

Σ. ΝΑΤΣΙΑΒΑΣ

ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ



Κάθε γνήσιο αντίτυπο φέρει την υπογραφή του συγγραφέα

ISBN 960-431-596-X

© Copyright: Σ. Νατσιάβας, Εκδόσεις ΖΗΤΗ
Φεβρουάριος 2.000, Θεσσαλονίκη

*Απαγορεύεται η με κάθε τρόπο αντιγραφή ή αναπαραγωγή μέρους ή όλου του βιβλίου
χωρίς την έγγραφη άδεια του συγγραφέα και του εκδότη.*



**Φωτοστοιχειοθεσία
Εκτύπωση**

Π. ΖΗΤΗ & Σια ΟΕ

18ο χλμ Θεσ/νίκης-Περαίας

Τ.Θ. 171 • Νέοι Επιβάτες Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19

Τηλ.: 0392-72.222 (3 γραμ.) - Fax: 0392-72.229

www.ziti.gr

e-mail: ziti@ziti.gr

Βιβλιοπωλείο

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

Αρμενοπούλου 27 • 546 35 Θεσσαλονίκη

Τηλ. (031) 203.720, Fax 211.305

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η εξέταση της ταλαντωτικής συμπεριφοράς μηχανικών διατάξεων βασίζεται συχνά σε γραμμικές θεωρήσεις και μεθοδολογίες. Όταν εξασφαλίζεται η ικανοποίηση της βασικής υπόθεσης που οδηγεί σε γραμμικά μοντέλα, δηλαδή ότι τα εξεταζόμενα συστήματα εκτελούν "ταλαντώσεις μικρού εύρους" γύρω από μια θέση ισορροπίας, οι γραμμικές θεωρήσεις οδηγούν σε αρκετά ακριβή αποτελέσματα. Όμως, ακόμη και όταν η ύπαρξη και επίδραση μη γραμμικών παραγόντων είναι εμφανής, η πρώτη εκτίμηση της δυναμικής απόκρισης βασίζεται συνήθως σε παράλειψη των μη γραμμικών όρων ή στην κατάλληλη αντικατάστασή τους με "ισοδύναμους" γραμμικούς όρους.

Ο κύριος λόγος για την προτίμηση προς τα γραμμικά μηχανικά μοντέλα είναι ότι η συμπεριφορά τους περιγράφεται από γραμμικές εξισώσεις κίνησης, των οποίων η επίλυση και η μελέτη είναι πολύ ευκολότερη από την επίλυση αντίστοιχων μη γραμμικών εξισώσεων. Η ύπαρξη μη γραμμικών όρων στις εξισώσεις κίνησης συνεπάγεται ότι δεν ισχύει η γραμμική σχέση αιτίου-αποτελέσματος, καθώς και η αρχή της επαλληλίας. Επιπλέον, στη γενική περίπτωση δεν υπάρχουν μεθοδολογίες που να οδηγούν σε ακριβείς αναλυτικές λύσεις τέτοιων εξισώσεων. Από την άλλη μεριά, η ύπαρξη μη γραμμικών όρων κάνει πιθανή την εμφάνιση μιας πληθώρας φαινομένων που δεν μπορεί να προβλεφθούν ή να εξηγηθούν με εφαρμογή γραμμικών θεωριών.

Τα τελευταία χρόνια, η ανάγκη για την εφαρμογή μεθοδολογιών που βασίζονται σε μη γραμμικά μοντέλα γίνεται όλο και πιο επιτακτική. Για παράδειγμα, απαιτήσεις για κατασκευή πιο ταχύστροφων και συμπαγέστερων μηχανών ή για την πληρέστερη δυνατή εκμετάλλευση της αντοχής στοιχείων μηχανών και κατασκευών οδηγούν συχνά σε συνθήκες λειτουργίας όπου εμφανίζονται μεγάλες παραμορφώσεις, τροπές και τάσεις. Αυτό μπορεί να οφείλεται σε επικίνδυνους συντονισμούς που δεν παρατηρούνται σε γραμμικά συστήματα, οι οποίοι πρέπει να προβλεφθούν και να αποφευχθούν με κατάλληλες κατασκευαστικές τροποποιήσεις. Με τον τρόπο αυτό, καθίσταται δυνατή η ελεγχόμενη και αποδοτικότερη λειτουργία μηχανικών διατάξεων σε περιοχές παραμέτρων στις οποίες η γραμμική θεωρία προβλέπει ασταθή συμπεριφορά (π.χ. αυτοδιεγειρόμενες ταλαντώσεις πε-

περασμένου εύρους που αναπτύσσονται στη διάρκεια κοπής μετάλλων ή ροϊκά επαγόμενες ταλαντώσεις).

Όπως και στα γραμμικά μοντέλα, υπάρχει μεγάλη συνάφεια και συσχέτιση των φαινομένων που παρατηρούνται κατά τη λειτουργία μηχανικών κατασκευών με φαινόμενα που εμφανίζονται σε άλλες τεχνικές και επιστημονικές περιοχές. Για παράδειγμα, παρόμοια φαινόμενα κάνουν την εμφάνισή τους στη μελέτη της τυρβώδους ροής ή των κυματώσεων υγρών μεγάλου εύρους, στην περιοχή της Μηχανικής Ρευστών. Επίσης, μη γραμμικά μοντέλα είναι συχνά απαραίτητα στην επίλυση προβλημάτων με ηλεκτρικά ή ηλεκτρονικά κυκλώματα, ενώ η εφαρμογή μη γραμμικών μοντέλων μπορεί να αποδειχθεί χρήσιμη στη μελέτη της χρονικής εξέλιξης της συγκέντρωσης αντιδρώντων ουσιών και οργανισμών σε χημικούς και βιοχημικούς αντιδραστήρες. Τέλος, μη γραμμικά μοντέλα βρίσκουν ευρεία εφαρμογή και σε άλλες επιστημονικές περιοχές, όπως η Μετεωρολογία (μελέτη της κίνησης αερίων μαζών στην ατμόσφαιρα και πρόβλεψη του καιρού), η Οικονομία (πρόβλεψη διακυμάνσεων σε οικονομικούς δείκτες, τιμές ακινήτων και μετοχών του χρηματιστηρίου), η Φυσιολογία (κύκλος μετατροπής διοξειδίου του άνθρακα σε οξυγόνο στα φύλλα των φυτών), η Οικολογία (εξέλιξη πληθυσμών ζώων και εντόμων που βρίσκονται σε αλληλεπίδραση ή ανταγωνισμό), η Βιολογία (λειτουργία καρδιάς και συνεργασία της με το αναπνευστικό σύστημα, συνεργασία εγκεφάλου με άλλα όργανα του σώματος) και η Ιατρική (εξάπλωση ασθενειών και επιδημιών).

Τα τελευταία χρόνια παρατηρείται μια έντονη και συστηματική προσπάθεια επεξεργασίας ενός μεγάλου όγκου θεωρητικών αποτελεσμάτων που έχουν συσσωρευθεί στην περιοχή των μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων. Η σωστή “μετάφραση” και εφαρμογή των αποτελεσμάτων αυτών αποβαίνει συχνά χρήσιμη στην πρόβλεψη και τον έλεγχο της συμπεριφοράς, αλλά και στο βέλτιστο σχεδιασμό, πρακτικών συστημάτων. Επιπλέον, αν και τα φυσικά μοντέλα είναι πολύ διαφορετικά, οι μεθοδολογίες που αναπτύσσονται και εφαρμόζονται σε μια επιστημονική περιοχή μπορεί να είναι εφαρμόσιμες και στις υπόλοιπες, με κατάλληλες μετατροπές. Έτσι, η συλλογή και ο συνδυασμός των πληροφοριών που προέρχονται από τις διάφορες επιστημονικές περιοχές και η παράλληλη υποστήριξη από συνεχώς βελτιωόμενες υπολογιστικές μηχανές και μεθοδολογίες, έχει επιφέρει μια άνθηση στην περιοχή των μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων, η οποία έγινε ιδιαίτερα αισθητή στην τελευταία εικοσαετία.

Η εφαρμογή μη γραμμικών μεθοδολογιών στην επίλυση τεχνικών προβλημάτων δεν αποσκοπεί στην απλή βελτίωση της ακρίβειας υπολογισμών, αλλά κυρίως στη σωστή πρόβλεψη της συμπεριφοράς και των σημαντικών αλλαγών που επέρχονται στην απόκριση ενός δυναμικού συστήματος. Για συστήματα με πολλούς βαθμούς ελευθερίας, γενική εξωτερική διέγερση και ισχυρή μη γραμμικότητα, ο συνήθης τρόπος επίλυσης βασίζεται σε μεθοδολογίες αριθμητικής ολοκλήρωσης. Σε τέτοιες

περιπτώσεις, η εκάστοτε προσδιοριζόμενη λύση εξαρτάται από τις δεδομένες αρχικές συνθήκες και επομένως δεν μπορεί να αποδοθεί η ολική εικόνα της δυναμικής απόκρισης, αφού δεν είναι εύκολος ο προσδιορισμός όλων των λύσεων που είναι πιθανό να συνυπάρχουν. Αντίθετα, όταν η απόκλιση από τα γραμμικά μοντέλα είναι μικρή, είναι δυνατή η αναλυτική επίλυση με εφαρμογή προσεγγιστικών μεθόδων. Αυτό είναι ιδιαίτερα αποτελεσματικό σε συστήματα ενός ή δύο βαθμών ελευθερίας, όπου μπορεί να γίνει εφαρμογή και τοπολογικών (γεωμετρικών) μεθόδων, οι οποίες είναι δυνατό να παρέξουν πλήρη εικόνα της δυναμικής συμπεριφοράς.

Η χρησιμότητα των προσεγγιστικών αναλυτικών μεθόδων έγκειται στο ότι οι ταλαντώσεις που εμφανίζονται στην πλειοψηφία των πρακτικών περιπτώσεων μπορεί να έχουν μεγάλο μεν, αλλά πεπερασμένο εύρος, λόγω της ενεργοποίησης μη γραμμικών μηχανισμών που περιορίζουν το εύρος της κίνησης. Επιπλέον, ακόμα και σε πολύπλοκα συστήματα, η απόκριση μπορεί συχνά να θεωρηθεί ότι γίνεται με τη συμμετοχή μίας ή δύο κυριαρχουσών ιδιομορφών, ανάλογα με την κατανομή των γραμμικών ιδιοσυχνοτήτων και τη σχέση τους με τις συχνότητες διέγερσης.

Ο κύριος σκοπός του παρόντος βιβλίου είναι η παρουσίαση των πιό σημαντικών και αποτελεσματικών σύγχρονων μεθοδολογιών που οδηγούν στην πρόβλεψη της συμπεριφοράς δυναμικών συστημάτων με μη γραμμικά χαρακτηριστικά. Ταυτόχρονα γίνεται και η παρουσίαση των κυριοτέρων νέων φαινομένων που παρατηρούνται σε τέτοια συστήματα. Στο πρώτο κεφάλαιο αναφέρονται φυσικές αιτίες που προκαλούν την εμφάνιση μη γραμμικών όρων στις εξισώσεις κίνησης μηχανικών συστημάτων και παρουσιάζονται απλά παραδείγματα, με τη βοήθεια των οποίων επιχειρείται μια πρώτη εισαγωγή στις νέες θεμελιώδεις έννοιες. Το δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζει αναλυτικές μεθόδους για τον προσδιορισμό ελεύθερης ταλάντωσης συστημάτων ενός βαθμού ελευθερίας. Η συμπεριφορά ταλαντωτών ενός βαθμού ελευθερίας σε εξωτερική διέγερση αναλύεται στο τρίτο κεφάλαιο, ενώ στο τέταρτο και πέμπτο κεφάλαιο ξεετάζονται πολυβάθμιοι ταλαντωτές με διακριτά και συνεχή χαρακτηριστικά, αντίστοιχα. Η ανάλυση παραμετρικών ταλαντώσεων παρουσιάζεται ξεχωριστά, στο έκτο κεφάλαιο, λόγω της μεγάλης πρακτικής σπουδαιότητάς τους. Στο έβδομο κεφάλαιο γίνεται μία εισαγωγή σε χρήσιμα αποτελέσματα και σε σύγχρονες θεωρίες δυναμικών συστημάτων. Τέλος, στο όγδοο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι βασικές μεθοδολογίες αριθμητικής ολοκλήρωσης εξισώσεων κίνησης, μαζί με συστηματικές μεθοδολογίες που προσδιορίζουν απευθείας μόνιμες καταστάσεις ταλάντωσης συστημάτων με μη γραμμικά χαρακτηριστικά.

Λόγω της ανάγκης να μελετηθούν και να ερμηνευθούν σωστά τα μη γραμμικά φαινόμενα, η περιοχή της ανάλυσης μη γραμμικών συστημάτων και των μη γραμμικών ταλαντώσεων, ειδικότερα, είναι στο επίκεντρο εντατικών σύγχρονων ερευνητικών προσπαθειών. Έτσι, η παρουσίαση του υλικού γίνεται με τρόπο που να πα-

ρέχει ένα απόσταγμα και συνδυασμό γνώσεων τόσο από τις κλασικές, όσο και από τις σύγχρονες μεθόδους για τη σωστή και ακριβή ανάλυση της συμπεριφοράς μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων. Οι μαθηματικοί χειρισμοί διατηρούνται σε επίπεδο που είναι κατανοητό από γνώστες της θεωρίας των γραμμικών ταλαντώσεων, η οποία αποτελεί θεμέλιο και αφετηρία για τα περισσότερα αποτελέσματα που παρουσιάζονται. Σε όλες τις περιπτώσεις δίνεται έμφαση στην ερμηνεία των αποτελεσμάτων και τις πρακτικές συνέπειές τους. Τα παραδείγματα και οι ασκήσεις στο τέλος κάθε κεφαλαίου είναι επιλεγμένα με τρόπο, ώστε να αποτελούν συμπλήρωμα της θεωρίας ή να δείχνουν κάποια χαρακτηριστική δυναμική συμπεριφορά. Ο κύριος αντικειμενικός σκοπός είναι αφενός η απόκτηση οικειότητας με τις αναλυτικές μεθόδους και αφετέρου η ανάπτυξη καλύτερης αίσθησης και εποπτείας της προσδοκώμενης συμπεριφοράς, όταν αντιμετωπίζονται παρόμοια ή συνθετότερα και δυσκολότερα πρακτικά προβλήματα.

Στο σημείο αυτό θέλω να εκφράσω τις ευχαριστίες μου στο προσωπικό των Εκδόσεων Ζήτη που βοήθησε για την αρτιότερη εμφάνιση του παρόντος βιβλίου.

Σωτήρης Νατσιάβας

Θεσσαλονίκη,
Ιανουάριος 2000

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ 13

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΠΗΓΕΣ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΟΡΩΝ	13
1.2 ΤΑΛΑΝΤΩΤΕΣ ΜΕ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑ	14
1.3 ΤΑΛΑΝΤΩΤΕΣ ΜΕ ΑΥΤΟΔΙΕΓΕΙΡΟΜΕΝΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ	19
1.4 ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ	21
1.5 ΤΑΛΑΝΤΩΤΕΣ ΜΕ ΤΜΗΜΑΤΙΚΑ ΣΤΑΘΕΡΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΚΑΙ ΑΠΟΣΒΕΣΗΣ	23
1.6 ΑΣΚΗΣΕΙΣ	25

2ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ 31

ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΕΝΟΣ ΒΑΘΜΟΥ ΕΛΕΥΘΕΡΙΑΣ

2.1 ΜΕΘΟΔΟΣ ΟΜΑΛΩΝ ΔΙΑΤΑΡΑΧΩΝ	31
2.2 ΜΕΘΟΔΟΣ LINDSTEDT - POINCARE	34
2.3 ΜΕΘΟΔΟΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ ΕΥΡΩΝ ΚΑΙ ΦΑΣΕΩΝ	36
2.4 ΜΕΘΟΔΟΣ ΠΟΛΛΑΠΛΩΝ ΧΡΟΝΙΚΩΝ ΚΛΙΜΑΚΩΝ	38
2.5 ΠΟΙΟΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ - ΕΠΙΠΕΔΟ ΦΑΣΕΩΝ	44
2.6 ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΣΤΑΘΕΡΩΝ ΛΥΣΕΩΝ	49
2.7 ΣΥΝΤΗΡΗΤΙΚΑ ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ	57
2.8 ΥΠΑΡΞΗ ΠΕΡΙΟΔΙΚΩΝ ΛΥΣΕΩΝ	67
2.9 ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΠΕΡΙΟΔΙΚΩΝ ΛΥΣΕΩΝ	68
2.10 ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ	74
2.11 ΑΣΚΗΣΕΙΣ	78

3ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ**87****ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ
ΕΝΟΣ ΒΑΘΜΟΥ ΕΛΕΥΘΕΡΙΑΣ**

3.1	ΤΑΛΑΝΤΩΤΗΣ DUFFING	88
3.1.1	Κύριος Συντονισμός	88
3.1.2	Δευτερεύοντες Συντονισμοί	100
3.2	ΤΑΛΑΝΤΩΤΗΣ ΜΕ ΑΣΥΜΜΕΤΡΗ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑ	106
3.3	ΤΑΛΑΝΤΩΤΗΣ RAYLEIGH	109
3.4	ΤΑΛΑΝΤΩΤΗΣ ΜΕ ΤΜΗΜΑΤΙΚΑ ΣΥΝΕΧΗ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ	117
3.5	ΑΣΚΗΣΕΙΣ	125

4ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ**133****ΠΟΛΥΒΑΘΜΙΑ ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ**

4.1	ΤΑΛΑΝΤΩΤΗΣ ΜΕ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑ	134
4.1.1	Εξισώσεις Κίνησης - Αδιαστατοποίηση	134
4.1.2	Προσεγγιστική Μεθοδολογία Επίλυσης	136
4.1.3	Ταλάντωση χωρίς Εσωτερικό Συντονισμό	138
4.1.4	Ταλάντωση με 1:1 Εσωτερικό Συντονισμό	139
4.1.5	Ταλάντωση με 1:3 Εσωτερικό Συντονισμό	147
4.1.6	Ταλάντωση με Συντονισμό Συνδυασμού	150
4.2	ΤΑΛΑΝΤΩΤΗΣ ΜΕ ΑΥΤΟΔΙΕΓΕΙΡΟΜΕΝΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ	152
4.2.1	Εξισώσεις Κίνησης - Αδιαστατοποίηση	152
4.2.2	Προσεγγιστική Μεθοδολογία Επίλυσης	154
4.2.3	Ελεύθερη Ταλάντωση χωρίς Εσωτερικό Συντονισμό	155
4.2.4	Ελεύθερη Ταλάντωση με 1:3 Εσωτερικό Συντονισμό	160
4.3	ΤΑΛΑΝΤΩΤΗΣ ΜΕ ΑΣΥΜΜΕΤΡΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ	168
4.3.1	Εξισώσεις Κίνησης - Προσεγγιστική Ανάλυση	168
4.3.2	Κύριος Εξωτερικός Συντονισμός της Χαμηλής Ιδιομορφής	170
4.3.3	Κύριος Εξωτερικός Συντονισμός της Υψηλής Ιδιομορφής	171
4.4	ΓΥΡΟΣΚΟΠΙΚΟΣ ΤΑΛΑΝΤΩΤΗΣ	172
4.4.1	Εξισώσεις Κίνησης	172
4.4.2	Προσεγγιστική Επίλυση	173
4.5	ΑΣΚΗΣΕΙΣ	177

5ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ**187****ΣΥΝΕΧΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ**

5.1	ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΔΟΚΟΥ	188
-----	-----------------	-----

5.1.1	Υποθέσεις - Παραγωγή Εξισώσεων Κίνησης	188
5.1.2	Αδιαστατοποίηση	199
5.1.3	Γεωμετρική Διακριτοποίηση	201
5.2	ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΧΟΡΔΗΣ	207
5.3	ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΚΑΛΩΔΙΟΥ	211
5.4	ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΠΛΑΚΑΣ	215
5.5	ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟΥ ΚΕΛΥΦΟΥΣ	225
5.6	ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΠΕΡΙΣΤΡΕΦΟΜΕΝΟΥ ΔΑΚΤΥΛΙΟΥ	231
5.6.1	Μηχανικό Μοντέλο - Εξισώσεις Κίνησης	232
5.6.2	Γεωμετρική Διακριτοποίηση	235
5.6.3	Απόκριση σε Εξωτερική Διέγερση δυο Αρμονικών	237
5.6.4	Απόκριση σε Αρμονική Εξωτερική Διέγερση	240
5.6.5	Αριθμητικά Αποτελέσματα	243
5.7	ΑΣΚΗΣΕΙΣ	243

6ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

255

ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΑ ΔΙΕΓΕΙΡΟΜΕΝΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

6.1	ΤΑΛΑΝΤΩΤΗΣ ΜΑΤΗΙΕΥ	256
6.2	ΤΑΛΑΝΤΩΤΗΣ ΜΑΤΗΙΕΥ-DUFFING	265
6.3	ΠΟΛΥΒΑΘΜΙΟΣ ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΤΑΛΑΝΤΩΤΗΣ	269
6.4	ΠΟΛΥΒΑΘΜΙΟΣ ΤΑΛΑΝΤΩΤΗΣ ΜΕ ΑΣΥΜΜΕΤΡΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ	271
6.5	ΠΟΛΥΒΑΘΜΙΟΣ ΤΑΛΑΝΤΩΤΗΣ ΜΕ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑ	274
6.6	ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΔΙΕΓΕΡΣΗ ΠΕΡΙΣΤΡΕΦΟΜΕΝΟΥ ΔΑΚΤΥΛΙΟΥ	276
6.6.1	Απόκριση μιας Ιδιομορφής	277
6.6.2	Απόκριση δυο Ιδιομορφών	280
6.7	ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΔΙΕΓΕΡΣΗ ΠΛΑΚΑΣ	284
6.8	ΑΣΚΗΣΕΙΣ	286

7ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

299

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

7.1	ΟΡΙΣΜΟΣ ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ	299
7.1.1	Δυναμικά Συστήματα Διαφορικών Εξισώσεων - Ροές	300
7.1.2	Δυναμικά Συστήματα Εξισώσεων Διαφορών - Απεικονίσεις	310
7.2	ΚΕΝΤΡΙΚΟΙ ΥΠΟΧΩΡΟΙ	319
7.2.1	Κεντρικοί Υποχώροι Ροών	320
7.2.2	Κεντρικοί Υποχώροι Απεικονίσεων	325
7.3	ΚΑΝΟΝΙΚΕΣ ΜΟΡΦΕΣ ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ	327
7.3.1	Κανονικές Μορφές Ροών	327

7.3.2	Κανονικές Μορφές Απεικονίσεων	341
7.4	ΤΟΠΙΚΕΣ ΔΙΑΚΛΑΔΩΣΕΙΣ	345
7.4.1	Τοπικές Διακλαδώσεις Ροών	345
7.4.2	Τοπικές Διακλαδώσεις Απεικονίσεων	354
7.5	ΟΛΙΚΕΣ ΔΙΑΚΛΑΔΩΣΕΙΣ	367
7.5.1	Ομοκλινική Διακλάδωση σε Επίπεδο Δυναμικό Σύστημα	368
7.5.2	Ομοκλινικές Τροχιές σε Σάγμα Τρισδιάστατου Συστήματος	372
7.5.3	Ομοκλινικές Τροχιές σε Σάγμα-Εστία Τρισδιάστατου Συστήματος	373
7.6	ΧΑΟΤΙΚΗ ΑΠΟΚΡΙΣΗ	374
7.7	ΑΣΚΗΣΕΙΣ	385

8ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

395

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ

8.1	ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ	395
8.1.1	Μέθοδος Newton-Raphson	396
8.1.2	Μέθοδοι Συνέχισης Λύσεων	398
8.1.3	Ομοτοπική Μέθοδος	407
8.2	ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΚΙΝΗΣΗΣ	412
8.2.1	Γραμμικές Μέθοδοι Πολλαπλού Βήματος	413
8.2.2	Μέθοδοι Runge-Kutta	420
8.2.3	Συστήματα Διαφορικών Εξισώσεων	424
8.2.4	Συστήματα Δεύτερης Τάξης	427
8.3	ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΠΕΡΙΟΔΙΚΩΝ ΑΠΟΚΡΙΣΕΩΝ	430
8.3.1	Μέθοδος Πεπερασμένων Διαφορών	431
8.3.2	Μέθοδος Βολής	437
8.3.3	Μέθοδος Τριγωνομετρικού Συντοπισμού	440
8.3.4	Μέθοδος Αρμονικής Ισορροπίας	442
8.3.5	Μέθοδοι Συνέχισης Περιοδικών Λύσεων	444
8.4	ΑΣΚΗΣΕΙΣ	451

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

461

1ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Εισαγωγή

Στο παρόν κεφάλαιο γίνεται αρχικά μια γενική αναφορά στις διάφορες φυσικές αιτίες που αποτελούν τις συνηθέστερες πηγές εμφάνισης μη γραμμικών όρων στις εξισώσεις κίνησης μηχανικών συστημάτων. Στη συνέχεια παρουσιάζονται μερικά απλά παραδείγματα ενός βαθμού ελευθερίας που χρησιμοποιούνται ως πρότυπα και βάση στη θεωρία μη γραμμικών ταλαντώσεων, γιατί εμπεριέχουν τους πιο χαρακτηριστικούς μη γραμμικούς όρους και εμφανίζουν τα σημαντικότερα φαινόμενα που προκαλούνται από αυτούς. Πιο συγκεκριμένα, παρουσιάζονται οι ταλαντωτές Duffing, van der Pol και Mathieu-Duffing, οι οποίοι αποτελούν τα πρότυπα μοντέλα για συστήματα που εμφανίζουν μη γραμμική στιβαρότητα, για συστήματα με αυτοδιεγείρομενα χαρακτηριστικά και για συστήματα που εκτελούν παραμετρικές ταλαντώσεις, αντίστοιχα. Τέλος, παρουσιάζεται και ένα σύστημα με τμηματικά γραμμικά χαρακτηριστικά στιβαρότητας και απόσβεσης. Με τον τρόπο αυτό γίνεται μία πρώτη εισαγωγή στις κυριότερες καινούργιες έννοιες και φαινόμενα που συνδέονται με την παρουσία μη γραμμικών όρων στις εξισώσεις κίνησης.

1.1 ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΠΗΓΕΣ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΟΡΩΝ

Μια συνήθης αιτία εμφάνισης μη γραμμικής συμπεριφοράς προέρχεται από τις ονομαζόμενες **υλικές** μη γραμμικότητες. Για παράδειγμα, αυτό συμβαίνει όταν το τμήμα κάποιου μηχανικού φορέα φορτίζεται σε συνθήκες όπου ο καταστατικός νόμος συμπεριφοράς του είναι ελαστικός αλλά μη γραμμικός (π.χ. πολυμερή υλικά, ελαστικά) ή όταν φορτίζεται στην πλαστική περιοχή.

Σε λεπτούς φορείς, όπως οι δοκοί, οι πλάκες και τα κελύφη, μπορεί να αναπτυχθούν αρκετά μεγάλες παραμορφώσεις, ώστε να καθίσταται αναγκαία η χρησιμοποίηση μερικών τουλάχιστον από τους μη γραμμικούς όρους στις σχέσεις τροπών-παρα-

μορφώσεων. Σε τέτοιες περιπτώσεις, οι εμφανιζόμενες μη γραμμικότητες χαρακτηρίζονται ως **γεωμετρικές** και αντιπροσωπεύουν τη σύζευξη της καμπτικής και της αξονικής δράσης του φορέα. Τυπικό παράδειγμα αποτελεί η ταλάντωση λεπτών φορέων υπό την επίδραση θλιπτικών αξονικών φορτίων που είναι συγκρίσιμα με τα αντίστοιχα φορτία λυγισμού τους.

Σε πολλές περιπτώσεις οι μη γραμμικοί όροι σχετίζονται με αδρανειακούς όρους (κλασικό παράδειγμα αποτελούν οι εξισώσεις κίνησης ρευστών) ή με κινήσεις στοιχείων μηχανών (π.χ. κίνηση βραχίονα βιομηχανικού ρομπότ ή εκκρεμών διατάξεων) που περιλαμβάνουν μετατοπίσεις στερεού σώματος με μεγάλο εύρος και αλλάζουν σημαντικά το αρχικό σχήμα του συστήματος. Οι μη γραμμικότητες αυτές είναι γνωστές ως **κινηματικές**.

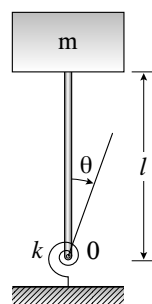
Οι περισσότεροι μηχανισμοί **απόσβεσης** συνδέονται επίσης με μη γραμμική δράση. Για παράδειγμα, η εσωτερική απόσβεση που αναπτύσσεται στη διάρκεια εναλλασσόμενης φόρτισης μηχανικών φορέων, η αεροδυναμική αντίσταση και δυναμική άνωση που παρατηρείται κατά τη ροή ρευστού γύρω από στερεό, η υδροδυναμική τριβή που αναπτύσσεται σε έδρανα ολίσθησης, καθώς και η κλασική τριβή Coulomb περιγράφονται από μη γραμμικές σχέσεις αιτίου-αποτελέσματος.

Τέλος, μια άλλη πολύ συνηθισμένη αιτία εμφάνισης μη γραμμικότητας συνδέεται με τη μεταβολή της επιφάνειας επαφής ή τη σύγκρουση διαφορετικών σωμάτων. Τυπικά παραδείγματα αποτελούν συστήματα με συγκρουόμενα μέλη (π.χ. πρέσες, διατροχητικές και τυπογραφικές μηχανές) ή εμπλεκόμενες συνιστώσες (π.χ. ζεύγη οδοντωτών τροχών), η αποκόλληση μηχανής από το θεμέλιό της λόγω ισχυρής διέγερσης εδάφους και η επαφή παραμορφώσιμων σωμάτων με διαφορετικές καμπυλότητες (πρόβλημα Hertz).

1.2 ΤΑΛΑΝΤΩΤΕΣ ΜΕ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑ

Το σχήμα 1.2.1 δείχνει το απλοποιημένο μοντέλο μιας μηχανικής διάταξης, η οποία μπορεί να αποκλίνει από την κατακόρυφη θέση ισορροπίας της όταν το βάρος της υπερβεί κάποια κρίσιμη τιμή. Αποτελείται από εξέδρα μάζας m και από μία ανεστραμμένη και αβαρή ράβδο μήκους l , η οποία στηρίζεται στο κάτω άκρο της με ελατήριο σταθερής στρεπτικής στιβαρότητας k . Η διάταξη τίθεται σε ελεύθερη ταλάντωση υπό την επίδραση γνωστών αρχικών συνθηκών μετατόπισης και ταχύτητας. Θεωρώντας την περιστροφή του εκκρεμούς ως προς το σημείο στήριξης O , η εξίσωση κίνησής του προκύπτει στη μορφή

$$m\ddot{\theta} + k\theta - mgl/\sin\theta = 0, \quad (1.2.1)$$



Σχήμα 1.2.1

όπου g είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας. Εισάγοντας τις παραμέτρους

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad \text{και} \quad p = \frac{mg/l}{k} \quad (1.2.2)$$

(τί αντιπροσωπεύουν αυτές οι παράμετροι;), η παραπάνω μη γραμμική κανονική διαφορική εξίσωση μπορεί να τεθεί στη μορφή

$$\ddot{\theta} + \frac{\omega_0^2}{p} (\theta - p \sin \theta) = 0. \quad (1.2.3)$$

Σε αντίθεση με τα γραμμικά συστήματα, η παραπάνω εξίσωση δέχεται διάφορους τύπους λύσεων. Για παράδειγμα, όταν το εξεταζόμενο σύστημα βρεθεί σε ορισμένες θέσεις, τότε μπορεί να παραμείνει σε στατική ισορροπία. Στις θέσεις αυτές, οι χρονικές παράγωγοι της γωνίας θ είναι μηδενικές. Επομένως, από την εξίσωση (1.2.3) φαίνεται ότι οι θέσεις αυτές προσδιορίζονται από τη συνθήκη

$$\theta_0 - p \sin \theta_0 = 0. \quad (1.2.4)$$

Προφανώς, η εξίσωση αυτή εμφανίζει τη **μηδενική** λύση για κάθε τιμή της παραμέτρου p . Επιπλέον, είναι εύκολο να αποδειχθεί με τη βοήθεια κατάλληλης γραφικής παράστασης ότι, για $p > 1$, εμφανίζονται και δύο άλλες **πλάγιες** στατικές λύσεις (συμμετρικές ως προς την κατακόρυφη θέση).

Στη συνέχεια θεωρείται ότι το σύστημα εκτελεί ταλαντώσεις μικρού εύρους γύρω από μία θέση στατικής ισορροπίας του $\theta = \theta_0$. Για τη μελέτη των ταλαντώσεων αυτών εκφράζεται η γωνία θ με τη σχέση

$$\theta = \theta_0 + \varepsilon \theta_1, \quad (1.2.5)$$

όπου ε είναι μια θετική σταθερά με μικρή τιμή ($0 < \varepsilon \ll 1$). Αντικαθιστώντας την τελευταία σχέση στην εξίσωση κίνησης (1.2.3), αναπτύσσοντας σε σειρά Taylor γύρω από τη θέση ισορροπίας και διατηρώντας μόνο μέχρι και τους γραμμικούς όρους ως προς ε προκύπτει ότι η προσεγγιστική εξίσωση κίνησης είναι

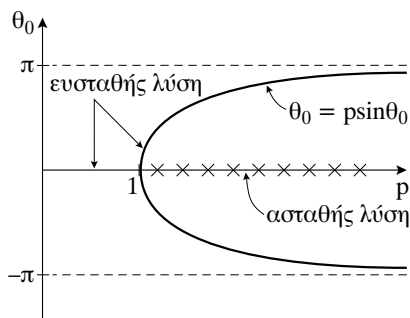
$$\ddot{\theta}_1 + \frac{\omega_0^2}{p} (1 - p \cos \theta_0) \theta_1 = 0, \quad (1.2.6)$$

η οποία είναι γραμμική. Έτσι, γίνεται φανερός ο τρόπος με τον οποίο επέρχεται η **γραμμικοποίηση** της εξίσωσης κίνησης. Δηλαδή με εφαρμογή της υπόθεσης για ταλαντώσεις μικρού εύρους γύρω από θέση στατικής ισορροπίας. Επιπλέον, η μορφή της κίνησης καθορίζεται από το πρόσημο της σταθερής ποσότητας

$$\alpha = \frac{\omega_0^2}{p} (1 - p \cos \theta_0). \quad (1.2.7)$$

Για τη μηδενική λύση (που αντιστοιχεί στην κατακόρυφη θέση της ράβδου) η ποσότητα αυτή είναι θετική όταν $p < 1$ και αρνητική όταν $p > 1$. Αυτό σημαίνει ότι για $p < 1$ και μικρές αποκλίσεις στις τιμές των αρχικών συνθηκών που οδηγούν στη θέση ισορροπίας $\theta_0 = 0$ (ποιές είναι αυτές οι τιμές;) το εκκρεμές παραμένει κοντά στην αρχική του θέση και εκτελεί αρμονική ταλάντωση με μικρό εύρος και συχνότητα ίση με \sqrt{a} . Αντίθετα, αν αυξηθεί το βάρος της κατασκευής ή μειωθεί η σιβαρότητα της στήριξης, ώστε να γίνει $p > 1$, η (1.2.6) προβλέπει ότι η παραμικρή απόκλιση από τη θέση ισορροπίας $\theta_0 = 0$ θα οδηγήσει το εκκρεμές “στο άπειρο”, με εκθετικό ρυθμό. Πρακτικά, αυτό σημαίνει ότι η παραμικρή διαταραχή θα ωθήσει το εκκρεμές σε θέσεις που απέχουν πολύ από την αρχική θέση ισορροπίας. Για το λόγο αυτό, η στατική λύση $\theta_0 = 0$ χαρακτηρίζεται ως **ευσταθής** για $p < 1$ και ως **ασταθής** για $p > 1$.

Με παρόμοιο τρόπο, η μελέτη της γραμμικοποιημένης εξίσωσης κίνησης (1.2.6) γύρω από τις πλάγιες θέσεις ισορροπίας, οι οποίες εμφανίζονται για $p > 1$, δείχνει ότι οι λύσεις αυτές είναι ευσταθείς. Τα αποτελέσματα της ανάλυσης αυτής συνοψίζονται στο σχήμα 1.2.2, το οποίο δείχνει την εξάρτηση του εύρους και της ευστάθειας όλων των στατικών λύσεων, από την τιμή της παραμέτρου p .



Σχήμα 1.2.2

- **Παρατήρηση 1.2.1:** Στην ειδική περίπτωση με $k = 0$, η εξίσωση κίνησης (1.2.3) γίνεται

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \sin \varphi = 0,$$

με $\varphi = \pi - \theta$, η οποία αποτελεί τη γνωστή εξίσωση κίνησης εκκρεμών διατάξεων. Ποιές είναι οι αντίστοιχες στατικές θέσεις ισορροπίας και ποιά είναι η ευστάθειά τους;

- **Παρατήρηση 1.2.2:** Όπως φαίνεται από την αρχική εξίσωση κίνησης (1.2.3), ο μη γραμμικός όρος της μπορεί να ερμηνευθεί και ως ισοδύναμη σιβαρότητα που εξαρτάται από τη θέση και το εύρος ταλάντωσης. Ο ταλαντωτής (1.2.3)

ονομάζεται **ισχυρά μη γραμμικός**. Σε τέτοιες περιπτώσεις, ο μόνος τρόπος ανάλυσης της δυναμικής συμπεριφοράς είναι γενικά η αριθμητική ολοκλήρωση για δεδομένες αρχικές συνθήκες. Για ταλαντώσεις μικρού εύρους γύρω από μια θέση ισορροπίας προκύπτει η γραμμικοποιημένη εξίσωση κίνησης (1.2.6). Για μεγαλύτερο αλλά πεπερασμένο εύρος ταλάντωσης πρέπει να εισαχθούν και οι κυρίαρχοι μη γραμμικοί όροι. Πιο συγκεκριμένα, για τη λύση $\theta_0 = 0$, η εξίσωση κίνησης παίρνει τη μορφή

$$\ddot{\theta}_1 + \frac{\omega_0^2}{p} \left[(1-p)\theta_1 + \frac{\varepsilon^2}{6} \theta_1^3 \right] = 0. \quad (1.2.8)$$

Επειδή η τιμή του ε είναι μικρή (σε σχέση με τη μονάδα), ο ταλαντωτής (1.2.8) ονομάζεται **ασθενώς μη γραμμικός**. Για τον ταλαντωτή αυτό είναι δυνατή η εύρεση προσεγγιστικών αναλυτικών λύσεων, όπως θα παρουσιασθεί σε επόμενα κεφάλαια.

- **Παρατήρηση 1.2.3:** Ταλαντώσεις πεπερασμένου εύρους γύρω από τις **πλάγιες** θέσεις ισορροπίας περιγράφονται από εξίσωση κίνησης με μορφή

$$\ddot{\theta}_1 + \alpha \theta_1 + \varepsilon \beta \theta_1^2 + \varepsilon^2 \gamma \theta_1^3 = 0 \quad (1.2.9)$$

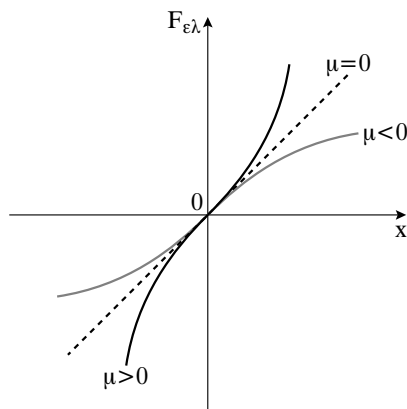
(ποιά είναι η έκφραση των σταθερών α , β και γ ;). Στην εξίσωση αυτή ο πρώτος μη γραμμικός όρος είναι τετραγωνικός, ενώ στην (1.2.8) ήταν κυβικός (ποιά είναι η φυσική σημασία αυτού του αποτελέσματος;).

- **Παρατήρηση 1.2.4:** Η εξίσωση (1.2.8) περικλείει μαζί με τους γραμμικούς όρους και τον κυβικό όρο της μετατόπισης και ανήκει στην ειδική κατηγορία των **ταλαντωτών Duffing**. Το χαρακτηριστικό αυτών των ταλαντωτών είναι ότι η σχέση μεταξύ της δύναμης και της προκαλούμενης επιμήκυνσης των ελατηρίων τους δεν εκφράζεται από τον κλασικό γραμμικό νόμο $F_{ελ} = kx$, αλλά από τον τύπο

$$F_{ελ} = kx + \mu x^3.$$

Αν $\mu > 0$, η ισοδύναμη στιβαρότητα αυξάνεται με αύξηση της τιμής της μετατόπισης, ενώ αν $\mu < 0$ η στιβαρότητα μειώνεται με αύξηση της μετατόπισης (σχήμα 1.2.3). Για το λόγο αυτό, τέτοια συστήματα είναι γνωστά ως συστήματα με **θετική ή αρνητική κράτυνση**, αντίστοιχα. Σε τέτοιες περιπτώσεις, με την εισαγωγή όρων γραμμικής απόσβεσης και εξωτερικής διέγερσης η εξίσωση κίνησης του ταλαντωτή Duffing παίρνει μορφή

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx + \mu x^3 = F(t). \quad (1.2.10)$$



Σχήμα 1.2.3

Εξισώσεις της μορφής αυτής προκύπτουν και από τη μελέτη της ταλαντωτικής συμπεριφοράς συνεχών μηχανικών φορέων (π.χ. δοκοί, πλάκες, κελύφη), μετά την εφαρμογή κάποιας μεθοδολογίας γεωμετρικής διακριτοποίησης των αρχικών εξισώσεων κίνησης (βλέπε άσκηση 1.8 και κεφάλαιο 5).

- **Παρατήρηση 1.2.5:** Πολλές φορές είναι βολικό να γίνεται η μελέτη μη γραμμικών εξισώσεων κίνησης, αφού προηγηθεί κατάλληλη **αδιαστατοποίηση** τους. Μάλιστα, σε περίπτωση που επιζητείται προσεγγιστική αναλυτική λύση τους, η αδιαστατοποίηση επιβάλλεται για τον προσδιορισμό της τάξης μεγέθους των διαφορών όρων τους. Έτσι, αν θεωρηθεί ο ταλαντωτής Duffing με αρμονική φόρτιση, δηλαδή $F(t) = F_0 \cos \omega t$ και εισαχθούν το χαρακτηριστικό μήκος x_c , ο αδιάστατος χρόνος $\tau = \omega_0 t$ και η αδιάστατη μετατόπιση $u(\tau) = x(t)/x_c$, τότε με εφαρμογή αλυσωτής παραγώγισης προκύπτει

$$\dot{x} = \omega_0 x_c \dot{u} \quad \text{και} \quad \ddot{x} = \omega_0^2 x_c \ddot{u}.$$

Έτσι, με απευθείας αντικατάσταση, η εξίσωση (1.2.10) παίρνει την αδιάστατη μορφή

$$\ddot{u} + 2\zeta \dot{u} + u + \varepsilon \alpha u^3 = f \cos \Omega \tau, \quad (1.2.11)$$

με παραμέτρους

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \zeta = \frac{c}{2\sqrt{mk}}, \quad f = \frac{F_0}{kx_c}, \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad \varepsilon \alpha = \frac{\mu}{k} x_c^2.$$

Όπως θα αποδειχθεί στο τρίτο κεφάλαιο, στη διάρκεια αρμονικής διέγερσης ο ταλαντωτής Duffing εμφανίζει εκτός από τον **κύριο συντονισμό** (που προκύπτει όταν $\Omega \approx 1$) και **δευτερεύοντες συντονισμούς**, σε αντίθεση με το γραμμικό τα-

λαντωτή. Για παράδειγμα, παρουσιάζει υποαρμονικό συντονισμό όταν $\Omega \approx 3$ και υπεραρμονικό συντονισμό για $\Omega \approx 1/3$. Επιπλέον, είναι δυνατή η συνύπαρξη πολλαπλών λύσεων για τις ίδιες τιμές των παραμέτρων του συστήματος, αλλά διαφορετικές αρχικές συνθήκες. Αντίθετα, ο ασύμμετρος ταλαντωτής με εξίσωση κίνησης την (1.2.9) παρουσιάζει υποαρμονικό συντονισμό όταν $\Omega \approx 2$ και υπεραρμονικό συντονισμό για $\Omega \approx 1/2$.

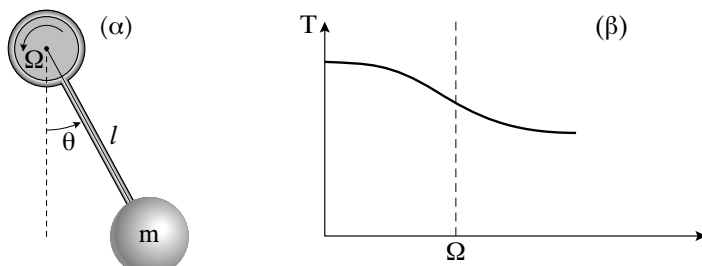
- **Παρατήρηση 1.2.6:** Εκτός από τις στατικές λύσεις και την αρμονική απόκριση, η αρχική εξίσωση κίνησης (1.2.1) μπορεί να παρουσιάσει και περιοδική απόκριση (για μεγαλύτερα εύρη ταλάντωσης), όπως θα παρουσιασθεί στο επόμενο κεφάλαιο. Επιπλέον, είναι δυνατό να εμφανισθούν και κινήσεις που περιλαμβάνουν πλήρεις περιστροφές του εκκρεμούς (librations). Από την άλλη μεριά, ταλαντωτές με γενική μη γραμμική δύναμη ελατηρίου μπορεί να παρουσιάσουν μόνιμη κατάσταση με περιοδική απόκριση ή με περιοδικά μεταβαλλόμενο εύρος απόκρισης υπό την επίδραση αρμονικής διέγερσης. Επίσης, για μερικούς συνδυασμούς των τεχνικών παραμέτρων, είναι πιθανό να εμφανίσουν και ακανόνιστη, απεριοδική απόκριση (ακόμη και μετά από πολύ μεγάλο χρόνο εφαρμογής της διέγερσης), η οποία χαρακτηρίζεται ως **χαοτική**.

1.3 ΤΑΛΑΝΤΩΤΕΣ ΜΕ ΑΥΤΟΔΙΕΓΕΙΡΟΜΕΝΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ

Σε πολλές πρακτικές εφαρμογές παρατηρούνται μόνιμες ταλαντώσεις σταθερού ή μεταβλητού εύρους ακόμη και σε συστήματα στα οποία δεν υπάρχει εξωτερική διέγερση. Ως τυπικά παραδείγματα αναφέρονται ταλαντώσεις που αναπτύσσονται κατά τη διάρκεια κοπής μετάλλων, ταλαντώσεις μηχανικών σωμάτων που παρεμβάλλονται στη ροή ρευστών και ταλαντώσεις περιστρεφόμενων ατράκτων οι οποίες στηρίζονται σε έδρανα ολίσθησης. Στις περιπτώσεις αυτές, οι δυνάμεις που προκαλούν την ταλάντωση δημιουργούνται από την ίδια την κίνηση του συστήματος. Για το λόγο αυτό, τέτοιες ταλαντώσεις ονομάζονται **αυτοδιεγερόμενες**.

Ένα από τα πρώτα πειράματα που είχαν σκοπό να εξηγήσουν τη δημιουργία και εμφάνιση αυτοδιεγερόμενων ταλαντώσεων έγινε από τον Froude. Η πειραματική διάταξη που χρησιμοποιήθηκε αποτελείται από εκκρεμές μήκους l και μάζας m , το οποίο συνδέεται με άτρακτο που περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα Ω , όπως δείχνει το σχήμα 1.3.1α. Λόγω της τριβής, αναπτύσσεται στη σύνδεση εκκρεμούς-ατράκτου συνισταμένη ροπή T , η οποία δεν είναι σταθερή αλλά ασθενώς φθίνουσα συνάρτηση της σχετικής γωνιακής ταχύτητας $\omega = \Omega - \dot{\theta}$, όπως δείχνει το σχήμα 1.3.1β, με χαρακτηριστικά

$$T(\Omega) > 0, \quad T'(\Omega) < 0, \quad T''(\Omega) \approx 0, \quad T'''(\Omega) > 0.$$



Σχήμα 1.3.1

Η εξίσωση κίνησης του εκκρεμούς για μικρές γωνίες ταλάντωσης γύρω από την κατακόρυφη θέση $\theta_0 = 0$ είναι

$$m l^2 \ddot{\theta} + mg l \theta = T(\omega). \quad (1.3.1)$$

Θεωρώντας ότι η τιμή της γωνιακής ταχύτητας $\dot{\theta}$ παραμένει μικρή σε σχέση με την Ω , αναπτύσσοντας τη στρεπτική ροπή T σε σειρά Taylor γύρω από την Ω (διατηρώντας τους πρώτους τέσσερις όρους) και εισάγοντας τις παραμέτρους

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad \varepsilon = -\frac{T'(\Omega)}{m l^2}, \quad \beta = -\frac{T'''(\Omega)}{2T'(\Omega)}, \quad \varphi(t) = \theta(t) - \frac{T(\Omega)}{mg l},$$

η εξίσωση κίνησης παίρνει τη μορφή

$$\ddot{\varphi} - \varepsilon \left(1 - \frac{\beta}{3} \dot{\varphi}^2\right) \dot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0. \quad (1.3.2)$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι γνωστή ως εξίσωση **ταλαντωτή του Rayleigh**. Προφανώς, η μηδενική λύση ικανοποιεί την (1.3.2). Όμως, η παραμικρή διαταραχή οδηγεί σε ταλαντώσεις με αρχικά αυξανόμενο εύρος, αφού για μικρές τιμές της ταχύτητας $\dot{\varphi}$ ο δεύτερος όρος της εξίσωσης ισοδυναμεί με αρνητική απόσβεση και δρα ως προμηθευτής ενέργειας του ταλαντωτή, με αποτέλεσμα την περαιτέρω αύξηση του εύρους ταλάντωσης. Μετά από ένα ορισμένο όριο στην τιμή της $\dot{\varphi}$, το πρόσημο του όρου αυτού γίνεται θετικό και επομένως ο μηχανισμός απόσβεσης αρχίζει να απορροφά ενέργεια από το σύστημα, οπότε αρχίζει η σταδιακή μείωση στο εύρος ταλάντωσης. Με βάση τα παραπάνω, γίνεται εύκολο να κατανοηθεί γιατί το σύστημα μπορεί τελικά να εκτελεί περιοδική ταλάντωση με κάποιο ενδιάμεσο αλλά πεπερασμένο εύρος ταλάντωσης, αν και δεν υπάρχει όρος εξωτερικής φόρτισης στην (1.3.2), ανεξάρτητος της κίνησης.

Στη διάρκεια μιας περιόδου ταλάντωσης σε μόνιμη κατάσταση, η ενέργεια που προσφέρεται στο σύστημα στο χρονικό διάστημα στο οποίο οι τιμές της ταχύτητας $\dot{\varphi}$ είναι χαμηλές, απορροφάται κατά το διάστημα με τις υψηλές τιμές της $\dot{\varphi}$. Στο φυσικό σύστημα, ο λόγος που ξεκινά η αυτοδιεγερόμενη ταλάντωση οφείλεται στην

εξάρτηση της ροπής από τη σχετική γωνιακή ταχύτητα. Όπως φαίνεται στο σχήμα 1.3.1β, η ροπή είναι μεγαλύτερη όταν το εκκρεμές κινείται αντίθετα με την άτρακτο, οπότε προσδίδεται ενέργεια από την άτρακτο στο εκκρεμές. Έτσι, στη διάρκεια ενός κύκλου αρχικής ταλάντωσης το καθαρό έργο που παραμένει στο εκκρεμές είναι θετικό και προκαλεί σταδιακή αύξηση του εύρους ταλάντωσης.

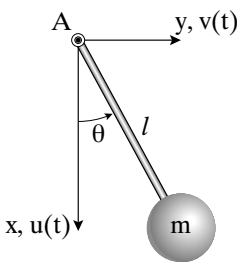
► **Παρατήρηση 1.3.1:** Παραγωγή της εξίσωσης (1.3.2) ως προς το χρόνο και εισαγωγή της μεταβλητής $v = \dot{\varphi}$ οδηγεί στην εξίσωση κίνησης

$$\ddot{v} - \varepsilon(1 - \beta v^2)\dot{v} + \omega_0^2 v = 0, \tag{1.3.3}$$

η οποία είναι γνωστή ως εξίσωση του **van der Pol**.

1.4 ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

Στα προηγούμενα παραδείγματα οι συντελεστές των όρων των εξισώσεων κίνησης ήταν σταθεροί και η διέγερση προερχόταν από αρχικές συνθήκες ή και από χρονικές συναρτήσεις που εμφανιζόταν ως μη ομογενείς όροι. Σε πολλές πρακτικές περιπτώσεις, όμως, η διέγερση ενός δυναμικού συστήματος προκαλείται από χρονικά εξαρτούμενους συντελεστές της εξίσωσης κίνησης. Επειδή αυτό είναι ισοδύναμο με την παρουσία χρονικά μεταβλητών τεχνικών παραμέτρων (μάζας, απόσβεσης, σιβαρότητας) του συστήματος, οι προκαλούμενες ταλαντώσεις χαρακτηρίζονται ως **παραμετρικές**.



Σχήμα 1.4.1

Τυπικά, η φυσική αιτία για την εμφάνιση παραμετρικών ταλαντώσεων συνδέεται με την παρουσία ενός μηχανισμού ο οποίος απορροφά ενέργεια από μια ιδιομορφή κίνησης και την προσφέρει σε άλλη ιδιομορφή, η οποία δεν διεγείρεται άμεσα. Η εκκρεμής μηχανική διάταξη του σχήματος 1.4.1 αποτελεί το απλούστερο χαρακτηριστικό παράδειγμα διακριτού παραμετρικού ταλαντωτή. Αν το άκρο A της διάταξης μετακινείται με γνωστή μετατόπιση $u(t)$ και $v(t)$ στην κατακόρυφη και οριζόντια διεύθυνση, αντίστοιχα, η εξίσωση που περιγράφει την κίνηση στο επίπεδο Oxy έχει μορφή

$$\mathbf{M}_P = \dot{\mathbf{H}}_P + \mathbf{v}_P \times (m \mathbf{v}_G) \Rightarrow m l^2 \ddot{\theta} + m l [g + \ddot{u}(t)] \sin \theta - m l \ddot{v}(t) \cos \theta = 0.$$

Επομένως, για ταλαντώσεις μικρού εύρους ως προς $\theta_0 = 0$, η αντίστοιχη γραμμική εξίσωση κίνησης είναι

$$\ddot{\theta} + \frac{1}{l} [g + \ddot{u}(t)] \theta = \frac{1}{l} \ddot{v}(t).$$

Από την εξίσωση αυτή φαίνεται ότι στην εξεταζόμενη ακρίβεια, η οριζόντια συνιστώσα της μετατόπισης του σημείου O δρα ως εξωτερική φόρτιση, ενώ η κατακόρυφη συνιστώσα προκαλεί αλλαγές στην ισοδύναμη στιβαρότητα του συστήματος.

Παρόμοιες εξισώσεις κίνησης παράγονται και κατά τη μελέτη της ταλάντωσης δοκών και πλακών υπό την επίδραση αξονικών φορτίσεων, των κυματώσεων στην επιφάνεια δεξαμενής υγρού που διεγείρεται κατακόρυφα, των ταλαντώσεων ατράκτων με εγκοπές ή με γωνιακή ταχύτητα που παρουσιάζει μικρές περιοδικές μεταβολές, των ταλαντώσεων συστημάτων που εμπλέκονται με οδοντωτούς τροχούς, της απόκρισης αγωγών υγρών με ταχύτητα που παρουσιάζει μικρές περιοδικές μεταβολές και τέλος, η ταλάντωση κατασκευών που προκαλείται από κινούμενα φορτία με σημαντική μάζα.

Στη γενική περίπτωση, παραμετρικές ταλαντώσεις μικρού εύρους περιγράφονται από την **εξίσωση του Hill** που έχει μορφή

$$\ddot{u} + p_1(t)\dot{u} + p_2(t)u = 0, \quad (1.4.1)$$

όπου οι συντελεστές είναι περιοδικές συναρτήσεις του χρόνου με κοινή περίοδο T . Εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό

$$v(t) = u(t) \exp\left[\frac{1}{2} \int_0^t p_1(s) ds\right], \quad (1.4.2)$$

η εξίσωση (1.4.1) παίρνει τη μορφή

$$\ddot{v} + p(t)v = 0, \quad (1.4.3)$$

με

$$p(t) = p_2 - \frac{1}{4} p_1^2 - \frac{1}{2} \dot{p}_1 = p(t + T).$$

Η απλούστερη μορφή εξίσωσης κίνησης παραμετρικού συστήματος είναι η

$$\ddot{v} + (\omega_0^2 + \varepsilon \cos \Omega t)v = 0, \quad (1.4.4)$$

η οποία είναι γνωστή ως **εξίσωση του Mathieu**.

- **Παρατήρηση 1.4.1:** Προφανώς, η μηδενική λύση ικανοποιεί την (1.4.1), αλλά για μη μηδενικές αρχικές συνθήκες ο ταλαντωτής μπορεί να αναπτύξει κίνηση, γιατί οι χρονικά εξαρτώμενοι συντελεστές της εξίσωσης κίνησης δρούν ως διέγερση. Σε αντίθεση με την περίπτωση εξωτερικής διέγερσης, όπου διέγερση μικρού εύρους προκαλεί συντονισμό μόνο όταν η συχνότητα συντονισμού είναι στην περιοχή της ιδιοσυχνότητας, μικρή παραμετρική διέγερση μπορεί να προκαλέσει μεγάλες αποκρίσεις όταν η συχνότητα διέγερσης Ω είναι περίπου διπλάσια της ιδιοσυχνότητας ω_0 , όπως θα αποδειχθεί στο έργο κεφάλαιο. Σε τέτοιες περιπτώσεις, η γραμμική θεωρία προβλέπει ότι η εξίσωση (1.4.1) μπορεί

να αναπτύξει λύσεις με άπειρο εύρος. Όμως, για μεγάλα εύρη ταλάντωσης, ενεργοποιούνται συνήθως στην πράξη μη γραμμικοί μηχανισμοί που περιορίζουν και διατηρούν πεπερασμένο το εύρος της απόκρισης. Τέτοια συμπεριφορά προβλέπεται από τον **ταλαντωτή Mathieu-Duffing**

$$\ddot{v} + (\omega_0^2 + \varepsilon \cos \Omega t)v + \alpha v^3 = 0. \tag{1.4.5}$$

Η συμπεριφορά αυτών των ταλαντωτών αναλύεται διεξοδικά στο έκτο κεφάλαιο.

- ▶ **Παρατήρηση 1.4.2:** Η παρουσία φυσικού μηχανισμού ο οποίος απορροφά ενέργεια από μια γραμμική ιδιομορφή ενός δυναμικού συστήματος και την προσδίδει σε άλλη, η οποία δεν διεγείρεται άμεσα, παρατηρείται επίσης και σε συστήματα πολλών βαθμών ελευθερίας. Σε πολυβάθμια συστήματα, ο μηχανισμός αυτός ενεργοποιείται όταν ικανοποιείται κάποια συγκεκριμένη σχέση μεταξύ των γραμμικών ιδιοσυχνοτήτων των εμπλεκομένων ιδιομορφών και το φαινόμενο που παρατηρείται ονομάζεται **εσωτερικός συντονισμός**. Τέτοια φαινόμενα αναλύονται στο τέταρτο, πέμπτο και έκτο κεφάλαια.

1.5 ΤΑΛΑΝΤΩΤΕΣ ΜΕ ΤΜΗΜΑΤΙΚΑ ΣΤΑΘΕΡΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΚΑΙ ΑΠΟΣΒΕΣΗΣ

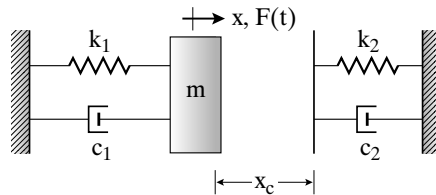
Πολλές μηχανικές διατάξεις είναι σχεδιασμένες με τρόπο, ώστε να εμφανίζονται εμπόδια στην κίνηση κάποιων μελών τους, με αποτέλεσμα να παρατηρούνται συγκρούσεις κατά την ταλάντωσή τους. Τυπικά παραδείγματα αποτελούν οι διατηρητικές πρέσες, οι διατάξεις σφυρηλασίας και οι εκτυπωτικές μηχανές. Χαρακτηριστικό όλων αυτών των συστημάτων είναι η απότομη αλλαγή της στιβαρότητας και της απόσβεσής τους, όταν το εύρος ταλάντωσης ξεπερνά κάποια κρίσιμη τιμή. Τέτοιες αλλαγές παρατηρούνται και σε άλλα μηχανικά συστήματα, όπως για παράδειγμα στην εμπλοκή ή την απεμπλοκή ζευγών δοντιών οδοντωτών τροχών με κατασκευαστική χάρη.

Οι βασικές ιδέες για την εξέταση της συμπεριφοράς τέτοιων συστημάτων μπορεί να παρουσιασθούν χρησιμοποιώντας τον ταλαντωτή του σχήματος 1.5.1. Αν θεωρηθεί ότι στον ταλαντωτή αυτό επιβάλλεται γνωστή εξωτερική δύναμη, η εξίσωση κίνησής του είναι η

$$m \ddot{x} + f(\dot{x}, x) = F(t),$$

με

$$f(\dot{x}, x) = \begin{cases} c_1 \dot{x} + k_1 x, & x \leq x_c \\ (c_1 + c_2)\dot{x} + (k_1 + k_2)x - k_2 x_c, & x > x_c \end{cases}$$



Σχήμα 1.5.1

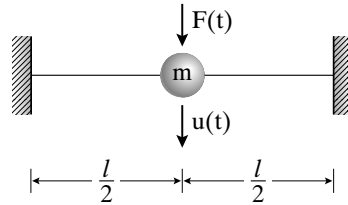
Η ανάλυση της απόκρισης τέτοιων συστημάτων βασίζεται στο γεγονός ότι η συμπεριφορά τους περιγράφεται από γραμμικές εξισώσεις στα διαστήματα όπου η σιβαρότητα και η απόσβεσή τους παραμένουν σταθερές. Πιο συγκεκριμένα, με εφαρμογή των αρχικών συνθηκών προσδιορίζεται η ακριβής λύση μέχρι να φθάσει η απόκριση την τιμή x_c , όπου αλλάζουν απότομα τα χαρακτηριστικά απόσβεσης και σιβαρότητας του ταλαντωτή. Στο σημείο αυτό γίνεται εφαρμογή κατάλληλης αριθμητικής μεθόδου, με την οποία προσδιορίζεται ο ακριβής χρόνος αλλαγής των χαρακτηριστικών του συστήματος. Στη συνέχεια, γίνεται ο υπολογισμός της απόκρισης μέχρι την επόμενη αλλαγή των χαρακτηριστικών του συστήματος, χρησιμοποιώντας την ακριβή λύση στο αντίστοιχο διάστημα και ως αρχικές συνθήκες τις τιμές της μετατόπισης και της ταχύτητας στο σημείο αλλαγής των χαρακτηριστικών. Προφανώς, με εφαρμογή της παραπάνω στρατηγικής μπορεί να προσδιορισθεί η απόκριση σε καθορισμένα χρονικά διαστήματα και για οποιαδήποτε μορφή διέγερσης.

Ειδικότερα, στην περίπτωση περιοδικής διέγερσης, ο προσδιορισμός περιοδικής απόκρισης του εξεταζόμενου συστήματος είναι δυνατός με την εφαρμογή συστηματικής μεθοδολογίας. Στην περίπτωση αυτή, οι άγνωστοι σταθεροί συντελεστές που εμφανίζονται στη λύση, στο διάστημα μιας περιόδου απόκρισης, προσδιορίζονται με την κατάστρωση και εφαρμογή ενός κατάλληλου συστήματος συνθηκών περιοδικότητας και συνέχειας της μετατόπισης και της ταχύτητας στα σημεία αλλαγής των τεχνικών χαρακτηριστικών. Η πλήρης μεθοδολογία προσδιορισμού περιοδικών λύσεων καθώς και της ευστάθειάς τους, παρουσιάζεται εκτενώς στο τρίτο κεφάλαιο. Σημειώνεται ότι παρόμοιες μεθοδολογίες είναι δυνατό να εφαρμοσθούν και στην περίπτωση άλλων κατηγοριών δυναμικών συστημάτων με τμηματικά γραμμικά χαρακτηριστικά, όπως σε συστήματα με ξηρή τριβή.

Μια σημαντική διαφορά στην επίλυση των εξισώσεων κίνησης σε συστήματα με τμηματικά γραμμικά χαρακτηριστικά είναι ότι η εφαρμοζόμενη αναλυτική μεθοδολογία προσδιορίζει ακριβείς λύσεις, ακόμη και στην περίπτωση που το εξεταζόμενο σύστημα είναι ισχυρά μη γραμμικό. Από την άλλη μεριά, τα αριθμητικά αποτελέσματα δείχνουν ότι τα συστήματα με τμηματικά γραμμικά τεχνικά χαρακτηριστικά παρουσιάζουν παρόμοια συμπεριφορά και φαινόμενα με αντίστοιχα μη γραμμικά συστήματα που έχουν συνεχή χαρακτηριστικά.

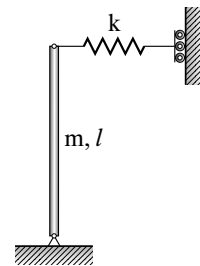
1.6 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.1 Υλικό σώμα μάζας m είναι συνδεδεμένο στο κέντρο ελαστικής χορδής με μέτρο ελαστικότητας E και μήκος l , η οποία βρίσκεται υπό αρχική προένταση T , όπως δείχνει το σχήμα 1.6.1. Να προσδιορισθεί η εξίσωση κίνησης του σώματος υπό την επίδραση της δύναμης $F(t)$. Ποιά μορφή παίρνει η εξίσωση κίνησης για “ταλαντώσεις μικρού εύρους” γύρω από τη θέση στατικής ισορροπίας και ποιος είναι ο κυρίαρχος μη γραμμικός όρος που γίνεται σημαντικός για μεγαλύτερα εύρη ταλάντωσης;



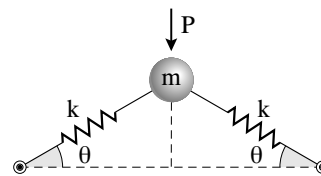
Σχήμα 1.6.1

1.2 Να προσδιορισθεί η εξίσωση κίνησης για τη μηχανική διάταξη του σχήματος 1.6.2. Η διάταξη αποτελείται από στερεά ράβδο μάζας m και μήκους l , η οποία είναι αρθρωμένη στο κάτω άκρο της και συνδέεται με ελαστικό ελατήριο στιβαρότητας k στο επάνω άκρο της. Το ελατήριο αυτό μεταφέρεται έτσι, ώστε να είναι πάντα σε οριζόντια θέση και είναι απαραμόρφωτο όταν η ράβδος είναι κατακόρυφη. Να προσδιορισθούν οι θέσεις στατικής ισορροπίας και η ευστάθειά τους συναρτήσει της στιβαρότητας k . Τα αποτελέσματα να παρουσιασθούν σε κατάλληλο διάγραμμα, το οποίο να παρουσιάζει το εύρος και την ευστάθεια των στατικών λύσεων ως προς την αδιάστατη παράμετρο $p = mg/kl$.



Σχήμα 1.6.2

1.3 Σώμα μάζας m συνδέεται με δυο όμοια ελαστικά ελατήρια στιβαρότητας k , υπό την επίδραση σταθερού φορτίου P , όπως δείχνει το σχήμα 1.6.3. Αν το απαραμόρφωτο μήκος των ελατηρίων είναι l , να καταστρωθεί το αντίστοιχο διάγραμμα των στατικών λύσεων ως προς την αδιάστατη παράμετρο $p = P/2kl$. Το εξεταζόμενο μηχανικό μοντέλο αποτελεί το απλούστερο μοντέλο που παρουσιάζει το μηχανισμό αστάθειας που

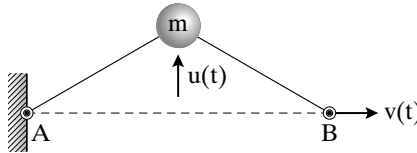


Σχήμα 1.6.3

Το εξεταζόμενο μηχανικό μοντέλο αποτελεί το απλούστερο μοντέλο που παρουσιάζει το μηχανισμό αστάθειας που

χαρακτηρίζεται από τη δυναμική μετάβαση σε άλλη, συνυπάρχουσα, αλλά μακρινή στατική θέση ισορροπίας (snap-through).

- 1.4 Να προσδιορισθεί η εξίσωση κίνησης της μηχανικής διάταξης του σχήματος 1.6.4. Να θεωρηθεί ότι στο άκρο B της ελαστικής χορδής –η οποία έχει απαραμόρφωτο μήκος l – επιβάλλεται γνωστή οριζόντια μετατόπιση $v_0 + v_1 \cos \omega t$.



Σχήμα 1.6.4

- 1.5 Η εξίσωση κίνησης ενός ταλαντωτή έχει γενική μορφή

$$\dot{u} + f(u, \dot{u}) = F(t).$$

Αν $u_0(t)$ είναι μια περιοδική λύση που προκύπτει για περιοδική διέγερση

$$F(t) = F(t + T),$$

να αποδειχθεί ότι η ανάλυση της ευστάθειας της λύσης αυτής μέσω γραμμικοποίησης οδηγεί σε εξίσωση τύπου Hill.

- 1.6 Η εξίσωση κίνησης του ταλαντωτή Duffing με αρμονική διέγερση έχει μορφή

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx + \mu x^3 = F_0 \cos \omega t.$$

Αν εισαχθούν το χαρακτηριστικό μήκος x_c και οι παράμετροι

$$\hat{\omega}_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \zeta = \frac{c}{2\sqrt{mk}}, \quad f = \frac{F_0}{m x_c \omega^2}, \quad \omega_0 = \frac{\hat{\omega}_0}{\omega}, \quad \varepsilon \alpha = \frac{\mu}{k} x_c^2 \omega_0^2,$$

να αποδειχθεί ότι η αρχική εξίσωση κίνησης παίρνει την αδιάστατη μορφή

$$\ddot{u} + 2\zeta \omega_0 \dot{u} + \omega_0^2 u + \varepsilon \alpha u^3 = f \cos \tau,$$

όπου $\tau = \omega t$ είναι ο αδιάστατος χρόνος και $u(\tau) = x(t)/x_c$ είναι η αδιάστατη μετατόπιση.

- 1.7 Η εξίσωση κίνησης του ταλαντωτή van der Pol με αρμονική διέγερση έχει μορφή

$$m\ddot{x} - c\dot{x} + \alpha x^2 \dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t.$$

Αν εισαχθούν το χαρακτηριστικό μήκος x_c και οι παράμετροι

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \zeta = \frac{c}{2\sqrt{mk}}, \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad \tau = \omega_0 t, \quad y(\tau) = \frac{x(t)}{x_c}$$

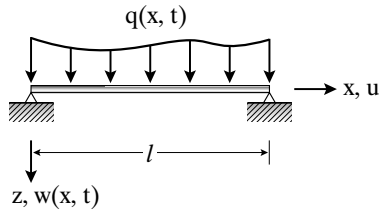
να αποδειχθεί ότι η εξίσωση κίνησης παίρνει την αδιάστατη μορφή

$$\ddot{y} + 2\zeta(y^2 - 1)\dot{y} + y = f \cos \Omega \tau .$$

Ποιά είναι η μορφή των παραμέτρων x_c και f ;

- 1.8** Η εξίσωση κίνησης της αμφιαρθρωτής δοκού που φαίνεται στο σχήμα 1.6.5 για σχετικά μεγάλο εύρος ταλάντωσης έχει μορφή

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \left[\frac{EA}{2I} \int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = q(x, t) .$$



Σχήμα 1.6.5

Ο τρίτος όρος στην παραπάνω εξίσωση αντιπροσωπεύει την αξονική δράση της δοκού που αναπτύσσεται όταν οι εγκάρσιες μετατοπίσεις είναι μεγάλες. Αν η εγκάρσια φόρτιση είναι αρμονική

$$q(x, t) = q_0(x) \cos \omega t ,$$

με συχνότητα διέγερσης ω στην περιοχή της πρώτης γραμμικής ιδιοσυχνότητας ω_1 της κατασκευής, να θεωρηθεί προσεγγιστική λύση

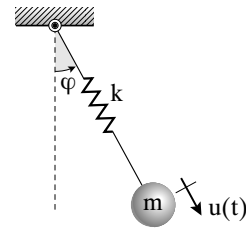
$$w(x, t) = \xi(t) \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$$

και να αποδειχθεί ότι η εξίσωση κίνησης παίρνει τη μορφή

$$\ddot{\xi} + \omega_1^2(\xi + \varepsilon \xi^3) = f \cos \Omega t .$$

Ποιές είναι οι εκφράσεις των σταθερών παραμέτρων που εμφανίζονται στην τελευταία εξίσωση;

1.9 Το εκκρεμές βαρύτητας του σχήματος 1.6.6 είναι εύκαμπτο με αξονική στιβαρότητα k . Το απαράμορφωτο μήκος του εκκρεμούς είναι l_0 και η μετατόπιση u μετρείται από τη θέση στατικής ισορροπίας της μάζας m , όταν το εκκρεμές είναι οριζόντιο.



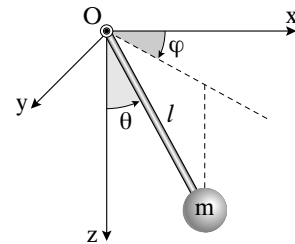
Σχήμα 1.6.6

- Να καταστρωθούν οι εξισώσεις κίνησης του συστήματος, θεωρώντας τη γωνία φ και τη μετατόπιση u ως συντεταγμένες της κίνησης.
- Να βρεθεί η μορφή των εξισώσεων κίνησης για ταλαντώσεις μικρού εύρους, γύρω από τη θέση στατικής ισορροπίας. Υπάρχει σύζευξη μεταξύ φ και u ;
- Ποιά μορφή παίρνουν οι εξισώσεις κίνησης με διατήρηση μέχρι και όρων τρίτης τάξης μετά από την ανάπτυξη των μη γραμμικών όρων σε σειρά Taylor γύρω από τη θέση στατικής ισορροπίας;

1.10 Το σφαιρικό εκκρεμές του σχήματος 1.6.7 διεγείρεται με επιβολή γνωστής κατακόρυφης μετατόπισης $z_0(t) = \varepsilon l \sin \omega t$ του σημείου στήριξής του O .

- Να γραφούν οι εξισώσεις κίνησης ως προς τις συντεταγμένες θ και φ . Στη συνέχεια να αποδειχθεί ότι είναι δυνατό να συνδυασθούν οι εξισώσεις αυτές στη μορφή

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{l} + \varepsilon \omega^2 \sin \omega t \right) \sin \theta - \frac{p^2 \cos \theta}{\sin^3 \theta} = 0.$$



Σχήμα 1.6.7

- Ποιές είναι οι θέσεις στατικής ισορροπίας για $\varepsilon = 0$ και ποιά επίδραση έχει η κίνηση του σημείου στήριξης στην ύπαρξη και την ευστάθειά τους;