' εἰδικῶν μεθόδων, ἀμφισβητησίμου ἀκόμη ἀποτελεσματικότητος. Ἡ κατάστασις αὕτη μετεβλήθη ἄρδην ἐπὶ τῶν ἡμερῶν μας διὰ τῆς ἐμφανίσεως τοῦ ἠλεκτρονικοῦ ὑπολογιστοῦ, ὁ ὁποῖος ἀπῆλλαξε τὸν ἄνθρωπον ἀπὸ τήν μέριμναν τῆς ἐκτελέσεως τῶν πράξεων ἑνός ὑπολογισμοῦ.

Εἰς τήν καμπὴν ταύτην τῆς ἐξελιζέως τῆς Στατικῆς προβάλλει αὐτομάτως τὸ ἐρώτημα περὶ τῆς ἀναγκαιότητος μιᾶς ἐκ βάθρων ἀνασυγκροτήσεως αὐτῆς, ἡ ἀναγκαιότης δὲ αὕτη ἀπετέλεσεν ἀντικείμενον μακροχρονίου ἐξετάσεως καὶ εἰς τήν ὑπὸ τήν διεύθυνσίν μου ἔδραν τῆς Ἐφηρμοσμένης Στατικῆς. Ἡ ἐμπειρία μου ὁμως ἐκ τῆς ἐπὶ πολλὰ ἔτη διδασκαλίας τόσο τῆς «κλασσικῆς Στατικῆς» ὅσον καὶ τῆς διὰ τὸν ἠλεκτρονικόν ὑπολογιστὴν προοριζομένης «Στατικῆς διὰ τῶν μητρώων» μέ ἤγαγεν εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι ὁ στατικός ὀφείλει κατὰ τήν πορείαν τῆς μορφώσεώς του νὰ διέλθῃ διὰ τοῦ σταδίου τῆς κλασσικῆς Στατικῆς. Διότι, ἀνεξαρτήτως τοῦ μέσου ἐκτελέσεως τῶν ὑπολογισμῶν καὶ τῆς χρησιμοποιουμένης συμβολικῆς γλώσσης, μόνον διὰ τῆς κλασσικῆς Στατικῆς θὰ δύναται ὁ στατικός, εἴτε ὡς προγραμματιστὴς εἴτε ὡς ἀπλοῦς μελετητὴς, νὰ κυριαρχῇ ἐπὶ τῆς μηχανῆς καὶ νὰ αὐτενεργῇ. Τὸ παρὸν σύγγραμμα, γραφέν με σκοπὸν ἀκριβῶς τήν ἀντιμετώπισιν τῆς ὑποχρεώσεως ταύτης, περιλαμβάνει τήν κλασσικὴν Στατικὴν εἰς ὅλην τήν ἔκτασιν αὐτῆς, ἀπὸ τοῦ προβλήματος τῆς συνθέσεως δύο δυνάμεων μέχρι

καί τῆς πλέον συγχρόνου ἐκθέσεως τῆς μεθόδου Cross. Δέν ἐγράφη δέ τοῦτο μέ στόχον τās ἐξειδικευμένας καί περιορισμένου πεδίου ἐφαρμογῆς μεθόδους ὑπολογισμοῦ φορέων εἰδικῆς μορφῆς, ἀλλά τήν ἐμβάθυσιν εἰς τās θεμελιώδεις ἀρχάς καί μεθόδους, τήν τόσον ἀπαραίτητον διά τήν ἀπόκτησιν στατικῆς ἀντιλήψεως.

Ἡ ἕκτασις τῆς ὕλης ἐπέβαλε τήν διαίρεσιν τοῦ συγγράμματος εἰς δύο τόμους, ἐξ ὧν ὁ μὲν πρῶτος περιλαμβάνει τήν Στερεοστατικὴν, ὁ δέ δεύτερος τήν Ἐλαστοστατικὴν τῶν γραμμικῶν φορέων. Ἡ διαίρεσις αὕτη, ἀπόρροια τοῦ ἐπαγωγικοῦ χαρακτήρος τοῦ συγγράμματος, ὁ ὁποῖος ἐπιβάλλει τήν μετάβασιν ἐκ τοῦ ἀπλουστέρου ἀπολύτως στερεοῦ σώματος εἰς τό μαθηματικῶς ἀπαιτητικώτερον ἐλαστικόν σῶμα, ἐπεδείχθη καί ὀργανικῶς δικαιολογημένη. Πράγματι, ἀφ' ἐνός προέκυψεν αὐτομάτως ὁ διαχωρισμός τῆς μελέτης τῶν ἰσοστατικῶν φορέων ἀπό τήν τῶν ὑπερστατικῶν, ἀφ' ἐτέρου ἐπετεύχθη ἡ θεμελίωσις τοῦ μὲν πρώτου τόμου ἐπὶ τῶν στερεοστατικῶν συνθηκῶν καί τῆς ἀρχῆς τῶν δυνατῶν ἔργων, τοῦ δέ δευτέρου ἐπὶ τῶν ἐνεργειακῶν μεθόδων καί τῶν μεθόδων τῶν σχετιζομένων μέ τās παραμορφώσεις.

Ἡ ὕλη ἐκατέρου τόμου κατενεμήθη εἰς τέσσερα μέρη. Οὕτως εἰς τό πρῶτον μέρος, τό ὁποῖον προορίζεται διά τήν ὁμαλήν μετάβασιν ἀπό καθαρῶς μαθηματικὰς εἰς φυσικὰς ἀντιλήψεις, ἐξετάζονται, μετά τήν εἰσαγωγὴν τῶν ἐννοιῶν τοῦ ἀπολύτως στερεοῦ σώματος καί τῆς δυνάμεως, τὰ τῆς συνθέσεως καί ἰσορροπίας τῶν δυνάμεων καί ἀναπτύσσονται πλεῖσται στατικά καί μέθοδοι, ἀναφερόμεναι εἰς τήν εὔρεσιν τοῦ κέντρου θάρους καί τῶν ροπῶν ἀδρανείας. Μετά ταῦτα, εἰς τό δεύτερον μέρος, μελετᾶται ἐξονυχιστικῶς ὁ ἀπλούστερος τῶν φορέων, δηλαδή ἡ ἰσοστατικὴ ὁλόσωμος ἢ δικτυωτὴ δοκός, καί ἀναπτύσσονται αἱ ἀπαραίτητοι διά τήν μελέτην τῆς ἐντατικῆς καταστάσεως παντός φορέως θεμελιώδεις μέθοδοι.

Εἰς τό τρίτον μέρος ἐπακολουθεῖ ἡ μελέτη τῶν συνθέτων φορέων, συνήθους ἀλλά καί ἰδιαζούσης μορφῆς, δι' αὐτῆς δέ ἀποκτῶνται τὰ ἐφόδια διά τήν ἀντιμετώπισιν τοῦ ὑπολογισμοῦ παντός ἐπιπέδου ἰσοστατικοῦ φορέως. Τό μέρος τοῦτο κλείει μέ τήν ἀνάπτυξιν τῶν ἀρχῶν ὑπολογισμοῦ τῶν ἰσοστατικῶν φορέων τοῦ χώρου, ἀνάπτυξιν συνοπτικὴν μὲν ἀλλ' ἐπαρκῆ, ἐν συνδυασμῷ μέ τήν θεωρίαν τῶν ἐπιπέδων φορέων, διά τήν μετάβασιν εἰς τὰ προβλήματα τοῦ χώρου, τὰ ὁποῖα ἐξ ἄλλου σπανίως προβάλλουν.

Μετά τήν ἐμπέδωσιν τῶν ἐποπτικῶν μεθόδων τῶν βασισομένων ἐπὶ τῶν στερεοστατικῶν συνθηκῶν, αἱ ὁποῖαι καί ἐξοικειώνουν τόν ἀναγνώστην μέ τόν τρόπον λειτουργίας τῶν φορέων, δύναται οὗτος νά προχωρήσῃ εἰς τήν

μελέτην τοῦ τετάρτου μέρους. Εἰς τοῦτο ἀναπτύσσονται αἱ κινηματικά μέθοδοι, αἱ βασιζόμεναι ἐπὶ τῆς ἀπαραμίλλου γονιμότητος ἀρχῆς τῶν δυνατῶν ἔργων, ἢ ὅποια καὶ πρωταγωνιστεῖ σχεδόν μέχρι τοῦ τέλους τοῦ συγγράμματος.

Εἰς τὸ πέμπτον μέρος, μετὰ τὸ ὅποιον ἄρχεται ὁ δεύτερος τόμος, ἐκτίθεται ἐν πρώτοις αἱ παραδοχαὶ ἐπὶ τῶν ὁποίων βασίζεται ὁ ὑπολογισμὸς τῶν παραμορφώσεων τῶν παραμορφωσίμων γραμμικῶν φορέων, ἐν συνεχείᾳ δὲ ἐπεκτείνεται καὶ εἰς αὐτούς ἡ ἀρχὴ τῶν δυνατῶν ἔργων. Βάσει τῆς ἀρχῆς ταύτης, ἐπιτυγχάνεται ἡ διατύπωσις τῶν ἐνεργειακῶν προτάσεων Castigliano, Betti, Maxwell - Mohr, αἱ ὅποια συνιστοῦν τὸν ἀκρογωνιαῖον λίθον τῆς θεωρίας τῶν ὑπερστατικῶν φορέων. Ἐν εἶδει προπαρασκευῆς διὰ τὴν ἐπίλυσιν τῶν τελευταίων ἐκτίθεται λεπτομερῶς ὁ ἐπὶ τῶν προαναφερθεισῶν προτάσεων βασιζόμενος τρόπος ὑπολογισμοῦ τῶν μετακινήσεων καὶ τῆς ὅλης ἐλαστικῆς γραμμῆς τῶν ἰσοστατικῶν φορέων.

Μετὰ ταῦτα ἀναπτύσσεται εἰς τὸ ἕκτον μέρος ἡ μέθοδος δυνάμεων καὶ ἐπιλύονται πάντα τὰ σχετικὰ πρὸς τὴν ἔντασιν καὶ παραμόρφωσιν τῶν ὑπερστατικῶν φορέων προβλήματα. Ἡ ἀνάπτυξις αὕτη ἐβασίσθη ἐπὶ τῆς ἀρχῆς τῆς ἐπαλληλίας, τῆς τόσον οἰκειᾶς εἰς τὸν στατικόν, καὶ ὄχι ἐπὶ τῶν ἐνεργειακῶν προτάσεων. Πρὸς ἐξοικείωσιν τοῦ ἀναγνώστου μετὰ τὴν μέθοδον, ἐξετάζονται ἐγγύτερον οἱ συνηθέστερον εἰς τὴν πράξιν ἀπαντώμενοι ὑπερστατικοὶ φορεῖς, ὡς ἡ συνεχῆς δοκός, τὰ τόξα, τὰ δικτυώματα κ.ἄ. Ἀφ' ἑτέρου διὰ τὴν πληρεστέραν ἐνημέρωσίν του, διετέθησαν τὰ δύο τελευταῖα κεφάλαια τοῦ ἕκτου μέρους διὰ τὴν ἀνάπτυξιν τῶν γενικωτέρων μεθόδων τῶν ἀπορρουσῶν ἐκ τῆς μεθόδου δυνάμεων. Πρὸς ἀξιολόγησιν δὲ τούτων, βάσει ἀδιασειστων μαθηματικῶν κριτηρίων, ἐκρίθη σκόπιμον ὅπως προταχθοῦν τὰ κυριώτερα ἐκ τῶν μεθόδων ἐπιλύσεως γραμμικῶν συστημάτων.

Ὡς ἀντίπους τῆς μεθόδου δυνάμεων προβάλλει ἡ ἑτέρα θεμελιώδης μέθοδος ἐπιλύσεως ὑπερστατικῶν φορέων, ἡ καλουμένη μέθοδος παραμορφώσεων. Αὕτη ἐκτίθεται εἰς τὸ ἕβδομον μέρος, κατ' ἀρχάς ὑπὸ τὴν ἀπλοποιημένην τῆς διατύπωσιν, τὴν ἀρμόζουσαν διὰ τὴν ἐπίλυσιν τῶν κυριαρχούντων εἰς τὴν πράξιν παγίων καὶ κινητῶν πολυωρόφων πλαισίων. Ἐπὶ πλέον, κατὰ τὴν ἀνάλυσιν τῶν μὲν παγίων πλαισίων ἀνεπτύχθη, εἰς ἕκτασιν πραγματικῆς ἀναγκαιότητος, ἡ μέθοδος τῶν σταθερῶν σημείων; κατὰ τὴν τοιαύτην δὲ τῶν κινητῶν πλαισίων ἡ μέθοδος τοῦ παγίου κυρίου συστήματος. Τὸ βάρος ὁμως ἐδόθη εἰς μίαν ἐνδελεχῆ ἔκθεσιν τῆς γενικῆς μεθόδου παραμορφώσεων, διὰ μόνης τῆς ὁποίας ἐπιτυγχάνεται ἀφ' ἑνός ἢ ἐμβάθυνσις εἰς τὸ πρόβλημα τῆς συμπεριφορᾶς τοῦ στατικοῦ πλέγματος καὶ ἀφ' ἑτέρου ἢ συστέγασις τῶν πολυαριθμῶν καὶ ποικιλωνύμων νεωτέρων μεθόδων ἐπιλύσεως πλαισίων.

Τέλος, τό ὄγδοον μέρος εἶναι ἀφιερωμένον εἰς τάς μεγίστης πρακτικῆς σημασίας μεθόδους Cross καί Kané, ἡ ἀνάπτυξις τῶν ὁποίων ἐγένετο, ἐν ὄψει τῆς ὀλονέν ἐπεκτεινομένης καί παρ' ἡμῖν χρησιμοποιήσεως τοῦ ηλεκτρονικοῦ ὑπολογιστοῦ, ἐξονυχιστικῶς μόνον διά τά πάγια καί ὀριζοντίως κινητά πλαίσια. Ἐπειδή αἱ δύο αὐται μέθοδοι ἀπορρέουν οὐσιαστικῶς ἐκ τῆς μεθόδου παραμορφώσεων δι' ἐφαρμογῆς τοῦ σκεπτικοῦ τῆς θαμιστικῆς ἐπεξεργασίας τῶν γραμμικῶν συστημάτων, συμπεριελήφθησαν τά πλέον ἀπαραίτητα καί ἐκ τῆς σχετικῆς μαθηματικῆς θεωρίας. Τοιοιτοτρόπως ἐπετεύχθη ὄχι μόνον μία σύντομος καί σαφῆς ἐκθεσις τῶν μεθόδων Cross καί Kané, ἀλλά καί ἡ ἐνοποιήσις τούτων, πρὸς μέγιστον ὄφελος τοῦ προτιθεμένου νά ἐφαρμόσῃ ταύτας.

Κατά τήν ἀνωτέρω ἐκλογὴν καί διάρθρωσιν τῆς ὕλης προσεπάθησα νά συγκρατήσω εἰς πρακτικῶς ἀνεκτά ὄρια τόν ὄγκον τοῦ συγγράμματος. Διά νά μὴ ἀποβῇ ὁμως τοῦτο εἰς θάρος τῆς οὐσιαστικῆς πληρότητος τοῦ ἔργου, ὑπεχρεώθην ὅπως συντημῶ ἢ ἐντάξω εἰς ἄλλας γενικωτέρας - ἢ καί παραλείψω ἀκόμη - τάς ἡσσονος σημασίας εἰδικάς μεθόδους. Πέραν τούτου, περιώρισα εἰς τό ἐλάχιστον τάς γραφικάς μεθόδους καί δέν ἐδίστασα νά ὑπερπηδήσω μακροσκελεῖς καί καθαρῶς γεωμετρικῆς φύσεως ἀποδείξεις, αἱ ὁποῖαι δέν ἐπρόκειτο νά συμβάλλουν οὐσιαστικῶς εἰς τήν κατανόησιν τοῦ στατικοῦ προβλήματος. Τό κενόν τοῦτο ἐπεχείρησα νά ἀντισταθμίσω διά καταλλήλων σχημάτων.

Ἡ προαναφερθεῖσα προσπάθεια διηκολύνθη καί διά τῆς στοιχειοθετήσεως τοῦ κειμένου μέ στοιχεῖα δύο μεγεθῶν. Οὕτω μέ τά μικρά ψηφία ἐγράφη τό δευτερευούσης σημασίας κείμενον - ἄλλ' εἰς τρόπον, ὥστε νά καθίσταται δυνατή ἡ αὐτοτελῆς μελέτη τοῦ κυρίως κειμένου - καί τά ἀριθμητικά παραδείγματα, τά ὁποῖα, καίτοι πολυάριθμα, ἐπελέγησαν μέ γνώμονα κυρίως τήν συμπλήρωσιν τῆς θεωρίας. Πρὸς διευκόλυνσιν τοῦ ἀναγνώστου κατεβλήθη ἰδιαιτέρα προσπάθεια - φρονῶ δέ μετ' ἐπιτυχίας - χρησιμοποιήσεως μέ ἀπόλυτον συνέπειαν ἐνός ἐνιαίου συμβολισμοῦ, ἀπ' ἀρχῆς μέχρι τέλους τοῦ συγγράμματος. Ὅσον ἀφορα εἰς τήν βιβλιογραφίαν, ἔκρινα ὡς μὴ ἐντελῶς ἀπαραίτητον, δι' ὕλην ἀπό μακροῦ κωδικοποιθεῖσαν, τήν μνημόνευσιν βιβλιογραφικῶν πηγῶν εἰς παραπομπάς. Εἰς ἀντιστάθμισμα περιέλαβα πλείστας ἱστορικάς καί συντόμους βιογραφικάς σημειώσεις, μέ σκοπόν τήν ἐνημέρωσιν τοῦ ἀναγνώστου ἐπὶ τῆς ἱστορικῆς ἐξελίξεως τῆς Στατικῆς καί τήν γνωριμίαν αὐτοῦ μέ τά ὀνόματα καί τήν συνεισφοράν τῶν σημαντικωτέρων αὐτῆς ἐρευνητῶν.

Ἡ ἐπιλογή, μέ κριτήριον τήν διδακτικὴν μου πείραν, καί ἡ ἐπεξεργασία

τῆς ὕλης τοῦ ἐκτεταμένου τούτου καί ἰδιαζούσης μορφῆς συγγράμματος μέ ἀπασχόλησε περιοδικῶς ἐπί μίαν σχεδόν δεκαετίαν καί, ὡς εἶναι φυσικόν, μοί παρεσχέθη ὑπό πολλῶν προσώπων βοήθεια, διά τήν ὁποίαν καί αἰσθάνομαι εὐγνωμοσύνην. Ἐπώνυμος ὁμως ἐπιθυμῶ νά εὐχαριστήσω θερμῶς κατά πρότον τόν ἀγρονόμον καί τοπογράφον μηχανικόν κ. Δημήτριον Τσιλίκαν, ὁ ὁποῖος, οὐδενός κόπου φεισθείς, ἐπεμελήθη τῆς σχεδιάσεως ἐν καθαροῦ τῶν σχημάτων καί πινάκων. Ἐπίσης εὐχαριστῶ θερμῶς τόν πολιτικόν μηχανικόν κ. Γεώργιον Παπαθανασίου, ὁ ὁποῖος, προσφερθείς εὐγενῶς, ἐπωμίσθη τήν εὐθύνην τῆς τελικῆς διορθώσεως τῶν δοκιμίων. Ὅπως δέ ἰδιαίτερος εὐχαριστῶ τήν συνεργατίδά μου, διδάκτορα μηχανικόν, κ. Ἀμαλίαν Τσαμκιράνη-Γεωργανοπούλου διά τήν πολύτιμον συμβολήν καί συμπαράστασίν της πρός πραγματοποίησιν τοῦ παρόντος, συμβολήν συνισταμένην εἰς μίαν πολύπλευρον ἐνεργόν συνδρομήν καί κατά βῆμα παρακολούθησιν τοῦ παρόντος ἀπό τῆς ἐνάρξεως τῆς συγγραφῆς του μέχρι τοῦ πέρατος τῆς ἐκτυπώσεώς του.

Αἱ γνωσταί ἰδιαίτεραι δυσχέρειαι μιᾶς ἐκδόσεως συγγράμματος μαθηματικοῦ χαρακτῆρος εἰς τήν Ἑλληνικήν καθίστανται ἔτι μεγαλύτεραι προκειμένου περί μιᾶς ὀγκώδους Στατικῆς, ἡ ὁποία μάλιστα σχετικῶς περιορισμένον ἀναγνωστικόν κοινόν προορίζεται νά ἔχη. Εὐρισκόμενος πρακτικῶς πρό ἀδιεξόδου, ὑπερενίκησα τελικῶς τούς δισταγμούς μου καί ἀπεφάσισα, δίδων τό προβάδισμα εἰς τήν οὐσίαν, ὅπως προβῶ εἰς τήν παροῦσαν δι' εἰδικῆς στοιχειοθετικῆς μηχανῆς φωτοαντιγραφικήν ἐκδοσιν. Ἡ πραγματοποίησις ταύτης ἐπετεύχθη καί χάρις εἰς τήν συνδρομήν τῆς λινοτύπου κ. Ζήτη, ἡ ὁποία ἐξ ὀλοκλήρου ἐπωμίσθη καί τήν εὐθύνην τῆς σελιδοποιήσεως. Διά τήν προσπάθειάν της πρός μίαν ἀρτιωτέραν ἐμφάνισιν τοῦ παρόντος θεωρῶ καθήκον μου ὅπως ἐκφράσω πρός αὐτήν καί ἐντεῦθεν τās εὐχαριστίας μου.

Ἐν τέλει ἐπιθυμῶ νά ἀναφέρω ὅτι διά τοῦ παρόντος δέν ἐπιχειρῶ νά καλύψω τυχόν ὑφιστάμενον κενόν εἰς τήν σχετικήν ἑλληνικήν βιβλιογραφίαν, οὔτε ἀπευθύνομαι πρός ὠρισμένην ἐπιστημονικήν κατηγορίαν τῶν τεχνικῶν μας. Τό σύγγραμμα ἐγράφη ἀπλῶς πρός ἱκανοποίησιν μιᾶς ἐσωτερικῆς παρορμήσεώς μου καί τίθεται εἰς τήν διάθεσιν παντός ἐνδιαφερομένου νά ἐμβαθύνῃ εἰς τās θεμελιώδεις ἀρχάς καί μεθόδους τῆς Στατικῆς, καί δι' αὐτῶν εἰς τόν τρόπον λειτουργίας τῶν φορέων. Εὐελπιστῶ δέ ὅτι διά τῆς συγγραφῆς τοῦ παρόντος ἐκπληρῶ καί ἐν ἐλάχιστον καθήκον πρός τήν Πατρίδα, ἡ ὁποία μου ἐνεπιστεύθη, κατά τό μερίδιόν μου, τήν μόνωσιν τῶν μηχανικῶν.

Θεσσαλονίκη, Νοέμβριος 1970

Γ. Μ. ΝΙΤΣΙΩΤΑΣ



## ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΤΗΣ Β' ΕΚΔΟΣΕΩΣ

Εἰς τό βραχύ χρονικόν διάστημα τό ὁποῖον ἐμεσολάβησεν ἀπό τῆς Α' ἐκδόσεως μέχρι σήμερον ὀριστικοποιήθησαν ριζικαί ἀλλαγαί τόσον εἰς τόν τομέα τῆς πράξεως ὅσον καί τῆς διδασκαλίας τῆς Στατικῆς. Ἡ χρῆσις τοῦ ηλεκτρονικοῦ ὑπολογιστοῦ διά τήν ἐκτέλεσιν ἐκτεταμένων ὑπολογισμῶν τῆς πράξεως καθιερώθη καί παρ' ἡμῖν μέ τό εὐεργετικόν ἀποτέλεσμα τῆς ἀπαλλαγῆς τῶν στατικῶν ἀπό τόν μόχθον τῆς λογιστικῆς ἐργασίας καί τήν ἐκμάθησιν ἐξειδικευμένων μεθόδων. Ἡ ἀπαλλαγὴ αὕτη εἶχεν τὰς ἐπιπτώσεις τῆς καί ἐπὶ τῆς διδασκαλίας τῆς Στατικῆς, ἡ ὁποία βαθμιαίως, ἀλλά συνεχῶς προσαρμόζεται εἰς τὰς πραγματικάς ἀνάγκας τῶν φοιτητῶν καί τῶν μηχανικῶν. Ὑπό τό πρῖσμα τοῦτο ἡ παροῦσα Στατική δέν δύναται νά θεωρηθῆ ὡς ἐξυπηρετοῦσα τὰς ἀνάγκας διδασκαλίας, ἀλλά ὡς συντελοῦσα κυρίως εἰς τήν ἐμβάθυνσιν εἰς τὰς θεμελιώδεις ἀρχάς καί μεθόδους τῆς Στατικῆς, τῶν ὁποίων ἡ ἀξία παραμένει πάντοτε ἀκλόνητος. Ἡ ἀποψις αὕτη ἐνισχύεται καί ἐκ τοῦ γεγονότος ὅτι ἡ πρώτη ἐκδοσις διετέθη κατά σημαντικόν μέρος εἰς βιβλιοθήκας Ἀνωτάτων Ἐκπαιδευτικῶν Ἰδρυμάτων καί Ὁργανισμῶν. Πρέπει ὁμως νά ὁμολογήσω ὅτι καί σήμερον ἀκόμη διαπιστοῦται μία ἐντονος διάθεσις μελέτης τοῦ συγγράμματός μου ὑπό τῶν φοιτητῶν. Ἐνεκα τούτου ἀπεδέχθην σχετικόν αἶτημα τῶν φοιτητῶν καί ἀπεφάσισα νά εἰσηγηθῶ τήν διανομήν τοῦ συγγράμματός μου ὡς διδακτικοῦ βοηθήματος.

Εἰς τήν παροῦσαν Β' ἐκδοσιν, ἡ ὁποία πραγματοποιεῖται μερίμνη τοῦ Ἀριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης, πρὸς πληρεστέραν ἱκανοποίησιν τῶν διδακτικῶν ἀναγκῶν, συμπεριελήφθη εἰς παράρτημα τοῦ Α' Τόμου ὁ ὑπολογισμός τῶν ὀρθῶν καί διατμητικῶν τάσεων τῶν διατομῶν εὐθυγράμμων δοκῶν. Καίτοι τό πρόβλημα τοῦτο ἀνήκει οὐσιαστικῶς εἰς τήν Ἄντοχήν τῶν Ὑλικῶν, ἔκρινα σκόπιμον τήν πραγμάτευσίν του, ἀφ' ἑνός διά νά ἐμφανισθῆ ὀλοκληρωμένη ἡ μελέτη τῆς δοκοῦ μέχρι καί τοῦ ὑπολογισμοῦ τῶν τάσεων αὐτῆς, ἀφ' ἑτέρου διότι ὁ ὑπολογισμός οὗτος ἐπιτυγχάνεται βάσει καθαρῶς στερεοστατικῶν ἀντιλήψεων. Διά τήν ἀντιμετώπισιν τοῦ προβλήματος τούτου ἐφήρμοσα ἐν πολλοῖς καί ἰδίας μεθόδους, τινές τῶν ὁποίων φρονῶ ὅτι καί πρωτότυποι εἶναι ἀλλά καί γενικωτέρας ἰσχύος.

Θεσσαλονίκη, Ἰανουάριος 1976

Γ. Μ. ΝΙΤΣΙΩΤΑΣ

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΤΟΜΟΥ

### ΠΡΩΤΟ ΜΕΡΟΣ

#### ΑΠΛΟΙ ΙΣΟΣΤΑΤΙΚΟΙ ΦΟΡΕΙΣ

1. Κεφ. Ο ΔΙΣΚΟΣ - ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ	
1.1. Θέση του προβλήματος .....	15
1.2. Ή κίνηση και ή στήριξη του δίσκου .....	20
1.3. Ό υπολογισμός των αντιδράσεων του δίσκου .....	26
1.4. Οί έσωτερικές δυνάμεις του δίσκου .....	31
1.5. Ή συμμετρία στους ίσοστατικούς φορείς .....	37
2. Κεφ. Η ΔΟΚΟΣ	
2.1. Τά διαγράμματα από μοναχικά φορτία .....	42
2.2. Τά διαγράμματα από συνεχές φορτίο .....	49
2.3. Οί θεμελιώδεις ιδιότητες των διαγραμμάτων .....	57
2.4. Παραδείγματα υπολογισμού διαγραμμάτων .....	62
2.5. Τά διαγράμματα της πολυγωνικής δοκού .....	67
2.6. Ή καμπύλη δοκός .....	74
2.7. Γενικά για τίς γραμμές έπιρροής .....	79
3. Κεφ. Ο ΔΙΚΤΥΩΤΟΣ ΔΙΣΚΟΣ	
3.1. Μόρφωση και υπολογισμός των δικτυωμάτων .....	87
3.2. Ή μέθοδος των διαχωριστικών τομών .....	94
3.3. Παραδείγματα υπολογισμού δικτυωμάτων .....	99
3.4. Οί γραμμές έπιρροής των δικτυωμάτων .....	105

### ΔΕΥΤΕΡΟ ΜΕΡΟΣ

#### ΣΥΝΘΕΤΟΙ ΙΣΟΣΤΑΤΙΚΟΙ ΦΟΡΕΙΣ

4. Κεφ. ΟΙ ΣΥΝΗΘΙΣΜΕΝΟΙ ΣΥΝΘΕΤΟΙ ΦΟΡΕΙΣ	
4.1. Μόρφωση και υπολογισμός των σύνθετων φορέων .....	113
4.2. Ή άρθρωτή δοκός .....	121
4.3. Παραδείγματα υπολογισμού άρθρωτων δοκών .....	130
4.4. Τριαρθρωτοί φορείς μέ λοξά φορτία .....	137
4.5. Τριαρθρωτοί φορείς μέ παράλληλα φορτία .....	143

4.6. Οί ένισχυμένες δοκοί .....	150
4.7. Παραδείγματα ύπολογισμού ένισχυμένων δοκών .....	157

## 5. Κεφ. ΣΤΕΡΕΑ ΚΑΙ ΚΙΝΗΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

5.1. Ό έλεγχος τής στερεότητας των φορέων .....	162
5.2. Ό πίο πρόσφορος τρόπος ύπολογισμού .....	170
5.3. Ό σχηματισμός των πόλων .....	174
5.4. Ό σχηματισμός των κάθετων μετατοπίσεων .....	179
5.5. Ό έλεγχος τής άπειροστής κινητότητας .....	182

## 6. Κεφ. Η ΑΡΧΗ ΤΩΝ ΔΥΝΑΤΩΝ ΕΡΓΩΝ

6.1. Τό έργο δυνάμεων .....	186
6.2. Ό αρχή των δυνατών έργων .....	191
6.3. Οί εφαρμογές τής αρχής των δυνατών έργων .....	196
6.4. Ό προσδιορισμός μίας αντίδράσεως .....	199
6.5. Οί γραμμές έπιρροής .....	204

## ΤΡΙΤΟ ΜΕΡΟΣ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΙΣ

### 7. Κεφ. ΟΙ ΕΡΓΙΚΕΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

7.1. Οί παραμορφώσεις του γραμμικού φορέα .....	213
7.2. Ό αρχή των δυνατών έργων .....	218
7.3. Οί θεμελιώδεις μετακινήσεις .....	223
7.4. Οί τρεις προτάσεις άμοιβαιότητας .....	226

### 8. Κεφ. ΟΙ ΜΟΝΑΧΙΚΕΣ ΜΕΤΑΚΙΝΗΣΕΙΣ

8.1. Οί μετακινήσεις από τή φόρτιση .....	233
8.2. Οί φορείς μέ σταθερές διατομές .....	238
8.3. Οί φορείς μέ μεταβλητές διατομές .....	246
8.4. Οί έσωτερικοί καταναγκασμοί .....	251
8.5. Οί έξωτερικοί καταναγκασμοί .....	259
8.6. Οί φορείς μέ έλαστικές στηρίξεις .....	262

### 9. Κεφ. Η ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ

9.1. Τά έλαστικά φορτία .....	267
9.2. Ό όμόλογη δοκός των θυθίσεων .....	273
9.3. Έφαρμογές τής προτάσεως <i>MOHR</i> .....	278
9.4. Οί φορείς μέ μεταβλητές διατομές .....	285
9.5. Ό έλαστική γραμμή των δικτυωμάτων .....	288

**ΤΕΤΑΡΤΟ ΜΕΡΟΣ**  
**ΜΕΘΟΔΟΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ**

**10. Κεφ. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ**

10.1. Τό στατικό κύριο σύστημα .....	295
10.2. Οί συνθήκες συμβιβαστού .....	300
10.3. Ἡ ἔνταση ἀπό τή φόρτιση .....	308
10.4. Ἡ ἔνταση ἀπό τούς καταναγκασμούς .....	312
10.5. Οί μετακινήσεις καί οί παραμορφώσεις .....	317
10.6. Οί γραμμές ἐπιρροῆς .....	325

**11. Κεφ. ΟΙ ΣΥΝΗΘΙΣΜΕΝΟΙ ΥΠΕΡΣΤΑΤΙΚΟΙ ΦΟΡΕΙΣ**

11.1. Ἡ συνεχῆς δοκός .....	333
11.2. Παραδείγματα ὑπολογισμοῦ συνεχῶν δοκῶν .....	338
11.3. Ὁ διαρθρωτός φορέας .....	348
11.4. Ὁ δακτύλιος καί ὁ ἀμφίπακτος φορέας .....	354
11.5. Οί ἐνισχυμένες δοκοί .....	364
11.6. Τά ὑπερστατικά δικτυώματα .....	370

**12. Κεφ. ΟΙ ΠΑΡΑΛΛΑΓΕΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΔΥΝΑΜΕΩΝ**

12.1. Ἡ μέθοδος τῶν διορθωτικῶν ὑπεραριθμῶν .....	377
12.2. Τό ὑπερστατικό κύριο σύστημα .....	383
12.3. Ἡ μέθοδος τῶν γενικευμένων δυνάμεων .....	389
12.4. Ἡ συμμετρία στοῦς ὑπερστατικούς φορεῖς .....	395

**ΠΕΜΠΤΟ ΜΕΡΟΣ**

**Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΜΕΤΑΚΙΝΗΣΕΩΝ**

**13. Κεφ. Η ΚΛΑΣΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΜΕΤΑΚΙΝΗΣΕΩΝ**

13.1. Τό σκεπτικό τῆς μεθόδου μετακινήσεων .....	403
13.2. Τό εὐθύγραμμο δομικό στοιχείο .....	408
13.3. Δοκοί μέ μηχανισμούς στό ἓνα ἄκρο τους .....	413
13.4. Ἡ ἐπίλυση τῶν εὐθύγραμμων πλαισίων .....	421
13.5. Ἡ ἐπίλυση τῶν ἀτενῶν πλαισίων .....	427

**14. Κεφ. ΤΑ ΠΑΓΙΑ ΚΑΙ ΥΠΕΡΠΑΓΙΑ ΠΛΑΙΣΙΑ**

14.1. Ἡ ἐπίλυση τῶν πάγιων καί ὑπερπάγιων πλαισίων .....	432
14.2. Παραδείγματα ὑπολογισμοῦ πάγιων πλαισίων .....	438
14.3. Τό λῆμμα τοῦ μονόκομβου πλαισίου .....	446
14.4. Ἡ ἀσύμπτυκτη μέθοδος <i>CROSS</i> .....	453
14.5. Παραδείγματα ὑπολογισμοῦ μέ τή μέθοδο <i>CROSS</i> .....	458

14.6. 'Η ασύμπτωκτη μέθοδος KANI .....	464
14.7. Οί συμπυγμένες θαμιστικές μέθοδοι .....	469
14.8. 'Η μέθοδος τών σταθερών σημείων .....	474
<b>15. Κεφ. ΤΑ ΚΙΝΗΤΑ ΑΤΕΝΗ ΠΛΑΙΣΙΑ</b>	
15.1. Οί παράμετροι μετακινήσεως τών κόμβων .....	483
15.2. Οί γενικές στατικές συνθήκες .....	490
15.3. Τά πολυώροφα πλαίσια .....	494
15.4. Παραδείγματα ύπολογισμού πολυώροφων πλαισίων .....	500

### ΒΟΗΘΗΤΙΚΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ

<i>I.</i> ΠΙΝΑΚΑΣ	'Ολοκληρώματα γινομένου δύο συναρτήσεων .....	510
<i>II.</i> ΠΙΝΑΚΑΣ	Τιμές $\omega$ - συναρτήσεων .....	511
<i>III.</i> ΠΙΝΑΚΑΣ	Φορτιστικοί παράγοντες .....	512
<i>IV.</i> ΠΙΝΑΚΑΣ	'Επίλυση μή συμμετρικού συστήματος .....	514
<i>V.</i> ΠΙΝΑΚΑΣ	'Επίλυση συμμετρικού συστήματος .....	515
<i>VI.</i> ΠΙΝΑΚΑΣ	Τυπολόγιο τής δοκού μέ μεταβλητή διατομή .....	516
<i>VII.</i> ΠΙΝΑΚΑΣ	Τυπολόγιο τής δοκού μέ σταθερή διατομή .....	517
<i>VIII.</i> ΠΙΝΑΚΑΣ	'Ακαμψίες και συντελεστές μεταθιβάσεως .....	518

### 'Επεξηγηματική σημείωση

'Ο πρώτος τόμος αποτελείται από πέντε μέρη τό καθένα από τά όποια ύποδιαιρείται σέ τρία κεφάλαια, άριθμημένα συνεχώς. 'Η άρίθμηση τών άρθρων γίνεται άυτοτελώς για κάθε κεφάλαιο χωριστά. Οί άριθμοί και οί τίτλοι είναι γραμμένοι στό πάνω μέρος τών ζυγών σελίδων, για τά κεφάλαια, και τών μονών σελίδων για τά άρθρα. 'Η άρίθμηση τών άρθρων, τών εξισώσεων και τών σχημάτων είναι συνεχής και άνεξάρτητη για κάθε κεφάλαιο. 'Η παραπομπή σέ μία εξίσωση ή σ' ένα σχήμα γίνεται μέ τήν άναφορά του άριθμού τους, π.χ. έξ. (16) ή σχ. 21, έκτός αν ανήκουν σέ άλλο κεφάλαιο, όποτε προτάσσεται ό άριθμός του κεφαλαίου, π.χ. έξ. (8.16) ή σχ. (8.21).

'Η παραπομπή στά τρία συγγράμματα :

ΝΙΤΣΙΩΤΑ, Γ.: Στατική τών γραμμικών φορέων, 1. τομ. και 2. τομ. Α' έκδοση 1970 και Β' έκδοση 1976

ΝΙΤΣΙΩΤΑ, Γ.: 'Ελαστοστατική, 1. τομ. και 2. τομ. 1978

ΝΙΤΣΙΩΤΑ, Γ. και ΤΣΑΜΚΙΡΑΝΗ-ΓΕΩΡΓΑΝΟΠΟΥΛΟΥ, Α.: Στατική τών Κατασκευών, 1977

γίνεται συντομογραφικά άντιστοιχώς ως εξής:

«Β' έκδοση», «'Ελαστοστατική» και «Στατ. τών Κατασκευών».

## ΠΡΩΤΟ ΜΕΡΟΣ

# ΑΠΛΟΙ ΙΣΟΣΤΑΤΙΚΟΙ ΦΟΡΕΙΣ

### ΠΡΩΤΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ

## Ο ΔΙΣΚΟΣ - ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ

### 1.1. Θέση του προβλήματος

Ἡ στατική τῶν φορέων ἔχει ὡς ἀντικείμενο τή μελέτη τῶν νόμων πού διέπουν τή μόρφωση καί τή λειτουργία τῶν *φορέων*. Μέ τόν ὄρο φορέας ἐννοοῦμε ἕνα μηχανικό σύστημα φυσικῶν συμπαγῶν σωμάτων πού συνδέονται μέ τούς *συνδέσμους* μεταξύ τους. Ὁ προορισμός τοῦ συστήματος αὐτοῦ εἶναι ἡ παραλαβή δυνάμεων καί ἐνδεχομένως – γιά τούς δομικούς φορεῖς – ἡ μεταβίβασή τους στό ἔδαφος. Ἡ σύνδεση τῶν συνθετικῶν στοιχείων πρέπει νά γίνει ἔτσι ὥστε νά προκύψει ἕνα στερεό σύστημα, τοῦ ὁποῖου οἱ ἀλλαγές τῆς μορφῆς, δηλαδή οἱ παραμορφώσεις, νά εἶναι ἐπακόλουθο μόνο τῆς ἐνδοτικότητας τοῦ ὑλικοῦ. Στίς δομικές κατασκευές ὁ φορέας συνδέεται στερεά μέ τό ἔδαφος, ἐνῶ στίς ναυπηγικές στό σύνολό του κινεῖται σάν ἕνα σῶμα.

Ὁ κυριότερος στόχος τῆς μελέτης τῆς λειτουργίας τῶν φορέων εἶναι ὁ προσδιορισμός τῆς *παραμορφώσεως* καί τῆς *ἐντάσεώς* τους, δηλαδή τῶν δυνάμεων πού ἀναπτύσσονται στό ἐσωτερικό τους, σάν ἐπακόλουθα ὀρισμένων γνωστῶν αἰτίων. Αὐτά μπορεί νά εἶναι ἄλλες, γνωστές, δυνάμεις, πού προσάγονται ἐπάνω στό φορέα, ἢ ἄλλα αἷτια, ὅπως π.χ. ἡ θερμοκρασία. Ἡ δύναμη ὁμως εἶναι ἐκείνη πού δεσπάζει στά προβλήματα τῆς στατικῆς.

Ἡ ἐννοια τῆς δυνάμεως γεννήθηκε ἀπό τίς παραστάσεις πού σχηματίζονται μέ τά αἰσθητήρια ὄργανά μας, ὅταν προσπαθοῦμε νά ἐπηρεάσουμε τήν κίνηση σωμάτων ἢ νά ἀνυψώσουμε βάρη. Μέ *ἀρχέτυπα* τή μυική δύναμη καί τό βάρος, μποροῦμε νά ὀνομάσουμε δύναμη *κάθε*

φυσικό μέγεθος πού ἔχει τήν ἰκανότητα νά ἰσορροπεῖ μιά μωική δύναμη ἢ ἓνα βάρος. Μὲ τόν ἀπλό αὐτόν ὄρισμό σχηματίζουμε τήν παράσταση τῶν δυνάμεων καί ἄλλης προελεύσεως, ὅπως εἶναι οἱ δυνάμεις τριβῆς, οἱ ἔλαστικές δυνάμεις καί ἡ πίεση τῶν ὑγρῶν.

Οἱ δυνάμεις ἀνάλογα μὲ τό πού ἀσκοῦνται κατατάσσονται στίς:

- ἐπιφανειακές δυνάμεις, πού ἐνεργοῦν ἐπάνω στίς ἐπιφάνειες τῶν σωμάτων ἀπευθείας ἢ μὲ τή μεσολάβηση ἑνός ὑλικοῦ — π.χ. οἱ πιέσεις ἐφαπτόμενων σωμάτων — καί στίς
- μαζικές δυνάμεις, πού ἀσκοῦνται ἐξ ἀποστάσεως, δηλαδή χωρὶς τήν παρεμβολή ὑλικοῦ μέσου — π.χ. οἱ δυνάμεις βαρύτητας— καί πού κατανέμονται σέ ὁλόκληρη τή μάζα τοῦ σώματος.

Γιὰ τήν ἀπλούστευση τῶν προβλημάτων δεχόμεστε τήν ὑπαρξή καί μοναχικῶν δυνάμεων πού ἐνεργοῦν συγκεντρωμένα σ' ἓνα ὑλικό σημεῖο.

Μιά ἄλλη κατάταξη τῶν δυνάμεων, πού ἀπορρέει ἀπό τήν προέλευσή τους, περιλαμβάνει δύο κατηγορίες:

- ἐπιθεβλημένες ἢ φυσικές δυνάμεις, πού προσάγονται σάν γνωστά ἀπό πρὶν μεγέθη, π.χ. τά βάρη καί ἡ ὑδροστατική πίεση,
- ἀντιδράσεις ἢ γεωμετρικές δυνάμεις, πού ἀναπτύσσονται στοὺς συνδέσμους. Αὐτές δέν εἶναι γνωστές ἀπό πρὶν, γιατί ἐξαρτῶνται ἀπό τίς ἐπιθεβλημένες δυνάμεις.

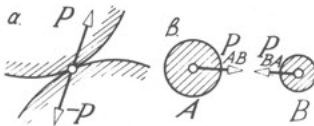
Οἱ ἐπιθεβλημένες δυνάμεις λέγονται στή στατική καί φορτία ἀπό αὐτά συγκροτεῖται ἡ φόρτιση τοῦ φορέα.

Ὅπως εἶναι γνωστό οἱ δυνάμεις ὑπακούουν στήν

*ἀρχή τῆς ἀλληλεπιδράσεως*

ἢ ἀρχή τῆς δράσεως καί ἀντιδράσεως πού ἀναφέρεται ὡς τρίτος νόμος τοῦ ΝΕΥΤΩΝΑ.\* Σύμφωνα μὲ αὐτή ὅλες οἱ δυνάμεις — ἀλλά καί τά ζεύγη δυνάμεων, ἐπομένως καί οἱ ροπές — ἀσκοῦνται μεταξύ τῶν σωμάτων

ἀμφίπλευρα, δηλαδή ἐμφανίζονται πάντοτε ὡς διπλές δυνάμεις. Ἡ μία  $P_{AB}$  ἐνεργεῖ στό σύστημα  $A$  πού ὑφίσταται τή δράση καί ἡ ἄλλη  $P_{BA}$ , ἴση, ἀντίθετη καί συνευθειακή μὲ τήν πρώτη, ἐπάνω στό σύστημα  $B$  πού ἀσκεῖ τή δράση. Ἐν λοιπόν



Σχ. 1. Ἡ ἀρχή τῆς ἀλληλεπιδράσεως τῶν δυνάμεων.

\* Πρβ. Β' Ἐκδοση, 1. τομ. σ. 10-11.

πρόκειται για έπιφανειακή δύναμη, ή όποια όπως είπαμε ένεργεί μέ έπαφή, τότε ή αντίδραση πρέπει νά αναζητηθεί στό σημείο πού άσκειται ή δράση (σχ. 1α). Άντίθετα, στην περίπτωση τής μαζικής δυνάμεως, πού άσκειται έξ άποστάσεως, τό σημείο έφαρμογής τής αντιδράσεως θά βρίσκεται μακρυνά από τό σημείο έφαρμογής τής δράσεως και μέσα στό σωμα πού άσκει τήν τελευταία (σχ. 1β).

Τό γεγονός ότι οί δυνάμεις άσκοϋνται άμφίπλευρα μεταξύ τών σωμάτων επιβάλλει τό διαχωρισμό τους σε:

- *έσωτερικές* δυνάμεις, πού άσκοϋνται μεταξύ σωμάτων τά όποια άνήκουν στό ίδιο μηχανικό σύστημα, και σε
- *έξωτερικές* δυνάμεις, πού άσκοϋνται μεταξύ σωμάτων δύο διαφορετικων μηχανικων συστημάτων.

Η διάκριση λοιπόν γίνεται *αναφορικά προς τό θεωρούμενο σύστημα* και μόνον έτσι μία δύναμη χαρακτηρίζεται σαν έσωτερική ή έξωτερική. Πράγματι, διευρύνοντας τό σύστημα του  $A$  και περιλαμβάνοντας σ' αυτό και τό σύστημα  $B$  πού άσκει τή δράση, ή  $P_{AB}$  μαζί μέ τήν  $P_{BA}$  γίνεται μία *διπλή έσωτερική δύναμη*. Και αντίστροφα αυτή ξαναγίνεται *άπλή έξωτερική δύναμη*, αν άποκλείσουμε από τό θεωρούμενο σύστημα εκείνο τό τμήμα του  $B$  πού άσκει τή δράση\*. Συμπερασματικά μπορούμε νά πούμε ότι οί *έξωτερικές* είναι πάντοτε *άπλές* δυνάμεις ενώ οί *έσωτερικές* *διπλές*, δηλαδή έμφανίζουν δύο ίσες, αντίθετες και συνευθειακές συνιστώσες.

Τά είδη τών προβλημάτων τής στατικής τών φορέων είναι πολυποίκιλα και δέν περιορίζονται μόνο στην κατάσταση ίσορροπίας, πού αρχικά ήταν ή άποκλειστική περιοχή τής στατικής τών δομικών κατασκευών. Σήμερα επεκτείνονται και στή θεώρηση τής δυναμικής συμπεριφοράς τών φορέων. Άπό τήν άλλη πλευρά επιχειρείται ή όσο τό δυνατό πίο πιστή άπόδοση τής συμπεριφοράς του ύλικου τής κατασκευής, πού είναι καθοριστική και για τή συμπεριφορά όλόκληρου του φορέα. Η επιδίωξη τής θεωρήσεως ενός κρατυνόμενου ύλικου, όπως είναι στην πραγματικότητα πολλά από τά ύλικά, προσκρούει σε πολλές θεωρητικές και πρακτικές δυσκολίες και γι' αυτό στίς περισσότερες περιπτώσεις άρκούμαστε στην ύπόθεση τών έλαστοπλαστικων ύλικων.

\* Πρβ. Β' Έκδοση, 1. τομ. σ. 105.



Παράλληλα πρέπει νά διακρίνουμε μεταξύ ὑλικῶν πού μποροῦν νά ὑποστοῦν μεγάλες παραμορφώσεις καί ἐκείνων πού ὑφίστανται μόνο πολύ μικρές *παραμορφώσεις*, πρακτικά τῆς τάξεως τοῦ *ἀπειροστοῦ*. Ἄλλὰ καί ὁ τελευταῖος περιορισμός δέν ἀποκλείει οἱ μετακινήσεις, π.χ. οἱ μετατοπίσεις τῶν σημείων τοῦ φορέα, νά εἶναι σχετικά μεγάλες. Γιά τό λόγο αὐτό καί τό εἶδος τοῦ φορέα, ἡ γεωμετρία του ὅπως λέμε, συμβάλλει στή διάκριση τῶν προβλημάτων μέ μεγάλες μετακινήσεις ἀπό ἐκεῖνα μέ *ἀπειροστές μετακινήσεις*.

Γιά τήν ἀντιμετώπιση αὐτῆς τῆς πολύπλοκης πραγματικότητας πρέπει βέβαια νά διαθέτουμε ἕνα μαθηματικό λογισμό εὐέλικτο καί συνοπτικό ἀπό ἀπόψεως συμβολισμῶν. Ἀπό τήν ἄλλη πλευρά καί ἡ ἀριθμητική ἀξιοποίηση ἀναλυτικῶν λύσεων τέτοιων προβλημάτων δέν μπορεῖ παρά νά προϋποθέτει τήν ὑπαρξη μιᾶς αὐτόματης ὑπολογιστικῆς μηχανῆς. Οἱ δύο αὐτές προϋποθέσεις ἱκανοποιοῦνται μέ τήν χρησιμοποίηση τῶν *μητρῶων* σέ συνδυασμό μέ τόν *ἠλεκτρονικό ὑπολογιστή*. Πράγματι ἡ *μητρωική στατική*, πού προορίζεται γιά τόν ἠλεκτρονικό ὑπολογιστή, εἶναι ἐκείνη πού σήμερα ἐπιτρέπει τήν ἀντιμετώπιση ἀκόμη καί τῶν πιό σύνθετων προβλημάτων.

Χρονικά ὁμως προηγήθηκε ἡ *κλασική στατική*. Αὐτή, ἔχοντας σάν μόνο μέσο ἐκτελέσεως τῶν ὑπολογισμῶν ἀρχικά τίς γραφικές μεθόδους καί ἀργότερα τήν παλιά ἀριθμομηχανή, προοριζόταν κυρίως γιά τήν ἀντιμετώπιση τοῦ πιό ἀπλοποιημένου προβλήματος τοῦ φορέα, δηλαδή τοῦ *ελαστικοῦ φορέα μέ ἀπειροστές μετακινήσεις καί μέ στατική φόρτιση*. Τά προβλήματα τῆς δυναμικῆς ἐπιπονήσεως, τῶν μεγάλων μετακινήσεων καί τῆς πλαστικότητος βρισκόταν στίς περιφερειακές καί ἔκτακτες ἀρμοδιότητές της. Ἡ ἔλλειψη κάθε αὐτοματισμοῦ καί ὡς ἐκ τούτου ἡ ἀνάγκη τῆς συνεχοῦς παρεμβάσεως τοῦ στατικοῦ στοῦς ὑπολογισμούς ἔχει ὁμως καί εὐεργετικές συνέπειες, διότι ἡ κλασική στατική συνετέλεσε στήν ἀνάπτυξη μιᾶς τέτοιας μεθοδολογίας πού ἀπό τή μία πλευρά καλλιιεργεῖ ἕνα εἶδος στατικοῦ αἰσθητηρίου καί ἀπό τήν ἄλλη ἀφήνει πρωταγωνιστή τῶν διαδραματιζόμενων τόν στατικό. Πρόκειται γιά δύο προσόντα τῆς ἐποπτικῆς στατικῆς ἀκλόνητης ἀξίας, πού δικαιολογοῦν τήν ὑπαρξή της καί σήμερα, τουλάχιστον σάν τήν πιό ἀσφαλῆ πρόσβαση γιά τήν *ἀφηρημενοποιημένη* μητρωική στατική.

Ἀκολουθώντας σ' αὐτό τόν τόμο τόν δρόμο τῆς κλασικῆς στατικῆς, πρέπει νά τονίσουμε ἀμέσως ὅτι ἡ *γραμμική της θεωρία* βασίζεται στίς δύο ἀπλουστευτικές ὑποθέσεις ὅτι:

- οἱ παραμορφώσεις ἀλλά καί οἱ μετακινήσεις εἶναι ἀπειροστές καί ὅτι

— τὰ ὑλικά ἀκολουθοῦν τὸ γραμμικὸ νόμο ἐλαστικότητας, δηλαδή οἱ παραμορφώσεις εἶναι ἀνάλογες πρὸς τὶς τάσεις.

Οἱ δύο αὐτές ὑποθέσεις ἐξασφαλίζουν τὴν ἰσχύ τῆς  
*ἀρχῆς τῆς ἐπαλληλίας.*

σύμφωνα μὲ τὴν ὁποία τὰ ἀποτελέσματα διάφορων αἰτίων ἀθροίζονται, ὅταν τὰ αἷτια αὐτὰ συνυπάρχουν. Ἡ ἀρχὴ αὕτῃ ἰσχύει γιὰ ὅλα τὰ μεγέθη ἐντάσεως, παραμορφώσεως καὶ μετακινήσεως τοῦ φορέα, γιατί οἱ καθοριστικὲς τους συνθήκες εἶναι ὅλες γραμμικές.\* Πράγματι, αὐτές εἶναι τριῶν εἰδῶν:

- οἱ στατικὲς συνθήκες,
- οἱ κινηματικὲς συνθήκες καὶ
- οἱ ἐλαστικὲς συνθήκες,

καὶ ἔχουν γραμμικὴ μορφή, οἱ δύο πρῶτες ἐξαιτίας τῆς πρώτης ὑποθέσεως καὶ ἡ τρίτη ἐξαιτίας τῆς δεύτερης ὑποθέσεως.

Ἐνας ἄλλος παράγοντας πού καθορίζει τὸ μαθηματικὸ πρόβλημα εἶναι καὶ ἡ μορφή τῶν φορέων. Γενικά αὐτοὶ εἶναι τριδιάστατοι καὶ ὑφίστανται στό τριδιάστατο χῶρο. Ὑπάρχουν ὁμως καὶ οἱ *ἐπιφανειακοὶ φορεῖς*, τῶν ὁποίων ἡ μία διάσταση —τὸ πάχος— εἶναι ἐλάχιστη σὲ σύγκριση μὲ δύο ἄλλες, πού ἀναπτύσσονται κατὰ τὴν ἔκταση τῆς καμπύλης μέσης ἐπιφάνειας τοῦ φορέα (κελύφη). Ἐὰν ἡ τελευταία εἶναι ἐπίπεδη, ὁ φορέας ὀνομάζεται πλάκα ἢ δίσκος, ἀνάλογα μὲ τὸ ἂν ἡ φόρτιση ἐνεργεῖ κάθετα στό ἐπίπεδο ἢ μέσα σ' αὐτό. Εἰδικά ὁ *δίσκος* εἶναι ἓνα μαθηματικὸ ὁμοίωμα πού ὑφίσταται στό διδιάστατο χῶρο τοῦ ἐπιπέδου του καὶ ὅλα — ἔνταση, παραμόρφωση καὶ μετακίνηση— *διαδραματίζονται ἐπάνω στό μέσο ἐπίπεδό του*. Στὴν πραγματικότητα θέβαια κάθε φορέας, ἀκόμα καὶ ὁ δίσκος, ὑφίσταται στόν τριδιάστατο φυσικὸ χῶρο καὶ γι' αὐτὸ πρέπει ἡ τελικὴ του θεώρηση νά γίνεται ἀπὸ τὴ σκοπιὰ αὕτῃ. Ἡ αὐτοτελής του ὁμως ὑπαρξὴ δικαιολογεῖται, γιατί ἀφενὸς στή μεγάλη πλειοψηφία τους οἱ κατασκευές μπορεῖ νά θεωρηθοῦν σάν συγκροτήματα ἐπιπέδων φορέων καὶ ἀφετέρου τὸ διδιάστατο πρόβλημα εἶναι πολὺ πιὸ ἀπλό ἀπὸ τὸ τριδιάστατο.

Φορεῖς ὁμως μὲ ὀλόσωμη διδιάστατη ὑπόσταση ὁδηγοῦν σὲ διαφορικὲς καὶ ὀλοκληρωματικὲς συνθήκες. Γι' αὐτὸ ἓνα ἀπὸ τὰ πιὸ μεγάλα πρακτικὰ ἐπιτεύγματα τῆς κλασικῆς στατικῆς μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ἀκριβῶς τὸ γεγονός ὅτι διαχώρισε τὴν κατηγορία τῶν *γραμμικῶν φορέων* καὶ ἀνέπτυξε γι' αὕτῃ μιὰ ἰδιαίτερη μεθοδολογία, ἡ ὁποία τελικά

\* Μὲ τὴν ὑπόψη διατύπωση δὲν ἰσχύει π.χ. γιὰ τὸ ἔργο παραμορφώσεως, γιατί ἡ ἔκφρασή του εἶναι δευτεροβάθμια.

βασίζεται μόνο σε άπλες *αλγεβρικές συνθήκες*. Ο γραμμικός φορέας αποτελεί ένα μαθηματικό όμοιομα που αναπτύσσεται κατά μήκος του άξονά του δηλαδή μιᾶς γραμμῆς, εὐθείας, καμπύλης, πολυγωνικῆς, ἀνοικτῆς ἢ καί κλειστῆς. Ἡ τριδιάστατή του φυσική ὑπόσταση ἐξασφαλίζεται μέ τίς *διατομές* — μικρῶν διαστάσεων σε σύγκριση μέ τό μήκος τοῦ φορέα — πού εἶναι κάθετες ἐπάνω στόν ἄξονά του. Ο γραμμικός φορέας μπορεί νά εἶναι ἐπίπεδος ἢ τριδιάστατος, ἀνάλογα μέ τή μορφή τοῦ ἄξονά του. Στήν πρώτη περίπτωση ὀνομάζεται πολλές φορές καί *δίσκος* ἀλλά μέ τήν ἔννοια πάντοτε τῆς συνθέσεώς του ἀπό γραμμικά στοιχεῖα.

Ἡ μελέτη μας θά περιοριστεῖ μόνο στούς *ἐπίπεδους γραμμικούς φορεῖς* γιά τούς λόγους πού ἀναφέραμε λίγο πιό πάνω ἄλλα καί γιά δύο πρόσθετους ἄλλους. Πρῶτα γιὰτί ἡ μετάβαση ἀπό τούς ἐπίπεδους στούς τριδιάστατους γραμμικούς φορεῖς δέν παρουσιάζει καμμιά δυσκολία καί δεύτερο γιὰτί ἡ μελέτη τῶν τελευταίων γίνεται πολύ πιό εὐκόλα μέ τά μέσα τῆς μητρικῆς στατικῆς.

## 1.2. Ἡ κίνηση καί ἡ στήριξη τοῦ δίσκου.

Ἡ ὑπόθεση ὅτι οἱ παραμορφώσεις εἶναι ἀπειροστές ἐπιτρέπει νά δεχθοῦμε — γιά μιά κατηγορία προβλημάτων — τό δίσκο ὡς τελείως ἀπαραμόρφωτο. Ἐνας τέτοιος δίσκος λέγεται *ἀπολύτως στερεός* καί χαρακτηρίζεται ἀπό τό ὅ,τι κάτω ἀπό ὅποιαδήποτε ἐπιρροή τά σημεῖα του διατηροῦν ἀναλλοίωτες τίς ἀμοιβαίες ἀποστάσεις τους, ἀκόμη κι ἂν μετακινοῦνται στό χῶρο.

Στή στατική οἱ φορεῖς ἐξετάζονται θέβαια στήν κατάσταση τῆς ἠρεμίας, γιά νά ἀποκλειστεῖ ὁμως τό ἐνδεχόμενο τῆς μετακινήσεώς τους μελετῶνται πρῶτα οἱ δυνατότητες τῆς κινήσεως. Ἡ μετακίνηση ἑνός τελείως *ἐλεύθερου* δίσκου ἀπό μιά θέση *I* σε μιά ἄλλη *II* (σχ. 2α) εἶναι γενικά μιά *στροφή* περί ἑνα σταθερό σημεῖο  $\Omega$ , πού λέγεται *ἀπόλυτος πόλος στροφῆς*. Αὐτός εἶναι τό σημεῖο τομῆς τῶν μεσοκαθέτων τῶν εὐθύγραμμων τμημάτων  $AA'$  καί  $BB'$  πού συνδέουν τήν ἀρχική θέση τῶν σημείων  $A, B$  μέ τήν τελική τους θέση  $A', B'$ . Ἐπομένως ἀπό τίς σχέσεις  $\Omega A = \Omega A', \Omega B = \Omega B'$  καί τήν  $AB = A'B'$ , πού ἐκφράζει τό ἀναλλοίωτο τῆς ἀποστάσεως τῶν σημείων  $A$  καί  $B$ , προκύπτει ὅτι καί οἱ γωνίες  $A\Omega B$  καί  $A'\Omega B'$  εἶναι ἴσες μεταξύ τους. Ἄν καί στίς δύο