

Σ. ΝΑΤΣΙΑΒΑΣ

ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ



ΕΚΔΟΣΕΙΣ
ΖΗΤΗ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το βιβλίο αυτό κύριο σκοπό έχει να παρουσιάσει τις βασικές αρχές της **Δυναμικής Υλικών Σωμάτων**, καθώς και την επίδειξη της εφαρμογής τους στη συστηματική επίλυση πρακτικών προβλημάτων.

Η Δυναμική είναι ο κλάδος της **Μηχανικής** που εξετάζει τη σχέση ανάμεσα στην κίνηση υλικών σωμάτων (δηλαδή μεταφορά, περιστροφή, παραμόρφωση) και στις δυνάμεις οι οποίες προκαλούν την κίνηση ή αναπτύσσονται στη διάρκεια της κίνησης. Η εφαρμογή των αρχών της Δυναμικής είναι απαραίτητη σε συστήματα που έχουν μέλη τα οποία κινούνται με σχετικά μεγάλες επιταχύνσεις, οπότε οι υπολογισμοί που βασίζονται στις αρχές της **Στατικής** γίνονται ανακριβείς.

Η επιστήμη της Δυναμικής υλικών σωμάτων βασίζεται σ' ένα μικρό αριθμό βασικών αρχών, αλλά είναι χρήσιμη σ' ένα ευρύτατο πεδίο εφαρμογών. Οι πρώτες μελέτες της Δυναμικής έγιναν από τον Αριστοτέλη, αλλά οι σωστές επιστημονικές βάσεις της τέθηκαν πολύ αργότερα από το Γαλιλαίο και το Νεύτωνα και συμπληρώθηκαν από πρωτοπόρους του πνεύματος όπως οι *Euler, Lagrange, Hamilton, Laplace, Poincare* και *Einstein*.

Στις περισσότερες πρακτικές εφαρμογές οι παρατηρούμενες ταχύτητες είναι πολύ μικρές ως προς την ταχύτητα του φωτός, η οποία έχει τιμή 300.000 km/s. Επίσης, οι διαστάσεις των εξεταζόμενων σωμάτων είναι πολύ μεγαλύτερες από τις ατομικές ή τις πυρηνικές διαστάσεις και πολύ μικρότερες από τις διαστάσεις των συστημάτων που εξετάζονται από αστρονόμους και κοσμολόγους. Κατά συνέπεια, οι προβλέψεις της λεγόμενης **Κλασικής Δυναμικής** –η οποία βασίζεται στους νόμους κίνησης που διατυπώθηκαν από το Νεύτωνα– είναι αρκετά ακριβείς για τη μεγάλη πλειοψηφία των τεχνολογικών εφαρμογών. Για το λόγο αυτό, η παρουσίαση του υλικού του βιβλίου αυτού θα βασισθεί αποκλειστικά στα αξιώματα και στις αρχές της Κλασικής Δυναμικής.

Καταρχήν, ως κίνηση υλικού σώματος ορίζεται η μεταβολή της θέσης των μερών του σχετικά με άλλα σώματα. Επομένως, για την περιγραφή και τη μέτρηση της κίνησης χρειάζεται κάποιο **σύστημα αναφοράς**. Όπως απέδειξε ο Γαλιλαίος, υπάρχουν προτιμητέα συστήματα αναφοράς, στα οποία η επιτάχυνση έχει την απλούστερη

μορφή, γιατί δεν εμφανίζονται σε αυτά οι κινηματικές συνιστώσες της (όπως η επιτάχυνση *Coriolis* και η φυγόκεντρος επιτάχυνση). Αυτά τα συστήματα αναφοράς ονομάζονται **αδρανειακά**. Επιπλέον, η ύπαρξη ενός τέτοιου συστήματος συνεπάγεται την ύπαρξη μιας απειρίας παρόμοιων συστημάτων, τα οποία μεταφέρονται με σταθερή ταχύτητα ως προς το αρχικό σύστημα αναφοράς. Έτσι, κατά το Νεύτωνα, το πιο προνομιακό αδρανειακό σύστημα αναφοράς είναι αυτό που είναι στερεωμένο στο «κέντρο του Σύμπαντος».

Οι αρχές της Δυναμικής μπορεί να εκφραστούν με τρία θεμελιώδη φυσικά μεγέθη, δηλαδή το μήκος, το χρόνο και τη μάζα. Σύμφωνα με την Κλασική Δυναμική, η **μάζα** ενός σώματος παραμένει σταθερή και ανεξάρτητη από την κίνησή της και το χρόνο. Επίσης, ο **χώρος** είναι απόλυτος και μπορεί να περιγραφεί με στοιχεία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Επομένως, θεωρείται ότι είναι ομογενής και ισότροπος, δηλαδή έχει τις ίδιες μετρικές ιδιότητες σε κάθε σημείο και διεύθυνση. Επιπλέον, ο **χρόνος** είναι απόλυτος (δηλαδή ο ίδιος για παρατηρητές που βρίσκονται σε διαφορετικά συστήματα αναφοράς και ανεξάρτητος από την κίνηση και τα φυσικά αντικείμενα) και ομογενής (δηλαδή ανεξάρτητος από το χώρο).

Παραδοσιακά, η Δυναμική χωρίζεται σε δύο μεγάλες περιοχές: την **Κινηματική** και την **Κινητική**. Η πρώτη εξετάζει τη γεωμετρία της κίνησης. Δηλαδή συνδέει τις έννοιες της θέσης, της ταχύτητας, της επιτάχυνσης και του χρόνου χωρίς αναφορά στη φυσική αιτία της κίνησης. Από την άλλη μεριά η Κινητική εξετάζει τη σχέση ανάμεσα στις δυνάμεις, τη μάζα και την κίνηση των σωμάτων. Δηλαδή προβλέπει την κίνηση αν είναι γνωστές οι δυνάμεις ή καθορίζει τις δυνάμεις που απαιτούνται για την επίτευξη συγκεκριμένης κίνησης.

Αν η κίνηση ενός σώματος είναι τέτοια, ώστε να μπορεί να αγνοηθεί η περιστροφή (αλλαγή προσανατολισμού) του, τότε το σώμα ονομάζεται **υλικό σημείο**. Όταν η περιστροφή ενός σώματος είναι σημαντική, αλλά η αλλαγή στην απόσταση μεταξύ δύο τυχαίων σημείων του είναι αμελητέα, τότε το σώμα ονομάζεται **απαραμόρφωτο στερεό** ή απλά **στερεό σώμα**. Τέλος, όταν οι παραμορφώσεις του σώματος είναι σημαντικές, τότε το σώμα ονομάζεται **παραμορφώσιμο σώμα**. Είναι προφανές ότι το ίδιο σώμα μπορεί να θεωρηθεί ως υλικό σημείο, στερεό ή παραμορφώσιμο σώμα ανάλογα με το σκοπό της μελέτης (π.χ. πλανήτες, αεροπλάνα, αυτοκίνητα).

Το αντικείμενο του παρόντος μαθήματος είναι η ανάλυση της κίνησης δυναμικών συστημάτων, τα οποία αποτελούνται από υλικά σημεία και από στερεά σώματα. Τα μαθηματικά μοντέλα που προκύ-

πουν για τα συστήματα αυτά αποτελούνται από κανονικές διαφορικές εξισώσεις με ανεξάρτητη μεταβλητή το χρόνο. Από την άλλη μεριά, η κίνηση παραμορφώσιμων στερεών σωμάτων ή ρευστών σωμάτων (δηλαδή σωμάτων που δεν μπορούν να παραλάβουν διατμητική τάση όταν βρίσκονται σε κατάσταση στατικής ισορροπίας και δεν έχουν προτιμητέα μορφή) περιγράφεται από μερικές διαφορικές εξισώσεις με ανεξάρτητες μεταβλητές το χρόνο καθώς και χωρικές συντεταγμένες. Η περιγραφή και ανάλυση της κίνησης παραμορφώσιμων σωμάτων αποτελεί αντικείμενο άλλων μαθημάτων (π.χ. Ελαστοδυναμική, Μηχανική Ρευστών).

Το σύνολο των αρχών κίνησης που προκύπτουν με απευθείας εφαρμογή των νόμων του Νεύτωνα αποτελεί τη **Νευτώνεια ή Διανυσματική Δυναμική**. Μια εναλλακτική μέθοδος για τη θεμελίωση και την παραγωγή των εξισώσεων κίνησης παρουσιάζεται από την ονομαζόμενη **Αναλυτική Δυναμική**, που αναπτύχθηκε κυρίως από τον **Lagrange** και τον **Hamilton**. Η μέθοδος αυτή απαιτεί την εισαγωγή πιο αφηρημένων εννοιών –όπως οι γενικευμένες συντεταγμένες, δυνάμεις και ορμές καθώς και οι δυνατές μετατοπίσεις– αλλά παρουσιάζει ορισμένα σημαντικά πλεονεκτήματα ως προς τις μεθόδους της Νευτώνειας Δυναμικής.

Σε όλη την έκταση του παρόντος βιβλίου δίνεται καταρχήν έμφαση στη διάκριση ορισμών και εννοιών που αναφέρονται στην Κινηματική και στην Κινητική. Επιπλέον, γίνεται διαχωρισμός μεταξύ των διαφορετικών μεθοδολογιών της Κινητικής. Από την άλλη μεριά, τονίζεται η αλληλοσύνδεση που υπάρχει μεταξύ των διαφόρων περιοχών και αρχών της Δυναμικής. Στα πρώτα δύο κεφάλαια του βιβλίου παρουσιάζεται η Κινηματική και η Κινητική Υλικών Σημείων. Οι ορισμοί και οι αρχές της Κινητικής αναπτύσσονται αρχικά για μεμονωμένα υλικά σημεία και γενικεύονται στη συνέχεια για συστήματα υλικών σημείων. Το τρίτο και το τέταρτο κεφάλαιο αναφέρονται στην Κινηματική και την Κινητική Στερεών Σωμάτων και αποτελούν φυσική συνέχεια του πρώτου και του δεύτερου κεφαλαίου, αντίστοιχα. Τέλος, στο πέμπτο κεφάλαιο γίνεται παρουσίαση των βασικών αρχών της Αναλυτικής Δυναμικής.

Για την κατανόηση της θεωρίας της Δυναμικής και την παραγωγή σωστών μαθηματικών μοντέλων είναι απαραίτητη η γνώση βασικών στοιχείων του Διανυσματικού, του Διαφορικού και του Ολοκληρωτικού Λογισμού, καθώς και των εννοιών, αρχών και μεθοδολογιών της Στατικής. Επίσης, το υλικό που παρουσιάζεται στα παραρτήματα Α και Β και αναφέρεται στον ορισμό και τις ιδιότητες του Τανυστή Αδράνειας και στην παρουσίαση στοιχείων του Λογισμού των

Μεταβολών, αντίστοιχα, είναι απαραίτητο συμπλήρωμα του τετάρτου και του πέμπτου κεφαλαίου, αντίστοιχα. Επιπλέον, για την επίλυση των εξισώσεων που προκύπτουν από την εφαρμογή των αρχών της Δυναμικής είναι χρήσιμη η γνώση μεθόδων επίλυσης αλγεβρικών και διαφορικών εξισώσεων με αναλυτικό ή με αριθμητικό τρόπο.

Σε κάθε ξεχωριστή ενότητα, η παρουσίαση της θεωρίας συνοδεύεται από έναν αριθμό παρατηρήσεων, που έχουν σκοπό τη συμπλήρωση ή τη διαλεύκανση ορισμένων σημείων της θεωρίας. Στη συνέχεια γίνεται η συστηματική επίλυση αντιπροσωπευτικών παραδειγμάτων, με σκοπό την περαιτέρω εμβάθυνση και κατανόηση της θεωρίας. Παράλληλα με την ανάπτυξη των μαθηματικών μοντέλων που προκύπτουν και τη διαδικασία επίλυσής τους, δίνεται έμφαση στη σωστή ερμηνεία και τη σημασία των αποτελεσμάτων κάθε παραδείγματος. Τέλος, για να δοθεί η ευκαιρία στον αναγνώστη να ελέγξει σε ποιο βαθμό κατέχει τη θεωρία καθώς και να διαπιστώσει τη χρησιμότητα της Δυναμικής στην επίλυση μερικών απλών πρακτικών εφαρμογών, παρουσιάζεται στο τέλος κάθε κεφαλαίου ένας αριθμός άλλων προβλημάτων.

Στο σημείο αυτό θα ήθελα να ευχαριστήσω τις Εκδόσεις Ζήτη για τις προσπάθειες που κατέβαλαν για την καλύτερη δυνατή εμφάνιση του βιβλίου αυτού.

Θεσσαλονίκη, Μάρτιος 1994

Σωτήρης Νατσιάβας

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΟΡΩΝ

- αγνοήσιμες συντεταγμένες 403, 412
 αδρανειακή δύναμη 41, 313
 αδρανειακό σύστημα αναφοράς 40, 312
 ακτίνα αδράνειας 440
 αναλλοίωτες 455, 467
 Αναλυτική Δυναμική 377
 αναπήδηση 35
 ανάπτυξη κυκλώνα 375
 αναστροφή μετάπτωση 346
 ανολόνομοι δεσμοί 381, 392
 άξονας συμμετρίας 236
 απειροστές περιστροφές 167
 απόγειο 125
 απόλυτη επιτάχυνση 193, 234
 απόλυτη κίνηση 25, 26
 απόλυτη ταχύτητα 192, 264
 απωστικές δυνάμεις 91
 αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας 68, 285, 405
 αρχή διατήρησης της ορμής 53, 263, 403
 αρχή διατήρησης της στροφορμής 55, 263, 403
 αρχή του D' Alembert 41
 αρχή του Hamilton 420
 αρχή των δυνατών έργων 382
 αρχικές συνθήκες 430
 αρχικές ταχύτητες 276
 αστρόβιλα πεδία 70
 βαθμοί ελευθερίας 380
 βαθμοί ελευθερίας για απειροστή κίνηση 381
 βαθμοί ελευθερίας για πεπερασμένη κίνηση 381
 βαθμός απόδοσης 70
 βήμα ελίκωσης 19
 γειτονικές συναρτήσεις 475
 γενικευμένες δυνάμεις 387
 γενικευμένες συντεταγμένες 378
 γενικευμένες ταχύτητες 380
 γενικευμένη αρχή του D' Alembert 383
 γενικευμένη ορμή 403
 γεωδαιτικές 482
 γεωμετρική οριακή συνθήκη 430
 γεωσύγχρονη τροχιά 126
 γραμμή κόμβων 200
 γραμμή κρούσης 83
 γραμμική ώση 52
 γραμμικό ελατήριο 78
 γρήγορη συστοφή 341
 γυροσκοπικές κινήσεις 339
 γυροσκοπικός όρος 176, 394
 γωνιακή επιτάχυνση 138, 146, 171
 γωνιακή ταχύτητα 138, 145, 171
 γωνίες Euler 200
 δεσμοί κίνησης 378
 δεύτερος νόμος του Euler 44
 δεύτερος νόμος του Kepler 95
 διάγραμμα επιταχύνσεων 149, 158
 διάγραμμα ταχυτήτων 149, 157
 διαγωνιοποίηση πίνακα 458
 Διανυσματική Δυναμική 377
 διάνυσμα θέσης 1
 διευθύνουσα 124
 δικάθετο διάνυσμα 22
 δίσκος 444
 δίσκος αναφοράς 137
 δράση 415
 δύναμη Coriolis 313
 δυναμική ενέργεια 67
 δυναμική ζυγοστάθμιση 332
 δυνατές μετατοπίσεις 382
 δυνατό έργο 382
 εγγύτατο επίπεδο 20
 ειδική αρχή της σχετικότητας 118
 έκκεντρο κρούση 83, 266
 εκκεντρότητα 125
 ελαστική κρούση 86
 ελκτικές δυνάμεις 91
 ελλειπτική τροχιά 94
 ελλειψοειδές αδράνειας 459, 468

- εμβαδική ταχύτητα 92
 ενεργές δυνάμεις 44
 εξισώσεις μετασχηματισμού 387
 εξισώσεις του Euler 232
 εξισώσεις του Hamilton 413
 εξισώσεις του Lagrange 389
 εξίσωση του Euler 478, 486
 εξωτερικές δυνάμεις 285
 επίπεδα ζυγοστάθμισης 332
 επίπεδη κίνηση 5, 14, 203, 233, 264, 286
 επίπεδο συμμετρίας 321
 επίπεδος δίσκος 466
 επισκιπτική τροχιά 11
 επιτάχυνση 2
 επιτάχυνση Coriolis 193
 επιτρόχια επιτάχυνση 22, 148
 έργο 39, 65
 εστία 124
 ευθεία κρούση 84
 ευθεία μετάπτωση 346
 ευθύβολη τροχιά 11
 ευθύγραμμη κίνηση 5
 εφαπτόμενο διάνυσμα 20
 εφαρμοσμένη δύναμη 382
 ζεύγος δυνάμεων 225
 ζυγοσταθμισμένο σώμα 329
 θεώρημα παραλλήλων αξόνων 447
 θεώρημα του Chasle 185
 θεώρημα του Euler 168, 213
 θεώρημα του Euler για ομογενείς συναρτη-
 σεις 436
 θεώρημα του Steiner 447
 ιδιότητα πρόσθεσης 175
 ιξώδεις δυνάμεις 391
 ισοδύναμα συστήματα δυνάμεων 44
 ισότιμα συστήματα δυνάμεων 44
 ισχύς 70, 289
 κάθετη κρούση 84
 καμπυλότητα της τροχιάς 21
 κανονικές εξισώσεις του Hamilton 415
 κανονικοί μετασχηματισμοί 417
 κατανομημένες δυνάμεις 225
 κατάσταση μόνιμης μετάπτωσης 338
 κεντρική δύναμη 90
 κεντρική κρούση 83
 κεντροβαρικό σύστημα αναφοράς 232, 445
 κεντρομόλος επιτάχυνση 22, 148, 173
 κέντρο καμπυλότητας 22
 κέντρο μάζας 43, 226
 κίνηση 1
 κινητή πολιική τροχιά 152, 155
 κινητική ενέργεια 66, 394
 κινητός κώνος 172
 κλόνηση 200
 κρούση 84
 κρουστικές δυνάμεις 60, 83
 κρουστικό κέντρο δίσκου 321, 367
 κυκλική κίνηση 14
 κυκλική συντεταγμένη 403, 406
 κυκλοειδής καμπύλη 484
 κυλινδρικά κελύφη 445
 κύριες μαζικές ροπές αδράνειας 458
 κύριο κάθετο διάνυσμα 21
 κύριοι άξονες αδράνειας 232, 458
 κύριοι κεντροβαρικοί άξονες αδράνειας
 288, 329
 κωνική τομή 94, 124
 λεία κρούση 84
 μαζικά γινόμενα αδράνειας 440
 μαζική ροπή αδράνειας 438, 440
 μέση επιτάχυνση 3
 μέση ταχύτητα 3
 μεταβολή συνάρτησης 476
 μετάπτωση 200
 μετασχηματισμός του Legendre 414
 μεταφορική κίνηση 25, 181, 266, 287
 μετοχική επιτάχυνση 193
 μετοχική κίνηση 26
 μετοχική ταχύτητα 192
 μηχανή jet 131
 μηχανική ενέργεια 68
 μονογενή συστήματα 391
 μονοδιάστατη κίνηση 137
 Νευτώνεια Δυναμική 377
 νόμοι του Νεύτωνα 40
 νόμος αντανάκλασης 90
 νόμος Βαρύτητας 93
 νόμος Παγκόσμιας Έλξης 93
 νόμος της γυροσκοπικής μετάπτωσης 340
 όγκος ελέγχου 98
 οδογράφος της ταχύτητας 34
 ολοκληρώματα κίνησης 402, 416
 ολοκλήρωμα του Jacobi 404
 ολόνομο σύστημα 389, 403, 423
 ολόνομοι δεσμοί 379, 393
 ομογενές πεδίο δυνάμεων 123

- οριακές συνθήκες 430
- οριακές τιμές 107
- ορμή 226
- παραβολική τροχιά 94
- παραδεκτές συναρτήσεις 475
- πεδίο βαρύτητας 93
- πεπερασμένες περιστροφές 167
- πεπερασμένες ώσεις 276
- περίγειο 125
- περίοδος επαναφοράς 84
- περίοδος σύνθλιψης 84
- πλάγια κρούση 84
- πλαστική κρούση 86
- πρόβλημα δύο σωμάτων 93, 124
- πρώτος νόμος του Euler 43
- πρώτος νόμος του Kepler 95
- ράβδος 444
- ρεόνομος δεσμός 379
- σκληρόνομος δεσμός 379
- σταθερά βαρύτητας 93
- σταθερή πολική τροχιά 152, 155
- σταθερός κώνος 172
- στατικά προβλήματα 389
- στατική θέση ισορροπίας 381, 399
- στατική ώθηση 105
- στιβαρότητα 78
- στιγμιαίο κέντρο περιστροφής 286
- στιγμιαίος άξονας περιστροφής 288
- στιγμιαίος πόλος περιστροφής 151
- στρέψη χωρικής καμπύλης 23
- στροφική ώση 54
- στροφικός οδογράφος 172
- στροφορμή 53, 226
- συγκεντρωμένες δυνάμεις 225
- συζυγείς μεταβλητές 415
- συμμετρικό σώμα 234
- συνάρτηση δυναμικού 67
- συνάρτηση σκέδασης του Rayleigh 391
- συνάρτηση του Hamilton 414
- συνάρτηση του Lagrange 390
- συναρτησιακή 475
- συνημίτονα κατεύθυνσης 165
- σύνθετα σώματα 447
- συντελεστής επαναφοράς 85
- συντηρητικές δυνάμεις 67
- συντηρητικό σύστημα 390, 403, 404, 422
- σύστημα στερεών σωμάτων 235, 266, 287
- σύστημα υλικών σημείων 39, 53, 55
- συστροφή 201
- σχετική επιτάχυνση 193
- σχετική κίνηση 25
- σχετική στροφορμή 57
- σχετική ταχύτητα 192
- σημασιακός χώρος 420
- τανυστής αδράνειας 229, 439
- ταχύτητα 2
- τραχεία κρούση 84
- τρίεδρο Frenet 22
- τρίτος νόμος του Kepler 95
- τροποποιημένες εξισώσεις του Euler 236
- τύποι Serret-Frenet 22
- υδροστροβίλος Pelton 130
- υπερβολική τροχιά 94
- υποθετικές δυνάμεις 313
- φυσική οριακή συνθήκη 430
- χαρακτηριστική εξίσωση 455
- ώση 52

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

<i>ΠΡΟΛΟΓΟΣ</i>	v
1 ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ	
1.1 Εισαγωγή.....	1
1.2 Διάνυσμα Θέσης, Ταχύτητα, Επιτάχυνση.....	1
1.2.1 Ορισμοί.....	1
1.2.2 Καρτεσιανό Σύστημα Αναφοράς	4
1.2.3 Κυλινδρικό Σύστημα Αναφοράς.....	12
1.2.4 Τροχιακό Σύστημα Αναφοράς.....	19
1.3 Σχετική Μεταφορική Κίνηση.....	25
<i>ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ</i>	29
2 ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΥΛΙΚΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ	
2.1 Εισαγωγή.....	39
2.2 Νόμοι του Νεύτωνα και του Euler	40
2.2.1 Νόμοι του Νεύτωνα για Υλικό Σημείο	40
2.2.2 Νόμοι του Euler για Συστήματα Υλικών Σημείων.....	42
2.3 Αρχές Ώσης και Ορμής.....	51
2.3.1 Γραμμική Ορμή και Ώση.....	52
2.3.2 Στροφορμή και Στροφική Ώση.....	53
2.4 Αρχές Έργου και Ενέργειας.....	65
2.4.1 Έργο και Ενέργεια Υλικού Σημείου	65
2.4.2 Έργο και Ενέργεια Συστήματος Υλικών Σημείων.....	70
2.5 Εφαρμογές	83
2.5.1 Κρούση Υλικών Σημείων.....	83
2.5.2 Κεντρικές Δυνάμεις - Διαστημομηχανική.....	90
2.5.3 Μεταβαλλόμενα Συστήματα Υλικών Σημείων.....	98
<i>ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ</i>	106
3 ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ	
3.1 Εισαγωγή.....	133
3.2 Μεταφορική Κίνηση.....	134

3.3	Περιστροφή Γύρω από Σταθερό Άξονα.....	136
3.4	Γενική Επίπεδη Κίνηση.....	142
3.4.1	Ορισμοί.....	142
3.4.2	Υπολογισμός Ταχυτήτων και Επιταχύνσεων.....	144
3.4.3	Στιγματικός Πόλος Περιστροφής.....	149
3.5	Περιστροφή Γύρω από Σταθερό Σημείο.....	164
3.5.1	Πεπερασμένες και Απειροστές Περιστροφές.....	164
3.5.2	Ορισμός Γωνιακής Ταχύτητας και Γωνιακής Επιτάχυνσης Στερεού Σώματος.....	168
3.5.3	Υπολογισμός Ταχύτητας και Επιτάχυνσης Σημείων του Στερεού Σώματος.....	172
3.5.4	Παράγωγος Διανύσματος ως προς Περιστρεφόμενο Σύστημα Αναφοράς.....	173
3.6	Γενική Χωρική Κίνηση Στερεού.....	181
3.7	Σχετική Κίνηση Υλικού Σημείου.....	190
3.8	Γωνίες Euler.....	200
	<i>ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ</i>	203

4 ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΣΤΕΡΕΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ

4.1	Εισαγωγή.....	224
4.2	Εξισώσεις του Euler για Στερεά Σώματα.....	225
4.2.1	Ορισμοί.....	225
4.2.2	Στροφορμή και Τανυστής Αδράνειας Στερεού Σώματος.....	228
4.2.3	Εξισώσεις Κίνησης Στερεού Σώματος.....	231
4.3	Αρχές Ώσης και Ορμής.....	262
4.4	Αρχές Έργου και Ενέργειας.....	281
4.5	Υποθετικές Δυνάμεις.....	312
4.6	Εφαρμογές.....	316
4.6.1	Έκκεντρη Κρούση.....	316
4.6.2	Ζυγοστάθμιση Περιστρεφόμενων Στερεών Σωμάτων.....	329
4.6.3	Περιστροφή Αξονοσυμμετρικών Στερεών Σωμάτων.....	336
	<i>ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ</i>	348

5 ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ

5.1	Εισαγωγή.....	377
5.2	Ορισμοί.....	378

5.3 Αρχή των Δυνατών Έργων.....	381
5.4 Εξισώσεις του Lagrange.....	387
5.5 Ολοκληρώματα Κίνησης και Αρχές Διατήρησης.....	402
5.6 Κανονικές Εξισώσεις του Hamilton	413
5.7 Αρχή του Hamilton.....	420
<i>ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ</i>	432

Παράρτημα Α: ΤΑΝΥΣΤΗΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ

A.1 Ορισμοί.....	438
A.2 Θεώρημα Παράλληλων Αξόνων.....	445
A.3 Περιστροφή Αξόνων.....	451
A.4 Κύριοι Άξονες Αδράνειας.....	454
<i>ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ</i>	467

Παράρτημα Β: ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ ΤΩΝ ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ

B.1 Εισαγωγή.....	475
B.2 Εξίσωση του Euler.....	476
<i>ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ</i>	485

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....487

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΟΡΩΝ.....489

1 ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ

1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η Κινηματική είναι ο κλάδος της Μηχανικής που εξετάζει και αναλύει τη γεωμετρία της κίνησης ενός σώματος, χωρίς να αναφέρεται στα αίτια που την προκαλούν. Για υλικό σημείο, ως **κίνηση** ορίζεται η αλλαγή θέσης του σημείου ως προς κάποιο σύστημα αναφοράς. Έτσι, για την περιγραφή της κίνησης υλικού σημείου τα θεμελιώδη φυσικά μεγέθη είναι το μήκος και ο χρόνος.

Στο κεφάλαιο αυτό εισάγονται αρχικά οι έννοιες των διανυσμάτων θέσης, ταχύτητας και επιτάχυνσης. Στη συνέχεια παράγονται εκφράσεις για τις συνιστώσες των διανυσμάτων αυτών ως προς μερικά συστήματα αναφοράς που επιλέγονται συχνά σε πρακτικές εφαρμογές. Παράλληλα, εξηγείται η φυσική σημασία των συνιστωσών των διανυσμάτων αυτών. Το κεφάλαιο τελειώνει με μελέτη της κίνησης υλικού σημείου σχετικά με σύστημα αναφοράς που κινείται παράλληλα ως προς κάποιο άλλο σύστημα αναφοράς.

Εκτός από έννοιες της γεωμετρίας, η βασική μαθηματική έννοια που εισάγεται και χρησιμοποιείται στο παρόν κεφάλαιο είναι η χρονική παράγωγος διανύσματος. Η παράγωγος αυτή εξαρτάται από μεταβολές τόσο στο μέγεθος όσο και στη διεύθυνση του διανύσματος.

1.2 ΔΙΑΝΥΣΜΑ ΘΕΣΗΣ, ΤΑΧΥΤΗΤΑ, ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ

1.2.1 Ορισμοί

Θεωρείται υλικό σημείο καθώς διαγράφει τροχιά στο χώρο. Η τροχιά αυτή χαρακτηρίζεται από τη χωρική καμπύλη C και μπορεί να ορισθεί σχετικά με κάποιο σύστημα αναφοράς $Oxyz$ (ή F), όπως φαίνεται στο σχήμα 1.1. Με τον τρόπο αυτό η θέση Σ του υλικού σημείου στη χρονική στιγμή t καθορίζεται πλήρως από το διάνυσμα που έχει ως αρχή το σημείο O του συστήματος αναφοράς F και ως τέλος το σημείο Σ . Το διάνυσμα αυτό, $\mathbf{r}(t)$, ονομάζεται **διάνυσμα θέσης** του υλικού σημείου ως προς το σύστημα αναφοράς F .

Σχήμα 1.1

Στη χρονική στιγμή $t+\Delta t$ το υλικό σημείο καταλαμβάνει τη θέση Σ' , η οποία καθορίζεται από το διάνυσμα θέσης $\mathbf{r}(t+\Delta t)$. Σε αναλογία με τον ορισμό της παραγώγου βαθμωτής συνάρτησης $f(t)$, ο οποίος είναι

$$\dot{f}(t) = \frac{df}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} ,$$

μπορεί να ορισθεί και η χρονική παράγωγος της διανυσματικής συνάρτησης $\mathbf{r}(t)$. Δηλαδή

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) , \quad (1.1)$$

με

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \right) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} .$$

Το διάνυσμα $\mathbf{v}(t)$ που προκύπτει με τον τρόπο αυτό ονομάζεται **ταχύτητα** του υλικού σημείου στη θέση Σ .

Με παρόμοιο τρόπο ορίζεται και η **επιτάχυνση** του υλικού σημείου στη θέση Σ , ως προς το σύστημα αναφοράς F , ως η χρονική παράγωγος του διανύσματος της ταχύτητας. Δηλαδή

$$\mathbf{a}(t) \equiv \dot{\mathbf{v}}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t) \quad (1.2)$$

- **Παρατήρηση 1η:** Επειδή η Κινηματική εξετάζει μόνο τη γεωμετρία της κίνησης και δεν εμπλέκει φυσικούς νόμους, δεν υπάρχουν προτιμητέα

συστήματα αναφοράς. Η κίνηση όμως φαίνεται διαφορετικά από παρατηρητές που βρίσκονται σε διαφορετικά συστήματα αναφοράς και επομένως πρέπει να καθορισθεί κάποιο σύστημα αναφοράς σε κάθε περίπτωση. Επίσης, με βάση τη γεωμετρία της τροχιάς, οι συνιστώσες των διανυσμάτων θέσης, ταχύτητας και επιτάχυνσης μπορεί να εκφραστούν στο πιο βολικό σύστημα συντεταγμένων (καρτεσιανό, κυλινδρικό, σφαιρικό κ.λπ.), όπως αναπτύσσεται στις επόμενες παραγράφους.

- **Παρατήρηση 2η:** Σε μερικές περιπτώσεις της πράξης, αντί της στιγμιαίας ταχύτητας που ορίζεται από τη σχέση (1.1) για απειροστό χρονικό διάστημα dt , είναι πιο χρήσιμο να θεωρηθεί πεπερασμένο Δt και να ορισθεί η **μέση ταχύτητα**

$$\bar{\mathbf{v}}(t) = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} ,$$

όπου

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)$$

είναι το διάνυσμα μετατόπισης του υλικού σημείου στο χρόνο Δt . Με τον ίδιο τρόπο ορίζεται και η αντίστοιχη **μέση επιτάχυνση**

$$\bar{\mathbf{a}}(t) = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} ,$$

με

$$\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}(t+\Delta t) - \mathbf{v}(t) .$$

- **Παρατήρηση 3η:** Με τον τρόπο που ορίστηκαν η ταχύτητα και η επιτάχυνση μπορεί να ορισθούν και παράγωγοι ανώτερης τάξης της συνάρτησης $\mathbf{r}(t)$. Αυτές οι παράγωγοι, όμως, δεν έχουν συνήθως πρακτική αξία, γιατί δεν εμπλέκονται στους νόμους της Κινητικής. Τη μόνη εξαίρεση αποτελεί η παράγωγος της επιτάχυνσης, η οποία βρίσκει εφαρμογή στην περιοχή των μηχανισμών και της κρούσης οχημάτων.
- **Παρατήρηση 4η:** Ο συμβολισμός $\mathbf{r}(t)$ είναι συντομογραφία του πληρέστερου συμβολισμού $\mathbf{r}_{O\Sigma}(t)$. Το ίδιο ισχύει και για τους ορισμούς (1.1) και (1.2), που αντικαθιστούν τους πιο πλήρεις, αλλά και πιο πολύπλοκους συμβολισμούς

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\Sigma/F} = (\dot{\mathbf{r}}_{O\Sigma})_F$$

και

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\Sigma/F} = (\dot{\mathbf{v}}_{\Sigma/F})_F .$$

Η χρησιμότητα των συμβολισμών αυτών θα φανεί στη μελέτη της Κινηματικής στερεών σωμάτων και της σχετικής κίνησης σωμάτων, όπου εμπλέκονται περισσότερα από ένα συστήματα αναφοράς.

1.2.2 Καρτεσιανό Σύστημα Αναφοράς

Σε πολλές περιπτώσεις η τροχιά ενός υλικού σημείου Σ είναι μια χωρική καμπύλη που ορίζεται παραμετρικά από τις συντεταγμένες

$$(x_{\Sigma}, y_{\Sigma}, z_{\Sigma}) = (x(t), y(t), z(t))$$

ως προς ορθοκανονικό καρτεσιανό σύστημα αναφοράς $Oxyz$, όπως δείχνει το σχήμα 1.2. Έτσι, αν \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y και \mathbf{e}_z είναι τα μοναδιαία διανύσματα βά-

Σχήμα 1.2

σης του συστήματος αναφοράς, τότε το διάνυσμα θέσης του υλικού σημείου εκφράζεται στη μορφή:

$$\mathbf{r}(t) = x(t) \mathbf{e}_x + y(t) \mathbf{e}_y + z(t) \mathbf{e}_z .$$

Κατά συνέπεια, εφαρμόζοντας τον ορισμό (1.1) προκύπτει ότι η ταχύτητα του υλικού σημείου είναι:

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[x(t+\Delta t) \mathbf{e}_x + y(t+\Delta t) \mathbf{e}_y + z(t+\Delta t) \mathbf{e}_z] - [x(t) \mathbf{e}_x + y(t) \mathbf{e}_y + z(t) \mathbf{e}_z]}{\Delta t} .$$

Επομένως,

$$\mathbf{v}(t) = v_x \mathbf{e}_x + v_y \mathbf{e}_y + v_z \mathbf{e}_z = \dot{x}(t) \mathbf{e}_x + \dot{y}(t) \mathbf{e}_y + \dot{z}(t) \mathbf{e}_z . \quad (1.3)$$

Παρόμοια, η επιτάχυνση του υλικού σημείου καθορίζεται από τη σχέση

$$\mathbf{a}(t) = a_x \mathbf{e}_x + a_y \mathbf{e}_y + a_z \mathbf{e}_z = \ddot{x}(t) \mathbf{e}_x + \ddot{y}(t) \mathbf{e}_y + \ddot{z}(t) \mathbf{e}_z . \quad (1.4)$$

- **Παρατήρηση 1η:** Σε πολλές πρακτικές εφαρμογές η μελετώμενη τροχιά είναι καμπυλόγραμμη, αλλά **επίπεδη**. Στις περιπτώσεις αυτές το σύστημα αναφοράς μπορεί να επιλεγεί έτσι, ώστε

$$z(t) = z_0 = \text{σταθερά} ,$$

οπότε οι σχέσεις (1.3) και (1.4) αντικαθίστανται από τις

$$\mathbf{v} = \dot{x} \mathbf{e}_x + \dot{y} \mathbf{e}_y \quad (1.5)$$

και

$$\mathbf{a} = \ddot{x} \mathbf{e}_x + \ddot{y} \mathbf{e}_y , \quad (1.6)$$

αντίστοιχα.

- **Παρατήρηση 2η:** Σε περιπτώσεις στις οποίες η τροχιά είναι **ευθύγραμμη**, δηλαδή τέτοια ώστε

$$z(t) = z_0 = \text{σταθερά} \quad \text{και} \quad y(t) = y_0 = \text{σταθερά} ,$$

οι ορισμοί (1.3) και (1.4) γίνονται

$$\mathbf{v} = \dot{x} \mathbf{e}_x$$

και

$$\mathbf{a} = \ddot{x} \mathbf{e}_x ,$$

αντίστοιχα. Στην περίπτωση αυτή εκφυλίζεται ο ρόλος των διανυσμάτων και όλα τα μεγέθη μπορούν να θεωρηθούν ως βαθμωτά. Επιπλέον, γίνεται φανερό ότι η επίπεδη κίνηση είναι επαλληλία δύο ανεξάρτητων κινήσεων στις διευθύνσεις των αξόνων Ox και Oy , ενώ η χωρική κίνηση είναι επαλληλία τριών κινήσεων στις διευθύνσεις Ox , Oy και Oz .

► **Παράδειγμα 1.1: Ευθύγραμμη Κίνηση με Γνωστή Επιτάχυνση**

Υλικό σημείο εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση με επιτάχυνση που είναι γνωστή συνάρτηση του χρόνου. Δηλαδή

$$\ddot{x} = f(t) . \quad (1)$$

Αν η αρχική θέση και ταχύτητα του σημείου είναι x_0 και v_0 , αντίστοιχα, να υπολογισθεί η ταχύτητα και η επιτάχυνση του σημείου για χρόνο $t > 0$.

Λύση:

Με απευθείας ολοκλήρωση της εξίσωσης (1) προκύπτει ότι

$$v = \dot{x} = \int_0^t f(\tau) d\tau + a ,$$

όπου a είναι σταθερά που προσδιορίζεται από τη συνθήκη

$$v(0) = a = v_0 .$$

Επομένως, η ταχύτητα του υλικού σημείου είναι

$$v(t) = v_0 + \int_0^t f(\tau) d\tau . \quad (2)$$

Ο προσδιορισμός της θέσης του υλικού σημείου προκύπτει με ολοκλήρωση της εξίσωσης (2). Δηλαδή

$$x(t) = \int_0^t v(\xi) d\xi + b , \quad (3)$$

όπου η σταθερά b προσδιορίζεται από την αρχική συνθήκη

$$x(0) = b = x_0 .$$

Συνδυάζοντας το παραπάνω αποτέλεσμα με τις εξισώσεις (2) και (3) προκύπτει ότι η μετατόπιση του υλικού σημείου είναι:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \int_0^t \int_0^\xi f(\tau) d\tau d\xi . \quad (4)$$

♦ **Σημείωση:** Μια ειδική περίπτωση με πρακτικό ενδιαφέρον είναι η κίνηση με **σταθερή επιτάχυνση**, δηλαδή με

$$f(t) = a_0 .$$

Στην περίπτωση αυτή οι σχέσεις (2) και (4) γίνονται

$$v = v_0 + a_0 t \quad (5)$$

και

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2 , \quad (6)$$

αντίστοιχα. Επιπλέον, απαλείφοντας το χρόνο από τις εξισώσεις (5) και (6) προκύπτει ότι

$$v^2 = v_0^2 + 2a_0 (x - x_0) . \quad (7)$$

► **Παράδειγμα 1.2: Κίνηση με Περιορισμούς**

Το άκρο A της στερεάς ράβδου που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα αρχίζει να κινείται οριζόντια έτσι, ώστε να έχει οριζόντια συντεταγμένη

$$x = at^2 \quad (1)$$

Αν η παράμετρος a είναι σταθερή και το μήκος της ράβδου είναι l να υπολογισθεί η ταχύτητα και η επιτάχυνση του άλλου άκρου B, που κινείται κατακόρυφα, τη στιγμή που γίνεται $y = \frac{l}{2}$.

Σχήμα 1.3

Λύση:

Η θέση y του άκρου B της ράβδου καθορίζεται από τη θέση x του άκρου A μέσω τη σχέσης

$$x^2 + (l-y)^2 = l^2, \quad (2)$$

ή της σχέσης

$$y = l - \sqrt{l^2 - x^2}, \quad (3)$$

η οποία αποτελεί τη συνθήκη που εκφράζει τη στερεότητα της ράβδου. Επομένως, η ταχύτητα του άκρου B υπολογίζεται από τη σχέση

$$x\dot{x} + (l-y)(-\dot{y}) = 0 \Rightarrow \dot{y} = \frac{x\dot{x}}{\sqrt{l^2 - x^2}}, \quad (4)$$

ενώ η επιτάχυνση του άκρου B είναι

$$\ddot{y} = \frac{(\dot{x}^2 + x\ddot{x}) \sqrt{P-x^2} + (x\dot{x})^2 (P-x^2)^{-1/2}}{P-x^2}$$

ή, μετά την εκτέλεση των αλγεβρικών πράξεων

$$\ddot{y} = \frac{x\ddot{x} (P-x^2) + \dot{x}^2 P}{(P-x^2)^{3/2}} . \quad (5)$$

Τη στιγμή που γίνεται $y = y_0 = \frac{I}{2}$, η σχέση (3) δίνει

$$x = x_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} I \quad (6)$$

και άρα η σχέση (1) συνεπάγεται ότι αυτό συμβαίνει τη χρονική στιγμή

$$t = t_0 = \sqrt{\frac{x_0}{\alpha}} = \sqrt{\frac{\sqrt{3} I}{2\alpha}} .$$

Την ίδια στιγμή, η ταχύτητα του άκρου Α είναι

$$\dot{x}_0 = 2\alpha t_0 = \sqrt{2\sqrt{3}} \alpha , \quad (7)$$

ενώ η επιτάχυνσή του είναι

$$\ddot{x}_0 = 2\alpha . \quad (8)$$

Τέλος, αντικατάσταση των εκφράσεων των x_0 , \dot{x}_0 και \ddot{x}_0 από τις σχέσεις (6), (7) και (8), αντίστοιχα, στις εξισώσεις (4) και (5) προσδιορίζει την τιμή της ταχύτητας και της επιτάχυνσης του άκρου Β κατά την χρονική στιγμή $t = t_0$.

Ερώτηση: Τι συμβαίνει καθώς $x \rightarrow l$;

► Παράδειγμα 1.3: Κίνηση σε Οδηγητική Καμπύλη

Το άκρο Σ ενός μέλους μιας μηχανής εξαναγκάζεται να ακολουθήσει την επίπεδη οδηγητική καμπύλη

$$y = f(x) , \quad (1)$$

όπως φαίνεται στο σχήμα 1.4. Αν η συνιστώσα της ταχύτητας στη διεύθυνση Ox είναι σταθερή και ίση με v_0 , να βρεθεί η ταχύτητα και επιτάχυνση του Σ σε κάθε χρονική στιγμή.

Λύση:

Επειδή η κίνηση του Σ είναι επίπεδη, η ταχύτητα και η επιτάχυνσή του

καθορίζονται από τις σχέσεις (1.5) και (1.6), αντίστοιχα. Στις σχέσεις αυτές αντικαθιστώνται οι παρακάτω εκφράσεις:

$$\dot{x} = v_0, \quad \ddot{x} = 0 ,$$

Σχήμα 1.4

$$\dot{y} = f'(x) \dot{x} = v_0 f'(x)$$

και

$$\ddot{y} = f''(x) v_0^2 .$$

Έτσι, τελικά προκύπτει ότι η ταχύτητα του άκρου Σ έχει μορφή

$$\mathbf{v} = v_0 [\mathbf{e}_x + f'(x) \mathbf{e}_y] ,$$

ενώ η επιτάχυνσή του είναι

$$\mathbf{a} = v_0^2 f''(x) \mathbf{e}_y ,$$

με

$$x = v_0 t + x_0 .$$

► Παράδειγμα 1.4: Βολή Υλικού Σημείου

Υλικό σημείο κινείται με γνωστή επιτάχυνση

$$\mathbf{a} = -g \mathbf{e}_y , \tag{1}$$

όπου g είναι μία θετική σταθερά. Αν η αρχική θέση του σώματος είναι

$$\mathbf{r}_0 = x_0 \mathbf{e}_x + y_0 \mathbf{e}_y \tag{2}$$

και βάλλεται με αρχική ταχύτητα

$$\mathbf{v}_0 = v_{0x} \mathbf{e}_x + v_{0y} \mathbf{e}_y = v_0 (\cos\theta \mathbf{e}_x + \sin\theta \mathbf{e}_y) , \quad (3)$$

τότε:

- α) Να υπολογισθεί η θέση και η ταχύτητα του σώματος για κάθε χρονική στιγμή.
- β) Να βρεθεί η οριζόντια θέση x_μ στην οποία το σώμα φθάνει στο μέγιστο ύψος H της τροχιάς του.
- γ) Να προσδιορισθεί η τιμή της γωνίας θ για την οποία το σώμα θα συγκρουσθεί με στόχο που έχει συντεταγμένες x_S και y_S .
- δ) Να καθορισθεί η θέση x_S στην οποία $y = y_0$.

Σχήμα 1.5

Λύση:

- α) Με απευθείας ολοκλήρωση της εξίσωσης (1) προκύπτει ότι

$$\mathbf{v} = c_1 \mathbf{e}_x + (c_2 - gt) \mathbf{e}_y + c_3 \mathbf{e}_z .$$

Εφαρμόζοντας τη σχέση (3), οι σταθερές c_1 , c_2 και c_3 που εμφανίζονται στην παραπάνω εξίσωση παίρνουν τις τιμές

$$c_1 = v_{0x}, \quad c_2 = v_{0y}, \quad c_3 = 0 .$$

Άρα, η ταχύτητα του υλικού σημείου είναι

$$\mathbf{v} = v_{0x} \mathbf{e}_x + (v_{0y} - gt) \mathbf{e}_y . \quad (4)$$

Παρόμοια, ολοκλήρωση της εξίσωσης (4) οδηγεί στη σχέση

$$\mathbf{r} = (v_{0x}t + c_4) \mathbf{e}_x + \left(v_{0y}t + c_5 - \frac{1}{2}gt^2 \right) \mathbf{e}_y + c_6 \mathbf{e}_z ,$$

η οποία με εφαρμογή της σχέσης (2) δίνει

$$\mathbf{r} = (x_0 + v_{0x}t) \mathbf{e}_x + \left(y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \right) \mathbf{e}_y . \quad (5)$$

- β) Με βάση την εξίσωση (5) η κατακόρυφη συνιστώσα του διανύσματος θέσης προσδιορίζεται από την έκφραση

$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 . \quad (6)$$

Η ακραία τιμή της συνάρτησης αυτής προσδιορίζεται από τη συνθήκη

$$\dot{y} = 0 \Rightarrow t_{\mu} = \frac{v_{0y}}{g} , \quad (7)$$

η οποία με αντικατάσταση στην εξίσωση (6) δίνει

$$H = y(t_{\mu}) = y_0 + \frac{v_{0y}^2}{2g} . \quad (8)$$

Επειδή $\ddot{y}(t_{\mu}) = -g < 0$, είναι φανερό ότι η H είναι πράγματι η μέγιστη τιμή της κατακόρυφης συνιστώσας y (γιατί:). Η οριζόντια θέση στην οποία συμβαίνει αυτό προσδιορίζεται από την εξίσωση (5) στη μορφή

$$x_{\mu} = x(t_{\mu}) = x_0 + \frac{v_{0x} v_{0y}}{g} = x_0 + \frac{v_0^2}{2g} \sin 2\theta . \quad (9)$$

Απαλείφοντας το χρόνο t από τις συνιστώσες του διανύσματος θέσης \mathbf{r} μπορεί εύκολα ναδειχθεί ότι η τροχιά του σώματος είναι **παραβολική** με κορυφή το σημείο (x_{μ}, y_{μ}) .

- γ) Από τη σχέση (5) προκύπτει αμέσως ότι

$$x_{\Sigma} = x_0 + v_{0x} t_{\Sigma}$$

και ότι

$$y_{\Sigma} = y_0 + v_{0y} t_{\Sigma} - \frac{1}{2}g t_{\Sigma}^2 .$$

Απαλείφοντας τον χρόνο t_{Σ} από τις δύο τελευταίες σχέσεις, προκύπτει η συνθήκη

$$\tan^2 \theta_{\Sigma} - \frac{2v_0^2}{g(x_{\Sigma} - x_0)} \tan \theta_{\Sigma} + \frac{2v_0^2 (y_{\Sigma} - y_0)}{g(x_{\Sigma} - x_0)^2} + 1 = 0 \quad (10)$$

για τη γωνία θ . Η παραπάνω συνθήκη ικανοποιείται για δύο τιμές της γωνίας θ_{Σ} . Η τροχιά που αντιστοιχεί στη μικρότερη / μεγαλύτερη γωνία λέγεται **ευθύβολη / επισκυπτική**, αντίστοιχα.

- δ) Για $y = y_0$ και $t \neq 0$, η εξίσωση (6) δίνει

$$t_s = \frac{2v_{0y}}{g} = 2t_{\mu} .$$

Επομένως,

$$x_s = x(t_s) = x_0 + \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta .$$

Ερώτηση 1η: Πως προσδιορίζεται η θέση του σημείου S του σχήματος 1.5;

Ερώτηση 2η: Ποιά είναι η σχέση ανάμεσα στις παραγώγους της συνάρτησης y ως προς το χρόνο και τις παραγώγους της ως προς x ;

1.2.3 Κυλινδρικό Σύστημα Αναφοράς

Σε περιπτώσεις εφαρμογών με κυλινδρική γεωμετρία είναι βολικό να χρησιμοποιούνται οι κυλινδρικές συντεταγμένες (r, θ, z) , όπως αυτές ορίζονται στο σχήμα 1.6 για το τυχαίο σημείο Σ του χώρου, αντί για τις

Σχήμα 1.6

αντίστοιχες καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y, z) . Από τον ορισμό, οι άξονες Oz , οι συντεταγμένες z και τα μοναδιαία διανύσματα βάσης \mathbf{e}_z των δύο αυτών συστημάτων συμπίπτουν. Επιπλέον, αν Σ' είναι η προβολή του σημείου Σ στο επίπεδο Oxy , τότε με τη βοήθεια και του σχήματος 1.7 προκύπτουν οι παρακάτω σχέσεις

Σχήμα 1.7

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta. \quad (1.7)$$

Επίσης, τα μοναδιαία διανύσματα βάσης \mathbf{e}_r και \mathbf{e}_θ στη διεύθυνση του ευθύγραμμου τμήματος ΟΣ' και της καθέτου της, αντίστοιχα, συνδέονται μέσω των σχέσεων

$$\mathbf{e}_r = \cos \theta \mathbf{e}_x + \sin \theta \mathbf{e}_y \quad (1.8)$$

και

$$\mathbf{e}_\theta = -\sin \theta \mathbf{e}_x + \cos \theta \mathbf{e}_y \quad (1.9)$$

αντίστοιχα, με τα μοναδιαία διανύσματα βάσης \mathbf{e}_x και \mathbf{e}_y του καρτεσιανού συστήματος αναφοράς. Από τις παραπάνω σχέσεις είναι προφανές ότι τα διανύσματα \mathbf{e}_r και \mathbf{e}_θ είναι συναρτήσεις της συντεταγμένης θ .

Στο κυλινδρικό σύστημα αναφοράς, το διάνυσμα θέσης του σημείου Σ ορίζεται από τη σχέση

$$\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r + z \mathbf{e}_z. \quad (1.10)$$

Επομένως, η ταχύτητα στο σημείο Σ βρίσκεται με παραγωγή της (1.10) στη μορφή

$$\mathbf{v} = \dot{r} \mathbf{e}_r + \dot{z} \mathbf{e}_z + r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + z \dot{\mathbf{e}}_z.$$

Στην προκειμένη περίπτωση, το διάνυσμα \mathbf{e}_z διατηρεί πάντα σταθερό μέτρο και διεύθυνση, ενώ το ακτινικό διάνυσμα \mathbf{e}_r εξαρτάται από τη γωνιακή συντεταγμένη θ . Πιο συγκεκριμένα, η σχέση (1.8) οδηγεί στην

$$\dot{\mathbf{e}}_r = -\dot{\theta} \sin \theta \mathbf{e}_x + \dot{\theta} \cos \theta \mathbf{e}_y,$$

η οποία σε συνδυασμό με την εξίσωση (1.9) δίνει

$$\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta. \quad (1.11)$$

Έτσι, η ταχύτητα παίρνει την ακόλουθη τελική μορφή σε κυλινδρικές συντεταγμένες:

$$\mathbf{v} = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + \dot{z} \mathbf{e}_z. \quad (1.12)$$

Στη συνέχεια, η επιτάχυνση προσδιορίζεται με παραγωγή της (1.12). Δηλαδή

$$\mathbf{a} = \ddot{r} \mathbf{e}_r + (\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \mathbf{e}_\theta + \ddot{z} \mathbf{e}_z + \dot{r} \dot{\mathbf{e}}_r + r \dot{\theta} \dot{\mathbf{e}}_\theta. \quad (1.13)$$

Παραγωγίζοντας την εξίσωση (1.9) και χρησιμοποιώντας την (1.8) προκύπτει ότι

$$\dot{\mathbf{e}}_\theta = -\dot{\theta} \mathbf{e}_r. \quad (1.14)$$

Έτσι, με τη βοήθεια των σχέσεων (1.11) και (1.14) η εξίσωση (1.13) δίνει

την παρακάτω έκφραση της επιτάχυνσης σε κυλινδρικές συντεταγμένες

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \mathbf{e}_r + (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta}) \mathbf{e}_\theta + \ddot{z} \mathbf{e}_z . \quad (1.15)$$

- **Παρατήρηση 1η:** Όταν η κίνηση περιορίζεται στο επίπεδο

$$z = H = \text{σταθερά},$$

λέγεται **επίπεδη** και μπορεί να περιγραφεί από τις πολικές συντεταγμένες (r, θ) μόνο. Στην περίπτωση αυτή η ταχύτητα και η επιτάχυνση προσδιορίζονται από τις (1.12) και (1.15) με $\dot{z} = \ddot{z} = 0$.

Παρόμοια, όταν

$$\theta = \theta_0 = \text{σταθερά} ,$$

η κίνηση είναι πάλι επίπεδη, αλλά εκφράζεται από τις «καρτεσιανές» συντεταγμένες (r, z) .

Αν όμως

$$r = R = \text{σταθερά},$$

η κίνηση γίνεται πάνω στην επιφάνεια κυλίνδρου ακτίνας R . Στην περίπτωση αυτή οι σχέσεις (1.12) και (1.15) γίνονται

$$\mathbf{v} = R \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + \dot{z} \mathbf{e}_z$$

και

$$\mathbf{a} = -R\dot{\theta}^2 \mathbf{e}_r + R\ddot{\theta} \mathbf{e}_\theta + \ddot{z} \mathbf{e}_z ,$$

αντίστοιχα.

- **Παρατήρηση 2η:** Αν το υλικό σημείο κινείται έτσι, ώστε

$$\theta = \theta_0 \quad \text{και} \quad r = R$$

ή

$$\theta = \theta_0 \quad \text{και} \quad z = H,$$

οι εξισώσεις (1.12) και (1.15) γίνονται ίδιες με τις αντίστοιχες σχέσεις που ισχύουν για ευθύγραμμη κίνηση.

Αν όμως

$$r = R \quad \text{και} \quad z = H ,$$

η κίνηση είναι μεν μονοδιάστατη, αλλά δεν είναι ευθύγραμμη. Η κίνηση αυτή ονομάζεται **κυκλική** και χαρακτηρίζεται από ταχύτητα

$$\mathbf{v} = R\dot{\theta} \mathbf{e}_\theta \quad (1.16)$$

και επιτάχυνση

$$\mathbf{a} = -R\dot{\theta}^2 \mathbf{e}_r + R\ddot{\theta} \mathbf{e}_\theta . \quad (1.17)$$

- **Παρατήρηση 3η:** Οι χρονικές παράγωγοι των μοναδιαίων διανυσμάτων βάσης \mathbf{e}_r και \mathbf{e}_θ , που εκφράζονται από τις σχέσεις (1.11) και (1.14), μπορεί να υπολογισθούν με εναλλακτικό τρόπο. Τα διανύσματα αυτά έχουν σταθερό μήκος, αλλά η διεύθυνσή τους εξαρτάται από τη γωνία θ . Έτσι, η παράγωγος του ακτινικού διανύσματος \mathbf{e}_r είναι

$$\dot{\mathbf{e}}_r = \frac{d\mathbf{e}_r}{d\theta} \dot{\theta} . \quad (1.18)$$

Σύμφωνα όμως με τον ορισμό

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{d\theta} = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\mathbf{e}_r(\theta + \Delta\theta) - \mathbf{e}_r(\theta)}{\Delta\theta} = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{e}_r}{\Delta\theta} .$$

Επίσης, με τη βοήθεια του σχήματος 1.8 μπορεί ναδειχθεί ότι, καθώς η γωνία $\Delta\theta$ γίνεται απειροστή, η διεύθυνση του διανύσματος $\Delta\mathbf{e}_r$ ταυτίζεται με εκείνη του \mathbf{e}_θ , ενώ το μέγεθός του γίνεται ίσο με $\Delta\theta$. Αυτό σημαίνει ότι

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{d\theta} = \mathbf{e}_\theta \quad (1.19)$$

και συνδυάζοντας το αποτέλεσμα αυτό με την εξίσωση (1.18) οδηγεί στη σχέση (1.11). Τέλος, με παρόμοιο τρόπο μπορεί ναδειχθεί και η εξίσωση (1.14).

Σχήμα 1.8

- **Παρατήρηση 4η:** Όπως φαίνεται από την έκφραση (1.12), οι συνιστώσες της ταχύτητας στις διευθύνσεις r και z προκύπτουν λόγω μεταβολής του μεγέθους του διανύσματος θέσης, ενώ η συνιστώσα της ταχύτητας στη διεύθυνση θ προκύπτει, λόγω αλλαγής της διεύθυνσης του διανύσματος θέσης. Η εικόνα είναι πιο πολύπλοκη για τις πολικές συνιστώσες της επιτάχυνσης. Με τη βοήθεια του σχήματος 1.9 φαίνεται ότι η αλ-

λαγή του μήκους και της διεύθυνσης της ακτινικής συνιστώσας v_r συνεισφέρει τους όρους \ddot{r} και $\dot{r}\dot{\theta}$ στην έκφραση (1.15) της επιτάχυνσης. Παρόμοια, η αλλαγή μήκους και διεύθυνσης της γωνιακής συνιστώσας v_θ παράγει τους όρους $\dot{r}\ddot{\theta} + r\ddot{\theta}$ και $-r\dot{\theta}^2$, αντίστοιχα, στην (1.15).

(α)

(β)

Σχήμα 1.9

► **Παράδειγμα 1.5: Κίνηση σε Καρδιοειδή Καμπύλη**

Το σημείο Σ του μέλους ενός μηχανισμού κινείται πάνω σε καρδιοειδή οδηγητική καμπύλη η οποία περιγράφεται από την εξίσωση

$$r = \alpha (1 + \cos\theta) . \quad (1)$$

Αν η φορά της κίνησης είναι αντιωρολογιακή και γίνεται έτσι, ώστε

$$\dot{\theta} = \omega = \text{σταθερά} , \quad (2)$$

να προσδιορισθεί η ταχύτητα και η επιτάχυνση του σημείου Σ .

Σχήμα 1.10

Λύση:

Παραγωγή της εξίσωσης (1) οδηγεί στις σχέσεις

$$\dot{r} = -\alpha\dot{\theta} \sin\theta \quad (3)$$

και

$$\ddot{r} = -\alpha\ddot{\theta} \sin\theta - \alpha\dot{\theta}^2 \cos\theta . \quad (4)$$

Αλλά, από τη σχέση (2) προκύπτει ότι

$$\ddot{\theta} = 0 . \quad (5)$$

Επομένως, αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (1)-(5) στις σχέσεις (1.11) και (1.15) προκύπτει ότι

$$\mathbf{v} = \alpha\omega [-\sin\theta \mathbf{e}_r + (1 + \cos\theta) \mathbf{e}_\theta]$$

και

$$\mathbf{a} = -\alpha\omega^2 [(1 + 2\cos\theta) \mathbf{e}_r + 2\sin\theta \mathbf{e}_\theta] ,$$

με

$$\theta = \omega t + \theta_0 .$$

Ερώτηση: Σε ποιες θέσεις εμφανίζεται η μέγιστη επιτάχυνση;

- ♦ **Σημείωση:** Μία εκτίμηση για τη διευκόλυνση που παρέχει η χρησιμοποίηση κυλινδρικών συντεταγμένων στο παρόν πρόβλημα μπορεί να αναπτυχθεί με την προσπάθεια επίλυσης του ίδιου προβλήματος χρησιμοποιώντας καρτεσιανές συντεταγμένες.

► **Παράδειγμα 1.6: Κίνηση στην Επιφάνεια Παραβολοειδούς**

Το υλικό σημείο Σ ξεκινά από την αρχή O στο χρόνο $t=0$ και κινείται στην επιφάνεια παραβολοειδούς εκ περιστροφής, το οποίο έχει εξίσωση

$$z = H \left(\frac{r}{R} \right)^2 .$$

Η τροχιά που διαγράφει το σημείο Σ περιγράφεται παραμετρικά από τις εξισώσεις

$$r = \alpha t, \quad \theta = \beta t^2 .$$

Να προσδιορισθεί η θέση, η ταχύτητα και η επιτάχυνσή του σημείου Σ , όταν φθάνει το πάνω χείλος του παραβολοειδούς.

*Σχήμα 1.11***Λύση:**

Όταν το υλικό σημείο Σ φθάνει στο χείλος του παραβολοειδούς ικανοποιείται η συνθήκη

$$R = \alpha t_x \Rightarrow t_x = \frac{R}{\alpha} .$$

Επομένως, το διάνυσμα θέσης του σημείου Σ υπολογίζεται από την εξίσωση (1.10) στη μορφή

$$\mathbf{r} = \alpha t \mathbf{e}_r + H \left(\frac{\alpha t}{R} \right)^2 \mathbf{e}_z .$$

Άρα,

$$\mathbf{r}_x = \mathbf{r}(t_x) = R \mathbf{e}_r + H \mathbf{e}_z ,$$

με

$$\theta_x = \beta \left(\frac{R}{\alpha} \right)^2 .$$

Παρόμοια, η ταχύτητα του σημείου Σ υπολογίζεται από την εξίσωση (1.12) στη μορφή

$$\mathbf{v} = \alpha \mathbf{e}_r + 2\alpha\beta t^2 \mathbf{e}_\theta + 2H \frac{\alpha^2 t}{R^2} \mathbf{e}_z .$$

Επομένως,

$$\mathbf{v}_x = \mathbf{v}(t_x) = \alpha \mathbf{e}_r + 2 \frac{\beta}{\alpha} R^2 \mathbf{e}_\theta + 2\alpha \frac{H}{R} \mathbf{e}_z .$$

Τέλος, η επιτάχυνση του σημείου Σ υπολογίζεται από την εξίσωση (1.15) στη μορφή

$$\mathbf{a} = -\alpha t (2\beta t)^2 \mathbf{e}_r + (\alpha t 2\beta + 2\alpha 2\beta t) \mathbf{e}_\theta + 2 \frac{H}{R^2} \alpha^2 \mathbf{e}_z .$$

Κατά συνέπεια

$$\mathbf{a}_x = \mathbf{a}(t_x) = -4 \frac{\beta^2}{\alpha^2} R^3 \mathbf{e}_r + 6\beta R \mathbf{e}_\theta + 2H \frac{\alpha^2}{R^2} \mathbf{e}_z .$$

♦ **Σημείωση:** Από τις δοθείσες σχέσεις μπορεί ναδειχθεί ότι

$$z = \left(2\pi \frac{\alpha^2 H}{\beta R^2} \right) \frac{\theta}{2\pi} = p \frac{\theta}{2\pi} .$$

Η σταθερά p αντιπροσωπεύει το λεγόμενο **βήμα ελίκωσης** (δηλαδή την κατακόρυφη απόσταση που ανυψώνεται το σημείο κατά τη διάρκεια μιας ολόκληρης περιστροφής του γύρω από τον κατακόρυφο άξονα Oz).

1.2.4 Τροχιακό Σύστημα Αναφοράς

Πολλά προβλήματα της Κινηματικής υλικού σημείου λύνονται ευκολότερα με χρησιμοποίηση ενός ειδικού συστήματος συντεταγμένων. Εκτός από τη διευκόλυνση της λύσης, το σύστημα αυτό παρέχει χρήσιμες πληροφορίες σχετικά με τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της κίνησης.

Ο ορισμός του ειδικού αυτού συστήματος συντεταγμένων γίνεται με τη βοήθεια του σχήματος 1.12. Πρώτα, η τροχιά του εξεταζομένου υλικού σημείου εκφράζεται ως συνάρτηση του μήκους τόξου s της καμπύλης C , μετρούμενο από κάποιο σταθερό σημείο της Σ_0 . Στην περίπτωση αυτή το διά-

Σχήμα 1.12

νυσμα θέσης έχει μορφή

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s(t))$$

και επομένως η ταχύτητα του υλικού σημείου είναι

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \dot{s} \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(s+\Delta s) - \mathbf{r}(s)}{\Delta s}, \quad (1.20)$$

ή

$$\mathbf{v} = \dot{s} \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s} \right).$$

Καθώς το μήκος τόξου Δs γίνεται απειροστό, είναι προφανές ότι το διάνυσμα $\Delta \mathbf{r}$ γίνεται εφαπτόμενο της τροχιάς στο θεωρούμενο σημείο Σ ενώ το μήκος του πλησιάζει την τιμή Δs . Αυτό σημαίνει ότι το διάνυσμα

$$\mathbf{e}_t = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \quad (1.21)$$

είναι το μοναδιαίο **εφαπτόμενο διάνυσμα** της τροχιάς στο Σ , στην κατεύθυνση που αυξάνει το μήκος s .

Συνδυασμός των εκφράσεων (1.20) και (1.21) οδηγεί στη σχέση

$$\mathbf{v} = \dot{s} \mathbf{e}_t, \quad (1.22)$$

η οποία δείχνει ότι **το διάνυσμα της ταχύτητας είναι πάντα εφαπτόμενο της τροχιάς**. Επιπλέον, παραγωγίζοντας την τελευταία σχέση δίνει την επιτάχυνση στη μορφή

$$\mathbf{a} = \ddot{s} \mathbf{e}_t + \dot{s}^2 \frac{d\mathbf{e}_t}{ds}. \quad (1.23)$$

Για τον προσδιορισμό του διανύσματος $\frac{d\mathbf{e}_t}{ds}$, το οποίο εμφανίζεται στην παραπάνω σχέση θεωρούνται τα σημεία Σ' και Σ'' στη γειτονιά του σημείου Σ , όπως φαίνεται στο σχήμα 1.13. Καθώς τα σημεία Σ' και Σ'' προσεγγίζουν το Σ , το επίπεδο που ορίζεται από τα σημεία Σ , Σ' και Σ'' προσεγγίζει το λεγόμενο **εγγύτατο επίπεδο** της τροχιάς στο Σ . Έτσι, το επίπεδο αυτό συμπίπτει με το επίπεδο που ορίζεται από το σημείο Σ και το διάνυσμα $\Delta \mathbf{e}_t = \mathbf{e}'_t - \mathbf{e}_t$, καθώς το μήκος τόξου $\Delta s = \overline{\Sigma\Sigma'}$ γίνεται απειροστό. Επομένως, το διάνυσμα $\frac{d\mathbf{e}_t}{ds}$ κείται στο εγγύτατο επίπεδο της τροχιάς στο σημείο Σ . Επιπλέον, επειδή το διάνυσμα \mathbf{e}_t έχει σταθερό μέτρο, το διάνυσμα $\frac{d\mathbf{e}_t}{ds}$ είναι κάθετο στο \mathbf{e}_t . Δηλαδή