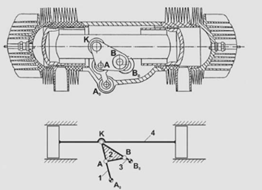
# ανάλυση και σύνθεση Μηχανισμών

Κων/νος-Διονύσιος Ε. Μπουζάκης
Καθηγητής ΑΠΘ




ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

# ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το παρόν βιβλίο περιέχει βασικές γνώσεις ανάλυσης και σύνθεσης των επίπεδων μηχανισμών. Μηχανισμοί είναι μηχανολογικές διατάξεις για την καθοδήγηση της κίνησης διαφόρων εξαρτημάτων, την υλοποίηση μηχανικών αυτοματισμών, καθώς και την μετάδοση ισχύος. Οι μηχανισμοί συγκαταλέγονται στα βασικά γνωστικά αντικείμενα της επιστήμης του Μηχανολόγου Μηχανικού και ιδιαίτερα της περιοχής των κατασκευών μηχανημάτων.

Γενικά οι μηχανισμοί ταξινομούνται στους επίπεδους και τους χωρικούς. Το παρόν βιβλίο περιέχει βασικές γνώσεις ανάλυσης και σύνθεσης των επιπέδων μηχανισμών. Στα πρώτα του κεφάλαια αναπτύσσονται οι κυριότερες γραφικές, καθώς και αναλυτικές-αριθμητικές μέθοδοι για τον προσδιορισμό των κινηματικών μεγεθών και φορτίσεων των κινουμένων μελών. Οι γνώσεις αυτές αποτελούν την βάση για την κατανόηση των υπολοίπων κεφαλαίων, που αναφέρονται στις μεθόδους σύνθεσης των κυριοτέρων τύπων των επιπέδων μηχανισμών. Στα παραρτήματα στο τέλος του βιβλίου, παρατίθενται ασκήσεις και θέματα για την εμπέδωση της αναπτυχθείσας ύλης.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα την καθηγήτρια κυρία Σεβαστή Μήτση για την μακροχρόνια συμβολή της στην εξέλιξη του βιβλίου αυτού, στην μορφή της σημερινής έκδοσής του. Επίσης ευχαριστώ θερμά και τον επίκουρο καθηγητή κ. Ιωάννη Τσιάφη, για την συμβολή του στην πρώτη έκδοση της "Ανάλυσης και Σύνθεσης Μηχανισμών" (1982), καθώς και τους επιστημονικούς συνεργάτες, της τότε Έδρας της Θεωρητικής Μηχανολογίας, κυρίους Αριστείδη Γωγούση και Χρήστο Νάκο.

*Καθηγητής Κ.-Δ. Μπουζάκης* *Θεσσαλονίκη, Απρίλιος 2006*

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

**_Κεφάλαιο 1_**
**Εισαγωγή**



**_Κεφάλαιο 2_**
**Γραφικός Προσδιορισμός Κινηματικών Μεγεθών**



**_Κεφάλαιο 3_**
**Αναλυτικός Προσδιορισμός Κινηματικών Μεγεθών**

***Κεφάλαιο 4***
**Προσδιορισμός Δυνάμεων και Ροπών**



***Κεφάλαιο 5***
**Μηχανισμοί με Τέσσερα Μέλη**

***Κεφάλαιο 6***
**Μηχανισμοί με Οδοντωτούς Τροχούς**



***Κεφάλαιο 7***
**Μηχανισμοί με Οδηγητικές Καμπύλες**

## *Παράρτημα 1:* Ασκήσεις



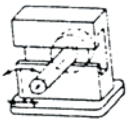
## *Παράρτημα 1:* Θέματα

1ο Κεφάλαιο

# Εισαγωγή

## 1.1 Ορισμοί

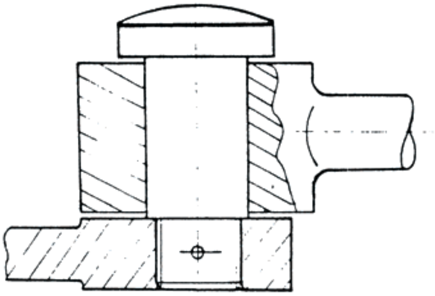
Μηχανισμός είναι μια μηχανική διάταξη, της οποίας τα μέλη, βάσει της γεωμετρικής μορφής τους και των αλληλοσυνδέσεών τους, εκτελούν καθορισμένες κινήσεις μεταδί-

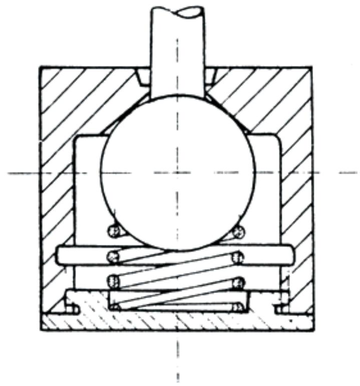
| Είδος άρθρωσης | Σχηματική παράσταση | Βαθμός ελευθερίας |
|---|---|---|
| περιστροφής |  | 1 |
| ολισθήσεως |  | 1 |
| περιστροφής-ολισθήσεως |    | 2 |
| με οδηγητικές καμπύλες |  | 2 |
| με οδοντώσεις |    | 1 |
| σφαιρική |  | 3 |

**Σχήμα 1:** Αρθρώσεις διαφορετικού βαθμού ελευθερίας.

δοντας τοιουτοτρόπως μια κίνηση, ή και συγχρόνως μια ισχύ, από ένα κινητήριο μέλος σ' ένα κινούμενο.

Η μετάδοση μπορεί να εκπληρώνει οποιεσδήποτε προδιαγραφές. Τα μέλη που παρεμβάλλονται μεταξύ του κινουμένου και του κινητηρίου μέλους, καλούνται οδηγητικά. Η σύνδεση μεταξύ δυο μελών ονομάζεται κινηματικό ζεύγος, ή άρθρωση. Στο *σχήμα 1* συμβολίζονται διάφορες αρθρώσεις μεταξύ μελών, με ποικίλες γεωμετρικές μορφές. Μια άρθρωση μπορεί ανάλογα με την κατασκευαστική της διαμόρφωση, να επιτρέπει σχετικές κινήσεις μεταξύ των μελών της, διαφορετικού βαθμού ελευθερίας (βλ. και *σχήμα 2*).





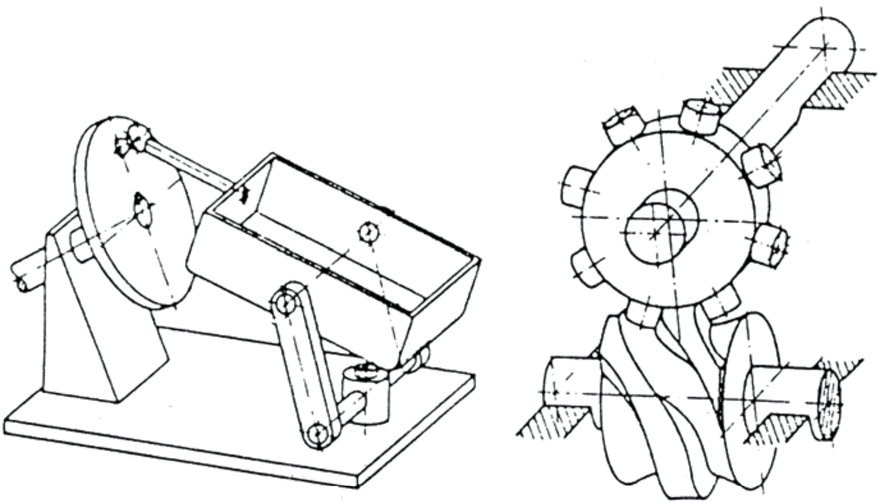
**Σχήμα 2:** Κατασκευαστική διαμόρφωση άρθρωσης περιστροφής και σφαιρικής άρθρωσης.

## 1.2 Είδη μηχανισμών

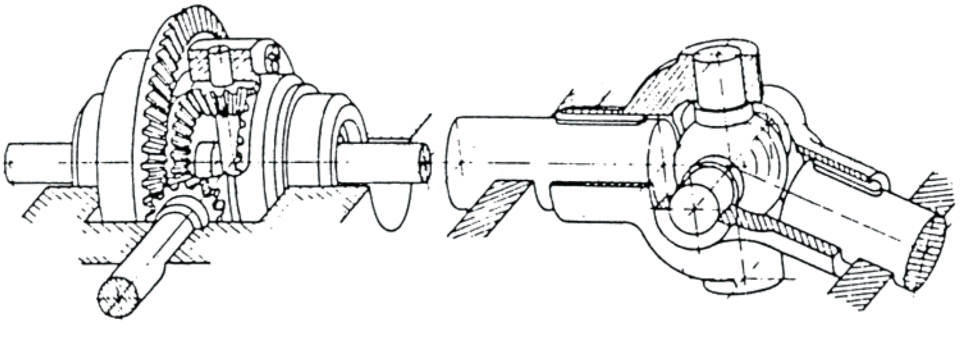
Η σχετική θέση των αξόνων των αρθρώσεων των μελών ενός μηχανισμού, αποτελεί ένα κριτήριο ταξινόμησής τους. Με βάση αυτό το κριτήριο, διακρίνονται οι μηχανισμοί σε χωρικούς, σφαιρικούς και επίπεδους.

Στο *σχήμα 3* φαίνονται μερικά παραδείγματα χωρικών μηχανισμών. Οι άξονες των αρθρώσεων είναι ασύμπτωτες ευθείες. Αριστερά στο σχήμα παρίσταται μηχανισμός ενός εργαστηριακού αναμικτήρα και δεξιά ένας μηχανισμός για περιοδικά ασυνεχή μετάδοση κινήσεως, που χρησιμοποιείται συχνά σε διάφορες μηχανικές διατάξεις (εργαλειομηχανές, συσκευασίας κ.ά.) για τη βηματική κίνηση ορισμένων μελών τους.

Ειδική περίπτωση των χωρικών μηχανισμών, αποτελούν οι σφαιρικοί μηχανισμοί. Στους σφαιρικούς μηχανισμούς, οι άξονες των αρθρώσεων διέρχονται όλοι, από ένα σημείο. Παραδείγματα σφαιρικών μηχανισμών παρίστανται στο *σχήμα 4*. Πρόκειται για διαφορικό οχημάτων, (αριστερά στο σχήμα) και για άρθρωση μεταξύ αξόνων με μεταβαλλόμενη γωνία. Η γωνιακή ταχύτητα του κινούμενου άξονα, σε ενός τέτοιου είδους άρθρωση, δεν είναι σταθερή, για γωνίες μεταξύ των αξόνων διαφορετικές από $180^\circ$.



**Σχήμα 3:** Παραδείγματα χωρικών μηχανισμών.

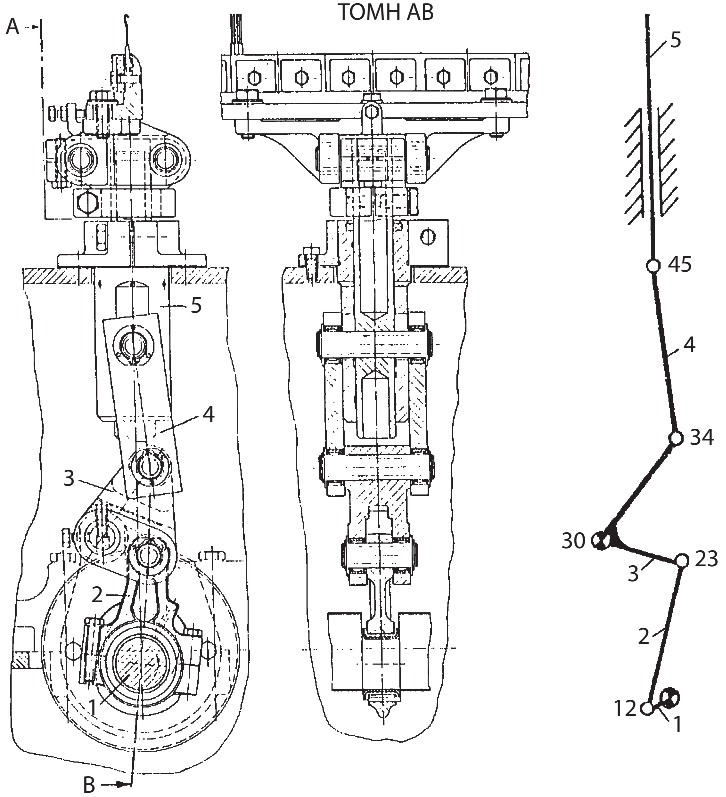


**Σχήμα 4:** Παραδείγματα σφαιρικών μηχανισμών.

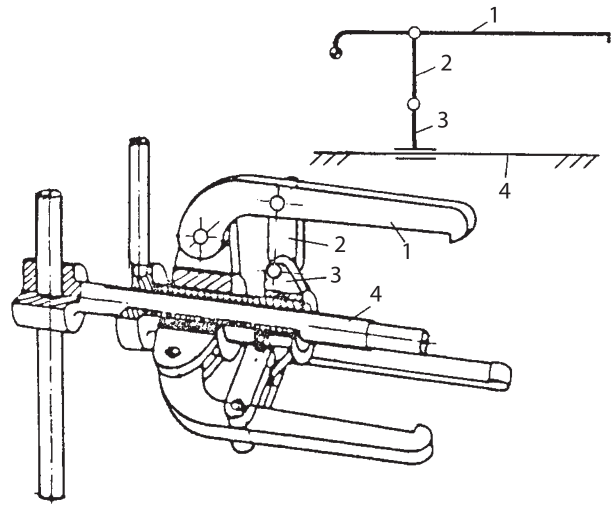
Εάν οι άξονες των αρθρώσεων είναι παράλληλοι μεταξύ τους, τότε ο μηχανισμός χαρακτηρίζεται σαν επίπεδος. Στο *σχήμα 5* παρουσιάζεται ένα παράδειγμα επιπέδου μηχανισμού. Πρόκειται για τον καθοδηγητικό μηχανισμό βελονών κλωστοϋφαντουργικής μηχανής.

Στα πλαίσια του παρόντος τεύχους για την κινηματική ανάλυση και σύνθεση μηχανισμών εξετάζονται μόνο επίπεδοι μηχανισμοί.

Τέλος στην περίπτωση συνθέτων μηχανισμών (συνδυασμός μεταξύ χωρικών και επιπέδων), μπορεί να θεωρηθεί, ότι ο μηχανισμός αποτελείται από πολλούς ανεξάρτητους μεταξύ τους επίπεδους μηχανισμούς, κάθε ένας από τους οποίους μπορεί να μελετηθεί ξεχωριστά.




**Σχήμα 5:** Σχηματικός συμβολισμός καθοδηγητικού μηχανισμού βελονών κλωστοϋφαντουργικής μηχανής.




**Σχήμα 6:** Παράδειγμα συνθέτου μηχανισμού (Εξολκέας).

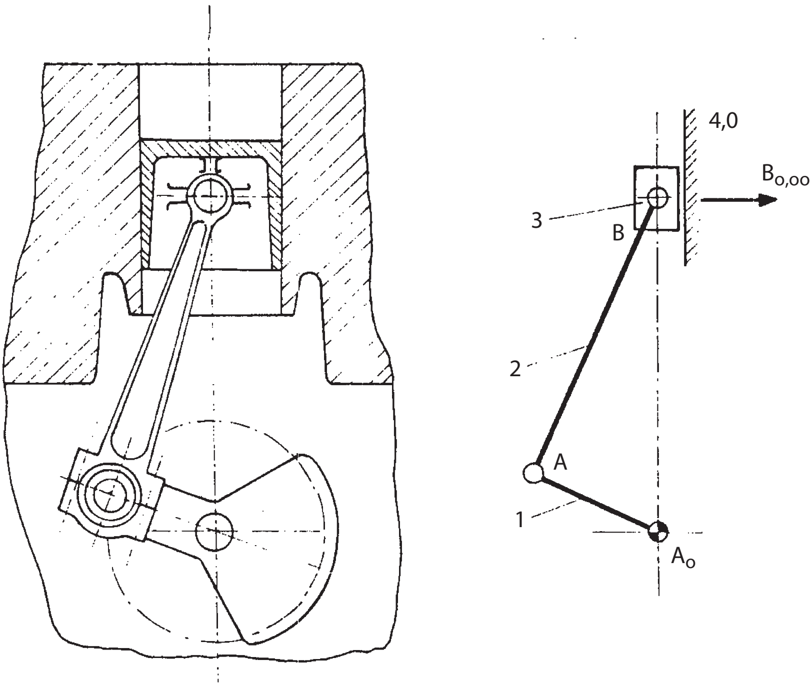
Ένα παράδειγμα χωρικού μηχανισμού έχει παρασταθεί στο *σχήμα 6*. Πρόκειται για έναν εξολκέα, με τρεις επί μέρους επίπεδους μηχανικούς, διατεταγμένους σε επίπεδα, σχηματίζοντας γωνία 120° μεταξύ τους. Ένας από τους επίπεδους αυτούς μηχανισμούς φαίνεται άνω δεξιά στο σχήμα.

## 1.3 Συμβολισμοί κινηματικής δομής μηχανισμών

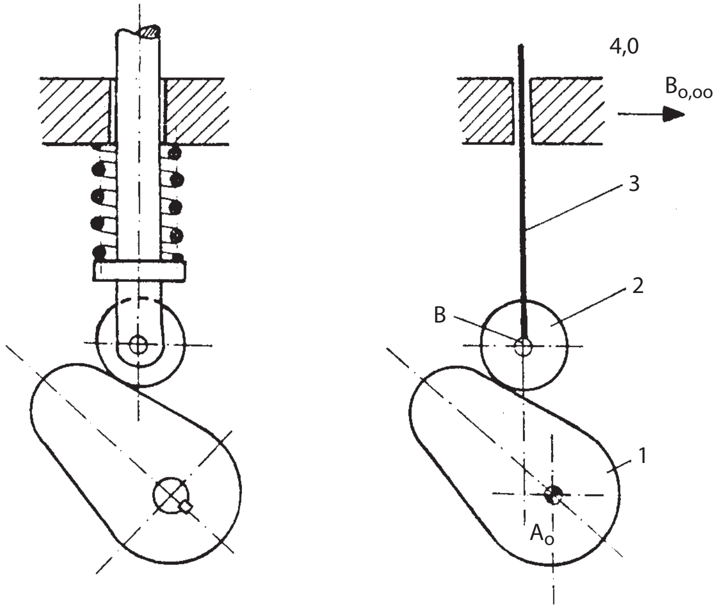
Στα *σχήματα 7, 8, 9 και 10* φαίνεται ο τρόπος συμβολικής παράστασης χαρακτηριστικών μηχανισμών.

Οι αρθρώσεις συμβολίζονται γενικά με μικρούς κύκλους. Οι κύκλοι είναι ημίμαυροι, ή και πλήρως μαύροι, εάν οι αρθρώσεις είναι συνδεδεμένες με το ακίνητο μέλος του μηχανισμού (πλαίσιο).

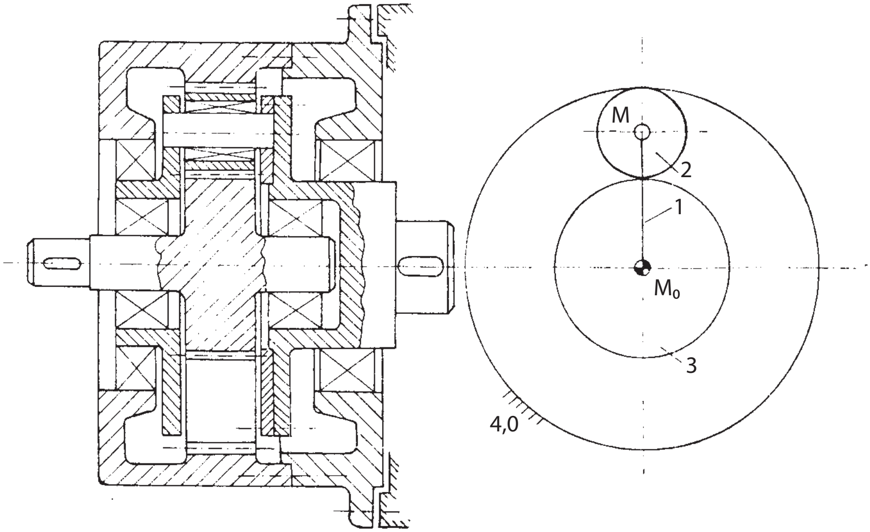
Οι αρθρώσεις και γενικά σημεία επί των μελών, ονομάζονται με κεφαλαία γράμματα (Α, Β κ.τ.λ.) ενώ με μικρά γράμματα χαρακτηρίζονται τα μήκη των μελών του μηχανισμού. Με αριθμούς χαρακτηρίζονται τα μέλη. Το πλαίσιο συμβολίζεται συνήθως με τον αριθμό 0 (μηδέν).




**Σχήμα 7:** Συμβολική παράσταση μηχανισμού με τέσσερα μέλη, στροφάλου-διωστήρα-εμβόλου (ευθύγραμμα παλινδρομικού ολισθητήρα).

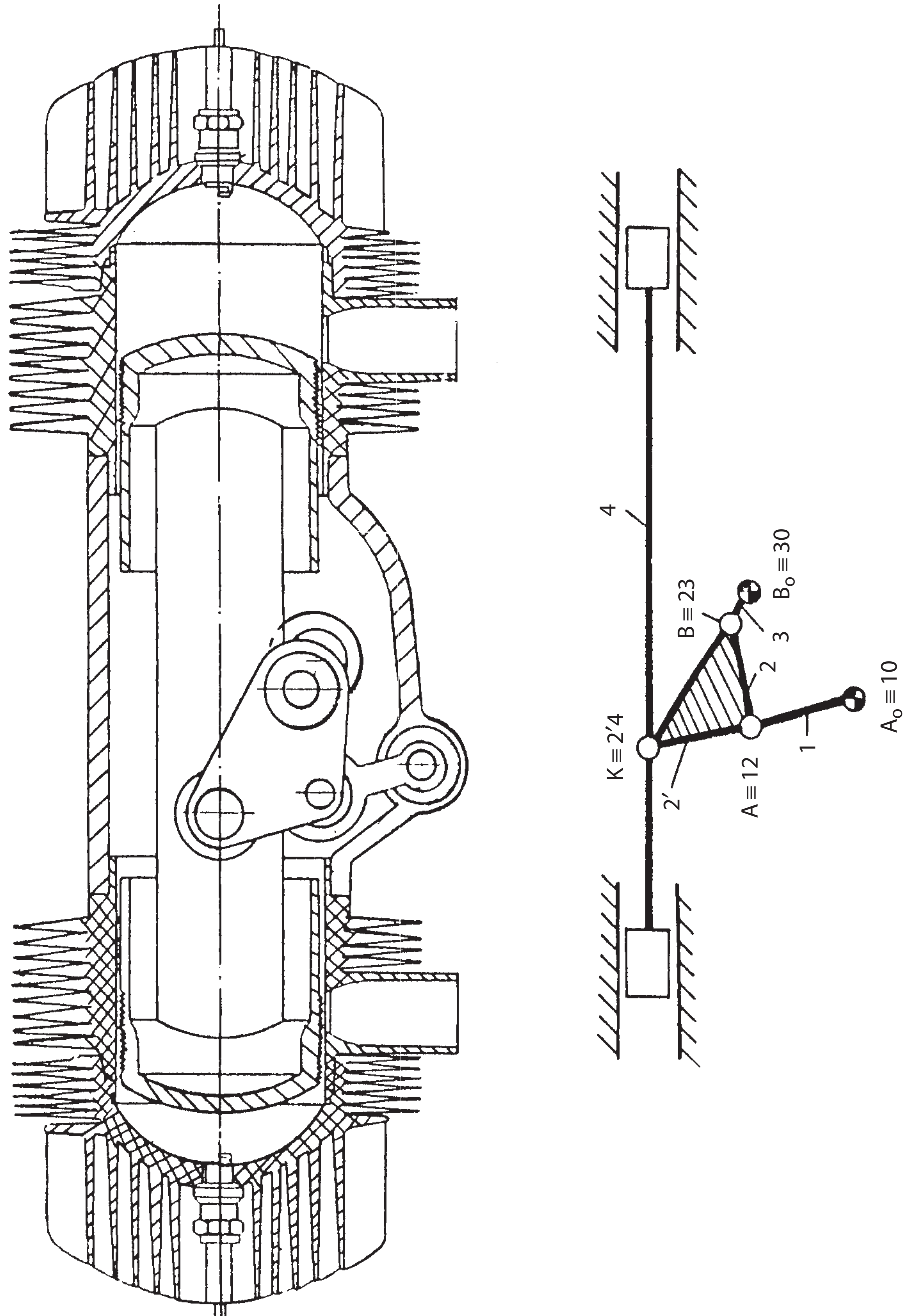



**Σχήμα 8:** Συμβολική παράσταση μηχανισμού με οδηγητική καμπύλη (κνώδακα - ακολούθου).




**Σχήμα 9:** Συμβολική παράσταση μηχανισμού με οδοντωτούς τροχούς.

Οι αρθρώσεις επίσης μπορούν να ονομάζονται και με τους αριθμούς των μελών που συνδέουν (βλέπε *σχήμα 10*). Ο τρόπος αυτός συμβολισμού χρησιμοποιείται κυρίως κατά την διεξαγωγή υπολογισμών σε μηχανισμούς, με μεθόδους της αριθμητικής αναλύσεως.




**Σχήμα 10:** Συμβολική παράσταση μηχανισμού με μέλη.

Οι ονομασίες των αρθρώσεων, ή και άλλων σημείων, μπορούν να έχουν ένα αριθμητικό δείκτη βάσεως π.χ. $A_1$, $A_2$, $B_4$ κ.λπ., που συμβολίζει μια θέση, που κατά την κίνησή του μπορεί να καταλάβει το σημείο, ή η άρθρωση. Η άρθρωση ενός ολισθητήρα με το πλαίσιο, συμβολίζεται, όπως δείχνουν τα σχήματα 7 και 8, με το εκάστοτε κεφαλαίο γράμμα π.χ. B και τους δείκτες $B_{0,\infty}$. Τέλος οι δείκτες εκθέτου, συγχρόνως με ένα δείκτη βάσεως, π.χ. $B_2^1$, συμβολίζουν την σχετική θέση του σημείου B, όταν καταλαμβάνει τη θέση 2 σε σύστημα αναφοράς του μέλους 1.

## 1.4 Βαθμός ελευθερίας μηχανισμού

Ο βαθμός ελευθερίας ενός μηχανισμού υποδηλώνει τον αριθμό των ανεξαρτήτων μεταξύ τους μεταβλητών, που πέρα από τις γνωστές γεωμετρικές διαστάσεις της κινηματικής δομής, είναι αναγκαίος για την μονοσήμαντη περιγραφή της θέσεως των μελών, σχετικά με το μέλος αναφοράς. Οι μεταβλητές αυτές ονομάζονται και συντεταγμένες αναφοράς.

Στην περίπτωση μηχανισμών με βαθμό ελευθερίας ίσο με την μονάδα, συντεταγμένη κινήσεως είναι συνήθως η γωνία περιστροφής του κινητηρίου μέλους, σε σχέση με το πλαίσιο.

Ο βαθμός ελευθερίας επιπέδου μηχανισμού προσδιορίζεται από την εξίσωση:

$$F = 3(n-1) - 3g + \sum_{i=1}^{g} f_i \tag{1}$$

Στην παραπάνω σχέση, τα διάφορα σύμβολα υποδηλώνουν:

$n$ : τον αριθμό των μελών

$g$ : τον αριθμό των αρθρώσεων

$f_i$ : το βαθμό ελευθερίας της αρθρώσεως $i$.

Η δομή της σχέσεως (1) εύκολα γίνεται κατανοητή, εάν ληφθεί υπόψη ότι γενικά κάθε μέλος κινούμενο σε ένα επίπεδο, έχει 3 δυνατότητες κινήσεως, δηλ. είναι απαραίτητη η εισαγωγή τριών συντεταγμένων αναφοράς, π.χ. των δύο μετατοπίσεων στις κατευθύνσεις $x$, $y$ ενός καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων αναφοράς, και της περιστροφής γύρω από τον άξονα $z$ του συστήματος αυτού. Επειδή η μελέτη των μηχανισμών γίνεται πάντα σε σχέση με ένα μέλος αναφοράς, ο βαθμός ελευθερίας ενός επιπέδου μηχανισμού είναι επομένως γενικά ίσος με $3(n-1)$.

Από τον αριθμό αυτό πρέπει να αφαιρεθεί ο αριθμός των δυνατοτήτων κινήσεως κατά τον οποίο, κάθε άρθρωση μεταξύ μελών περιορίζει τον συνολικό βαθμό ελευθερίας του μηχανισμού. Ο αριθμός αυτός προσδιορίζεται, εάν ληφθεί υπόψη, ότι μία στερεά σύνδεση μεταξύ μελών περιορίζει το βαθμό ελευθερίας σε επίπεδους μηχανισμούς κατά 3. Εάν λοιπόν από τον αριθμό $3(n-1)$ αφαιρεθεί ο συνολικός αριθμός των αρθρώσεων $3g$ και προστεθεί ο βαθμός ελευθερίας της κάθε αρθρώσεως εξάγεται η σχέση (1).

Σε επίπεδους μηχανισμούς που περιέχουν και οδοντωτούς τροχούς ο βαθμός ελευθερίας υπολογίζεται από τη σχέση:

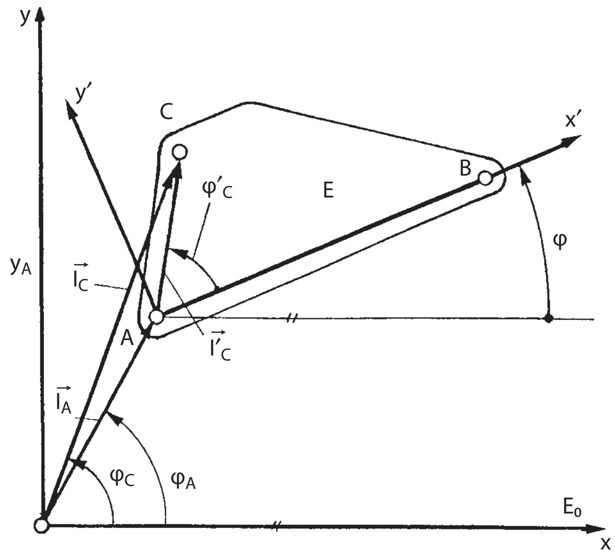
$$F = 3(n-1) - 2g + p \tag{2}$$

όπου $p$ είναι ο αριθμός των ζευγών των οδοντωτών τροχών, που παρεμβάλλονται μέσα σ' ένα επίπεδο μηχανισμό.

Εφαρμόζοντας τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει, ότι ο βαθμός ελευθερίας των μηχανισμών των σχημάτων 7, 8, και 9 είναι ίσος με 1, ενώ του μηχανισμού του σχήματος 10 ίσος με 0. Στον τελευταίο μηχανισμό αυτό συμβαίνει, καθόσον η τροχιακή καμπύλη του σημείου K, λόγω της κινηματικής δομής του μηχανισμού, είναι στην περιοχή λειτουργίας του σχεδόν ευθύγραμμη και το έμβολο του μηχανισμού, που συνδέεται με το σημείο B, μέσω καταλλήλου κατασκευαστικής διαμορφώσεως αναγκάζεται να ολισθαίνει πάνω στην ευθεία, τροχιακή καμπύλη του σημείου K.

## 1.5 Περιγραφή της γεωμετρικής μορφής μελών και προσδιορισμός της θέσεώς τους

Η περιγραφή της γεωμετρικής μορφής ενός μέλους, γίνεται σ' ένα σύστημα αναφοράς $(x', y')$ του μέλους, το οποίο κινείται σε σχέση με το σύστημα αναφοράς $(x, y)$ του πλαισίου (βλέπε *σχήμα 11*).




**Σχήμα 11:** Περιγραφή της γεωμετρίας ενός μέλους στο σύστημα αναφοράς.

Η θέση του μέλους είναι γνωστή, εάν δίδεται η θέση της αρχής των συντεταγμένων του συστήματος $(x', y')$, ή το άνυσμα $\vec{l}_A$ και η γωνία κλίσεως ενός άξονα, π.χ. η γωνία φ.

Στην προκειμένη περίπτωση ισχύει ότι:

$$\vec{l}_C = \vec{l}_A + \vec{l}_C' \tag{3}$$

Η παραπάνω σχέση, υπό μιγαδική μορφή, μπορεί να γραφεί όπως παρακάτω:

$$l_C e^{j\varphi_C} = l_A e^{j\varphi_A} + l_C' e^{j(\varphi_C' + \varphi)} \tag{4}$$

Διατυπώνοντας την εξίσωση αυτή κατά Euler, προκύπτουν για τα πραγματικά και μιγαδικά μέρη, οι παρακάτω σχέσεις:

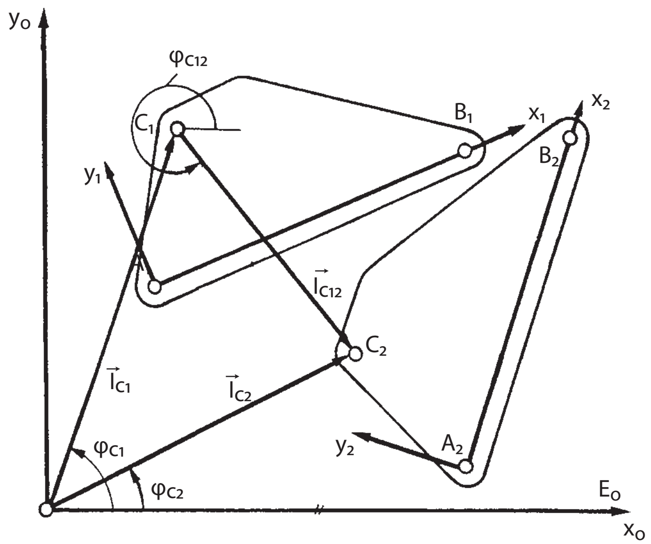
$$l_C \cos\varphi_C = l_A \cos\varphi_A + l_C' \cos(\varphi_C' + \varphi) \tag{5α}$$

$$l_C \cos\varphi_C = l_A \sin\varphi_A + l_C' \sin(\varphi_C' + \varphi) \tag{5β}$$

Από το σύστημα των εξισώσεων αυτών, μπορούν να προσδιορισθούν οι μεταβλητές $l_C$ και $\varphi_C$, που περιγράφουν την θέση του τυχόντος σημείου C στο σύστημα αναφοράς $(x, y)$.

Κατά την κίνηση του μέλους από μια θέση 1 στη θέση 2 ισχύει προφανώς για το τυχόν σημείο C (βλέπε *σχήμα 12*) η σχέση:

$$\vec{l}_{C_2} = \vec{l}_{C_1} + \vec{l}_{C_{12}} \tag{6}$$




**Σχήμα 12:** Προσδιορισμός της θέσεως ενός μέλους στο σύστημα αναφοράς.

Η διανυσματική αυτή εξίσωση, υπό μιγαδική μορφή, γράφεται όπως παρακάτω:

$$l_{C_2} e^{j\varphi_{C_2}} = l_{C_1} e^{j\varphi_{C_1}} + l_{C_{12}} e^{j\varphi_{C_{12}}} \ . \tag{7}$$

Από τη σχέση αυτή, χρησιμοποιώντας τον τύπο του Euler, για τα πραγματικά και τα μιγαδικά μέρη προκύπτουν οι παρακάτω εξισώσεις:

$$l_{C_2} \cos\varphi_{C_2} = l_{C_1} \cos\varphi_{C_1} + l_{C_{12}} \cos\varphi_{C_{12}} \tag{8α}$$

$$l_{C_2} \sin\varphi_{C_2} = l_{C_2} \sin\varphi_{C_1} + l_{C_{12}} \sin\varphi_{C_{12}} \ . \tag{8β}$$

Από τις παραπάνω εξισώσεις μπορούν να προσδιορισθούν οι μεταβλητές $l_{C_2}$ και $\varphi_{C_2}$, που χαρακτηρίζουν τη νέα θέση 2 του σημείου C, σαν συναρτήσεις των μεταβλητών της παλαιάς θέσεως και της μετατοπίσεως.

2ο Κεφάλαιο

# Γραφικός Προσδιορισμός Κινηματικών Μεγεθών

Για τον προσδιορισμό των ταχυτήτων και των επιταχύνσεων μπορούν να εφαρμοσθούν τόσο γραφικές όσο και αναλυτικές μέθοδοι.

Η σημερινή εξέλιξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών, που καθιστούν δυνατή την εφαρμογή διαφόρων μεθόδων της αριθμητικής αναλύσεως, επιτρέπει τον προσδιορισμό, με την εκάστοτε επιθυμητή ακρίβεια, οποιονδήποτε μεγεθών, που είναι απαραίτητα, τόσο κατά την ανάλυση, όσο και κατά τη σύνθεση των μηχανισμών.

Στα πλαίσια της κινηματικής ανάλυσης και σύνθεσης μηχανισμών, δίδεται ιδιαίτερη έμφαση και σε γραφικές μεθόδους. Ο λόγος γι' αυτό είναι, ότι οι γραφικές μέθοδοι επιτρέπουν τον άμεσο και με απλά μέσα προσδιορισμό κινηματικών και άλλων μεγεθών, σε διακεκριμένες θέσεις ενός μηχανισμού, που συνήθως μόνο σ' αυτές είναι αναγκαίο να γίνει κάποιος υπολογισμός.

## 2.1 Προσδιορισμός ταχυτήτων

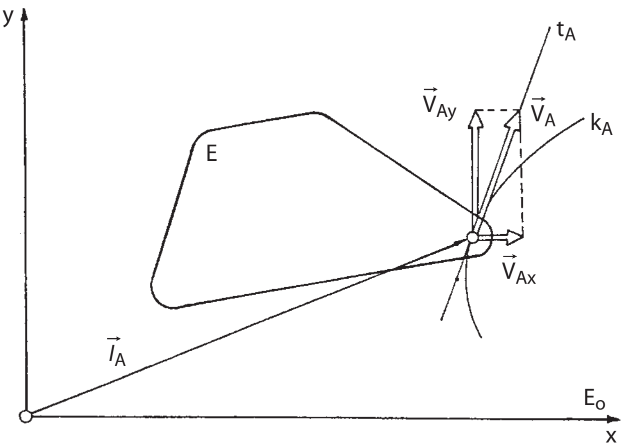
Η στιγμιαία ταχύτητα ενός σημείου, περιγράφει τη χρονική μεταβολή της θέσης του. Για ένα σημείο Α (βλέπε *σχήμα 1*), που κινείται πάνω στην τροχιά $A_k$ στο σύστημα αναφοράς xy ισχύει:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{l}}{dt} = \dot{l}(t) \tag{1}$$

Το άνυσμα $\vec{v}$ της ταχύτητας, είναι εφαπτόμενο της τροχιάς, στο σημείο Α και έχει τις συνισταμένες:

$$v_x = \frac{dl_x}{dt} = \dot{l}_x(t) \tag{2α}$$

$$v_y = \frac{dl_y}{dt} = \dot{l}_y(t) \tag{2β}$$

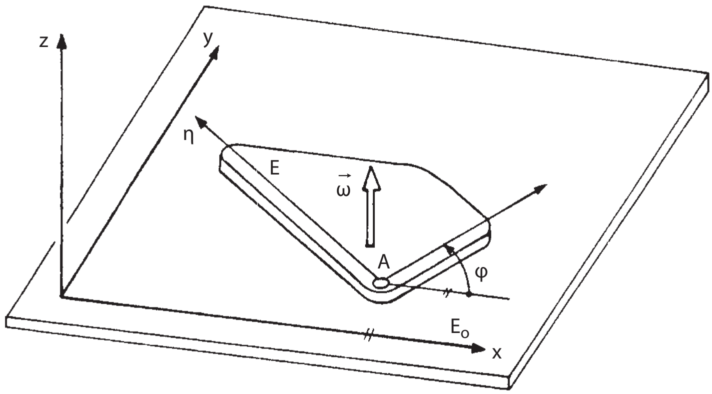



**Σχήμα 1:** Ταχύτητα ενός σημείου του μέλους Ε στο σύστημα αναφοράς xy.

Η γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$, περιγράφει τη χρονική μεταβολή της γωνίας περιστροφής φ, ενός μέλους (βλέπε *σχήμα 2*).

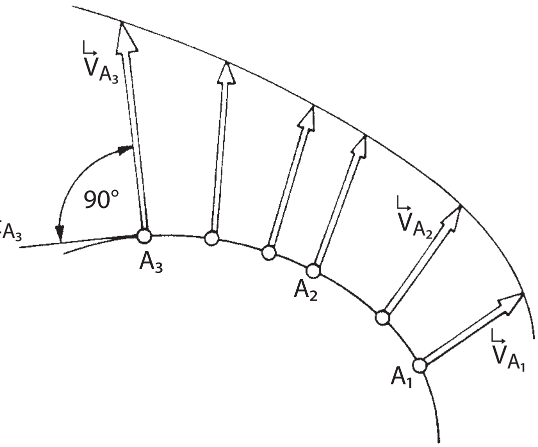
$$\omega = \pm\frac{d\varphi}{dt} = \pm\dot{\varphi}(t) \tag{3}$$

Η γωνιακή ταχύτητα είναι ένα άνυσμα, κάθετο στο επίπεδο του μηχανισμού (στην προκειμένη περίπτωση παράλληλο με τον άξονα z) και θεωρείται ότι έχει θετικό πρόσημο, για την περίπτωση φοράς περιστροφής, που συμβολίζεται στο σχήμα 2.




**Σχήμα 2:** Στρέψη του μέλους Ε στο σύστημα αναφοράς xy.

Μια εποπτική εικόνα της μεταβολής της ταχύτητας κατά την κίνηση ενός τυχαίου σημείου Α αποκτάται, εάν οι ταχύτητες, σχεδιασθούν στραμμένες κατά 90° (συμβολισμός $\overset{\uparrow}{v}$). Οι στραμμένες ταχύτητες, είναι κάθετες πάνω στην τροχιά του σημείου. Εάν ενωθούν οι κορυφές των στράμμένων ανυσμάτων με μια γραμμή, όπως φαίνεται στο *σχήμα 3*, προκύπτει μια καμπύλη, που ονομάζεται οδογράφος της κινήσεως του σημείου Α. Με τη βοήθεια της οδογράφου, μπορεί να προσδιορισθεί η ταχύτητα του σημείου Α, για κάθε τυχαία θέση του, πάνω στην τροχιά του.




**Σχήμα 3:** Οδογράφος της κινήσεως ενός σημείου.

## 2.1.2 Προσδιορισμός των ταχυτήτων κατά την κίνηση ενός μέλους

### *2.1.2.1 Απλή στρέψη*

Η ταχύτητα του τυχόντος σημείου κατά την απλή στρέψη ενός μέλους (βλ. *σχήμα 4*), υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \tag{4}$$

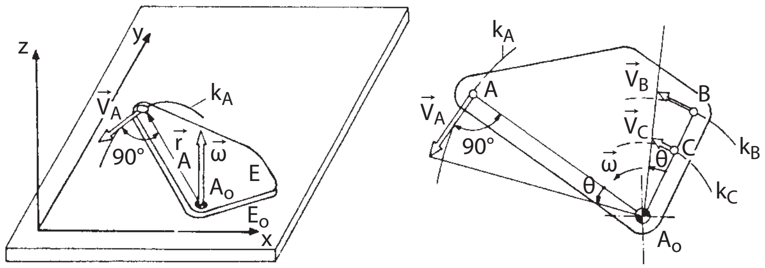
Η γωνία $\theta$ είναι σταθερή για όλα τα σημεία του μέλους και υπολογίζεται από την εξίσωση:

$$\tan\theta = \frac{\omega M_v}{M} \tag{5}$$

όπου $M, M_v$ είναι οι κλίμακες αντιστοίχως για μήκη και ταχύτητες, για τις οποίες ισχύει ότι:

$$M = \frac{\text{μήκος σχεδίου}}{\text{μήκος μέλους}} \tag{6α}$$

$$M_v = \frac{\text{μήκος ανύσματος ταχύτητας}}{\text{τιμή ταχύτητας}} . \tag{6β}$$



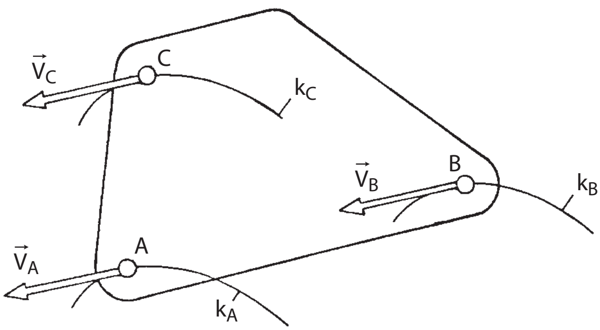

**Σχήμα 4:** Ταχύτητες σημείων ενός μέλους σε απλή περιστροφή.

Σε περίπτωση σταθερής γωνιακής ταχύτητας $\omega$ του μέλους, που να αντιστοιχεί σε $n$ αριθμό στροφών, η εφαπτόμενη της γωνίας $\theta$ υπολογίζεται προφανώς από τη σχέση:

$$\tan\theta = \frac{2\pi n M_v}{M}. \tag{7}$$

### *2.1.2.2 Απλή μεταφορά*

Κατά την παράλληλο μεταφορά ενός μέλους, όλες οι ταχύτητες των σημείων του είναι ίσες (βλέπε *σχήμα 5*).



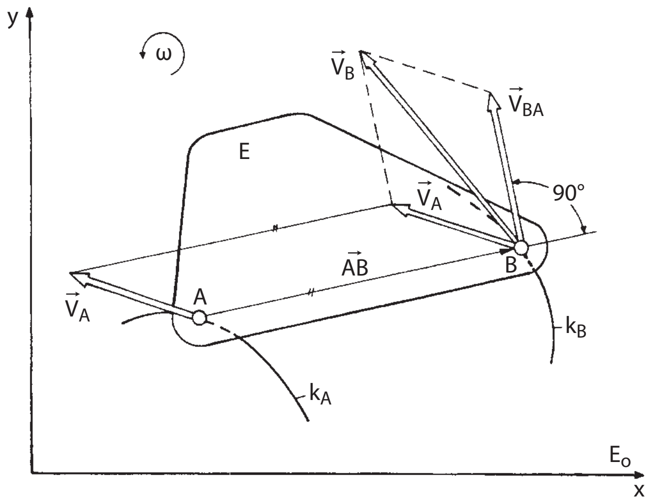

**Σχήμα 5:** Ταχύτητες σημείων ενός μέλους κατά απλή μεταφορά.

### *2.1.2.3 Γενική κίνηση*

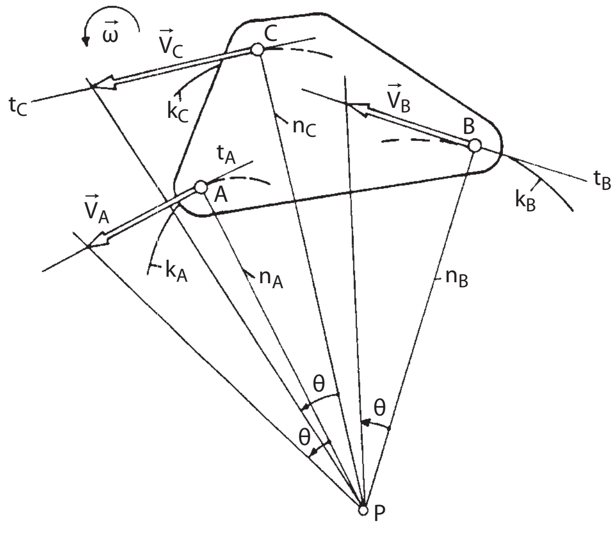
Η γενική κίνηση ενός μέλους μπορεί να αναλυθεί σε μια περιστροφική και μια μεταφορική κίνηση (βλέπε *σχήμα 6*). Κατά Euler ισχύει:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA} \tag{8}$$

Όλες οι κάθετες στα ανύσματα των ταχυτήτων και στα αντίστοιχα σημεία, τέμνονται σε ένα κοινό σημείο, που ονομάζεται πόλος της ταχύτητας (σημείο $P$ στο *σχήμα 7*).




**Σχήμα 6:** Ανάλυση της γενική κινήσεως ενός μέλους Ε, σε μεταφορική και περιστροφική κίνηση.




**Σχήμα 7:** Πόλος ταχυτήτων (P) κατά τη γενική κίνηση ενός μέλους.

Εφαρμόζοντας τη σχέση (4) προκύπτει για τις διάφορες συνιστώσες της διανυσματικής εξίσωσης (8) ότι:

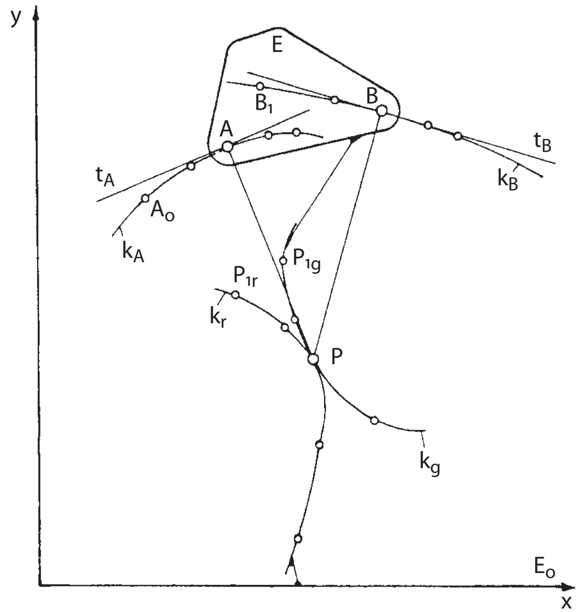
$$\vec{v}_A = \vec{\omega} \times \overrightarrow{PA} \tag{9α}$$

$$\vec{v}_B = \vec{\omega} \times \overrightarrow{PB} \tag{9β}$$

$$\vec{v}_{BA} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{AB} \tag{9γ}$$

Ο γεωμετρικός τόπος των διαδοχικών θέσεων του πόλου ταχυτήτων, ονομάζεται τροχιά πόλων.

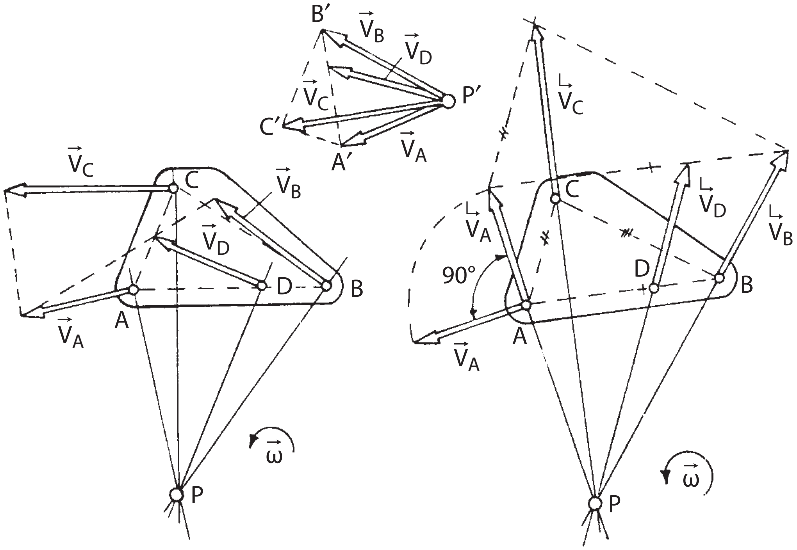
Διακρίνονται γενικά δύο τροχιές πόλων ταχυτήτων. Η ηρεμούσα τροχιά $k_r$ (βλέπε *σχήμα 8*) και η κινούμενη τροχιά $k_g$. Η $k_g$, ευρίσκεται στο σύστημα αναφοράς του μέλους Ε, ενώ η $k_r$, στο ακίνητο σύστημα αναφοράς xy. Η κίνηση του μέλους Ε στο σύστημα αναφοράς xy, μπορεί να θεωρηθεί ισοδύναμη με μια κύληση χωρίς ολίσθηση, της τροχιάς $k_g$ επί της τροχιάς $k_r$.




**Σχήμα 8:** Τροχιές πόλων ταχυτήτων κατά τη γενική κίνηση ενός μέλους.

Οι ταχύτητες των σημείων ενός μέλους, μπορούν να προσδιορισθούν με τη βοήθεια μιας από τις γραφικές παραστάσεις του *σχήματος 9*. Και στις τρεις περιπτώσεις, τα τρίγωνα που σχηματίζουν οι αιχμές τριών ανυσμάτων ταχυτήτων ενός μέλους, είναι όμοια με το τρίγωνο που σχηματίζουν τα αντίστοιχα σημεία του μέλους του μηχανισμού.

Κατά την πρώτη και την τρίτη γραφική δυνατότητα προσδιορισμού ταχυτήτων, χρησιμοποιείται το υπό κλίμακα σχέδιο της κινηματικής δομής του μηχανισμού, ενώ κατά τη μεσαία (διάγραμμα ταχυτήτων), η αρχή $P'$, εκλέγεται παράπλευρα του σχεδίου.




**Σχήμα 9:** Δυνατότητες προσδιορισμού των ταχυτήτων κατά την κίνηση ενός μέλους.

### 2.1.3 Προσδιορισμός ταχυτήτων κατά τη σχετική κίνηση τριών μελών

Κατά την κίνηση δύο μελών $E_1, E_2$ (βλέπε σχήμα 10), ως προς ένα μέλος αναφοράς, η **απόλυτη** κίνηση του $E_2$ ως προς το μέλος αναφοράς, προκύπτει από την επαλληλία της **σχετικής** κινήσεως του $E_2$ ως προς το $E_1$ και της **καθοδηγητικής** κινήσεως του $E_1$, ως προς το μέλος αναφοράς. Εν προκειμένω ισχύει ότι:

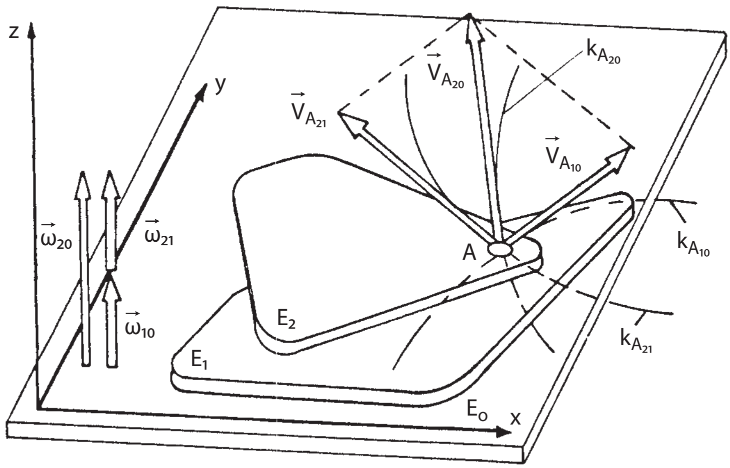
$$\vec{v}_{A_{20}} = \vec{v}_{A_{10}} + \vec{v}_{A_{21}} \tag{10}$$

$$\vec{\omega}_{20} = \vec{\omega}_{10} + \vec{\omega}_{21} \tag{11}$$

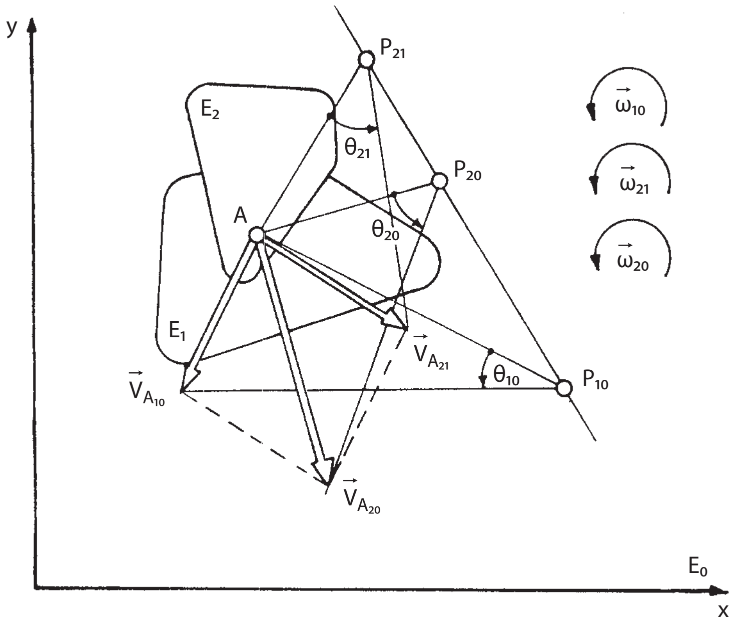
Κατά τη σχετική κίνηση τριών μελών οι πόλοι $P_{10}$ (καθοδηγητικός), $P_{20}$ (απόλυτος), και $P_{21}$ (σχετικός), κείνται πάνω σε μια ευθεία (βλέπε *σχήμα 11*). Για τις αποστάσεις $\overline{P_{20}P_{21}}$ και $\overline{P_{10}P_{21}}$ ισχύει:

$$\frac{\omega_{20}}{\omega_{10}} = \pm \frac{\overline{P_{10}P_{21}}}{\overline{P_{20}P_{21}}}. \tag{12}$$

Για τις θέσεις των πόλων, όπως φαίνεται στο σχήμα 11, ισχύει το πρόσημο $+$. Εάν ο σχετικός πόλος $P_{21}$ κείται μέσα στο διάστημα $\overline{P_{20}P_{10}}$ τότε ισχύει το πρόσημο $-$.




**Σχήμα 10:** Προσδιορισμός ταχυτήτων κατά τη σχετική κίνηση τριών μελών.



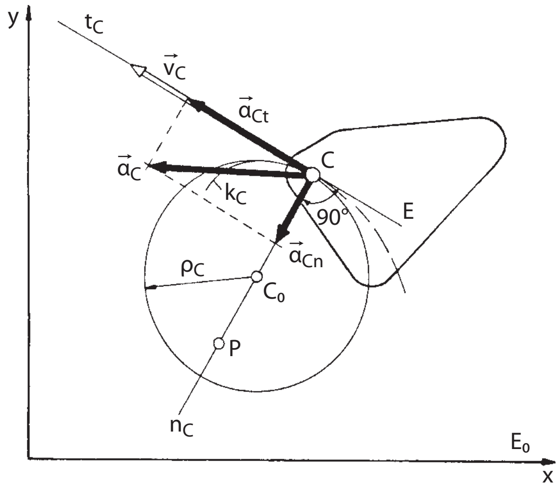

**Σχήμα 11:** Σχετικοί πόλοι ταχυτήτων κατά τη σχετική κίνηση τριών μελών.

## 2.2 Προσδιορισμός επιταχύνσεων

### 2.2.1 Επιταχύνσεις και συμβολισμοί τους

Σαν επιτάχυνση $\vec{\alpha}$ του σημείου C ενός μέλους E (βλέπε *σχήμα 12*), ορίζεται η χρονική μεταβολή της ταχύτητάς του:

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{v}}{dt}\,. \tag{13}$$




**Σχήμα 12:** Επιτάχυνση σημείου και ανάλυση αυτής σε επιτρόχιο και κεντρομόλο.

Η επιτάχυνση μεταβάλλεται κατά την κίνηση του σημείου C, πάνω στην τροχιά του $k_C$. Ένα μέτρο για τη μεταβολή της διευθύνσεώς της, είναι η προβολή του διανύσματος της επιταχύνσεως, πάνω στην κάθετο επί της τροχιάς, στο σημείο C (κεντρομόλος επιτάχυνση). Η προβολή της επιταχύνσεως πάνω στην εφαπτομένη της τροχιάς στο σημείο C, είναι ένα μέτρο για τη μεταβολή του μεγέθους της (επιτρόχιος επιτάχυνση). Για την κεντρομόλο $\alpha_n$ και την επιτρόχιο $\alpha_t$ επιτάχυνση, ισχύουν οι σχέσεις:

$$\alpha_n = \frac{v^2}{\rho}, \quad \alpha_t = \frac{dv}{dt} \tag{14α, β}$$

και $$\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_n + \vec{\alpha}_t \tag{14γ}$$

Με ρ συμβολίζεται η ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς $k_C$ στο σημείο C. Μέθοδοι για τον γραφικό, ή αναλυτικό προσδιορισμό της ακτίνας καμπυλότητας αναφέρονται στο κεφάλαιο 5.3.3 του παρόντος τεύχους.

Επειδή η κεντρομόλος είναι κάθετος στην επιτρόχιο, η τιμή της επιταχύνσεως δίδεται προφανώς από τη σχέση:

$$\alpha = \sqrt{\alpha_n^2 + \alpha_t^2} \tag{15}$$

## 2.2.2 Προσδιορισμός επιταχύνσεων κατά την κίνηση ενός μέλους

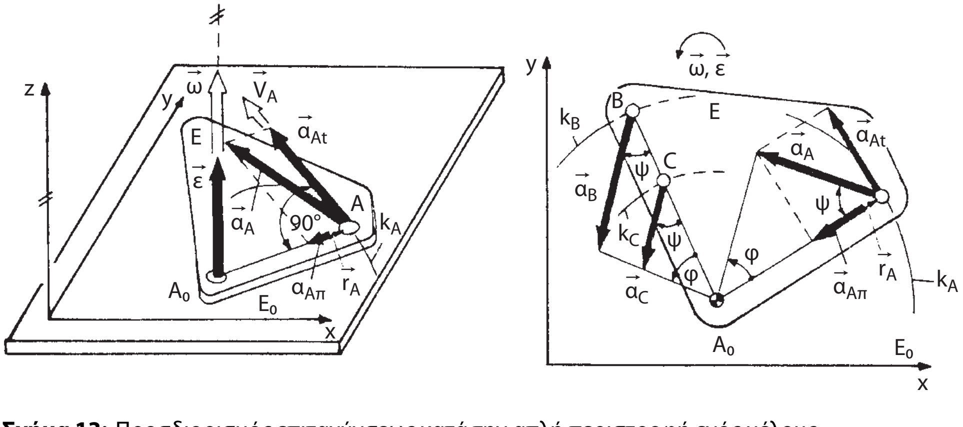
### 2.2.2.1 Απλή στρέψη

Κατά την απλή στρέψη ενός μέλους, γύρω από ένα άξονα περιστροφής (*βλέπε σχήμα 13*), για τις επιταχύνσεις τυχόντων σημείων, ισχύουν οι σχέσεις:

$$\vec{\alpha}_n = -\frac{v^2}{r^2} \cdot \vec{r} = -\omega^2 \cdot \vec{r} \tag{16α}$$

$$\vec{\alpha}_t = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} \tag{16β}$$

όπου $\varepsilon$ είναι η γωνιακή επιτάχυνση του μέλους, ως προς τον άξονα περιστροφής.




**Σχήμα 13:** Προσδιορισμός επιταχύνσεως κατά την απλή περιστροφή ενός μέλους.

Για την τιμή επιταχύνσεως, λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (16α) και (16β) ισχύει επομένως ότι:

$$\alpha = r\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}\ . \tag{17}$$

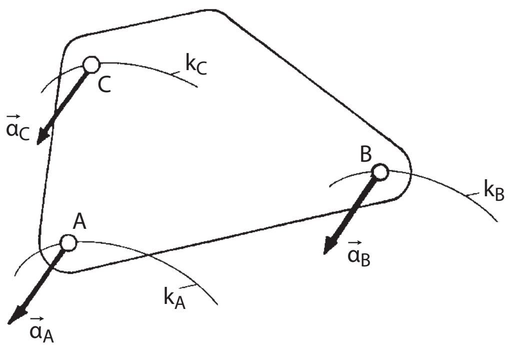
Η γωνία $\psi$ μεταξύ της επιταχύνσεως και της διανυσματικής ακτίνας του τυχόντος σημείου, υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\tan\psi = \frac{\alpha_t}{\alpha_n} = \frac{\varepsilon}{\omega^2} \tag{18}$$

και άρα είναι ανεξάρτητη από την απόσταση $\vec{r}$ από το κέντρο περιστροφής. Η επιτάχυνση του τυχόντος σημείου, σχηματίζει επομένως με την εκάστοτε ακτίνα, μια σταθερή γωνία $\psi$, ως προς τον άξονα περιστροφής

#### *2.2.2.2 Απλή μεταφορά*

Κατά την απλή μεταφορά ενός μέλους, όλες οι επιταχύνσεις των σημείων του, είναι διανυσματικά ίσες (βλέπε *σχήμα 14*).




**Σχήμα 14:** Επιταχύνσεις σημείων ενός μέλους κατά απλή μεταφορά.

#### *2.2.2.3 Γενική κίνηση*

Κατά τη γενική κίνηση ενός μέλους, οι επιταχύνσεις τυχόντων σημείων του, όπως π.χ. του σημείου B, (βλέπε *σχήμα 15*) προσδιορίζονται με τη βοήθεια της γνωστής επιταχύνσεως ενός άλλου σημείου π.χ. του σημείου $A$, βάσει των σχέσεων:

$$\vec{\alpha}_B = \vec{\alpha}_A + \vec{\alpha}_{BA} \,. \tag{19}$$

Για τα επιμέρους ανύσματα της παραπάνω σχέσεως ισχύει ότι:

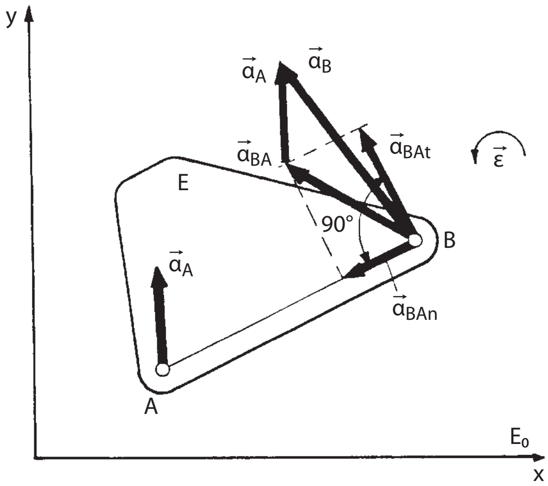
$$\vec{\alpha}_{BA} = \vec{\alpha}_{BA_n} + \vec{\alpha}_{BA_t} \tag{20α}$$

$$\vec{\alpha}_{BA_n} = -\omega^2 \cdot \overrightarrow{AB} \tag{20β}$$

$$\vec{\alpha}_{BA_t} = \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{AB} \,. \tag{20γ}$$

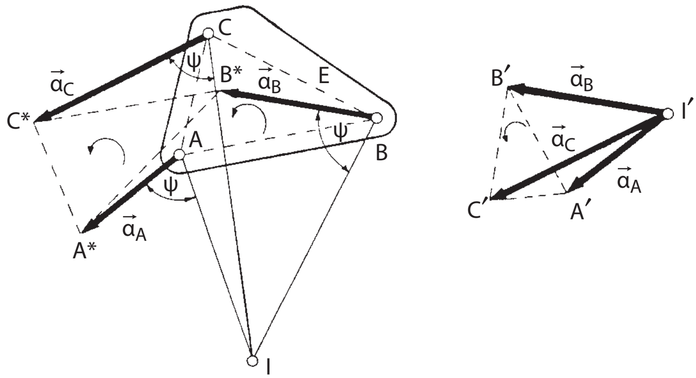
Η κεντρομόλος επιτάχυνση δίδεται από την εξίσωση:

$$\alpha_{BA_n} = \omega^2 \cdot \overline{AB} = \frac{v_{AB}^2}{\overline{AB}} \,. \tag{21}$$




**Σχήμα 15:** Προσδιορισμός επιταχύνσεως σημείου, με τη βοήθεια της επιταχύνσεως άλλου σημείου, του ίδιου μέλους (κατά Euler).

Ο προσδιορισμός των επιταχύνσεων τυχόντων σημείων, κατά τη γενική κίνηση ενός μέλους, μπορεί να γίνει γραφικά εάν είναι γνωστές οι επιταχύνσεις δύο σημείων του μέλους, με τη βοήθεια του σχεδίου του μέλους, ή βάσει του διαγράμματος επιταχύνσεων (βλέπε *σχήμα 16*).




**Σχήμα 16:** Προσδιορισμός επιταχύνσεων σημείων επί του σχεδίου του μέλους ή με τη βοήθεια του διαγράμματος επιταχύνσεων.

Για τον πρώτο τρόπο ισχύει η πρόταση του Burmester, κατά την οποία το τρίγωνο A*B*C* είναι όμοιο με το τρίγωνο ABC.

Για το διάγραμμα επιταχύνσεων ισχύει η πρόταση του Mehmke, ότι το τρίγωνο A′B′C′ είναι όμοιο με το τρίγωνο ABC.

Το σημείο $I'$ στο διάγραμμα των επιταχύνσεων, αντιστοιχεί στο σημείο $I$ και καλείται πόλος επιταχύνσεων. Για το εκάστοτε σημείο I αποδεικνύεται, ότι η επιτάχυνσή του, στη στιγμιαία θέση του μηχανισμού, είναι ίση με το μηδέν. Γενικά ο πόλος επιταχύνσεων, δεν συμπίπτει με τον αντίστοιχο πόλο ταχυτήτων.

### 2.2.3 Προσδιορισμός επιταχύνσεων κατά τη σχετική κίνηση τριών μελών

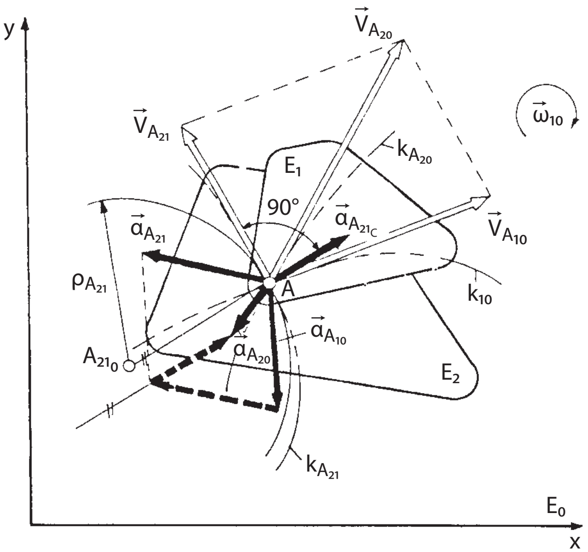
Κατά τη σχετική κίνηση ενός μέλους $E_2$ (βλέπε *σχήμα 17*), ως προς το καθοδηγητικό μέλος $E_1$, που κινείται στο σύστημα xy, του μέλους αναφοράς, η απόλυτος επιτάχυνση $\alpha_{A_{20}}$ υπολογίζεται με τη βοήθεια της σχετικής επιταχύνσεως $\alpha_{A_{21}}$, της οδηγητικής $\alpha_{A_{10}}$ και της επιταχύνσεως Coriolis $\alpha_{A_{21C}}$ από την ακόλουθη σχέση:

$$\vec{\alpha}_{A_{20}} = \vec{\alpha}_{A_{10}} + \vec{\alpha}_{A_{21}} + \vec{\alpha}_{A_{21C}} \tag{22}$$

όπου:

$$\vec{\alpha}_{A_{21C}} = 2\vec{\omega}_{10} \times \vec{v}_{A_{21}} \tag{23α}$$

$$\alpha_{A_{21C}} = 2\omega_{10} \cdot v_{A_{21}} \tag{23β}$$




**Σχήμα 17:** Προσδιορισμός επιταχύνσεων κατά τη σχετική κίνηση τριών μελών.

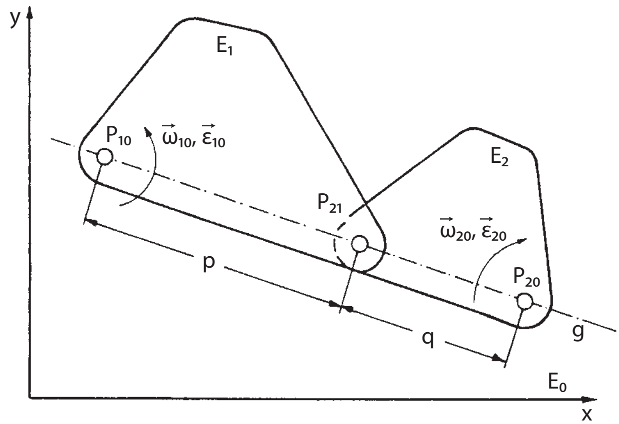
Η Coriiolis – επιτάχυνση είναι ένα άνυσμα, κάθετο στη σχετική ταχύτητα και στραμμένο ως προς αυτή, κατά τη φορά περιστροφής της οδηγητικής γωνιακής ταχύτητας κατά $90°$.

Η επιτάχυνση Coriolis δημιουργείται, επειδή μεταβάλλεται η σχετική ταχύτητα μέσω της οδηγητικής κινήσεως. Η σχετική επιτάχυνση αναλύεται σε επιτρόχιο και κεντρομόλο συνιστώσα. Για την κεντρομόλο ισχύει:

$$\alpha_{A_{21n}} = \frac{v_{A_{21}}^2}{\rho_{A_{21}}}. \tag{24}$$

Εάν η σχετική κίνηση του μέλους $E_2$ ως προς το $E_1$ είναι ευθύγραμμη, τότε μηδενίζεται η επιτάχυνση $\alpha_{A_{21n}}$ $(\rho_{A_{21}} = \infty)$.

Κατά την κίνηση τριών μελών, η απόλυτη γωνιακή επιτάχυνση μπορεί να υπολογισθεί με τη βοήθεια της μεθόδου L.R. König (βλέπε *σχήμα 18*).




**Σχήμα 18:** Προσδιορισμός γωνιακής επιταχύνσεως κατά τη σχετική κίνηση τριών μελών κατά τη μέθοδο L.R. König.

Οι πόλοι $P_{10}, P_{20}, P_{21}$ κείνται όπως είναι γνωστό, πάνω σε μια ευθεία (στο σχήμα 18, στην ευθεία g). Εάν είναι γνωστές η γωνιακή ταχύτητα $\omega_{10}$ και η γωνιακή επιτάχυνση $\varepsilon_{10}$, τότε μπορεί να υπολογισθεί το μέτρο της γωνιακής επιταχύνσεως $\dot{\omega}_{20}$, $(=\varepsilon_{20})$ από τη σχέση:

$$\dot{\omega}_{20} = \frac{1}{q}\left(\omega_{10} \cdot \dot{p} - \omega_{10}\frac{p}{q}\dot{q} + \dot{\omega}_{10} \cdot p\right). \tag{25}$$

Εν προκειμένω ισχύουν οι σχέσεις:

$$p = \overline{P_{10}P_{21}} \tag{26α}$$

$$q = \overline{P_{20}P_{21}} \tag{26β}$$

$$\dot{p} = \frac{dp}{dt} \tag{26γ}$$

$$\dot{q} = \frac{dq}{dt} \tag{26δ}$$

$\dot{q}$ και $\dot{p}$ είναι θετικά όταν οι αποστάσεις $q$ και $p$ μεγαλώνουν.

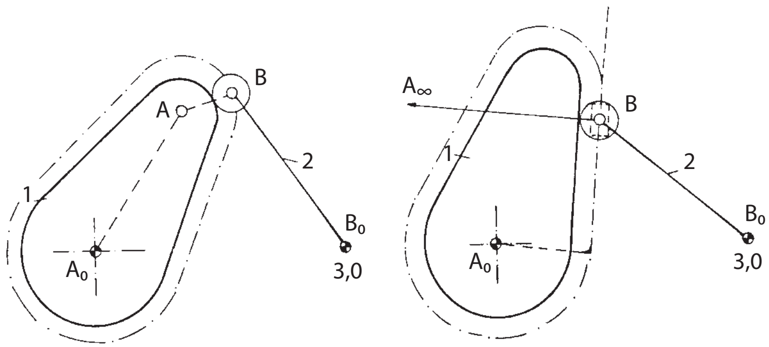
Η τιμή της γωνιακής επιταχύνσεως $\omega_{20}$ είναι θετική, εάν η γωνιακή επιτάχυνση $\varepsilon_{20}$ και η γωνιακή ταχύτητα $\omega_{20}$, είναι ομόρροπες.

## 2.2.4 Προσδιορισμός επιταχύνσεων με τη βοήθεια ισοδυνάμων μηχανισμών

Ισοδύναμοι μηχανισμοί θεωρούνται εκείνοι, που σε μια, ή και περισσότερες πεπερασμένες, ή απείρως γειτονικές θέσεις τους, ορισμένα κινηματικά μεγέθη τους ταυτίζονται.

Δύο μηχανισμοί, είναι ως προς τις επιταχύνσεις ισοδύναμοι, εάν σε τρεις απείρως γειτονικά θέσεις περιστροφής των μηχανισμών, στην περιοχή του εκάστοτε εξεταζόμενου σημείου, υπάρχουν οι ίδιες γεωμετρικές συνθήκες καμπυλότητας.

Ειδικά για μηχανισμούς με οδηγητικές καμπύλες, σε κάθε θέση περιστροφής τους, αντιστοιχεί ένας γεωμετρικά διαφορετικός, ισοδύναμος όμως, ως προς τις επιταχύνσεις μηχανισμός (βλέπε *σχήμα 19*).




**Σχήμα 19:** Ισοδύναμοι μηχανισμοί για δύο διαφορετικές θέσεις περιστροφής ενός μηχανισμού με οδηγητική καμπύλη.

Αριστερά στο σχήμα 19, ο μηχανισμός στην παριστάμενη θέση περιστροφής, έχει αντικατασταθεί με ένα μηχανισμό με τέσσερα μέλη. Το μέλος AB, έχει μήκος ίσο με την απόσταση των κέντρων καμπυλότητας των οδηγητικών καμπυλών, στο σημείο επαφής τους.

Δεξιά στο σχήμα 19, το μέλος AB, έχει αντικατασταθεί με μια άρθρωση ολισθήσεως, γιατή η οδηγητική καμπύλη 1, στη θέση αυτή της περιστροφής, έχει άπειρη ακτίνα καμπυλότητας.

Με τη βοήθεια ισοδυνάμων μηχανισμών, μπορούν πολύ εύκολα, με τις διάφορες μεθόδους που αναπτύχθηκαν στις προηγούμενες παραγράφους, να προσδιορισθούν οι επιταχύνσεις διαφόρων σημείων ενός μηχανισμού.