Σ. ΝΑΤΣΙΑΒΑΣ

ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

*Το βιβλίο αυτό κύριο σκοπό έχει να παρουσιάσει τις βασικές αρχές της **Δυναμικής Υλικών Σωμάτων**, καθώς και την επίδειξη της εφαρμογής τους στη συστηματική επίλυση πρακτικών προβλημάτων.*

*Η Δυναμική είναι ο κλάδος της **Μηχανικής** που εξετάζει τη σχέση ανάμεσα στην κίνηση υλικών σωμάτων (δηλαδή μεταφορά, περιστροφή, παραμόρφωση) και στις δυνάμεις οι οποίες προκαλούν την κίνηση ή αναπτύσσονται στη διάρκεια της κίνησης. Η εφαρμογή των αρχών της Δυναμικής είναι απαραίτητη σε συστήματα που έχουν μέλη τα οποία κινούνται με σχετικά μεγάλες επιταχύνσεις, οπότε οι υπολογισμοί που βασίζονται στις αρχές της **Στατικής** γίνονται ανακριβείς.*

Η επιστήμη της Δυναμικής υλικών σωμάτων βασίζεται σ' ένα μικρό αριθμό βασικών αρχών, αλλά είναι χρήσιμη σ' ένα ευρύτατο πεδίο εφαρμογών. Οι πρώτες μελέτες της Δυναμικής έγιναν από τον Αριστοτέλη, αλλά οι σωστές επιστημονικές βάσεις της τέθηκαν πολύ αργότερα από το Γαλιλαίο και το Νεύτωνα και συμπληρώθηκαν από πρωτοπόρους του πνεύματος όπως οι Euler, Lagrange, Hamilton, Laplace, Poincare και Einstein.

*Στις περισσότερες πρακτικές εφαρμογές οι παρατηρούμενες ταχύτητες είναι πολύ μικρές ως προς την ταχύτητα του φωτός, η οποία έχει τιμή 300.000 km/s. Επίσης, οι διαστάσεις των εξεταζόμενων σωμάτων είναι πολύ μεγαλύτερες από τις ατομικές ή τις πυρηνικές διαστάσεις και πολύ μικρότερες από τις διαστάσεις των συστημάτων που εξετάζονται από αστρονόμους και κοσμολόγους. Κατά συνέπεια, οι προβλέψεις της λεγόμενης **Κλασικής Δυναμικής** –η οποία βασίζεται στους νόμους κίνησης που διατυπώθηκαν από το Νεύτωνα– είναι αρκετά ακριβείς για τη μεγάλη πλειοψηφία των τεχνολογικών εφαρμογών. Για το λόγο αυτό, η παρουσίαση του υλικού του βιβλίου αυτού θα βασισθεί αποκλειστικά στα αξιώματα και στις αρχές της Κλασικής Δυναμικής.*

*Καταρχήν, ως κίνηση υλικού σώματος ορίζεται η μεταβολή της θέσης των μερών του σχετικά με άλλα σώματα. Επομένως, για την περιγραφή και τη μέτρηση της κίνησης χρειάζεται κάποιο **σύστημα αναφοράς**. Όπως απέδειξε ο Γαλιλαίος, υπάρχουν προτιμητέα συστήματα αναφοράς, στα οποία η επιτάχυνση έχει την απλούστερη* *μορφή, γιατί δεν εμφανίζονται σε αυτά οι κινηματικές συνιστώσες της (όπως η επιτάχυνση Coriolis και η φυγόκεντρος επιτάχυνση). Αυτά τα συστήματα αναφοράς ονομάζονται* ***αδρανειακά****. Επιπλέον, η ύπαρξη ενός τέτοιου συστήματος συνεπάγεται την ύπαρξη μιας απειρίας παρόμοιων συστημάτων, τα οποία μεταφέρονται με σταθερή ταχύτητα ως προς το αρχικό σύστημα αναφοράς. Έτσι, κατά το Νεύτωνα, το πιο προνομιακό αδρανειακό σύστημα αναφοράς είναι αυτό που είναι στερεωμένο στο «κέντρο του Σύμπαντος».*

Οι αρχές της Δυναμικής μπορεί να εκφρασθούν με τρία θεμελιώδη φυσικά μεγέθη, δηλαδή το μήκος, το χρόνο και τη μάζα. Σύμφωνα με την Κλασική Δυναμική, η ***μάζα*** *ενός σώματος παραμένει σταθερή και ανεξάρτητη από την κίνησή της και το χρόνο. Επίσης, ο* ***χώρος*** *είναι απόλυτος και μπορεί να περιγραφεί με στοιχεία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Επομένως, θεωρείται ότι είναι ομογενής και ισότροπος, δηλαδή έχει τις ίδιες μετρικές ιδιότητες σε κάθε σημείο και διεύθυνση. Επιπλέον, ο* ***χρόνος*** *είναι απόλυτος (δηλαδή ο ίδιος για παρατηρητές που βρίσκονται σε διαφορετικά συστήματα αναφοράς και ανεξάρτητος από την κίνηση και τα φυσικά αντικείμενα) και ομογενής (δηλαδή ανεξάρτητος από το χώρο).*

Παραδοσιακά, η Δυναμική χωρίζεται σε δύο μεγάλες περιοχές: την ***Κινηματική*** *και την* ***Κινητική****. Η πρώτη εξετάζει τη γεωμετρία της κίνησης. Δηλαδή συνδέει τις έννοιες της θέσης, της ταχύτητας, της επιτάχυνσης και του χρόνου χωρίς αναφορά στη φυσική αιτία της κίνησης. Από την άλλη μεριά η Κινητική εξετάζει τη σχέση ανάμεσα στις δυνάμεις, τη μάζα και την κίνηση των σωμάτων. Δηλαδή προβλέπει την κίνηση αν είναι γνωστές οι δυνάμεις ή καθορίζει τις δυνάμεις που απαιτούνται για την επίτευξη συγκεκριμένης κίνησης.*

Αν η κίνηση ενός σώματος είναι τέτοια, ώστε να μπορεί να αγνοηθεί η περιστροφή (αλλαγή προσανατολισμού) του, τότε το σώμα ονομάζεται ***υλικό σημείο****. Όταν η περιστροφή ενός σώματος είναι σημαντική, αλλά η αλλαγή στην απόσταση μεταξύ δύο τυχαίων σημείων του είναι αμελητέα, τότε το σώμα ονομάζεται απαραμόρφωτο στερεό ή απλά* ***στερεό σώμα****. Τέλος, όταν οι παραμορφώσεις του σώματος είναι σημαντικές, τότε το σώμα ονομάζεται* ***παραμορφώσιμο σώμα****. Είναι προφανές ότι το ίδιο σώμα μπορεί να θεωρηθεί ως υλικό σημείο, στερεό ή παραμορφώσιμο σώμα ανάλογα με το σκοπό της μελέτης (π.χ. πλανήτες, αεροπλάνα, αυτοκίνητα).*

Το αντικείμενο του παρόντος μαθήματος είναι η ανάλυση της κίνησης δυναμικών συστημάτων, τα οποία αποτελούνται από υλικά σημεία και από στερεά σώματα. Τα μαθηματικά μοντέλα που προκύ-

πτουν για τα συστήματα αυτά αποτελούνται από κανονικές διαφορικές εξισώσεις με ανεξάρτητη μεταβλητή το χρόνο. Από την άλλη μεριά, η κίνηση παραμορφώσιμων στερεών σωμάτων ή ρευστών σωμάτων (δηλαδή σωμάτων που δεν μπορούν να παραλάβουν διατμητική τάση όταν βρίσκονται σε κατάσταση στατικής ισορροπίας και δεν έχουν προτιμητέα μορφή) περιγράφεται από μερικές διαφορικές εξισώσεις με ανεξάρτητες μεταβλητές το χρόνο καθώς και χωρικές συντεταγμένες. Η περιγραφή και ανάλυση της κίνησης παραμορφώσιμων σωμάτων αποτελεί αντικείμενο άλλων μαθημάτων (π.χ. Ελαστοδυναμική, Μηχανική Ρευστών).

Το σύνολο των αρχών κίνησης που προκύπτουν με απευθείας εφαρμογή των νόμων του Νεύτωνα αποτελεί τη ***Νευτώνεια*** *ή* ***Διανυσματική Δυναμική****. Μια εναλλακτική μέθοδος για τη θεμελίωση και την παραγωγή των εξισώσεων κίνησης παρουσιάζεται από την ονομαζόμενη* ***Αναλυτική Δυναμική****, που αναπτύχθηκε κυρίως από τον Lagrange και τον Hamilton. Η μέθοδος αυτή απαιτεί την εισαγωγή πιο αφηρημένων εννοιών –όπως οι γενικευμένες συντεταγμένες, δυνάμεις και ορμές καθώς και οι δυνατές μετατοπίσεις– αλλά παρουσιάζει ορισμένα σημαντικά πλεονεκτήματα ως προς τις μεθόδους της Νευτώνειας Δυναμικής.*

Σε όλη την έκταση του παρόντος βιβλίου δίνεται καταρχήν έμφαση στη διάκριση ορισμών και εννοιών που αναφέρονται στην Κινηματική και στην Κινητική. Επιπλέον, γίνεται διαχωρισμός μεταξύ των διαφορετικών μεθοδολογιών της Κινητικής. Από την άλλη μεριά, τονίζεται η αλληλοσύνδεση που υπάρχει μεταξύ των διαφόρων περιοχών και αρχών της Δυναμικής. Στα πρώτα δύο κεφάλαια του βιβλίου παρουσιάζεται η Κινηματική και η Κινητική Υλικών Σημείων. Οι ορισμοί και οι αρχές της Κινητικής αναπτύσσονται αρχικά για μεμονωμένα υλικά σημεία και γενικεύονται στη συνέχεια για συστήματα υλικών σημείων. Το τρίτο και το τέταρτο κεφάλαιο αναφέρονται στην Κινηματική και την Κινητική Στερεών Σωμάτων και αποτελούν φυσική συνέχεια του πρώτου και του δεύτερου κεφαλαίου, αντίστοιχα. Τέλος, στο πέμπτο κεφάλαιο γίνεται παρουσίαση των βασικών αρχών της Αναλυτικής Δυναμικής.

Για την κατανόηση της θεωρίας της Δυναμικής και την παραγωγή σωστών μαθηματικών μοντέλων είναι απαραίτητη η γνώση βασικών στοιχείων του Διανυσματικού, του Διαφορικού και του Ολοκληρωτικού Λογισμού, καθώς και των εννοιών, αρχών και μεθοδολογιών της Στατικής. Επίσης, το υλικό που παρουσιάζεται στα παραρτήματα Α και Β και αναφέρεται στον ορισμό και τις ιδιότητες του Τανυστή Αδράνειας και στην παρουσίαση στοιχείων του Λογισμού των

Μεταβολών, αντίστοιχα, είναι απαραίτητο συμπλήρωμα του τετάρτου και του πέμπτου κεφαλαίου, αντίστοιχα. Επιπλέον, για την επίλυση των εξισώσεων που προκύπτουν από την εφαρμογή των αρχών της Δυναμικής είναι χρήσιμη η γνώση μεθόδων επίλυσης αλγεβρικών και διαφορικών εξισώσεων με αναλυτικό ή με αριθμητικό τρόπο.

Σε κάθε ξεχωριστή ενότητα, η παρουσίαση της θεωρίας συνοδεύεται από έναν αριθμό παρατηρήσεων, που έχουν σκοπό τη συμπλήρωση ή τη διαλεύκανση ορισμένων σημείων της θεωρίας. Στη συνέχεια γίνεται η συστηματική επίλυση αντιπροσωπευτικών παραδειγμάτων, με σκοπό την περαιτέρω εμβάθυνση και κατανόηση της θεωρίας. Παράλληλα με την ανάπτυξη των μαθηματικών μοντέλων που προκύπτουν και τη διαδικασία επίλυσής τους, δίνεται έμφαση στη σωστή ερμηνεία και τη σημασία των αποτελεσμάτων κάθε παραδείγματος. Τέλος, για να δοθεί η ευκαιρία στον αναγνώστη να ελέγξει σε ποιο βαθμό κατέχει τη θεωρία καθώς και να διαπιστώσει τη χρησιμότητα της Δυναμικής στην επίλυση μερικών απλών πρακτικών εφαρμογών, παρουσιάζεται στο τέλος κάθε κεφαλαίου ένας αριθμός άλυτων προβλημάτων.

Στο σημείο αυτό θα ήθελα να ευχαριστήσω τις Εκδόσεις Ζήτη για τις προσπάθειες που κατέβαλαν για την καλύτερη δυνατή εμφάνιση του βιβλίου αυτού.

Θεσσαλονίκη, Μάρτιος 1994 *Σωτήρης Νατσιάβας*

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΟΡΩΝ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1 ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ

1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η Κινηματική είναι ο κλάδος της Μηχανικής που εξετάζει και αναλύει τη γεωμετρία της κίνησης ενός σώματος, χωρίς να αναφέρεται στα αίτια που την προκαλούν. Για υλικό σημείο, ως **κίνηση** ορίζεται η αλλαγή θέσης του σημείου ως προς κάποιο σύστημα αναφοράς. Έτσι, για την περιγραφή της κίνησης υλικού σημείου τα θεμελιώδη φυσικά μεγέθη είναι το μήκος και ο χρόνος.

Στο κεφάλαιο αυτό εισάγονται αρχικά οι έννοιες των διανυσμάτων θέσης, ταχύτητας και επιτάχυνσης. Στη συνέχεια παράγονται εκφράσεις για τις συνιστώσες των διανυσμάτων αυτών ως προς μερικά συστήματα αναφοράς που επιλέγονται συχνά σε πρακτικές εφαρμογές. Παράλληλα, εξηγείται η φυσική σημασία των συνιστωσών των διανυσμάτων αυτών. Το κεφάλαιο τελειώνει με μελέτη της κίνησης υλικού σημείου σχετικά με σύστημα αναφοράς που κινείται παράλληλα ως προς κάποιο άλλο σύστημα αναφοράς.

Εκτός από έννοιες της γεωμετρίας, η βασική μαθηματική έννοια που εισάγεται και χρησιμοποιείται στο παρόν κεφάλαιο είναι η χρονική παράγωγος διανύσματος. Η παράγωγος αυτή εξαρτάται από μεταβολές τόσο στο μέγεθος όσο και στη διεύθυνση του διανύσματος.

1.2 ΔΙΑΝΥΣΜΑ ΘΕΣΗΣ, ΤΑΧΥΤΗΤΑ, ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ

1.2.1 Ορισμοί

Θεωρείται υλικό σημείο καθώς διαγράφει τροχιά στο χώρο. Η τροχιά αυτή χαρακτηρίζεται από τη χωρική καμπύλη C και μπορεί να ορισθεί σχετικά με κάποιο σύστημα αναφοράς $Oxyz$ (ή F), όπως φαίνεται στο σχήμα 1.1. Με τον τρόπο αυτό η θέση Σ του υλικού σημείου στη χρονική στιγμή t καθορίζεται πλήρως από το διάνυσμα που έχει ως αρχή το σημείο O του συστήματος αναφοράς F και ως τέλος το σημείο Σ. Το διάνυσμα αυτό, $\mathbf{r}(t)$, ονομάζεται **διάνυσμα θέσης** του υλικού σημείου ως προς το σύστημα αναφοράς F.

Σχήμα 1.1

Στη χρονική στιγμή $t+\Delta t$ το υλικό σημείο καταλαμβάνει τη θέση Σ', η οποία καθορίζεται από το διάνυσμα θέσης $\mathbf{r}(t+\Delta t)$. Σε αναλογία με τον ορισμό της παραγώγου βαθμωτής συνάρτησης $f(t)$, ο οποίος είναι

$$\dot{f}(t) = \frac{df}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} \quad ,$$

μπορεί να ορισθεί και η χρονική παράγωγος της διανυσματικής συνάρτησης $\mathbf{r}(t)$. Δηλαδή

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) \quad , \tag{1.1}$$

με

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \right) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \, .$$

Το διάνυσμα $\mathbf{v}(t)$ που προκύπτει με τον τρόπο αυτό ονομάζεται **ταχύτητα** του υλικού σημείου στη θέση Σ.

Με παρόμοιο τρόπο ορίζεται και η **επιτάχυνση** του υλικού σημείου στη θέση Σ, ως προς το σύστημα αναφοράς F, ως η χρονική παράγωγος του διανύσματος της ταχύτητας. Δηλαδή

$$\mathbf{a}(t) \equiv \dot{\mathbf{v}}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t) \tag{1.2}$$

- **Παρατήρηση 1η**: Επειδή η Κινηματική εξετάζει μόνο τη γεωμετρία της κίνησης και δεν εμπλέκει φυσικούς νόμους, δεν υπάρχουν προτιμητέα συστήματα αναφοράς. Η κίνηση όμως φαίνεται διαφορετικά από παρατηρητές που βρίσκονται σε διαφορετικά συστήματα αναφοράς και επομένως πρέπει να καθορισθεί κάποιο σύστημα αναφοράς σε κάθε περίπτωση. Επίσης, με βάση τη γεωμετρία της τροχιάς, οι συνιστώσες των διανυσμάτων θέσης, ταχύτητας και επιτάχυνσης μπορεί να εκφρασθούν στο πιο βολικό σύστημα συντεταγμένων (καρτεσιανό, κυλινδρικό, σφαιρικό κ.λπ.), όπως αναπτύσσεται στις επόμενες παραγράφους.

- **Παρατήρηση 2η**: Σε μερικές περιπτώσεις της πράξης, αντί της στιγμιαίας ταχύτητας που ορίζεται από τη σχέση (1.1) για απειροστό χρονικό διάστημα dt, είναι πιο χρήσιμο να θεωρηθεί πεπερασμένο Δt και να ορισθεί η **μέση ταχύτητα**

$$\bar{\mathbf{v}}(t) = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} ,$$

όπου

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)$$

είναι το διάνυσμα μετατόπισης του υλικού σημείου στο χρόνο Δt.
Με τον ίδιο τρόπο ορίζεται και η αντίστοιχη **μέση επιτάχυνση**

$$\bar{\mathbf{a}}(t) = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} ,$$

με

$$\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}(t+\Delta t) - \mathbf{v}(t) .$$

- **Παρατήρηση 3η**: Με τον τρόπο που ορίσθηκαν η ταχύτητα και η επιτάχυνση μπορεί να ορισθούν και παράγωγοι ανώτερης τάξης της συνάρτησης $\mathbf{r}(t)$. Αυτές οι παράγωγοι, όμως, δεν έχουν συνήθως πρακτική αξία, γιατί δεν εμπλέκονται στους νόμους της Κινητικής. Τη μόνη εξαίρεση αποτελεί η παράγωγος της επιτάχυνσης, η οποία βρίσκει εφαρμογή στην περιοχή των μηχανισμών και της κρούσης οχημάτων.

- **Παρατήρηση 4η**: Ο συμβολισμός $\mathbf{r}(t)$ είναι συντομογραφία του πληρέστερου συμβολισμού $\mathbf{r}_{O\Sigma}(t)$. Το ίδιο ισχύει και για τους ορισμούς (1.1) και (1.2), που αντικαθιστούν τους πιο πλήρεις, αλλά και πιο πολύπλοκους συμβολισμούς

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\Sigma/F} = (\dot{\mathbf{r}}_{O\Sigma})_F$$

και

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\Sigma/F} = (\dot{\mathbf{v}}_{\Sigma/F})_F .$$

Η χρησιμότητα των συμβολισμών αυτών θα φανεί στη μελέτη της Κινηματικής στερεών σωμάτων και της σχετικής κίνησης σωμάτων, όπου εμπλέκονται περισσότερα από ένα συστήματα αναφοράς.

1.2.2 Καρτεσιανό Σύστημα Αναφοράς

Σε πολλές περιπτώσεις η τροχιά ενός υλικού σημείου Σ είναι μια χωρική καμπύλη που ορίζεται παραμετρικά από τις συντεταγμένες

$$(x_\Sigma, y_\Sigma, z_\Sigma) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$$

ως προς ορθοκανονικό καρτεσιανό σύστημα αναφοράς Oxyz, όπως δείχνει το σχήμα 1.2. Έτσι, αν $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ και $\mathbf{e}_z$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα βά-

Σχήμα 1.2

σης του συστήματος αναφοράς, τότε το διάνυσμα θέσης του υλικού σημείου εκφράζεται στη μορφή:

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{e}_x + y(t)\,\mathbf{e}_y + z(t)\,\mathbf{e}_z\,.$$

Κατά συνέπεια, εφαρμόζοντας τον ορισμό (1.1) προκύπτει ότι η ταχύτητα του υλικού σημείου είναι:

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{[x(t+\Delta t)\,\mathbf{e}_x + y(t+\Delta t)\,\mathbf{e}_y + z(t+\Delta t)\,\mathbf{e}_z] - [x(t)\,\mathbf{e}_x + y(t)\,\mathbf{e}_y + z(t)\,\mathbf{e}_z]}{\Delta t}\,.$$

Επομένως,

$$\mathbf{v}(t) = v_x\,\mathbf{e}_x + \mathbf{v}_y\,\mathbf{e}_y + v_z\,\mathbf{e}_z = \dot{x}(t)\,\mathbf{e}_x + \dot{y}(t)\,\mathbf{e}_y + \dot{z}(t)\,\mathbf{e}_z\,. \qquad (1.3)$$

Παρόμοια, η επιτάχυνση του υλικού σημείου καθορίζεται από τη σχέση

$$\mathbf{a}(t) = a_x\,\mathbf{e}_x + a_y\,\mathbf{e}_y + a_z\,\mathbf{e}_z = \ddot{x}(t)\,\mathbf{e}_x + \ddot{y}(t)\,\mathbf{e}_y + \ddot{z}(t)\,\mathbf{e}_z\ . \tag{1.4}$$

- **Παρατήρηση 1η**: Σε πολλές πρακτικές εφαρμογές η μελετώμενη τροχιά είναι καμπυλόγραμμη, αλλά **επίπεδη**. Στις περιπτώσεις αυτές το σύστημα αναφοράς μπορεί να επιλεγεί έτσι, ώστε

$$z(t) = z_0 = \text{σταθερά}\ ,$$

οπότε οι σχέσεις (1.3) και (1.4) αντικαθίστανται από τις

$$\mathbf{v} = \dot{x}\,\mathbf{e}_x + \dot{y}\,\mathbf{e}_y \tag{1.5}$$

και

$$\mathbf{a} = \ddot{x}\,\mathbf{e}_x + \ddot{y}\,\mathbf{e}_y\ , \tag{1.6}$$

αντίστοιχα.

- **Παρατήρηση 2η**: Σε περιπτώσεις στις οποίες η τροχιά είναι **ευθύγραμμη**, δηλαδή τέτοια ώστε

$$z(t) = z_0 = \text{σταθερά} \quad \text{και} \quad y(t) = y_0 = \text{σταθερά}\ ,$$

οι ορισμοί (1.3) και (1.4) γίνονται

$$\mathbf{v} = \dot{x}\,\mathbf{e}_x$$

και

$$\mathbf{a} = \ddot{x}\,\mathbf{e}_x\ ,$$

αντίστοιχα. Στην περίπτωση αυτή εκφυλίζεται ο ρόλος των διανυσμάτων και όλα τα μεγέθη μπορούν να θεωρηθούν ως βαθμωτά. Επιπλέον, γίνεται φανερό ότι η επίπεδη κίνηση είναι επαλληλία δύο ανεξάρτητων κινήσεων στις διευθύνσεις των αξόνων Ox και Oy, ενώ η χωρική κίνηση είναι επαλληλία τριών κινήσεων στις διευθύνσεις Ox, Oy και Oz.

▶ *Παράδειγμα 1.1: Ευθύγραμμη Κίνηση με Γνωστή Επιτάχυνση*

Υλικό σημείο εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση με επιτάχυνση που είναι γνωστή συνάρτηση του χρόνου. Δηλαδή

$$\ddot{x} = f(t)\ . \tag{1}$$

Αν η αρχική θέση και ταχύτητα του σημείου είναι x_0 και v_0, αντίστοιχα, να υπολογισθεί η ταχύτητα και η επιτάχυνση του σημείου για χρόνο $t > 0$.

Λύση:

Με απευθείας ολοκλήρωση της εξίσωσης (1) προκύπτει ότι

$$v = \dot{x} = \int_0^t f(\tau)\, d\tau + a \ ,$$

όπου a είναι σταθερά που προσδιορίζεται από τη συνθήκη

$$v(0) = a = v_0 \ .$$

Επομένως, η ταχύτητα του υλικού σημείου είναι

$$v(t) = v_0 + \int_0^t f(\tau)\, d\tau \ . \qquad (2)$$

Ο προσδιορισμός της θέσης του υλικού σημείου προκύπτει με ολοκλήρωση της εξίσωσης (2). Δηλαδή

$$x(t) = \int_0^t v(\xi)\, d\xi + b \ , \qquad (3)$$

όπου η σταθερά b προσδιορίζεται από την αρχική συνθήκη

$$x(0) = b = x_0 \ .$$

Συνδυάζοντας το παραπάνω αποτέλεσμα με τις εξισώσεις (2) και (3) προκύπτει ότι η μετατόπιση του υλικού σημείου είναι:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \int_0^t \int_0^\xi f(\tau)\, d\tau\, d\xi \ . \qquad (4)$$

➧ ***Σημείωση:*** Μια ειδική περίπτωση με πρακτικό ενδιαφέρον είναι η κίνηση με **σταθερή επιτάχυνση**, δηλαδή με

$$f(t) = a_0 \ .$$

Στην περίπτωση αυτή οι σχέσεις (2) και (4) γίνονται

$$v = v_0 + a_0\, t \qquad (5)$$

και

$$x = x_0 + v_0\, t + \frac{1}{2} a_0\, t^2 \ , \qquad (6)$$

αντίστοιχα. Επιπλέον, απαλείφοντας το χρόνο από τις εξισώσεις (5) και (6) προκύπτει ότι

$$v^2 = v_0^2 + 2a_0\,(x - x_0) \ . \qquad (7)$$

▶ ***Παράδειγμα 1.2: Κίνηση με Περιορισμούς***

Το άκρο A της στερεάς ράβδου που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα αρχίζει να κινείται οριζόντια έτσι, ώστε να έχει οριζόντια συντεταγμένη

$$x = \alpha t^2 \tag{1}$$

Αν η παράμετρος α είναι σταθερή και το μήκος της ράβδου είναι l να υπολογισθεί η ταχύτητα και η επιτάχυνση του άλλου άκρου B, που κινείται κατακόρυφα, τη στιγμή που γίνεται $y = \frac{l}{2}$.

Σχήμα 1.3

Λύση:

Η θέση y του άκρου B της ράβδου καθορίζεται από τη θέση x του άκρου A μέσω τη σχέσης

$$x^2 + (l-y)^2 = l^2 \ , \tag{2}$$

ή της σχέσης

$$y = l - \sqrt{l^2 - x^2} \ , \tag{3}$$

η οποία αποτελεί τη συνθήκη που εκφράζει τη στερεότητα της ράβδου. Επομένως, η ταχύτητα του άκρου B υπολογίζεται από τη σχέση

$$x\dot{x} + (l-y)\,(-\dot{y}) = 0 \ \Rightarrow \ \dot{y} = \frac{x\dot{x}}{\sqrt{l^2-x^2}} \ , \tag{4}$$

ενώ η επιτάχυνση του άκρου B είναι

$$\ddot{y} = \frac{(\dot{x}^2+x\ddot{x})\sqrt{l^2-x^2} + (x\dot{x})^2\,(l^2-x^2)^{-1/2}}{l^2-x^2}$$

ή, μετά την εκτέλεση των αλγεβρικών πράξεων

$$\ddot{y} = \frac{x\ddot{x}\,(l^2-x^2) + \dot{x}^2\,l^2}{(l^2-x^2)^{3/2}} \quad . \tag{5}$$

Τη στιγμή που γίνεται $y = y_0 = \frac{l}{2}$, η σχέση (3) δίνει

$$x = x_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}\,l \tag{6}$$

και άρα η σχέση (1) συνεπάγεται ότι αυτό συμβαίνει τη χρονική στιγμή

$$t = t_0 = \sqrt{\frac{x_0}{\alpha}} = \sqrt{\frac{\sqrt{3}\,l}{2\alpha}} \quad .$$

Την ίδια στιγμή, η ταχύτητα του άκρου A είναι

$$\dot{x}_0 = 2\alpha\,t_0 = \sqrt{2\sqrt{3}\,l\alpha}\;, \tag{7}$$

ενώ η επιτάχυνσή του είναι

$$\ddot{x}_0 = 2\alpha \quad . \tag{8}$$

Τέλος, αντικατάσταση των εκφράσεων των x_0, $\dot{x}_0$ και $\ddot{x}_0$ από τις σχέσεις (6), (7) και (8), αντίστοιχα, στις εξισώσεις (4) και (5) προσδιορίζει την τιμή της ταχύτητας και της επιτάχυνσης του άκρου B κατά την χρονική στιγμή $t = t_0$.

Ερώτηση: Τι συμβαίνει καθώς $x \to l$;

▶ *Παράδειγμα 1.3: Κίνηση σε Οδηγητική Καμπύλη*

Το άκρο Σ ενός μέλους μιας μηχανής εξαναγκάζεται να ακολουθήσει την επίπεδη οδηγητική καμπύλη

$$y = f(x)\;, \tag{1}$$

όπως φαίνεται στο σχήμα 1.4. Αν η συνιστώσα της ταχύτητας στη διεύθυνση Ox είναι σταθερή και ίση με v_0, να βρεθεί η ταχύτητα και επιτάχυνση του Σ σε κάθε χρονική στιγμή.

Λύση:

Επειδή η κίνηση του Σ είναι επίπεδη, η ταχύτητα και η επιτάχυνσή του καθορίζονται από τις σχέσεις (1.5) και (1.6), αντίστοιχα. Στις σχέσεις αυτές αντικαθιστώνται οι παρακάτω εκφράσεις:

$$\dot{x} = v_0, \qquad \ddot{x} = 0 \ ,$$

Σχήμα 1.4

$$\dot{y} = f'(x)\, \dot{x} = v_0\, f'(x)$$

και

$$\ddot{y} = f''(x)\, v_0^2 \ .$$

Έτσι, τελικά προκύπτει ότι η ταχύτητα του άκρου Σ έχει μορφή

$$\mathbf{v} = v_0\, [\mathbf{e}_x + f'(x)\, \mathbf{e}_y] \ ,$$

ενώ η επιτάχυνσή του είναι

$$\mathbf{a} = v_0^2\, f''(x)\, \mathbf{e}_y \ ,$$

με

$$x = v_0\, t + x_0 \ .$$

▶ *Παράδειγμα 1.4: Βολή Υλικού Σημείου*

Υλικό σημείο κινείται με γνωστή επιτάχυνση

$$\mathbf{a} = -g\, \mathbf{e}_y \ , \qquad (1)$$

όπου g είναι μία θετική σταθερά. Αν η αρχική θέση του σώματος είναι

$$\mathbf{r}_0 = x_0\, \mathbf{e}_x + y_0\, \mathbf{e}_y \qquad (2)$$

και βάλλεται με αρχική ταχύτητα

$$\mathbf{v}_0 = v_{0x}\,\mathbf{e}_x + v_{0y}\,\mathbf{e}_y = v_0\,(\cos\theta\,\mathbf{e}_x + \sin\theta\,\mathbf{e}_y)\ , \qquad (3)$$

τότε:

α) Να υπολογισθεί η θέση και η ταχύτητα του σώματος για κάθε χρονική στιγμή.

β) Να βρεθεί η οριζόντια θέση x_μ στην οποία το σώμα φθάνει στο μέγιστο ύψος H της τροχιάς του.

γ) Να προσδιορισθεί η τιμή της γωνίας θ για την οποία το σώμα θα συγκρουσθεί με στόχο που έχει συντεταγμένες x_Σ και y_Σ.

δ) Να καθορισθεί η θέση x_s στην οποία $y = y_0$.

Σχήμα 1.5

Λύση:

α) Με απευθείας ολοκλήρωση της εξίσωσης (1) προκύπτει ότι

$$\mathbf{v} = c_1\,\mathbf{e}_x + (c_2 - gt)\,\mathbf{e}_y + c_3\,\mathbf{e}_z\ .$$

Εφαρμόζοντας τη σχέση (3), οι σταθερές c_1, c_2 και c_3 που εμφανίζονται στην παραπάνω εξίσωση παίρνουν τις τιμές

$$c_1 = v_{0x}, \quad c_2 = v_{0y}, \quad c_3 = 0\ .$$

Άρα, η ταχύτητα του υλικού σημείου είναι

$$\mathbf{v} = v_{0x}\,\mathbf{e}_x + (v_{0y} - gt)\,\mathbf{e}_y\ . \qquad (4)$$

Παρόμοια, ολοκλήρωση της εξίσωσης (4) οδηγεί στη σχέση

$$\mathbf{r} = (v_{0x}t + c_4)\,\mathbf{e}_x + \left(v_{0y}t + c_5 - \frac{1}{2}gt^2\right)\mathbf{e}_y + c_6\,\mathbf{e}_z\ ,$$

η οποία με εφαρμογή της σχέσης (2) δίνει

$$\mathbf{r} = (x_0 + v_{0x}t)\,\mathbf{e}_x + \left(y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2\right)\mathbf{e}_y \ . \tag{5}$$

β) Με βάση την εξίσωση (5) η κατακόρυφη συνιστώσα του διανύσματος θέσης προσδιορίζεται από την έκφραση

$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \ . \tag{6}$$

Η ακραία τιμή της συνάρτησης αυτής προσδιορίζεται από τη συνθήκη

$$\dot{y} = 0 \ \Rightarrow \ t_\mu = \frac{v_{0y}}{g} \ , \tag{7}$$

η οποία με αντικατάσταση στην εξίσωση (6) δίνει

$$H = y(t_\mu) = y_0 + \frac{v_{0y}^2}{2g} \ . \tag{8}$$

Επειδή $\ddot{y}\,(t_\mu) = -g < 0$, είναι φανερό ότι η H είναι πράγματι η μέγιστη τιμή της κατακόρυφης συνιστώσας y (γιατί;). Η οριζόντια θέση στην οποία συμβαίνει αυτό προσδιορίζεται από την εξίσωση (5) στη μορφή

$$x_\mu = x(t_\mu) = x_0 + \frac{v_{0x}\ v_{0y}}{g} = x_0 + \frac{v_0^2}{2g}\sin 2\theta \ . \tag{9}$$

Απαλείφοντας το χρόνο t από τις συνιστώσες του διανύσματος θέσης $\mathbf{r}$ μπορεί εύκολα να δειχθεί ότι η τροχιά του σώματος είναι **παραβολική** με κορυφή το σημείο (x_μ, y_μ).

γ) Από τη σχέση (5) προκύπτει αμέσως ότι

$$x_\Sigma = x_0 + v_{0x}\, t_\Sigma$$

και ότι

$$y_\Sigma = y_0 + v_{0y}\, t_\Sigma - \frac{1}{2}\, g\, t_\Sigma^2 \ .$$

Απαλείφοντας τον χρόνο t_Σ από τις δύο τελευταίες σχέσεις, προκύπτει η συνθήκη

$$\tan^2\theta_\Sigma - \frac{2v_0^2}{g(x_\Sigma - x_0)}\tan\theta_\Sigma + \frac{2v_0^2\,(y_\Sigma - y_0)}{g(x_\Sigma - x_0)^2} + 1 = 0 \tag{10}$$

για τη γωνία θ. Η παραπάνω συνθήκη ικανοποιείται για δύο τιμές της γωνίας θ_Σ. Η τροχιά που αντιστοιχεί στη μικρότερη / μεγαλύτερη γωνία λέγεται **ευθύβολη** / **επισκυπτική**, αντίστοιχα.

δ) Για $y = y_0$ και $t \neq 0$, η εξίσωση (6) δίνει

$$t_s = \frac{2v_{0y}}{g} = 2t_\mu \ .$$

Επομένως,

$$x_s = x(t_s) = x_0 + \frac{v_0^2}{g}\sin 2\theta \ .$$

Ερώτηση 1η: Πως προσδιορίζεται η θέση του σημείου S του σχήματος 1.5;

Ερώτηση 2η: Ποιά είναι η σχέση ανάμεσα στις παραγώγους της συνάρτησης y ως προς το χρόνο και τις παραγώτους της ως προς x;

1.2.3 Κυλινδρικό Σύστημα Αναφοράς

Σε περιπτώσεις εφαρμογών με κυλινδρική γεωμετρία είναι βολικό να χρησιμοποιούνται οι κυλινδρικές συντεταγμένες (r, θ, z), όπως αυτές ορίζονται στο σχήμα 1.6 για το τυχαίο σημείο Σ του χώρου, αντί για τις

Σχήμα 1.6

αντίστοιχες καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y, z). Από τον ορισμό, οι άξονες Oz, οι συντεταγμένες z και τα μοναδιαία διανύσματα βάσης $\mathbf{e}_z$ των δύο αυτών συστημάτων συμπίπτουν. Επιπλέον, αν Σ′ είναι η προβολή του σημείου Σ στο επίπεδο Oxy, τότε με τη βοήθεια και του σχήματος 1.7 προκύπτουν οι παρακάτω σχέσεις

Σχήμα 1.7

$$x = r\cos\theta\,, \quad y = r\sin\theta\,. \tag{1.7}$$

Επίσης, τα μοναδιαία διανύσματα βάσης $\mathbf{e}_r$ και $\mathbf{e}_\theta$ στη διεύθυνση του ευθύγραμμου τμήματος $Ο\Sigma'$ και της καθέτου της, αντίστοιχα, συνδέονται μέσω των σχέσεων

$$\mathbf{e}_r = \cos\theta\,\mathbf{e}_x + \sin\theta\,\mathbf{e}_y \tag{1.8}$$

και

$$\mathbf{e}_\theta = -\sin\theta\,\mathbf{e}_x + \cos\theta\,\mathbf{e}_y \tag{1.9}$$

αντίστοιχα, με τα μοναδιαία διανύσματα βάσης $\mathbf{e}_x$ και $\mathbf{e}_y$ του καρτεσιανού συστήματος αναφοράς. Από τις παραπάνω σχέσεις είναι προφανές ότι τα διανύσματα $\mathbf{e}_r$ και $\mathbf{e}_\theta$ είναι συναρτήσεις της συντεταγμένης θ.

Στο κυλινδρικό σύστημα αναφοράς, το διάνυσμα θέσης του σημείου Σ ορίζεται από τη σχέση

$$\mathbf{r} = r\,\mathbf{e}_r + z\,\mathbf{e}_z\,. \tag{1.10}$$

Επομένως, η ταχύτητα στο σημείο Σ βρίσκεται με παραγώγιση της (1.10) στη μορφή

$$\mathbf{v} = \dot{r}\,\mathbf{e}_r + \dot{z}\,\mathbf{e}_z + r\,\dot{\mathbf{e}}_r + z\,\dot{\mathbf{e}}_z\,.$$

Στην προκειμένη περίπτωση, το διάνυσμα $\mathbf{e}_z$ διατηρεί πάντα σταθερό μέτρο και διεύθυνση, ενώ το ακτινικό διάνυσμα $\mathbf{e}_r$ εξαρτάται από τη γωνιακή συντεταγμένη θ. Πιο συγκεκριμένα, η σχέση (1.8) οδηγεί στην

$$\dot{\mathbf{e}}_r = -\dot{\theta}\sin\theta\,\mathbf{e}_x + \dot{\theta}\cos\theta\,\mathbf{e}_y\,,$$

η οποία σε συνδυασμό με την εξίσωση (1.9) δίνει

$$\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\theta}\,\mathbf{e}_\theta\,. \tag{1.11}$$

Έτσι, η ταχύτητα παίρνει την ακόλουθη τελική μορφή σε κυλινδρικές συντεταγμένες:

$$\mathbf{v} = \dot{r}\,\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\,\mathbf{e}_\theta + \dot{z}\,\mathbf{e}_z\,. \tag{1.12}$$

Στη συνέχεια, η επιτάχυνση προσδιορίζεται με παραγώγιση της (1.12). Δηλαδή

$$\mathbf{a} = \ddot{r}\,\mathbf{e}_r + (\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\,\mathbf{e}_\theta + \ddot{z}\,\mathbf{e}_z + \dot{r}\,\dot{\mathbf{e}}_r + r\dot{\theta}\,\dot{\mathbf{e}}_\theta\,. \tag{1.13}$$

Παραγωγίζοντας την εξίσωση (1.9) και χρησιμοποιώντας την (1.8) προκύπτει ότι

$$\dot{\mathbf{e}}_\theta = -\dot{\theta}\,\mathbf{e}_r\,. \tag{1.14}$$

Έτσι, με τη βοήθεια των σχέσεων (1.11) και (1.14) η εξίσωση (1.13) δίνει την παρακάτω έκφραση της επιτάχυνσης σε κυλινδρικές συντεταγμένες

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2)\,\mathbf{e}_r + (r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta})\,\mathbf{e}_\theta + \ddot{z}\,\mathbf{e}_z\ . \qquad (1.15)$$

- **Παρατήρηση 1η**: Όταν η κίνηση περιορίζεται στο επίπεδο

  $$z = H = \text{σταθερά},$$

  λέγεται **επίπεδη** και μπορεί να περιγραφεί από τις πολικές συντεταγμένες (r, θ) μόνο. Στην περίπτωση αυτή η ταχύτητα και η επιτάχυνση προσδιορίζονται από τις (1.12) και (1.15) με $\dot{z} = \ddot{z} = 0$.
  Παρόμοια, όταν

  $$\theta = \theta_0 = \text{σταθερά}\ ,$$

  η κίνηση είναι πάλι επίπεδη, αλλά εκφράζεται από τις «καρτεσιανές» συντεταγμένες (r, z).
  Αν όμως

  $$r = R = \text{σταθερά},$$

  η κίνηση γίνεται πάνω στην επιφάνεια κυλίνδρου ακτίνας R. Στην περίπτωση αυτή οι σχέσεις (1.12) και (1.15) γίνονται

  $$\mathbf{v} = R\,\dot{\theta}\,\mathbf{e}_\theta + \dot{z}\,\mathbf{e}_z$$

  και

  $$\mathbf{a} = -R\dot{\theta}^2\,\mathbf{e}_r + R\ddot{\theta}\,\mathbf{e}_\theta + \ddot{z}\,\mathbf{e}_z\ ,$$

  αντίστοιχα.

- **Παρατήρηση 2η**: Αν το υλικό σημείο κινείται έτσι, ώστε

  $$\theta = \theta_0 \quad \text{και} \quad r = R$$

  ή

  $$\theta = \theta_0 \quad \text{και} \quad z = H,$$

  οι εξισώσεις (1.12) και (1.15) γίνονται ίδιες με τις αντίστοιχες σχέσεις που ισχύουν για ευθύγραμμη κίνηση.
  Αν όμως

  $$r = R \quad \text{και} \quad z = H\ ,$$

  η κίνηση είναι μεν μονοδιάστατη, αλλά δεν είναι ευθύγραμμη. Η κίνηση αυτή ονομάζεται **κυκλική** και χαρακτηρίζεται από ταχύτητα

  $$\mathbf{v} = R\dot{\theta}\,\mathbf{e}_\theta \qquad (1.16)$$

  και επιτάχυνση

  $$\mathbf{a} = -R\dot{\theta}^2\,\mathbf{e}_r + R\ddot{\theta}\,\mathbf{e}_\theta\ . \qquad (1.17)$$

- **Παρατήρηση 3η**: Οι χρονικές παράγωγοι των μοναδιαίων διανυσμάτων βάσης $\mathbf{e}_r$ και $\mathbf{e}_\theta$, που εκφράζονται από τις σχέσεις (1.11) και (1.14), μπορεί να υπολογισθούν με εναλλακτικό τρόπο. Τα διανύσματα αυτά έχουν σταθερό μήκος, αλλά η διεύθυνσή τους εξαρτάται από τη γωνία θ. Έτσι, η παράγωγος του ακτινικού διανύσματος $\mathbf{e}_r$ είναι

$$\dot{\mathbf{e}}_r = \frac{d\mathbf{e}_r}{d\theta}\dot{\theta} \ . \qquad (1.18)$$

Σύμφωνα όμως με τον ορισμό

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{d\theta} = \lim_{\Delta\theta \to 0} \frac{\mathbf{e}_r(\theta+\Delta\theta) - \mathbf{e}_r(\theta)}{\Delta\theta} = \lim_{\Delta\theta \to 0} \frac{\Delta\mathbf{e}_r}{\Delta\theta} \ .$$

Επίσης, με τη βοήθεια του σχήματος 1.8 μπορεί να δειχθεί ότι, καθώς η γωνία $\Delta\theta$ γίνεται απειροστή, η διεύθυνση του διανύσματος $\Delta\mathbf{e}_r$ ταυτίζεται με εκείνη του $\mathbf{e}_\theta$, ενώ το μέγεθός του γίνεται ίσο με $\Delta\theta$. Αυτό σημαίνει ότι

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{d\theta} = \mathbf{e}_\theta \qquad (1.19)$$

και συνδυάζοντας το αποτέλεσμα αυτό με την εξίσωση (1.18) οδηγεί στη σχέση (1.11). Τέλος, με παρόμοιο τρόπο μπορεί να δειχθεί και η εξίσωση (1.14).

Σχήμα 1.8

- **Παρατήρηση 4η**: Όπως φαίνεται από την έκφραση (1.12), οι συνιστώσες της ταχύτητας στις διευθύνσεις r και z προκύπτουν λόγω μεταβολής του μεγέθους του διανύσματος θέσης, ενώ η συνιστώσα της ταχύτητας στη διεύθυνση θ προκύπτει, λόγω αλλαγής της διεύθυνσης του διανύσματος θέσης. Η εικόνα είναι πιο πολύπλοκη για τις πολικές συνιστώσες της επιτάχυνσης. Με τη βοήθεια του σχήματος 1.9 φαίνεται ότι η αλλαγή του μήκους και της διεύθυνσης της ακτινικής συνιστώσας v_r συνεισφέρει τους όρους $\ddot{r}$ και $\dot{r}\dot{\theta}$ στην έκφραση (1.15) της επιτάχυνσης. Παρόμοια, η αλλαγή μήκους και διεύθυνσης της γωνιακής συνιστώσας v_θ παράγει τους όρους $\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}$ και $-r\dot{\theta}^2$, αντίστοιχα, στην (1.15).

(α) (β)

Σχήμα 1.9

▶ *Παράδειγμα 1.5: Κίνηση σε Καρδιοειδή Καμπύλη*

Το σημείο Σ του μέλους ενός μηχανισμού κινείται πάνω σε καρδιοειδή οδηγητική καμπύλη η οποία περιγράφεται από την εξίσωση

$$r = \alpha\,(1 + \cos\theta) \quad . \tag{1}$$

Αν η φορά της κίνησης είναι αντιωρολογιακή και γίνεται έτσι, ώστε

$$\dot{\theta} = \omega = \text{σταθερά} \quad , \tag{2}$$

να προσδιορισθεί η ταχύτητα και η επιτάχυνση του σημείου Σ.

Σχήμα 1.10

Λύση:

Παραγώγιση της εξίσωσης (1) οδηγεί στις σχέσεις

$$\dot{r} = -\alpha\dot{\theta}\sin\theta \tag{3}$$

και

$$\ddot{r} = -\alpha\ddot{\theta}\sin\theta - \alpha\dot{\theta}^2\cos\theta \ . \tag{4}$$

Αλλά, από τη σχέση (2) προκύπτει ότι

$$\ddot{\theta} = 0 \ . \tag{5}$$

Επομένως, αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (1)-(5) στις σχέσεις (1.11) και (1.15) προκύπτει ότι

$$\mathbf{v} = \alpha\omega\,[-\sin\theta\,\mathbf{e}_r + (1+\cos\theta)\,\mathbf{e}_\theta]$$

και

$$\mathbf{a} = -\alpha\omega^2\,[(1+2\cos\theta)\,\mathbf{e}_r + 2\sin\theta\,\mathbf{e}_\theta] \ ,$$

με

$$\theta = \omega t + \theta_0 \ .$$

Ερώτηση: Σε ποιες θέσεις εμφανίζεται η μέγιστη επιτάχυνση;

- ***Σημείωση:*** Μία εκτίμηση για τη διευκόλυνση που παρέχει η χρησιμοποίηση κυλινδρικών συντεταγμένων στο παρόν πρόβλημα μπορεί να αναπτυχθεί με την προσπάθεια επίλυσης του ίδιου προβλήματος χρησιμοποιώντας καρτεσιανές συντεταγμένες.

▶ *Παράδειγμα 1.6: Κίνηση στην Επιφάνεια Παραβολοειδούς*

Το υλικό σημείο Σ ξεκινά από την αρχή Ο στο χρόνο $t = 0$ και κινείται στην επιφάνεια παραβολοειδούς εκ περιστροφής, το οποίο έχει εξίσωση

$$z = H\left(\frac{r}{R}\right)^2 \ .$$

Η τροχιά που διαγράφει το σημείο Σ περιγράφεται παραμετρικά από τις εξισώσεις

$$r = \alpha t, \quad \theta = \beta t^2 \ .$$

Να προσδιορισθεί η θέση, η ταχύτητα και η επιτάχυνσή του σημείου Σ, όταν φθάνει το πάνω χείλος του παραβολοειδούς.

Σχήμα 1.11

Λύση:

Όταν το υλικό σημείο Σ φθάνει στο χείλος του παραβολοειδούς ικανοποιείται η συνθήκη

$$R = \alpha t_X \;\Rightarrow\; t_X = \frac{R}{\alpha}\,.$$

Επομένως, το διάνυσμα θέσης του σημείου Σ υπολογίζεται από την εξίσωση (1.10) στη μορφή

$$\mathbf{r} = \alpha t\, \mathbf{e}_r + H \left(\frac{\alpha t}{R}\right)^2 \mathbf{e}_Z\,.$$

Άρα,

$$\mathbf{r}_X = \mathbf{r}(t_X) = R\, \mathbf{e}_r + H\, \mathbf{e}_Z\,,$$

με

$$\theta_X = \beta \left(\frac{R}{\alpha}\right)^2\,.$$

Παρόμοια, η ταχύτητα του σημείου Σ υπολογίζεται από την εξίσωση (1.12) στη μορφή

$$\mathbf{v} = \alpha\, \mathbf{e}_r + 2\alpha\beta t^2\, \mathbf{e}_\theta + 2H \frac{\alpha^2 t}{R^2}\, \mathbf{e}_Z\,.$$

Επομένως,

$$\mathbf{v}_X = \mathbf{v}(t_X) = \alpha \mathbf{e}_r + 2\,\frac{\beta}{\alpha} R^2\, \mathbf{e}_\theta + 2\alpha \frac{H}{R}\, \mathbf{e}_Z\,.$$

Τέλος, η επιτάχυνση του σημείου Σ υπολογίζεται από την εξίσωση (1.15) στη μορφή

$$\mathbf{a} = -\alpha t\,(2\beta t)^2\,\mathbf{e}_r + (\alpha t\,2\beta + 2\alpha 2\beta t)\,\mathbf{e}_\theta + 2\,\frac{H}{R^2}\,\alpha^2\,\mathbf{e}_z\,.$$

Κατά συνέπεια

$$\mathbf{a}_x = \mathbf{a}(t_x) = -4\,\frac{\beta^2}{\alpha^2}\,R^3\,\mathbf{e}_r + 6\beta R\,\mathbf{e}_\theta + 2H\,\frac{\alpha^2}{R^2}\,\mathbf{e}_z\ .$$

➧ ***Σημείωση:*** Από τις δοθείσες σχέσεις μπορεί να δειχθεί ότι

$$z = \left(2\pi\,\frac{\alpha^2 H}{\beta R^2}\right)\frac{\theta}{2\pi} = p\,\frac{\theta}{2\pi}\ .$$

Η σταθερά p αντιπροσωπεύει το λεγόμενο **βήμα ελίκωσης** (δηλαδή την κατακόρυφη απόσταση που ανυψώνεται το σημείο κατά τη διάρκεια μιας ολόκληρης περιστροφής του γύρω από τον κατακόρυφο άξονα Oz).

1.2.4 Τροχιακό Σύστημα Αναφοράς

Πολλά προβλήματα της Κινηματικής υλικού σημείου λύνονται ευκολότερα με χρησιμοποίηση ενός ειδικού συστήματος συντεταγμένων. Εκτός από τη διευκόλυνση της λύσης, το σύστημα αυτό παρέχει χρήσιμες πληροφορίες σχετικά με τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της κίνησης.

Ο ορισμός του ειδικού αυτού συστήματος συντεταγμένων γίνεται με τη βοήθεια του σχήματος 1.12. Πρώτα, η τροχιά του εξεταζομένου υλικού σημείου εκφράζεται ως συνάρτηση του μήκους τόξου s της καμπύλης C, μετρούμενο από κάποιο σταθερό σημείο της Σ_0. Στην περίπτωση αυτή το διά-

Σχήμα 1.12

νυσμα θέσης έχει μορφή

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}\,(s(t))$$

και επομένως η ταχύτητα του υλικού σημείου είναι

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}\,\frac{ds}{dt} = \dot{s}\,\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\mathbf{r}(s+\Delta s) - \mathbf{r}(s)}{\Delta s}\ , \tag{1.20}$$

ή

$$\mathbf{v} = \dot{s}\,\lim_{\Delta s \to 0} \left(\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s} \right) .$$

Καθώς το μήκος τόξου Δs γίνεται απειροστό, είναι προφανές ότι το διάνυσμα $\Delta \mathbf{r}$ γίνεται εφαπτόμενο της τροχιάς στο θεωρούμενο σημείο Σ ενώ το μήκος του πλησιάζει την τιμή Δs. Αυτό σημαίνει ότι το διάνυσμα

$$\mathbf{e}_t = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \tag{1.21}$$

είναι το μοναδιαίο **εφαπτόμενο διάνυσμα** της τροχιάς στο Σ, στην κατεύθυνση που αυξάνει το μήκος s.

Συνδυασμός των εκφράσεων (1.20) και (1.21) οδηγεί στη σχέση

$$\mathbf{v} = \dot{s}\,\mathbf{e}_t\ , \tag{1.22}$$

η οποία δείχνει ότι **το διάνυσμα της ταχύτητας είναι πάντα εφαπτόμενο της τροχιάς**. Επιπλέον, παραγωγίζοντας την τελευταία σχέση δίνει την επιτάχυνση στη μορφή

$$\mathbf{a} = \ddot{s}\,\mathbf{e}_t + \dot{s}^2\,\frac{d\mathbf{e}_t}{ds}\ . \tag{1.23}$$

Για τον προσδιορισμό του διανύσματος $\frac{d\mathbf{e}_t}{ds}$, το οποίο εμφανίζεται στην παραπάνω σχέση θεωρούνται τα σημεία Σ' και Σ'' στη γειτονιά του σημείου Σ, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.13. Καθώς τα σημεία Σ' και Σ'' προσεγγίζουν το Σ, το επίπεδο που ορίζεται από τα σημεία Σ, Σ' και Σ'' προσεγγίζει το λεγόμενο **εγγύτατο επίπεδο** της τροχιάς στο Σ. Έτσι, το επίπεδο αυτό συμπίπτει με το επίπεδο που ορίζεται από το σημείο Σ και το διάνυσμα $\Delta\mathbf{e}_t = \mathbf{e}'_t - \mathbf{e}_t$, καθώς το μήκος τόξου $\Delta s = \overline{\Sigma\Sigma'}$ γίνεται απειροστό. Επομένως, το διάνυσμα $\frac{d\mathbf{e}_t}{ds}$ κείται στο εγγύτατο επίπεδο της τροχιάς στο σημείο Σ. Επιπλέον, επειδή το διάνυσμα $\mathbf{e}_t$ έχει σταθερό μέτρο, το διάνυσμα $\frac{d\mathbf{e}_t}{ds}$ είναι κάθετο στο $\mathbf{e}_t$. Δηλαδή