ΓΕΩΡΓΙΟΥ Μ. ΝΙΤΣΙΩΤΑ
Καθηγητή Πανεπιστημίου

ΕΛΑΣΤΟΣΤΑΤΙΚΗ

Γραμμική Θεωρία

ΠΡΩΤΟΣ ΤΟΜΟΣ

Παραμόρφωση – Ἔνταση – Τὸ ἐλαστικὸ σῶμα

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ

Πρόλογος

Τό χάσμα πού χώριζε παλαιότερα τά ὡραῖα μαθηματικά ἐπιτεύγματα τῆς θεωρίας ἐλαστικότητας ἀπό τήν ἀνελέητη πραγματικότητα, πού ὑποχρέωνε τόν στατικό νά ἀντιμετωπίζει, ἔστω καί ἐκ τῶν ἐνόντων, μέ ἁπλουστευτικές λύσεις τά προβλήματα τῶν κατασκευῶν, ἔπαυσε νά ὑπάρχει. Ὁ ἠλεκτρονικός ὑπολογιστής ἀπό τή μιά καί ἡ μέθοδος τῶν πεπερασμένων στοιχείων ἀπό τήν ἄλλη παρέχουν σήμερα τή δυνατότητα μιᾶς ἐξαντλητικῆς ἀξιοποιήσεως τῶν θεωρητικῶν κατακτήσεων. Ἡ ἐξέλιξη αὐτή συνεπάγεται βέβαια μιά σημαντικά αὐξημένη «μαθηματικοποίηση» τῆς στατικῆς. Πράγματι, οἱ ὑπολογισμοί τῶν πολυσύνθετων κατασκευῶν, πού ἀναφέρονται σέ θέματα τῆς γραμμικῆς θεωρίας ἐλαστικότητας ἤ τῆς εὐστάθειας ἤ τῆς πλαστικότητας ἤ τῆς δυναμικῆς συμπεριφορᾶς, ἀπαιτοῦν ἀπό τόν ὑπεύθυνο στατικό μιά βαθύτερη γνώση τῶν ἀντίστοιχων θεωρητικῶν προβλημάτων. Ἡ ἀπαίτηση αὐτή καί παράλληλα ἡ ἀνάγκη μιᾶς αὐτοδύναμης ὑπάρξεώς του ὑποχρεώνουν τόν στατικό — καί ἴσως τόν παρασύρουν — σέ θεωρητικές αὐτενέργειες, πού ἀρχίζουν τουλάχιστον μέ τήν ἀνάπτυξη μιᾶς μεθοδολογίας προσανατολισμένης στίς ἀντιλήψεις του. Τό ἴδιο ἄλλωστε γινόταν καί στό παρελθόν, ὅπως ἀποδεικνύεται μέ τήν πλήρη αὐτοτέλεια πού εἶχε πάνω ἀπό ἑκατό χρόνια ἡ στατική σέ σχέση μέ τή μηχανική.

Μέ τίς πιό πάνω σκέψεις καί μέ τήν πεποίθηση γιά τήν ἀνάγκη τῆς ὑπάρξεως ἑνός εἰσαγωγικοῦ θεωρητικοῦ συγγράμματος, γραμμένου μέ τίς ἀντιλήψεις ἑνός στατικοῦ, τόλμησα νά ὑποδυθῶ στήν προσπάθεια τῆς συγγραφῆς αὐτοῦ τοῦ βιβλίου. Σάν κύριο στόχο ἔθεσα τήν ἐξυπηρέτηση τῶν διδακτικῶν ἀναγκῶν ἐκείνου τοῦ τεχνικοῦ, πού σάν φοιτητής ἤ νέος ἐρευνητής, ἐπιθυμεῖ νά ἐπεκτείνει τίς βασικές του γνώσεις σέ πιό ἀπαιτητικές περιοχές τῆς θεωρίας καί τοῦ ὑπολογισμοῦ τῶν μή γραμμικῶν φορέων.

Τό πρῶτο πού ἔπρεπε νά ἀποφασιστεῖ ἦταν τό τί μαθηματικές γνώσεις θά προϋπέθετα, ὥστε οὔτε νά δυσχεραίνεται ἡ μελέτη τοῦ βιβλίου οὔτε ὅμως νά ὑποβιβάζεται ἡ στάθμη του. Τελικά ἀρκέστηκα στίς βασικές γνώσεις ἀπό τά ἀνώτερα μαθηματικά πού διδάσκονται στά Πολυτεχνεῖα ἀλλά καί θεώρησα σκόπιμο νά προτάξω τό κεφάλαιο μέ τόν τίτλο «τό μαθηματικό ὑπόβαθρο», στό ὁποῖο ἀναπτύσσονται, ἁπλά καί χωρίς ἀξιώσεις μαθηματικῆς ἀκριβολογίας, τά πιό βασικά ἀπό τούς τανυστές σέ καρτεσιανές συντεταγμένες. Ἀργότερα, γίνεται ἡ ἐπέκταση καί σέ καμπυλόγραμμες συντεταγμένες, σύντομα μέν ἀλλά σέ ἔκταση ἀρκετή γιά τήν κατανόηση μιᾶς σύγχρονης θεωρίας τῶν κελυφῶν. Ὅπως ἀπαιτεῖται γιά ἕνα τεχνικό σύγγραμμα, οἱ ἐξισώσεις εἶναι γραμμένες κυρίως μέ τόν κοινό ἀναλυτικό τρόπο ἀλλά καί πολύ συχνά μέ τό μητρωικό τρόπο, ὅπως ἐπίσης καί μέ τόν τανυστικό. Ὁ τελευταῖος ταιριάζει περισσότερο γιά τήν εὕρεση τῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων, ἐνῶ ὁ μητρωικός γιά τή διατύπωση τῶν ἐργικῶν συνθηκῶν. Ἔτσι παρέχεται καί ἡ εὐχέρεια τῆς μελέτης συγγραμμάτων ἀνωτέρας βαθμίδας, πού χρησιμοποιοῦν ἄλλα τόν ἕνα καί ἄλλα τόν ἄλλο τρόπο συμβολισμοῦ.

Λόγω τοῦ διδακτικοῦ χαρακτήρα τοῦ βιβλίου, ἡ ἀναφορά μέ βιβλιογραφικές ὑποσημειώσεις σέ μονογραφίες γίνεται κυρίως ἐκεῖ ὅπου ἡ ὕλη προωθεῖται σέ σύγχρονες ἐρευνητικές περιοχές. Ἡ ἀναφορά αὐτή περιορίζεται στά πιό ἀπαραίτητα, τίς αὐξημένες δέ ἀπαιτήσεις μποροῦν νά καλύψουν τά βασικά ξένα συγγράμματα πού δίνονται στό τέλος κάθε μέρους τοῦ βιβλίου. Ἀπό τήν ἄλλη πλευρά ἡ ἔλλειψη χώρου δέν ἐπέτρεψε τήν παράθεση λεπτομερῶς ἐπεξεργασμένων παραδειγμάτων. Τό κενό αὐτό συμπληρώνεται κάπως μέ τίς ὀλιγάριθμες ἀσκήσεις πού ὑπάρχουν στό τέλος κάθε ἄρθρου σχεδόν. Πάντως προορισμός τους εἶναι κυρίως ἡ προαγωγή μιᾶς ἐνεργητικῆς μελέτης τοῦ συγγράμματος.

Πρακτικοί λόγοι ἐπέβαλαν τήν ἐκτύπωση τοῦ βιβλίου σέ δύο τόμους, ὁ καθένας ἀπό τούς ὁποίους περιλαμβάνει δύο μέρη, διαιρημένα πάλι σέ τέσσερα κεφάλαια τό καθένα τους.

Στό πρῶτο κεφάλαιο ἐξετάζονται οἱ βασικές ἰδιότητες τῶν τανυστῶν καί ἰδιαίτερα τά προβλήματα τῶν κύριων ἀξόνων. Τά τρία ἑπόμενα κεφάλαια εἶναι ἀφιερωμένα στίς γενικές ἰδιότητες ἀντίστοιχα τῆς παραμορφώσεως, τῆς ἐντάσεως καί τοῦ ἔργου τοῦ σώματος, ἀνεξάρτητα ἀπό τό πρόβλημα τοῦ προσδιορισμοῦ τους. Ἐδῶ καταβλήθηκε μιά προσπάθεια γιά μιά ἄμεμπτη ἀνάλυση τῶν ἐννοιῶν καί μιά ἐξαντλητική διερεύνηση τοῦ θέματος. Γι' αὐτό, παρόλο πού τό ἀντικείμενο εἶναι ἡ γραμμική θεωρία, ἡ μελέτη ξεκινᾶ καί στά τρία αὐτά κεφάλαια κάθε φορά πολύ πιό γενικά, ὥστε νά ἀποκαλυφθοῦν τελείως οἱ ἐξιδανικεύσεις τῆς γραμμικῆς θεωρίας.

Τά τέσσερα ἑπόμενα κεφάλαια, δηλαδή τό δεύτερο μέρος ἀφορᾶ τόν προσδιορισμό τῆς καταστάσεως τοῦ τριδιάστατου ἐλαστικοῦ σώματος. Συγκεκριμένα, στό πέμπτο κεφάλαιο ἐξετάζεται γενικά ἡ συμπεριφορά τοῦ ἀνισότροπου σώματος καί διατυπώνονται οἱ διάφορες προτάσεις πού τήν διέπουν, ἀνεξάρτητα ἀπό τό νόμο ἐλαστικότητας· αὐτός ἀναλύεται στό τέλος τοῦ κεφαλαίου. Τό ἕκτο κεφάλαιο περιέχει τίς διαφορικές ἐξισώσεις τῆς κλασικῆς θεωρίας ἐλαστικότητας, πρῶτα τοῦ ἰσότροπου καί στό τέλος τοῦ ἀνισότροπου σώματος. Εἰδικά οἱ σημειακές φορτίσεις ἐξετάζονται στό ἕβδομο κεφάλαιο, ὅπου καί γίνεται ἡ σύνδεση μέ τά προβλήματα τῶν συναρτήσεων ἐπιρροῆς τῶν δοκῶν. Κατά παρέκκλιση ἀπό τόν τίτλο τοῦ συγγράμματος, τό ὄγδοο κεφάλαιο ἔχει ἀφιερωθεῖ σ' αὐτά πού συμβαίνουν μετά τήν ὑπέρβαση τοῦ ὁρίου ἐλαστικότητας. Αὐτό κρίθηκε σκόπιμο, ἀφενός γιά νά χαραχθοῦν σαφῶς τά σύνορα τῆς περιοχῆς πού ἰσχύει ἡ θεωρία ἐλαστικότητας, ἀφετέρου γιατί οἱ σχετικές γνώσεις πού ἀπαιτοῦνται γιά τόν πολιτικό μηχανικό μποροῦν νά ἀποκτηθοῦν σ' αὐτό τό σημεῖο μέ τόν ἐλάχιστο κόπο. Σάν κεφάλαιο, ἐνημερωτικοῦ μᾶλλον χαρακτήρα, ἀσφαλῶς θά παρουσιάζει ἐλλείψεις, αὐτές ὅμως μποροῦν νά καλυφθοῦν μέ τή μελέτη τῶν συγγραμμάτων τῆς εἰδικῆς βιβλιογραφίας πού τό συνοδεύει.

Στό τρίτο μέρος, μέ τό ὁποῖο ἀρχίζει ὁ δεύτερος τόμος, ἐξετάζονται οἱ ἐπιφανειακοί φορεῖς ἀπό γενικῆς σκοπιᾶς, δηλαδή μέ στόχο τήν εὕρεση καί τόν ἔλεγχο τῶν γενικῶν ἐξισώσεων πού διέπουν τά προβλήματά τους. Ἐδῶ ἡ πρακτική σκοπιμότητα ἐπιβάλλει τή χρησιμοποίηση διαφορετικῶν μαθηματικῶν μέσων στά διάφορα κεφάλαια. Ἔτσι οἱ δίσκοι καί οἱ πλάκες, στό ἔνατο καί δέκατο κεφάλαιο, ἀντιμετωπίζονται μέ τά πιό ἁπλά μέσα καί οἱ ἐξισώσεις τους δίνονται γραμμένες ἀναλυτικά ἤ μητρωικά, σέ καρτεσιανές ἤ καί σέ πολικές συντεταγμένες. Μιά γενική ὅμως θεωρία τῶν κελυφῶν δέν μπορεῖ σήμερα νά δοθεῖ ἀλλιῶς παρά μέ τά μέσα τῆς τανυστικῆς ἀναλύσεως. Οἱ αὐξημένες προσπάθειες πού ἀπαιτεῖ αὐτή — νομίζω δέ ὅτι αὐτές δέν εἶναι ὑπερβολικές — ἐξαργυρώνονται ἀργότερα πλουσιοπάροχα.

Μέ γνώμονα τήν προηγούμενη σκέψη, ἡ ὕλη γιά τά κελύφη διαρθρώθηκε σέ δύο κεφάλαια, ἀπό τά ὁποῖα τό ἑνδέκατο περιλαμβάνει στήν ἀρχή τά πιό ἀπαραίτητα ἀπό τήν τανυστική ἀνάλυση. Στή συνέχεια ἐξετάζονται κυρίως τά προβλήματα τῆς παραμορφώσεως καί τῆς ἐντάσεως μιᾶς ὑλικῆς ἐπιφάνειας καί ἡ συσχέτιση τῶν δύο αὐτῶν φαινομένων γίνεται προσωρινά μόνο γιά τήν κατάσταση μεμβράνης. Αὐτή μελετᾶται κάπως λεπτομερῶς, κυρίως ὅμως γιά διδακτικούς λόγους. Στό ἑπόμενο, δηλαδή στό δωδέκατο κεφάλαιο, μελετᾶται ἡ κάμψη τῶν κελυφῶν, μέ ἀφετηρία μιά πολύ γενική θεώρηση τοῦ προβλήματος καί μέ κατάληξη τίς κλασικές διαφορικές ἐξισώσεις τῶν κυλινδρικῶν καί τῶν ἐκ περιστροφῆς κελυφῶν. Πρόκειται γιά μιά προσπάθεια προωθήσεως στά ἐπιτεύγματα τῆς τελευταίας εἰκοσαετίας στόν τομέα αὐτόν, ὅπως ἄλλωστε φαίνεται καί ἀπό τή βιβλιογραφία πού δίνεται.

Τό τέταρτο μέρος, μέ τό γενικό τίτλο «μέθοδοι ἐπιλύσεως», οὐσιαστικά περιορίζεται μόνο στίς δύο πιό βασικές γιά τόν τεχνικό, δηλαδή στήν ἀναλυτική μέ τή βοήθεια τῶν σειρῶν Fourier καί στή μέθοδο τῶν πεπερασμένων στοιχείων. Ἡ πρώτη, πού ἀναπτύσσεται στό δεκατοτρίτο κεφάλαιο, ἐφαρμόζεται ἐκλεκτικά γιά ὁρισμένα κλασικά προβλήματα τοῦ δίσκου καί τῆς πλάκας. Μέ τά λίγα ὅμως αὐτά μπορεῖ νά ἐπιτευχθεῖ ἡ ἐξοικείωση τοῦ τεχνικοῦ μέ τήν ὑπόψη μέθοδο, σέ μέτρο πού ἐπαρκεῖ σήμερα γιά τίς ἀνάγκες του.

Τό βάρος τῆς προσπάθειας συγκεντρώθηκε στήν ἄλλη μέθοδο, μέ στόχο ὅμως περισσότερο μιά συστηματική καί κατά τό δυνατό συνοπτική θεωρητική της ἀνάπτυξη, ὥστε φυσιολογικά νά ἐντάσσεται στή γενική θεωρία ἐλαστικότητας, καί ὀλιγότερο μιά ἀνάλυση τῆς τεχνικῆς τῶν ἐφαρμογῶν της. Γιά τό λόγο αὐτόν ἀφιερώθηκε τό δεκατοτέταρτο κεφάλαιο στό ἐντελῶς θεωρητικό θέμα τῆς στασιμοποιήσεως τῶν συναρτησιακῶν, ὥστε νά δημιουργηθοῦν εὐρύτερες βάσεις ἀναπτύξεως ὅλων τῶν παραλλαγῶν τῆς μεθόδου τῶν πεπερασμένων στοιχείων. Ἡ ἀνάπτυξη αὐτῆς γίνεται στό δεκατοπέμπτο κεφάλαιο μέ τήν πιό γενική διατύπωση, σέ συσχετισμό πρῶτα μέ τήν ἀρχή τοῦ ἐλάχιστου δυναμικοῦ. Στό τελευταῖο κεφάλαιο, ἀφοῦ γίνει ἡ ἐξειδίκευσή της γιά τούς δίσκους, τίς πλάκες, τά σώματα ἐκ περιστροφῆς καί γιά τά κελύφη, ἡ ὑπόψη μέθοδος συνδυάζεται καί μέ τήν ἀρχή τοῦ συμπληρωματικοῦ δυναμικοῦ. Κατόπιν παρουσιάζεται αὐτή σύντομα ὡς ὑβριδιακή καί ὡς μικτή μέθοδος.

Φθάνοντας στό τέλος μιᾶς πολυετοῦς προσπάθειας, αἰσθάνομαι βαθειά τήν ἀνάγκη νά εὐχαριστήσω θερμά ὅλους ἐκείνους πού μέ βοήθησαν στήν πραγμάτωση αὐτῆς τῆς ἐκδόσεως. Οἱ γνωστές δυσκολίες ἐκδόσεως ἑνός εἰδικοῦ συγγράμματος, μαθηματικοῦ χαρακτήρα, δέν θά ἦταν δυνατό νά ὑπερνικηθοῦν χωρίς τή συνεργασία τοῦ πεπειραμένου προσωπικοῦ τῆς Ἕδρας μου. Ἔτσι ἀπό τά πρῶτα βήματα τῆς συγγραφῆς μοῦ συμπαραστάθηκε ὁ ἐκλεκτός συνεργάτης μου καί ἐπιμελητής τῆς ἕδρας, διδάκτορας μηχανικός κ. Ἀστέριος Λιώλιος, μέ τήν κριτική μελέτη τῶν χειρογράφων, τήν ἀναζήτηση τῆς βιβλιογραφίας καί μέ τόν τελικό ἔλεγχο τῶν τύπων τῶν πιό ἀπαιτητικῶν κεφαλαίων. Ἀξιόλογη ἦταν καί ἡ βοήθεια τοῦ πολ. μηχ. καί βοηθοῦ μου κ. Παναγιώτη Παπαδόπουλου, ὁ ὁποῖος ἐπιμελήθηκε τίς διορθώσεις, λεκτικές καί μαθηματικές, ὅλου τοῦ βιβλίου. Σημαντικά ἐπίσης βοήθησε καί ὁ πολ. μηχ. καί βοηθός μου κ. Παναγιώτης Λαζαρίδης, ὅπως καί ἄλλοι ἐκλεκτοί συνεργάτες τῆς ἕδρας μου. Ἀπό τήν ἄλλη πλευρά στόν τεχνικό τομέα μέ βοήθησαν οἱ παρασκευάστριες κ.κ. Β. Μπινίκου καί Ω. Μωϋσίδου, πού μέ πολύ ὑπομονή καί εὐσυνειδησία ἐπιμελήθηκαν τήν καθαρή σχεδίαση τῶν σχημάτων. Ἡ γραμματέας μου κ. Ἀργυρώ Οἰκονόμου δέν συνέβαλε λιγότερο στήν τελική ἐμφάνιση τοῦ τυπωμένου βιβλίου, μέ τήν προσεγμένη δακτυλογράφηση τοῦ κειμένου. Ἀποφασιστικό ὅμως ρόλο γιά τήν ἀρτιότητα τῆς ἐκτυπώσεως ἔπαιξε ἡ τυπογράφος κ. Π. Ζήτη, ἡ ὁποία μέ ἀφάνταστη ὑπομονή καί μέ προσοχή ἐπιμελήθηκε τό τόσο δύσκολο μαθηματικό κείμενο.

Τέλος, αἰσθάνομαι χαρά ἐκφράζοντας τίς εὐχαριστίες μου στόν παλιό μαθητή μου καί νῦν συνάδελφο τακτικό καθηγητή κ. Παναγιώτη Παναγιωτόπουλο γιά τήν εὐγενή καλωσύνη πού εἶχε ἀφενός νά μοῦ προμηθεύσει ἀπό τό ἐξωτερικό τίς μονογραφίες πού χρειάστηκα, ἀφετέρου νά μελετήσει κριτικά τά τρία τελευταῖα κεφάλαια.

Θεσσαλονίκη, Ἀπρίλιος 1978

ΓΕΩΡΓΙΟΣ Μ. ΝΙΤΣΙΩΤΑΣ

Περιεχόμενα τοῦ Πρώτου Τόμου

ΠΡΩΤΟ ΜΕΡΟΣ

ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗ — ΕΝΤΑΣΗ — ΕΡΓΟ

ΔΕΥΤΕΡΟ ΜΕΡΟΣ

ΤΟ ΕΛΑΣΤΙΚΟ ΣΩΜΑ

'Επεξηγηματικό ὑπόμνημα

Οἱ δύο τόμοι τοῦ βιβλίου διαρθρώνονται σέ δεκαέξι κεφάλαια, τά ὁποῖα ὑποδιαιροῦνται σέ ἄρθρα. Οἱ ἀριθμοί καί οἱ τίτλοι εἶναι γραμμένοι στό πάνω μέρος τῶν ζυγῶν σελίδων, γιά τά κεφάλαια, καί τῶν μονῶν σελίδων γιά τά ἄρθρα. Ἡ ἀρίθμηση τῶν ἄρθρων, τῶν ἐξισώσεων καί τῶν σχημάτων εἶναι συνεχής καί ἀνεξάρτητη γιά κάθε κεφάλαιο. Ἡ παραπομπή σέ μιά ἐξίσωση ἤ σ' ἕνα σχῆμα γίνεται μέ τήν ἀναφορά τοῦ ἀριθμοῦ τους, π.χ. ἐξ. (16) ἤ σχ. 21, ἐκτός ἄν ἀνήκουν σέ ἄλλο κεφάλαιο, ὁπότε προτάσσεται, παχύς τυπωμένος, ὁ ἀριθμός τοῦ κεφαλαίου, π.χ. ἐξ. (**8**.16) ἤ σχ. (**8**.21).

Ἡ ἀρίθμηση τῶν ἀσκήσεων γίνεται αὐτοτελῶς γιά κάθε ἄρθρο, ὅσες δέ ἀπό αὐτές σημειώνονται μ' ἕναν ἀστερίσκο ἐμφανίζουν μεγαλύτερες δυσκολίες ἤ ἀπαιτήσεις.

Ἡ βιβλιογραφία πού ἀφορᾶ τό πρῶτο καί δεύτερο μέρος βρίσκεται στό τέλος τοῦ πρώτου τόμου καί φέρει σάν κωδικό στοιχεῖο τό ψηφίο Β πρίν ἀπό τόν ἀριθμό ἀναφορᾶς, π.χ. [Β.16]. Ἡ βιβλιογραφία τοῦ τρίτου καί τέταρτου μέρους ἔχει τά ψηφία Γ καί Δ, ἀντίστοιχα.

Τά ὀρθογώνια μητρῶα καί τά μητρωικά διανύσματα συμβολίζονται μέ παχειά γράμματα, π.χ. **A**, **α**, τά πρῶτα κατά προτίμηση μέ κεφαλαῖα καί τά δεύτερα μέ πεζά. Τά στοιχεῖα τῶν διανυσμάτων στήλης μποροῦν νά γραφοῦν σέ μιά σειρά μέσα στά $\{\ \}$. Τό ἴδιο καί μέ τά στοιχεῖα ἑνός διαγώνιου μητρώου, ἀλλά μέσα στά $\ulcorner\ \lrcorner$.

Γιά τήν παραγώγιση χρησιμοποιοῦνται τά σύμβολα.

$$\frac{df}{dx}\ ,\quad \frac{\partial f}{\partial x}\ ,\quad f_{,x}\ ,\quad \partial_x f\ ,\quad f_{|x}\ .$$

Τό $f_{|x}$ δηλώνει τανυστική παραγώγιση. 'Από τήν ἄλλη πλευρά μέ τά δf καί Δf συμβολίζονται ἀντίστοιχα ἡ παραλλαγή καί ἡ πεπερασμένη μεταβολή τῆς f. Τό Δ συγχρόνως χρησιμοποιεῖται καί ὡς τελεστής τοῦ Laplace.

Τά πολλαπλά ὁλοκληρώματα ἐμφανίζουν μόνο ἕνα ὁλοκλήρωμα, τοῦ ὁποίου ἡ σημασία καθορίζεται μέ τό διαφορετικό dV τοῦ χώρου ἤ τό dF τῆς ἐπιφάνειας:

$$\int \phi\, dV \equiv \int\!\!\int\!\!\int \phi\, dV \quad , \qquad \int \phi\, dF = \int\!\!\int \phi\, dF\ .$$

'Από τό πλῆθος τῶν συμβόλων ξεχωρίζουν καί ἐπαναλαμβάνονται αὐτά πού ἀναφέρονται στίς πιό κάτω κατηγορίες· τῶν ἄλλων ἡ σημασία ἐπεξηγεῖται, ὅπου ἀπαιτεῖται, στό κείμενο.

Παραμόρφωση

e_{ij} , ϵ_x , γ_{xy}	Τανυστής παραμορφώσεως καί φυσικές συνιστῶσες του.
$e_{\alpha\beta}$, $\kappa_{\alpha\beta}$	Τανυστές διατάσεως καί καμπυλώσεως τοῦ κελύφους.
θ	Εἰδική διόγκωση.

$\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\kappa}$, $\boldsymbol{\gamma}$	Διανύσματα παραμορφώσεως, καμπυλώσεως καί ὀλισθήσεως.
	Μετακίνηση
u_i , ω_i	Διανύσματα μετατοπίσεως καί στροφῆς.
$\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\omega}$	Μητρωικά ἤ μή διανύσματα μετατοπίσεως καί στροφῆς.
ω_{ij}	Στροφέας, ἀντισυμμετρικός τανυστής δευτέρας τάξεως.
	Ἔνταση
τ_{ij} , σ_x , τ_{xy}	Τανυστής ἐντάσεως καί φυσικές συνιστῶσες του.
$\boldsymbol{\sigma}$	Μητρωικό διάνυσμα ἐντάσεως.
s_i , $\mathbf{s}$	Τανυστικό καί μητρωικό διάνυσμα τῆς τάσεως μιᾶς τομῆς.
$n_{\alpha\beta}$	Δυνάμεις διατάσεως τοῦ δίσκου.
m_x , m_y , m_{xy}	Ροπές κάμψεως καί συστροφῆς τῆς πλάκας.
q_x , q_y	Τέμνουσες δυνάμεις τῆς πλάκας.
$n^{\alpha\beta}$, $m^{\alpha\beta}$	Τανυστές διατάσεως καί κάμψεως τοῦ κελύφους.
q^{α}	Διάνυσμα διατμήσεως τοῦ κελύφους.

Ὅσα ἀπό τά πιό πάνω μεγέθη εἶναι ἐφοδιασμένα μέ μηδενικό, π.χ. e_{ij}^{0} ἤ $\boldsymbol{\varepsilon}_0$, $\mathbf{u}_0$ δηλώνουν δοσμένες ἀρχικές τιμές. Ἡ ἐπιγραμμή δηλώνει τιμές ἐπάνω στό σύνορο, π.χ. $\bar{\tau}_{ij}$ ἤ $\bar{\mathbf{u}}$, $\bar{\mathbf{u}}_0$.

	Φόρτιση
p_i , $\bar{p}_i$	Τανυστικά διανύσματα μαζικῆς καί συνοριακῆς φορτίσεως.
$\mathbf{p}$, $\bar{\mathbf{p}}$	Μητρωικά διανύσματα μαζικῆς καί συνοριακῆς φορτίσεως.
T	Ἀλλαγή θερμοκρασίας σέ βαθμούς.
	Νόμος ἐλαστικότητας
K_{ijkm} , F_{ijkm}	Τανυστές δυσκαμψίας καί εὐκαμψίας τοῦ ὑλικοῦ.
$\mathbf{E}$	Μητρῶο δυσκαμψίας τοῦ ὑλικοῦ.
E , G	Μέτρο ἐλαστικότητας καί μέτρο ὀλισθήσεως.
ν	Λόγος τοῦ POISSON.
$\mathbf{k}$, $\mathbf{K}$	Μητρῶα δυσκαμψίας τοῦ σώματος.
	Ἔργο
$W_{(e)}$, $W_{(i)}$	Ἔργα τῶν ἐξωτερικῶν καί τῶν ἐσωτερικῶν δυνάμεων.
$\Pi_{(e)}$, $\Pi_{(i)}$	Δυναμικά τῶν ἐξωτερικῶν καί τῶν ἐσωτερικῶν δυνάμεων.
U	Ἐλαστικό δυναμικό ἀνηγμένο στή μονάδα τοῦ στοιχείου.
U^*	Τό συμπληρωματικό δυναμικό τοῦ U.

ΠΡΩΤΟ ΜΕΡΟΣ

ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗ - ΕΝΤΑΣΗ - ΕΡΓΟ

ΠΡΩΤΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΤΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

1.1. Τό ἀντικείμενο τῆς ἔρευνας

Ἡ Μηχανική εἶναι ἡ ἐπιστήμη πού ἐρευνᾶ τά πιό ἁπλά ἀπό τά φυσικά φαινόμενα καί συγκεκριμένα αὐτά πού σχετίζονται μέ τήν ἀλλαγή τῆς θέσεως καί τή μεταβολή τῆς μορφῆς τῶν σωμάτων· δηλαδή ἡ Μηχανική μελετᾶ ὅ,τι ἀφορᾶ τ ή ν κ ί ν η σ η κ α ί τ ή ν π α ρ α μ ό ρ φ ω σ η τῶν σωμάτων. Ἡ μελέτη αὐτή γίνεται μέ βάση τή φυσική κατάσταση τοῦ σώματος κι αὐτό ὁδηγεῖ ἑπομένως στήν ὑποδιαίρεση τῆς μηχανικῆς στούς τρεῖς θεμελιώδεις κλάδους της: τή μηχανική τῶν στερεῶν, τή μηχανική τῶν παραμορφώσίμων σωμάτων καί τή μηχανική τῶν ρευστῶν. Ἡ παραδοχή βέβαια τριῶν μόνο ἐξιδανικευμένων καταστάσεων ἀφήνει κενά· γιά νά καλυφθοῦν τά κενά αὐτά καί νά ἀποκατασταθεῖ ἡ λογική καί πραγματική ἑνότητα διαμορφώθηκε τίς τελευταῖες δεκαετίες ἡ μηχανική τοῦ συνεχοῦς μέσου.

Ὁ κλασικός ὅμως διαχωρισμός τῆς μηχανικῆς ἐξακολουθεῖ νά μᾶς ἐξυπηρετεῖ πολλαπλά, γιατί, περιορίζοντας τό εὖρος τῶν προβλημάτων, διευκολύνει τήν πραγμάτευσή τους σέ βάθος καί μέ τρόπο ἐξονυχιστικό, πράγμα πολύ εὐπρόσδεκτο ἀπό πλευρᾶς ἐφαρμογῶν. Ὅταν μάλιστα ἡ μηχανική τίθεται ἄμεσα στήν ὑπηρεσία τῆς τεχνολογίας, πού δέν ἀρκεῖται στίς ἐξιδανικεύσεις ἀλλά εἶναι ὑποχρεωμένη νά προβλέψει τήν ἐξέλιξη ἑνός φαινομένου σέ ὅλη τήν ἐμπειρική του πολυμέρεια, ἐμφανίζεται ἡ ἀνάγκη μιᾶς τεχνολογικά προσανατολισμένης ἀντιμετωπίσεως τοῦ προβλήματος καί τῆς τοποθετήσεώς του στά πλαίσια τῆς στατικῆς ἤ τῆς κινηματικῆς ἤ τῆς δυναμικῆς. Ἡ ἀνάγκη αὐτή, μαζί καί μέ κάποιους ἱστορικούς λόγους, ὑπαγόρευσε τήν ἀνάπτυξη τῶν διάφορων περιοχῶν τῆς μηχανικῆς σέ αὐτοτελεῖς ἐπιστημονικούς κλάδους τῆς τεχνολογίας, ὅπως π.χ. ἡ ἐφηρμοσμένη στατική, ἡ ἀντοχή τῶν ὑλικῶν, ἡ ὑδραυλική καί ἡ ἀεροδυναμική. Ἀπό αὐτές ἡ πρώτη ἀναπτύχθηκε γιά νά ἐξυπηρετήσει τίς ἀνάγκες τοῦ στατικοῦ μηχανικοῦ καί ἔχει σάν βασικό της στόχο τήν ἀντοχή καί τήν παραμόρφωση τῶν φυσικῶν συμπαγῶν σωμάτων-φορέων, πού χρησιμοποιοῦνται στίς δομικές κατασκευές. Καθοριστική ὅμως γιά τήν ἀντοχή καί τήν παραμόρφωση ἑνός σώματος-φορέα εἶναι ἡ ἐντατική κατάσταση πού ἀναπτύσσεται σ' αὐτό, ὅταν ἐπάνω του ἐνεργοῦν ποικίλα αἴτια, φορτία καί καταναγκασμοί. Ἔτσι σάν κεντρικό πρόβλημα τῆς ἐφηρμοσμένης στατικῆς προβάλλει ἡ ἐντατική κατάσταση, ἀλληλένδετη πάντα μέ τήν παραμόρφωση.

Μέχρι τό πρόσφατο παρελθόν ἡ ἐφηρμοσμένη στατική εἶχε γιά κύριο ἀντικείμενο μελέτης τούς γραμμικούς φορεῖς, καί μόνο κατ' ἐπέκταση περιλάμβανε καί τούς ἐπιφανειακούς φορεῖς. Αὐτό ὀφειλόταν, ἀνάμεσα σ' ἄλλα, καί στό γεγονός ὅτι ἡ μελέτη τῶν πρώτων μπορεῖ νά γίνει μέ πενιχρά σχετικῶς μαθηματικά μέσα ἐνῶ ἡ μελέτη τῶν δεύτερων ἀπαιτεῖ αὐξημένες γνώσεις τῆς μαθηματικῆς θεωρίας ἐλαστικότητας. Ἡ ἐπικράτηση ὅμως τοῦ ἠλεκτρονικοῦ ὑπολογιστῆ σέ συνδυασμό καί μέ τίς ἄλλες τεχνολογικές ἐξελίξεις εἶχε σάν ἀποτέλεσμα μιά σαφή μετατόπιση τῶν ἐνδιαφερόντων τοῦ στατικοῦ πρός τήν πλευρά τῶν ἐπιφανειακῶν φορέων καί γενικότερα πρός τή θεωρία ἐλαστικότητας· φθάσαμε μάλιστα στό σημεῖο νά ὑπάγουμε πιά σ' αὐτήν καί τούς γραμμικούς φορεῖς.

Μέ τό πρίσμα τῶν παραπάνω ἀπόψεων φαίνεται σήμερα ἐντελῶς πλέον δικαιολογημένη ἡ ἀνάπτυξη τῆς θεωρίας ὅλων τῶν φορέων μέ κοινή ἀφετηρία τή θεωρία ἐλαστικότητας, ἀντί τῆς ἀντοχῆς τῶν ὑλικῶν καί τῆς γραφοστατικῆς, πού εἶχε ἡ στατική τῶν γραμμικῶν φορέων. Μιά τέτοια προσπάθεια προϋποθέτει βέβαια καί τήν ἔνταξη τῶν πιό βασικῶν ἀπό τά κεφάλαια τῆς θεωρίας ἐλαστικότητας στήν ὕλη τῆς στατικῆς, μέ ἀποτέλεσμα τήν μετατόπιση τῆς τελευταίας πρός πιό θεωρητικές περιοχές· συνέπεια αὐτοῦ εἶναι ἡ ἀνάγκη τελειοποιήσεως τοῦ μαθηματικοῦ ἐργαλείου πού χρησιμοποιεῖ ὁ στατικός. Στό σκοπό αὐτόν ἀκριβῶς εἶναι ἀφιερωμένο τό πρῶτο τοῦτο κεφάλαιο, πού περιλαμβάνει τά πιό ἀπαραίτητα ἀπό τή θεωρία τῶν τανυστῶν.

1.2. Τά φυσικά μεγέθη

Τά φυσικά μεγέθη σάν ποσοτικές ἔννοιες ἐπιδέχονται μέτρηση, τό ἀποτέλεσμα τῆς ὁποίας ἐκφράζεται μέ ἕναν ἀριθμό. Μεγέθη, ὅπως ὁ χρόνος, ἡ θερμοκρασία, ἡ μάζα, καθορίζονται πλήρως μέ ἕναν ἀριθμό, τό μέτρο τους· τό μέτρο αὐτό καθορίζει ἑπομένως πλήρως καί τίς φυσικές καταστάσεις πού τά παραπάνω μεγέθη χαρακτηρίζουν. Ἄλλα ὅμως φυσικά μεγέθη, τά διευθυνόμενα ἤ διανυσματικά, καθορίζονται μέ τρία στοιχεῖα: τό μέτρο, τό φορέα καί τή φορά τους. Γιά νά καθοριστοῦν π.χ. ἡ ταχύτητα, ἡ δύναμη καί ἡ ἐπιτάχυνση, πού εἶναι μεγέθη διευθυνόμενα, χρειάζονται τρεῖς ἀριθμοί στόν τριδιάστατο χῶρο. Ὑπάρχουν ὅμως καί φυσικές καταστάσεις πού περιγράφονται ἀπό μεγέθη ἀνωτέρας τάξεως r, μέ ἀριθμό χαρακτηριστικῶν στοιχείων 3^r στόν τριδιάστατο χῶρο. Τέτοια μεγέθη, συγκροτούμενα ἀπό 3^r στοιχεῖα, πού διατάσσονται κατά ὁρισμένους κανόνες καί πού ὑπακούουν σέ ὁρισμένους νόμους —οἱ ὁποῖοι θά ἀναπτυχθοῦν στά ἑπόμενα— καλοῦνται τ α ν υ σ τ έ ς r τάξεως. Τά βαθμωτά λοιπόν μεγέθη μποροῦν νά θεωρηθοῦν σάν τανυστές μηδενικῆς τάξεως ($3^0 = 1$), ἐνῶ τά διευθυνόμενα σάν τανυστές πρώτης τάξεως ($3^1 = 3$). Ἰδιαίτερης σημασίας εἶναι οἱ τανυστές δευτέρας τάξεως μέ $3^2 = 9$ στοιχεῖα· τανυστές δευτέρας τάξεως εἶναι ἡ ροπή ἀδράνειας, ὁ τανυστής ἐντάσεως κλπ. Ἀπό τούς τανυστές μεγαλύτερης τάξεως οἱ πιό γνωστοί εἶναι ὁ τανυστής ἐλαστικότητας καί ὁ τανυστής τοῦ RIEMANN, πού εἶναι τανυστές τετάρτης τάξεως.

Ὁ ἀριθμός τῶν στοιχείων ἑνός τανυστῆ τάξεως r στό χῶρο τῶν n διαστάσεων εἶναι γενικά ἴσος μέ n^r καί εἰδικά στόν διδιάστατο χῶρο ἴσος μέ 2^r. Ἔτσι τά διανύσματα τοῦ ἐπιπέδου ἔχουν 2^1 στοιχεῖα, ἐνῶ οἱ τανυστές ἀδράνειας καί ἐντάσεως $2^2 = 4$ στοιχεῖα.

Μέ τήν παρατήρηση, τό πείραμα καί τόν μαθηματικό λογισμό γίνεται ὄχι μόνο ἡ συσχέτιση φυσικῶν μεγεθῶν μέ διαφορετικό ποιόν ἀλλά γίνεται καί ἡ ἐξακρίβωση τῆς σχέσεως πού ἴσως ὑπάρχει μεταξύ τους· μιᾶς σχέσεως αἰτιότητας, ποιοτικοῦ καί ποσοτικοῦ χαρακτήρα. Οἱ μαθηματικές συνθῆκες πού ἐκφράζουν αὐτόν τό συσχετισμό φυσικῶν μεγεθῶν, ποιοτικά καί ποσοτικά ἑτεροειδῶν, καλοῦνται φ υ σ ι κ ο ί ν ό μ ο ι. Μέ αὐτούς εἶναι δυνατή, μέ βάση ἐπαρκῆ δεδομένα, τόσο ἡ αἰτιολόγηση ὑφισταμένων φυσικῶν καταστάσεων ὅσο καί ἡ πρόβλεψη μελλοντικῶν.

Ἡ μαθηματική συσχέτιση τῶν φυσικῶν μεγεθῶν γίνεται μέ πράξεις, κυρίως ἀλγεβρικές καί διαφορικές, ἐπάνω στά καθοριστικά στοιχεῖα τῶν μεγεθῶν πού συσχετίζονται. Οἱ φυσικοί νόμοι ὅπως καί οἱ μαθηματικές συνθῆκες πού τούς ἐκφράζουν πρέπει νά εἶναι "ἀντικειμενικοί", ἀνεξάρτητοι δηλαδή ἀπό τόν παρατηρητή. Αὐτό θά συμβαίνει ὁπωσδήποτε, ὅταν σέ μιά ἀλλαγή τοῦ συστήματος συντεταγμένων παραμένουν ἀναλλοίωτα τόσο τά καθοριστικά στοιχεῖα τῶν συσχετιζόμενων μεγεθῶν ὅσο καί οἱ πράξεις καί οἱ τύποι πού τίς ἀντιπροσωπεύουν. Ἡ περίπτωση αὐτή πραγματοποιεῖται στά βαθμωτά ἀλλά καί στά διανυσματικά μεγέθη, ὅταν αὐτά τά τελευταῖα καί οἱ πράξεις ἐπάνω σ' αὐτά ὁριστοῦν σύμφωνα μέ ὅσα ἰσχύουν στό διανυσματικό λογισμό. Πράγματι οἱ ἀριθμοί $a, b, \ldots$ καί τά διανύσματα $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \ldots$ ὁρίζονται, κατά τά γνωστά, ἀνεξάρτητα ἀπό τό σύστημα ἀναφορᾶς· τό ἴδιο μέ ὅ,τι συμβαίνει καί στίς ἀλγεβρικές πράξεις, ἀπό τή μιά

$$a+b, \quad ab, \quad a/b$$

καί ἀπό τήν ἄλλη

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}, \quad \mathbf{ab}, \quad \mathbf{a}\times\mathbf{b}.$$

Ἀπό τίς τρεῖς τελευταῖες πράξεις ἡ διανυσματική ἄθροιση γίνεται μέ τήν ἐφαρμογή τοῦ κανόνα τοῦ παραλληλογράμμου, τό ἐσωτερικό γινόμενο εἶναι σταθερά ἴσο μέ τό γινόμενο τῶν μέτρων τῶν δύο διανυσμάτων ἐπί τό συνημίτονο τῆς γωνίας τους καί τέλος τό ἐξωτερικό γινόμενο ἰσοῦται μέ ἕνα διάνυσμα ὁρισμένης φορᾶς, κάθετο στά πολλαπλασιαζόμενα διανύσματα καί μέ μέτρο ἴσο μέ τό ἐμβαδό τοῦ παραλληλογράμμου πού ὁρίζεται ἀπό αὐτά.

Τά φυσικά μεγέθη ἀνωτέρας τάξεως, ὅπως θά δοῦμε, ὁρίζονται πάντα σέ συσχετισμό μ' ἕνα σύστημα ἀναφορᾶς καί ἑπομένως δέν μποροῦμε νά προδικάσουμε τό ὅτι τά ἀποτελέσματα τῶν πράξεων θά εἶναι ἀνεξάρτητα ἀπό τό σύστημα τοῦτο. Ἡ ἐκλογή ὅμως τῶν καθοριστικῶν στοιχείων τῶν φυσικῶν μεγεθῶν γίνεται συμβατικά, μέ μιά μόνο δέσμευση, τῆς μονοτιμίας. Ἔτσι γιά τό διανυσματικό π.χ. μέγεθος ὑπάρχουν οἱ δυνατότητες νά προκρίνουμε σάν καθοριστικά του στοιχεῖα σέ πλαγιογώνιο σύστημα ἀναφορᾶς ἤ τίς τρεῖς προβολές τοῦ διανύσματος ἤ τίς τρεῖς συνιστῶσες του. Ἀπό τήν ἄλλη πλευρά καί οἱ πράξεις ὁρίζονται συμβατικά· ἐπιδιώκεται ὅμως πάντα οἱ τύποι πού τίς ἐκφράζουν νά παραμένουν ἀναλλοίωτοι κατά τήν ἀλλαγή τοῦ συστήματος ἀναφορᾶς, καί ὄχι μόνο ὡς πρός τό ἐξαγόμενο ἀλλά καί ὡς πρός τή δομή τους.

Γιά νά ἱκανοποιηθεῖ τό γενικό αἴτημα τοῦ ἀναλλοίωτου τῶν φυσικῶν νόμων, ἀναπτύχθηκε ὁ τανυστικός λογισμός. Σ' αὐτόν τά καθοριστικά στοιχεῖα τῶν μεγεθῶν κάθε τάξεως καί οἱ πράξεις ὁρίζονται ἀνεξάρτητα ἀπό τό σύστημα ἀναφορᾶς, κι ἔτσι ἐξασφαλίζεται καί ἡ "ἀντικειμενικότητα" τῶν μαθηματικῶν συνθηκῶν. Ἀκολουθώντας λοιπόν τίς γενικές ἀρχές τοῦ τανυστικοῦ λογισμοῦ, μέ τίς ὁποῖες συμβιβάζονται καί ὅσα ὑπάγονται στό διανυσματικό λογισμό, θά δώσουμε ἐξυπαρχῆς τόν ὁρισμό τῶν μεγεθῶν ἀνωτέρας τάξεως καί τῶν πράξεων πού σχετίζονται μέ αὐτά.

1.3. Συμβολισμοί τῶν μεγεθῶν ἀνωτέρας τάξεως καί πράξεις μέ αὐτά

Στόν τριδιάστατο χῶρο θεωρεῖται ὡς μέγεθος r τάξεως αὐτό πού ὁρίζεται ἀπό 3^r τόν ἀριθμό νομοτελῶς διατεταγμένα στοιχεῖα $A_{ij\ldots st}$, πού εἶναι ἐφοδιασμένα μέ r δεῖκτες καί πού ὁ καθένας τους παίρνει κατά σειρά τίς τιμές 1, 2 καί 3. Ἡ διάταξη τῶν στοιχείων γίνεται ἔτσι ὥστε ἡ τιμή κάθε δείκτη νά μεταβάλλεται, ἀφοῦ προηγουμένως ὅλοι οἱ ἑπόμενοί του δεῖκτες ἔχουν πάρει καί τίς τρεῖς τιμές 1, 2 καί 3. Μέ τό σύμβολο $A_{ij\ldots st}$ παριστάνουμε τόσο τό μέγεθος r τάξεως ὅσο καί τό ὁρισμένο στοιχεῖο του τοῦ ὁποίου ὁ πρῶτος, δεύτερος κλπ. δείκτης του ἔχουν τίς ὁρισμένες τιμές ἀντιστοίχως $i, j, \ldots s, t$.

Σύμφωνα μέ τόν προηγούμενο ὁρισμό τό μέγεθος πρώτης τάξεως a_i θά εἶναι τό σύνολο τῶν στοιχείων κατά σειρά a_1, a_2, a_3˙ ἕνα ὁποιοδήποτε στοιχεῖο του παριστάνεται μέ τό a_i. Στή θεωρία τῶν μητρώων τά στοιχεῖα διατάσσονται σέ μία στήλη καί ἀποτελοῦν τό διάνυσμα στήλης

$$\mathbf{a} = [a_i] = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}.$$

Πολλές φορές, γιά λόγους οἰκονομίας χώρου, γράφουμε τό διάνυσμα στήλης καί σ' ἕνα στίχο τοῦ κειμένου κατά τόν τρόπο

$$\mathbf{a} = \{a_i\} = \{a_1, a_2, a_3\}.$$

Αὐτός θεωρεῖται ὅτι ὑποκαθιστᾶ σέ ὅλα τόν προηγούμενο συμβολισμό.

Τό μέγεθος δευτέρας τάξεως A_{ij} θά εἶναι τό σύνολο τῶν στοιχείων κατά σειρά

$$A_{11},\ A_{12},\ A_{13}˙\quad A_{21},\ A_{22},\ A_{23}˙\quad A_{31},\ A_{32},\ A_{33}$$

ἤ τό σύνολο τῶν τριῶν μεγεθῶν πρώτης τάξεως

$$A_{i1},\ A_{i2},\ A_{i3},$$

πού τό καθένα τους ἀποτελεῖ καί ἕνα διάνυσμα στίχου. Στή θεωρία τῶν μητρώων σχηματίζουμε ἀπό τά ἐννέα στοιχεῖα τοῦ μεγέθους δευτέρας τάξεως τό τετραγωνικό μητρῶο

$$\mathbf{A} = [A_{ij}] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}.$$

Πρέπει ὅμως ἐδῶ νά γίνει ἡ διευκρίνιση ὅτι δέν ὑπάρχει πλήρης ταυτισμός οὔτε τοῦ μεγέθους δευτέρας τάξεως μέ τό τετραγωνικό μητρῶο οὔτε τοῦ μεγέθους πρώτης τάξεως μέ τό διάνυσμα στίχου. Ἁπλῶς μπορεῖ νά γίνει ἕνας παραλληλισμός, ὅταν πρόκειται νά ἐκτελεστοῦν πράξεις πού εἶναι οἱ ἴδιες γιά τίς δύο αὐτές κατηγορίες μεγεθῶν.

Ἰδιαίτερη σημασία ἔχει τό μέγεθος δευτέρας τάξεως δ_{ij}, πού εἶναι γνωστό μέ τό ὄνομα δ έ λ τ α τοῦ KRONECKER καί πού τά στοιχεῖα του εἶναι τά ἴδια μέ τά στοιχεῖα τοῦ μοναδιαίου μητρώου:

$$[\delta_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}.$$

Τά στοιχεῖα λοιπόν τοῦ δέλτα τοῦ KRONECKER ἔχουν τίς τιμές

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{γιά} \quad i = j \, , \\ 0 & \text{γιά} \quad i \neq j \, . \end{cases} \qquad (1)$$

Προχωρώντας τώρα στό μέγεθος τρίτης τάξεως A_{ijk}, καθορίζουμε τά 27 στοιχεῖα του, θεωρώντας αὐτό σάν τό σύνολο τῶν τριῶν μεγεθῶν δευτέρας τάξεως A_{ij1}, A_{ij2}, A_{ij3} καί γράφοντας γιά τό καθένα ἀπό αὐτά, κατά σειρά, τά ἐννέα στοιχεῖα του. Μέ ἀνάλογο τρόπο γίνεται καί ἡ ἀναγνώριση τῶν στοιχείων ἑνός μεγέθους τετάρτης ἤ καί ἀνωτέρας τάξεως.

Γιά τόν ὁρισμό τῶν πράξεων μέ μεγέθη ὁποιασδήποτε τάξεως πρέπει πρῶτα νά διευκρινίσουμε ὅτι τά στοιχεῖα τους θεωροῦνται πάντοτε ὡς ἀλγεβρικοί ἀριθμοί.

Δύο μεγέθη $A_{ij\ldots st}$ καί $B_{ij\ldots st}$ εἶναι ἴ σ α μεταξύ τους, ὅταν εἶναι τῆς ἴδιας τάξεως r καί ὅταν ἰσχύει ἡ ἰσότητα

$$A_{ij\ldots st} = B_{ij\ldots st} \qquad (2)$$

γιά ὅλες τίς δυνατές τιμές τῶν r δεικτῶν. Τότε ἡ προηγούμενη ἰσότητα, μέ τή γενική της μορφή, ἐκφράζει ὄχι μόνο τήν ἰσότητα τῶν ὁμόλογων στοιχείων ἀλλά καί τῶν δύο μεγεθῶν r τάξεως.

Καί ἡ ἄ θ ρ ο ι σ η ἐννοεῖται μόνο γιά μεγέθη τῆς ἴδια τάξεως καί ὁδηγεῖ σέ μέγεθος ἐπίσης τῆς ἴδιας τάξεως. Τά στοιχεῖα τοῦ ἀθροίσματος τίθενται, ἐξ ὁρισμοῦ, ἴσα μέ τό ἀλγεβρικό ἄθροισμα τῶν ὁμόλογων στοιχείων τῶν μεγεθῶν πού ἀθροίζονται :

$$C_{ijk} = A_{ijk} + B_{ijk} \, . \qquad (3)$$

Ὁ πολλαπλασιασμός δύο μεγεθῶν A_i καί B_{jk}, ὁποιασδήποτε τάξεως, γίνεται βάσει τοῦ κανόνα

$$C_{ijk} = A_i \, B_{jk} \qquad (4)$$

καί προφανῶς ὁδηγεῖ σ' ἕνα μέγεθος τοῦ ὁποίου ἡ τάξη εἶναι ἴση μέ τό ἄθροισμα τῶν τάξεων τῶν δύο παραγόντων.

Ἐκτός ἀπό τόν παραπάνω γενικό πολλαπλασιασμό ὁρίζεται καί μία ἄλλη βασική πράξη πού καλεῖται σ ύ μ π τ υ ξ η ἤ συναίρεση ἤ συστολή. Ὁ ὁρισμός τῆς συμπτύξεως διευκολύνεται μέ τήν ἀποδοχή τοῦ συμβολισμοῦ τοῦ EINSTEIN γιά τά ἀθροίσματα. Συμφωνοῦμε λοιπόν ὅτι κάθε ὅρος —μονώνυμο ἤ ἁπλό σύμβολο ἑνός μεγέθους— πού ἐμφανίζει δύο φορές τόν ἴδιο δείκτη δηλώνει τό ἄθροισμα τῶν τριῶν ὅρων πού προκύπτουν, ὅταν δώσουμε στό διπλό δείκτη κατά σειρά τίς τρεῖς τιμές *1*, *2* καί *3*. Ἔτσι ἰσχύουν οἱ ἰσότητες

$$a_i\, b_i \;=\; \sum_{i=1}^{i=3} a_i\, b_i \;=\; a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3\,,$$

$$A_{iij} \;=\; \sum_i A_{iij} \;=\; A_{11j} + A_{22j} + A_{33j}\,,$$

$$\begin{aligned} a_{ij}\, x_i\, x_j &= \sum_i \sum_j a_{ij}\, x_i\, x_j \\ &= \sum_i (a_{i1}\, x_i x_1 + a_{i2}\, x_i x_2 + a_{i3}\, x_i\, x_3) \\ &= a_{11} x_1 x_1 + a_{21} x_2 x_1 + a_{31} x_3 x_1 \\ &\quad + a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2 x_2 + a_{32} x_3 x_2 \\ &\quad + a_{13} x_1 x_3 + a_{23} x_2 x_3 + a_{33} x_3 x_3\,. \end{aligned}$$

Σέ ἐκφράσεις μέ ἀθροίσεις περισσότερες ἀπό μία, ὅπως ἦταν ἡ προηγούμενη, πρέπει νά χρησιμοποιοῦμε γιά κάθε ἄθροιση καί ἄλλο δείκτη. Ἕνας ἀθροιστικός δείκτης μπορεῖ βέβαια νά ἀντικατασταθεῖ μ' ἕναν ὁποιοδήποτε ἄλλο, χωρίς νά ἀλλοιωθεῖ ἡ τιμή τῆς ἐκφράσεως· π.χ. ἰσχύει ἡ ἰσότητα

$$a_{ij}\, x_i\, x_j = a_{mn}\, x_m\, x_n\,.$$

Ἡ ἐμφάνιση τοῦ ἴδιου δείκτη τρεῖς φορές στό ἴδιο σύμβολο ἐπιτρέπεται μόνο γιά τό χαρακτηρισμό ἑνός ὁρισμένου στοιχείου, ποτέ ὅμως δέν δηλώνει ἄθροιση.

Ἡ πράξη τῆς συμπτύξεως συνίσταται στήν ἀντικατάσταση δύο διαφορετικῶν δεικτῶν μέ ἕνα κοινό ψηφίο καί συνεπῶς στήν ἐκτέλεση τῆς ἀθροίσεως πού ἐπιβάλλει τό κοινό αὐτό ψηφίο. Μέ τή σύμπτυξη ὑποβιβάζεται λοιπόν ἡ τάξη τοῦ μεγέθους κατά δύο μονάδες. Ἔτσι ἀπό τό μέγεθος τρίτης τάξεως A_{ijk} μέ τή σύμπτυξη $i = j$ προκύπτει τό μέγεθος πρώτης τάξεως A_{iik}, πού ἔχει σάν στοιχεῖα τά τρία ἀθροίσματα $A_{11k} + A_{22k} + A_{33k}$ ($k = 1, 2, 3$). Ἡ σύμπτυξη μπορεῖ νά γίνει καί σέ γινόμενο, ὅπως π.χ. στό $A_i\, B_{jk}$:

$$A_i\, B_{ik} = C_k\,.$$

Εἰδικότερα, ὅταν ἡ σύμπτυξη ἐκτελεῖται κατά τόν πολλαπλασιασμό ἑνός μεγέθους μέ τό δέλτα τοῦ KRONECKER, ὁδηγεῖ ἁπλῶς στή μετονομασία τοῦ ἀθροιστικοῦ δείκτη τοῦ μεγέθους πού πολλαπλασιάζεται μέ τό δ_{ij}. Πράγματι, ἄν λάβουμε ὑπόψη τίς τιμές (1), βρίσκουμε ὅτι

$$\delta_{ij}\, A_i = A_j \quad \text{καί} \quad \delta_{ij}\, A_{ik} = A_{jk}\,. \qquad (5)$$

Εἶναι φανερό ὅτι οἱ τρεῖς θεμελιώδεις πράξεις πού ὁρίστηκαν παραπάνω ὑπακούουν στούς τρεῖς βασικούς νόμους τῶν ἀλγεβρικῶν πράξεων: τόν ἀντιμεταθετικό, τό συζευκτικό καί τόν ἐπιμεριστικό νόμο. Γιά τό λόγο αὐτό οἱ πράξεις μέ μεγέθη κάθε τάξεως ἐκτελοῦνται ὅπως ἀκριβῶς καί οἱ πράξεις μέ ἀλγεβρικούς ἀριθμούς.

Στόν τανυστικό λογισμό διακρίνουμε τούς δεῖκτες πού γράφονται στό κάτω μέρος τοῦ συμβόλου ἀπό αὐτούς πού γράφονται στό πάνω μέρος. Ἔτσι ἐμφανίζονται τά σύμβολα

$$A_i \text{ καί } A^i$$

$$A_{ij}, \ A^{\ i}_{\cdot j} \text{ καί } A^{\cdot i}_{j}, \ A^{ij}$$

$$A_{ijk}, \ A_{ij\cdot}^{\ \ \ k}, \ \ A_{i\cdot k}^{\ j\ \cdot} \text{ κλπ.}$$

Οἱ τελεῖες, πού τοποθετοῦνται γιά νά καθοριστεῖ ἡ σειρά προτεραιότητας τῶν δεικτῶν, παραλείπονται ὅταν ἡ συμμετρία τοῦ τανυστῆ ἀχρηστεύει τήν προτεραιότητα.

Καί γιά τά μεγέθη αὐτά ἰσχύουν ὅλα τά προηγούμενα, μέ μόνη διαφορά ὅτι ἡ σύμπτυξη γίνεται μόνο ὅταν ὁ ἕνας ἀθροιστικός δείκτης εἶναι κάτω δείκτης ἐνῶ ὁ ἄλλος εἶναι ἄνω δείκτης. Ἔτσι ἡ σύμπτυξη γίνεται σύμφωνα μέ τόν κανόνα

$$A_i^{\cdot i}, \ \ A_{ij\cdot}^{\ \ \ i}, \ \ A_{ij\cdot}^{\ \ \ i}, \ \ a_{ij}\, b^{jk}$$

καί ὄχι ὅπως προηγουμένως πού δέν ὑπῆρχε κανένας περιορισμός γιά τίς θέσεις τῶν ἀθροιστικῶν δεικτῶν.

Ἀσκήσεις

1. Νά γραφοῦν σ' ἕνα μητρῶο τά ἐννέα στοιχεῖα τοῦ γινομένου $A_i B_j$.
2. Ποιά εἶναι τά ἀποτελέσματα τῶν συμπτύξεων C_{ii}, $A_i B_i$;
3. Νά γραφοῦν τά τρία στοιχεῖα τῶν μεγεθῶν A_{ikk}, A_{kik}.
4. Νά ἀποδειχθοῦν οἱ ἰσότητες $\delta_{ij}\,\delta_{ij} = 3$ καί $\delta_{ij}\,\delta_{jk} = \delta_{ik}$.
5. Νά γραφοῦν τά τρία στοιχεῖα τοῦ μεγέθους
$$(\delta_{is}\delta_{jt} - \delta_{it}\,\delta_{js})\,C_{jst},$$
πρῶτα μέ τή γενική μορφή καί κατόπιν μέ τήν ἀναπτυγμένη μορφή τους.

1.4. Ὁ ὁρισμός τοῦ τανυστῆ

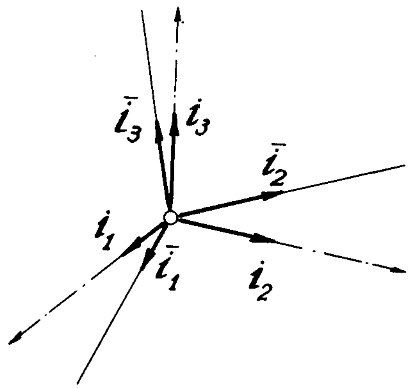
Ἡ θέση στό χῶρο καθορίζεται μέ τήν ἀναφορά στό σύστημα συντεταγμένων· αὐτό μπορεῖ νά εἶναι τρισορθογώνιο ἤ πλαγιογώνιο ἤ ἀκόμη καί καμπυλόγραμμο. Περιοριζόμαστε στή χρησιμοποίηση ἀποκλειστικά δεξιόστροφων καρτεσιανῶν συστημάτων ἀναφορᾶς, γιατί αὐτά εἶναι τά πιό πρόσφορα ἀπό τήν ἄποψη τῆς μαθηματικῆς ἐπεξεργασίας τοῦ θέματός μας· τά πλαγιογώνια καί τά καμπυλόγραμμα θά χρησιμοποιηθοῦν μόνο γιά τήν ἀντιμετώπιση εἰδικῶν προβλημάτων. Θά δοῦμε τώρα ποιοί γενικοί κανόνες ρυθμίζουν τήν ἀλλαγή τοῦ τρισορθογώνιου συστήματος ἀναφορᾶς.

Τό ἀρχικό σύστημα συντεταγμένων καθορίζεται μέ τά τρία μοναδιαῖα καί κάθετα μεταξύ τους διανύσματα $\mathbf{i}_j$ $(j = 1, 2, 3)$. Ἡ θέση ἑνός ἄλλου συστήματος ἀναφορᾶς, μέ μοναδιαῖα διανύσματα $\bar{\mathbf{i}}_j$, δίνεται μέ τά στοιχεῖα τοῦ μητρώου τῶν συνημιτόνων κατευθύνσεως

$$\begin{bmatrix} \cos(\bar{i}_1, i_1) & \cos(\bar{i}_1, i_2) & \cos(\bar{i}_1, i_3) \\ \cos(\bar{i}_2, i_1) & \cos(\bar{i}_2, i_2) & \cos(\bar{i}_2, i_3) \\ \cos(\bar{i}_3, i_1) & \cos(\bar{i}_3, i_2) & \cos(\bar{i}_3, i_3) \end{bmatrix} .$$

Γιά τήν ἁπλοποίηση τῶν συμβολισμῶν παριστάνουμε μέ τό c_{jk} τό συνημίτονο τῆς γωνίας τοῦ μοναδιαίου διανύσματος $\bar{\mathbf{i}}_j$ τοῦ νέου συστήματος ἀναφορᾶς μέ τό διάνυσμα $\mathbf{i}_k$ τοῦ ἀρχικοῦ. Ἔτσι τό προηγούμενο μητρῶο παίρνει τή μορφή

$$\mathbf{C} = [c_{jk}] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} . \quad (6)$$



Σχ. 1. Ἀλλαγή τοῦ συστήματος ἀναφορᾶς.

Τά στοιχεῖα c_{j1}, c_{j2}, c_{j3} τοῦ στίχου j, σάν συνημίτονα κατευθύνσεως τοῦ μοναδιαίου διανύσματος $\bar{\mathbf{i}}_j$, εἶναι ἴσα ἐπίσης μέ τίς προβολές τοῦ διανύσματος αὐτοῦ ἐπάνω στούς τρεῖς ἄξονες τοῦ ἀρχικοῦ συστήματος ἀναφορᾶς. Ἑπομένως ἰσχύουν οἱ ἰσότητες

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{i}}_1 &= c_{11}\,\mathbf{i}_1 + c_{12}\,\mathbf{i}_2 + c_{13}\,\mathbf{i}_3 , \\ \bar{\mathbf{i}}_2 &= c_{21}\,\mathbf{i}_1 + c_{22}\,\mathbf{i}_2 + c_{23}\,\mathbf{i}_3 , \\ \bar{\mathbf{i}}_3 &= c_{31}\,\mathbf{i}_1 + c_{32}\,\mathbf{i}_2 + c_{33}\,\mathbf{i}_3 , \end{aligned}$$

πού μποροῦν νά συμπτυχθοῦν στή μία σχέση

$$\bar{\mathbf{i}}_j = c_{jk}\,\mathbf{i}_k . \quad (7\alpha)$$

Ἀλλά καί ἀντίστροφα ἰσχύει ἡ συνθήκη

$$\mathbf{i}_k = c_{jk}\,\bar{\mathbf{i}}_j , \quad (7\beta)$$

γιατί τά στοιχεῖα c_{1j}, c_{2j}, c_{3j} τῆς στήλης j τοῦ μητρώου (6) εἶναι τά συνημίτονα κατευθύνσεως τοῦ μοναδιαίου διανύσματος $\mathbf{i}_j$ στό νέο σύστημα ἀναφορᾶς.

Τέλος, ἐπειδή τά στοιχεῖα τῶν στηλῶν ἀλλά καί τῶν στίχων τοῦ μητρώου (6) εἶναι οἱ προβολές τριῶν μοναδιαίων καί κάθετων μεταξύ τους διανυσμάτων, ἰσχύουν οἱ ἰσότητες

$$\boxed{c_{ik}\,c_{ij} = \delta_{kj} \;, \quad c_{ki}\,c_{ji} = \delta_{kj} .} \quad (8\alpha)$$

Πράγματι γιά $k \neq j$ εἶναι $\delta_{ij} = 0$ καί οἱ σχέσεις ἐκφράζουν τήν καθετότητα τῶν διανυσμάτων, ἐνῶ γιά $k = j$ θά εἶναι $\delta_{kj} = 1$ καί οἱ σχέσεις θά δηλώνουν ὅτι πρόκειται γιά μοναδιαῖο διάνυσμα. Οἱ δύο προηγούμενες ἰσότητες μποροῦν νά γραφοῦν καί μέ τή μητρωική μορφή

$$\mathsf{C}\mathsf{C}^T = \mathrm{I}\,, \quad \mathsf{C}^T\mathsf{C} = \mathrm{I}\,, \tag{8β}$$

ὅπου C^T τό ἀνάστροφο τοῦ μητρώου C καί I τό μοναδιαῖο μητρῶο.

Θά παρακολουθήσουμε πρῶτα πῶς πρέπει νά ἐκλεγοῦν τά καθοριστικά στοιχεῖα τῶν μεγεθῶν ὁποιασδήποτε τάξεως καί κατόπιν πῶς μετασχηματίζονται αὐτά τά στοιχεῖα κατά τήν ἀλλαγή τοῦ συστήματος ἀναφορᾶς.

Τό βαθμωτό μέγεθος καθορίζεται πάντοτε μέ τήν τιμή ϕ τοῦ μέτρου του. Ἄν ἡ τιμή αὐτή διαφέρει ἀπό σημεῖο σέ σημεῖο τοῦ χώρου, θά εἶναι μιά συνάρτηση τῶν συντεταγμένων x_1, x_2, x_3, πού στήν ἀλλαγή τοῦ συστήματος ἀναφορᾶς θά μετασχηματίζεται σέ μιά συνάρτηση τῶν $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, $\bar{x}_3$. Ἐφόσον λοιπόν πρόκειται γιά φυσικό μέγεθος, θά ἰσχύει ἡ ἰσότητα

$$\phi\,(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = \phi(x_1, x_2, x_3),$$

ἀφοῦ ἡ ἀλλαγή τῶν ἀξόνων ἀφήνει ἀναλλοίωτο τό μέτρο τοῦ φυσικοῦ μεγέθους.

Τό διευθυνόμενο φυσικό μέγεθος, τό ὁποῖο καθορίζεται πλήρως μέ τό μέτρο, τό φορέα καί τή φορά του, μπορεῖ νά ἐκπροσωπηθεῖ ἀμφιμονοσήμαντα ἀπό τό οἰκεῖο γεωμετρικό διάνυσμα $\mathbf{a}$. Τό τελευταῖο καθορίζεται μέ τίς τρεῖς συνιστῶσες του (ἤ ὀρθές προβολές) a_1, a_2, a_3 στό ἐκλεγμένο σύστημα ἀναφορᾶς x_1, x_2, x_3, πού ἔχει μοναδιαῖα διανύσματα τά $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$. Τό $\mathbf{a}$ εἶναι λοιπόν τό διάνυσμα τοῦ διευθυνόμενου φυσικοῦ μεγέθους καί τά a_1, a_2, a_3 τά καθοριστικά στοιχεῖα του, διότι

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i}_1 + a_2\mathbf{i}_2 + a_3\mathbf{i}_3 = a_k\mathbf{i}_k\,. \tag{9α}$$

Κατά τήν ἀλλαγή τοῦ συστήματος τῶν ἀξόνων τό διευθυνόμενο φυσικό μέγεθος, καί μαζί του τό διάνυσμα $\mathbf{a}$, παραμένουν ἀναλλοίωτα, οἱ συνιστῶσες ὅμως παίρνουν τίς νέες τιμές $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$. Ἐπειδή αὐτές πληροῦν ἐπίσης τήν προηγούμενη ἰσότητα μέ τή μορφή

$$\mathbf{a} = \bar{a}_1\bar{\mathbf{i}}_1 + \bar{a}_2\bar{\mathbf{i}}_2 + \bar{a}_3\bar{\mathbf{i}}_3 = \bar{a}_j\bar{\mathbf{i}}_j\,, \tag{9β}$$

ἰσχύει ἡ ἰσότητα

$$a_k\mathbf{i}_k = \bar{a}_j\bar{\mathbf{i}}_j\,.$$

Εἰσάγοντας σ' αὐτήν τήν τιμή (7β) ἔχουμε πρῶτα

$$a_k\,c_{jk}\bar{\mathbf{i}}_j = \bar{a}_j\bar{\mathbf{i}}_j$$

καί κατόπιν

$$(\bar{a}_j - a_k\, c_{jk})\,\bar{\mathbf{i}}_k = 0 .$$

Ἐπειδή ἡ ἰσότητα αὐτή πρέπει νά ἰσχύει γιά κάθε διάνυσμα $\mathbf{a}$, θά μηδενίζεται ἡ ἔκφραση μέσα στήν παρένθεση καί θά ἰσχύει ὁ μετασχηματισμός

$$\bar{a}_j = c_{jk}\, a_k . \qquad (10\alpha)$$

Ἀπό αὐτόν προκύπτει καί ὁ ἀντίστροφος μετασχηματισμός

$$a_j = c_{kj}\, \bar{a}_k , \qquad (10\beta)$$

ἀρκεῖ νά γίνει ὁ πολλαπλασιασμός τῆς (10α) μέ τό c_{si}, κατόπιν ἡ σύμπτυξη $s=j$ καί στό τέλος νά ληφθεῖ ὑπόψη ἡ ἰσότητα (8α). Πράγματι:

$$c_{si}\, \bar{a}_j = c_{si}\, c_{jk}\, a_k , \qquad c_{ji}\, \bar{a}_j = c_{ji}\, c_{jk}\, a_k = \delta_{ik}\, a_k = a_i .$$

Ἐρχόμαστε τώρα στό δ υ α δ ι κ ό φυσικό μέγεθος, τόν ὁμοπαραλληλιστή D_{ij}, πού γενικά καθορίζεται σάν τό γινόμενο δύο διανυσμάτων A_i καί B_j:

$$D_{ij} = A_i\, B_j .$$

Γιά νά βροῦμε τό νόμο μετασχηματισμοῦ τῶν ἐννέα συνιστωσῶν του, πολλαπλασιάζουμε καί τά δύο μέλη τῆς προηγούμενης ἰσότητας μέ τόν παράγοντα $c_{ki}\, c_{mj}$ καί ἐφαρμόζουμε τό μετασχηματισμό (10α), ἔτσι ἔχουμε

$$c_{ki}\, c_{mj}\, D_{ij} = c_{ki}\, c_{mj}\, A_i\, B_j = (c_{ki}\, A_i)(c_{mj}\, B_j) = \bar{A}_k\, \bar{B}_m = \bar{D}_{km} .$$

Μέ ἀνάλογο τρόπο βρίσκουμε καί τή σχέση τοῦ ἀντίστροφου μετασχηματισμοῦ, πού μαζί μέ τόν προηγούμενο καθορίζουν τό νόμο μετασχηματισμοῦ τοῦ δυαδικοῦ μεγέθους:

$$\bar{D}_{km} = c_{ki}\, c_{mj}\, D_{ij} , \qquad D_{km} = c_{ik}\, c_{jm}\, \bar{D}_{ij} . \qquad (11)$$

Υἱοθετώντας καί γενικεύοντας τούς προηγούμενους νόμους μετασχηματισμοῦ ὁρίζουμε ὡς τ α ν υ σ τ ή r τάξεως ἐκεῖνο τό μέγεθος τοῦ ὁποίου οἱ 3^r συνιστῶσες $A_{ij\ldots st}$ μετασχηματίζονται στίς $\bar{A}_{km\ldots qr}$ βάσει τοῦ νόμου

$$\boxed{\bar{A}_{km\ldots qr} = c_{ki}\, c_{mj} \,\ldots\, c_{qs}\, c_{rt}\, A_{ij\ldots st} ,} \qquad (12\alpha)$$

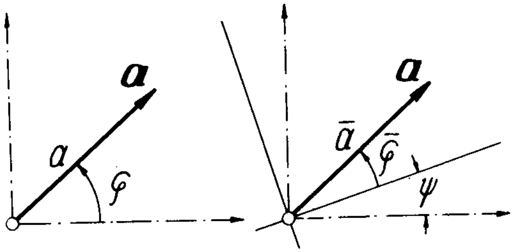
ὅταν μεταβοῦμε ἀπό τό σύστημα ἀναφορᾶς x_1, x_2, x_3 στό σύστημα $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$. Γιά τήν ἀντίστροφη μετάβαση πρέπει νά ἰσχύει ὁ νόμος

$$\boxed{A_{km\ldots qr} = c_{ik}\, c_{jm} \,\ldots\, c_{sq}\, c_{tr}\, \bar{A}_{ij\ldots st} .} \qquad (12\beta)$$

Αὐτός προκύπτει ἀπό τόν (12α) μέ τόν πολλαπλασιασμό ἐπί $c_{k\alpha}, c_{k\beta} \ldots$

$c_{q\varepsilon}$, $c_{r\zeta}$, τήν ἐφαρμογή τῶν ἐξ. (8α) καί κατόπιν μέ τή μετονομασία τῶν ἀθροιστικῶν δεικτῶν.

Ὡς θεμελιῶδες κριτήριο γιά τό χαρακτηρισμό ἑνός μεγέθους r τάξεως ὡς τανυστή r τάξεως θά ἔχουμε λοιπόν μία ἀπό τίς δύο συνθῆκες (12). Τό γενικό αὐτό κριτήριο περιέχει σάν εἰδικές περιπτώσεις καί τούς νόμους μετασχηματισμοῦ (10) τῶν διανυσμάτων, ὅπως καί τοῦ βαθμωτοῦ μεγέθους, πού θεωρεῖται σάν ἕνας τανυστής μηδενικῆς τάξεως.



Σχ. 2. Ἀκατάλληλη ἐκλογή τῶν στοιχείων τοῦ διανύσματος.

Πρέπει νά τονιστεῖ ὅτι ὅταν δέν πληροῦται τό παραπάνω κριτήριο, αὐτό μπορεῖ νά ὀφείλεται σέ ἀκατάλληλη ἐκλογή τῶν καθοριστικῶν στοιχείων καί ὄχι στό ὅ,τι τό μέγεθος καθεαυτό δέν εἶναι τανυστικό. Χαρακτηριστική εἶναι ἡ περίπτωση τοῦ διανύσματος στό ἐπίπεδο, τό ὁποῖο μπορεῖ ἐπίσης νά καθοριστεῖ μέ τά στοιχεῖα a καί ϕ, δηλαδή μέ τό μέτρο του καί μέ τή γωνία κατευθύνσεώς του. Τότε ἰσχύουν κατά τήν ἀλλαγή τοῦ συστήματος ἀναφορᾶς οἱ συνθῆκες

$$\bar{a} = a\,, \quad \bar{\phi} = \phi - \psi.$$

Ἐπειδή αὐτές δέν συμφωνοῦν μέ τό νόμο (12), μπορεῖ νά ὁδηγήσουν στό λανθασμένο συμπέρασμα ὅτι τό γεωμετρικό διάνυσμα δέν εἶναι τανυστικό μέγεθος.

1.5. Οἱ πράξεις μέ τούς τανυστές

Οἱ πράξεις τῆς ἀθροίσεως, τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καί τῆς συμπτύξεως, ὅπως ὁρίστηκαν στά προηγούμενα, ἔχουν τανυστική ἰσχύ, δηλαδή ὅταν ἐκτελοῦνται μέ τανυστές δίνουν ὡς ἀποτέλεσμα ἕνα τανυστή καί ὄχι ἁπλῶς ἕνα μέγεθος ἀνωτέρας τάξεως. Τό μεγαλύτερο ὅμως προσόν τῶν πράξεων αὐτῶν εἶναι ὅτι καί οἱ μαθηματικοί τύποι πού τίς ἐκφράζουν διατηροῦνται ἀναλλοίωτοι κατά τήν ἀλλαγή τοῦ συστήματος ἀναφορᾶς. Ἔτσι οἱ τανυστικές συνθῆκες, οἱ ὁποῖες συνδέουν τανυστές πού ἐκπροσωποῦν φυσικά μεγέθη, μποροῦν νά