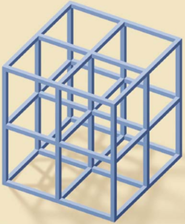
ΧΡΟΝΗΣ Θ. ΜΩΥΣΙΑΔΗΣ
Καθηγητής Τμήματος Μαθηματικών Α.Π.Θ.

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ ΑΠΑΡΙΘΜΗΣΗ

Η τέχνη να μετράμε χωρίς μέτρημα



- Απαρίθμηση
- Σχεδιασμοί
- Γραφήματα

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ

Το βασικό σχέδιο του εξωφύλλου παριστάνει τμήμα τριδιάστατου δικτυώματος με διαστάσεις 2×2×2. Στο δικτύωμα αυτό, υπάρχουν 90 διαδρομές που συνδέουν τα δύο αντιδιαμετρικά σημεία, δηλαδή το αριστερά κάτω και εμπρός με το δεξιά πάνω και πίσω. Για την εύρεση αυτού του αριθμού, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι οποιαδήποτε τέτοια διαδρομή, θα περιέχει έξι τμήματα εκ των οποίων δύο τμήματα προς τα δεξιά (Δ), δύο προς τα άνω (Α) και δύο προς τα πίσω (Π). Αλλά, υπάρχουν $\frac{6!}{2!\cdot 2!\cdot 2!}=90$ διαφορετικοί τρόποι να τοποθετηθούν σε σειρά τα γράμματα Δ, Δ, Α, Α, Π, Π.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η απαρίθμηση των στοιχείων, που ικανοποιούν κάποιες ιδιότητες ή που δεν ικανοποιούν κάποιες άλλες, είναι απαραίτητη για τη μελέτη πολλών προβλημάτων θεωρίας Πιθανοτήτων, Στατιστικής, κλπ. Για το λόγο αυτό υπήρξε μία μεγάλη ανάπτυξη της συνδυαστικής σκέψης, η οποία ξεκίνησε αρχικά με τη μελέτη των συνδυασμών, διατάξεων και μεταθέσεων, συμπεριέλαβε στη συνέχεια διάφορες ενότητες διακριτών μαθηματικών, όπως π.χ. ταξινομήσεις σε ομάδες, κωδικοποιήσεις κλπ, και κατέληξε τα τελευταία χρόνια στη μελέτη της πλέον αφηρημένης μορφής των μαθηματικών που είναι η Θεωρία Γραφημάτων. Στο βιβλίο αυτό ασχολούμαστε με αρκετά από τα θέματα της Συνδυαστικής, με επικέντρωση όμως στις μεθόδους απαρίθμησης, πράγμα που δηλώνεται και με τον τίτλο.

Η οργάνωση της ύλης γίνεται σε 5 κεφάλαια. Το πρώτο κεφάλαιο περιέχει τις έννοιες και τις αρχές που χρησιμοποιούνται στην απαρίθμηση. Στο δεύτερο μελετώνται ειδικά θέματα απαρίθμησης. Το τρίτο ασχολείται με την ύπαρξη και κατασκευή σχεδιασμών, που έχουν πολλές και χρήσιμες εφαρμογές στις πειραματικές επιστήμες, στη στατιστική και αλλού. Το τέταρτο μελετά διάφορες συνδυαστικές δομές που σχετίζονται με τους σχεδιασμούς. Τέλος, στο πέμπτο κεφάλαιο δίνονται οι έννοιες και μερικές βασικές εφαρμογές της θεωρίας γραφημάτων.

Η ύλη που αναφέρθηκε διδάσκεται εδώ και περίπου 10 χρόνια στο Τμήμα Μαθηματικών του ΑΠΘ. Ο αρχικός σχεδιασμός και η οργάνωσή της έγινε σε συνεργασία με το συνάδελφο καθηγητή κ. Χατζηπαντελή Θεόδωρο, τον οποίο και ευχαριστώ θερμά για τη βοήθειά του. Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τον υποψήφιο διδάκτορα κ. Καραγιάννη Βασίλειο για την προσεκτική ανάγνωση και διόρθωση του κειμένου.

Παρατηρήσεις σχετικές με το περιεχόμενο του βιβλίου μπορούν να απευθύνονται στην ηλεκτρονική διεύθυνση cmoi@ccf.auth.gr. *Επίσης, στην ιστοσελίδα* http://users.auth.gr/cmoi *υπάρχουν προγράμματα εκτέλεσης αλγορίθμων που προτείνονται, καθώς και ενδεχόμενα παροράματα ή συμπληρώματα του βιβλίου.*

Χρόνης Μωυσιάδης
Ιανουάριος 2002

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. Τεχνικές Απαρίθμησης

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. Σχεδιασμοί

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΑΠΑΡΙΘΜΗΣΗΣ

1.1. Εισαγωγικά Προβλήματα

Ο όρος *συνδυαστική* (*combinatorics*) περιλαμβάνει ένα μεγάλο πλήθος μαθηματικών εννοιών οι οποίες αφορούν πεπερασμένα, δηλαδή διακριτά, σύνολα αριθμών. Σημαντικό μέρος των στόχων της συνδυαστικής αποτελεί η απαρίθμηση του πλήθους των περιπτώσεων με τις οποίες μπορούν να συνδυαστούν κάποια αντικείμενα. Αυτό ισοδυναμεί με την εύρεση του πλήθους των στοιχείων ενός συνόλου και ως εκ τούτου έχει κανείς την εντύπωση ότι δεν υπάρχει πρόβλημα. Αρκεί να αποκατασταθεί, όπως μαθαίνουμε ήδη από τη βασική εκπαίδευση, μία 1-1 αντιστοιχία μεταξύ των στοιχείων του συνόλου και ενός τμήματος $T_n=\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ του συνόλου των φυσικών αριθμών.

Εύκολα, όμως, διαπιστώνουμε ότι η παραπάνω διαδικασία είναι εφικτή για λίγες μόνο περιπτώσεις και για σχετικά μικρά μεγέθη συνόλων. Πολλοί πεπερασμένοι αριθμοί είναι τόσο μεγάλοι, ώστε είναι αδύνατο να καταμετρηθούν, τουλάχιστον με τα ανθρώπινα μέτρα. Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι ένα σύνολο έχει 2^{40} στοιχεία και θέλουμε να τα μετρήσουμε.

Διαθέτουμε ένα αυτόματο μετρητή και έχουμε τη δυνατότητα να μετρούμε τρεις αριθμούς το δευτερόλεπτο. Θα χρειαζόμαστε, τότε, $2^{40}/3$ δευτερόλεπτα που ισοδυναμούν με κάτι περισσότερο από 116 αιώνες.

Η Συνδυαστική προσπαθεί να ομαδοποιήσει ομοειδείς καταστάσεις και να αναπτύξει μεθόδους απαρίθμησης χωρίς μέτρηση. Θα περιγράψουμε στα επόμενα μερικά προβλήματα που είναι δυνατόν να αντιμετωπιστούν με συνδυαστικές μεθόδους, ώστε να αναδειχθεί η αναγκαιότητα που έδωσε σ' αυτό τον κλάδο των Μαθηματικών τη θέση που έχει σήμερα.

Πρόβλημα 1: Πολλοί θεωρούν εξαιρετικά δυσοίωνη την 13η του μηνός, αν συμβεί να είναι Τρίτη. Πόσες μέρες υπάρχουν κατά μέγιστον σε ένα έτος, που να είναι «Τρίτη και 13»;

Είναι φανερό ότι το ημερολόγιο δεν μπορεί να μας δώσει άμεσα την απάντηση στο παραπάνω ερώτημα. Πράγματι, θα έπρεπε να έχουμε μια συλλογή με όλων των «ειδών» τα ημερολόγια και μετά να καταμετρήσουμε πόσες φορές εμφανίζεται «Τρίτη και 13» σε κάθε ένα από αυτά.

Σε σχέση με το ζητούμενο ερώτημα, διαπιστώνουμε ότι υπάρχουν 14 «είδη» έτους. Πράγματι υπάρχουν δύο δυνατότητες ως προς το να είναι το έτος δίσεκτο ή όχι και υπάρχουν 7 δυνατότητες σε σχέση με το τι μέρα είναι η 13η Ιανουαρίου (δηλαδή αν είναι Κυριακή, Δευτέρα κλπ). Έτσι αντιστοιχίζοντας αριθμούς στις ημέρες ως εξής:

Κυριακή=1, Δευτέρα=2, Τρίτη=3, ..., Σάββατο=7,

βρίσκουμε για κάθε είδος έτος τους αριθμούς που έχουν αντιστοιχιστεί στην 13η κάθε μήνα. Στο παράρτημα, δίνουμε αναλυτικά την απάντηση στο ερώτημα, που είναι 3.

Μια παραλλαγή του προβλήματος αυτού είχε τεθεί στο περιοδικό American Mathematical Monthly το Νοέμβριο του 1962.

Σχετικό με αυτό είναι και το πρόβλημα: «ποια η πιθανότητα η $13^{η}$ κάποιου μήνα που διαλέγεται τυχαία να είναι Τρίτη»; Για την απάντηση χρησιμοποιήσαμε το στατιστικό πακέτο S-Plus και βρήκαμε τις σχετικές συχνότητες των ημερών που είναι $13^{η}$ κάποιου μήνα για 1000 χρόνια (από το 1501 μέχρι το 2500), που είναι οι παρακάτω:

Κυριακή	Δευτέρα	Τρίτη	Τετάρτη	Πέμπτη	Παρασκευή	Σάββατο
0.1431	0.1427	0.1427	0.1431	0.1425	0.1432	0.1427

Όπως αναμένονταν όλες οι μέρες έχουν περίπου ίδια πιθανότητα ίση με 1/7.

■

Πρόβλημα 2: Ένα σύνολο ξύλινων κύβων βάφονται με δύο χρώματα (μπλε και κόκκινο). Πόσα διαφορετικά είδη υπάρχουν;

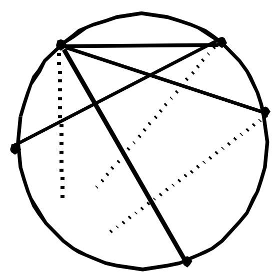
Το πρόβλημα όπως δίνεται έχει ασάφεια. Πράγματι, πότε δύο τέτοιοι κύβοι είναι ίδιοι; Πότε είναι διαφορετικοί; Πρέπει πρώτον να αποφασίσουμε έναν τρόπο τυποποίησης των περιπτώσεων του προβλήματος, ώστε να ασχοληθούμε με την εύρεση του πλήθους των πραγματικά διακεκριμένων περιπτώσεων.

Είναι εύλογο να υποθέσουμε ότι: «Δύο κύβοι είναι διαφορετικοί αν δεν υπάρχει τρόπος να τοποθετηθούν σε ένα επίπεδο τραπέζι με τρόπο ώστε οι αντίστοιχες (ομόλογες) έδρες να έχουν ίδια χρώματα.

Με την προϋπόθεση αυτή, βρίσκουμε (βλέπε παράρτημα) ότι υπάρχουν 10 είδη τέτοιων κύβων.

Το πρόβλημα μπορεί να γίνει πιο πολύπλοκο αν τα χρώματα γίνουν περισσότερα (τρία, τέσσερα, κλπ) ή αν το σχήμα είναι διαφορετικό (τετράεδρο, οκτάεδρο, κλπ).

■



Πρόβλημα 3: Δίνονται n σημεία σε έναν κύκλο. Συνδέουμε ανά δύο τα σημεία αυτά. Ποιο είναι το πλήθος των χωρίων στα οποία κατά μέγιστον υποδιαιρείται ο κύκλος;

Για τη λύση του προβλήματος αυτού πρέπει να παρατηρήσουμε ότι προσθήκη μιας χορδής που δεν τέμνει άλλη, προσθέτει ένα χωρίο επιπλέον στα όσα υπάρχουν μέχρι τότε. Αν τέμνει k χορδές τότε θα προσθέσει k+1 χωρία. Τελικά μπορούμε να βρούμε (βλέπε παράρτημα) ότι:

$$\alpha_n \leq 1+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}$$

όπου α_n παριστάνει το πλήθος των χωρίων που σχηματίζονται με n σημεία.

Το πρόβλημα είχε τεθεί στο διαγωνισμό «Αρχιμήδης» της Μαθηματικής Εταιρείας. Εύκολα διαπιστώνει κανείς, ότι πιο φορμαλιστική επίλυση του προβλήματος αυτού, είναι εξαιρετικά χρονοβόρα. ■

Πρόβλημα 4: Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να “χαλάσουμε” ένα 100-ρικο σε ψιλά των 5, 10, 20 ή και 50 δραχμών;

Ένας τρόπος να λύσουμε το πρόβλημα αυτό, είναι να καταγράψουμε όλες τις περιπτώσεις. Για να αποφύγουμε λάθη, σχηματίζουμε ένα δενδροδιάγραμμα, όπως αυτό που δίνεται στο παράρτημα. Η μέθοδος αυτή δεν μπορεί να εφαρμοστεί για μεγάλες τιμές των παραμέτρων, π.χ. αν αντί 100-ρικο είχαμε 1000-ρικο.

Αν συμβολίσουμε με x_1, x_2, x_3 και x_4 αντίστοιχα τα πλήθη κερμάτων των 5, 10, 20 και 50 δραχμών, στα οποία χαλάσαμε το 100-ρικο, τότε θα ικανοποιείται η διοφαντική εξίσωση:

$$5\cdot x_1+10\cdot x_2+20\cdot x_3+50\cdot x_4=100 \tag{1.1}$$

Θα δούμε σε επόμενη παράγραφο, ότι ένας τρόπος λύσης τέτοιων διοφαντικών εξισώσεων, είναι με τον υπολογισμό του συντελεστή της δύναμης x^{100} στο πολυώνυμο που προκύπτει με τον πολλαπλασιασμό:

$$(1+x^5+x^{10}+\ldots+x^{100})(1+x^{10}+x^{20}+\ldots+x^{100})(1+x^{20}+x^{40}+\ldots+x^{100})(1+x^{50}+x^{100})$$

Μπορούμε όμως να βρούμε το ζητούμενο, χρησιμοποιώντας κάποια γλώσσα προγραμματισμού. Για παράδειγμα δίνεται στο παράρτημα ένα πρόγραμμα σε γλώσσα Pascal. Η απάντηση είναι 49. Ένα εκτελέσιμο πρόγραμμα με την ονομασία diofant.exe δίνει το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_kx_k=n$, για δοσμένα n, k<10 και $a_1,a_2,\ldots a_k$, καθώς και τις ίδιες τις λύσεις.

Το πρόγραμμα είναι διαθέσιμο στη διεύθυνση users.auth.gr/cmoi. ■

Πρόβλημα 5: Αν είναι γνωστό ότι κανείς άνθρωπος δεν έχει περισσότερες από 300 000 τρίχες στο κεφάλι του και ότι η Θεσσαλονίκη έχει περισσότερους από 700 000 κατοίκους, υπάρχουν άραγε 2 άτομα με ακριβώς ίδιο πλήθος τριχών στο κεφάλι τους. Μήπως υπάρχουν τουλάχιστον 3 άτομα;

Χρησιμοποιώντας τη γενικευμένη αρχή του περιστερώνα εξασφαλίζουμε ότι υπάρχουν τουλάχιστον 3 κάτοικοι της Θεσσαλονίκης με ίδιο αριθμό τριχών στο κεφάλι τους. Πράγματι έχουμε 301000 φωλιές (όσες οι διαφορετικές κατηγορίες ανθρώπων ως προς τον αριθμό τριχών), ενώ έχουμε περισσότερα από 2·301 000+1 «περιστέρια» (δηλαδή κατοίκους της Θεσσαλονίκης). ■

Πρόβλημα 6: Δίνονται 5 γράμματα που θα αποσταλούν σε 5 διαφορετικούς παραλήπτες και 5 φάκελοι με τις διευθύνσεις των παραληπτών. Αν γίνει τυχαία τοποθέτηση, σε πόσες περιπτώσεις κανένα γράμμα δεν τοποθετείται στο σωστό φάκελο;

Αριθμούμε τους φακέλους με τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 5 και τους βάζουμε σε αύξουσα σειρά. Αριθμούμε και τα γράμματα με τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 5. Κάθε τοποθέτηση των γραμμάτων μέσα στους φακέλους ισοδυναμεί τότε με μία μετάθεση των αριθμών 1, 2, 3, 4, 5. Υπάρχουν επομένως 5!=120 δυνατές τοποθετήσεις. Από αυτές μας ενδιαφέρουν εκείνες που δεν αφήνουν κανένα από τους αριθμούς στην αρχική του θέση. Το πλήθος αυτών των μεταθέσεων (που λέγονται διαταράξεις) ισούται, όπως αποδεικνύεται σε επόμενη παράγραφο, με:

$$5!\cdot\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}\right)=5!\cdot\left(\frac{60-20+5-1}{5!}\right)=44\,.$$

■

Πρόβλημα 7: Οι αξιωματικοί του Euler. 36 αξιωματικοί που ανήκουν σε έξι χώρες και σε έξι βαθμούς (ώστε σε κάθε συνδυασμό να έχουμε ακριβώς από έναν αξιωματικό) πρόκειται να τοποθετηθούν σε τιμητική παράταξη σε 6-δες. Είναι δυνατό να τοποθετηθούν με τρόπο ώστε σε κάθε γραμμή, και σε κάθε στήλη να μην υπάρχουν αξιωματικοί από την ίδια χώρα ή από τον ίδιο βαθμό;

Το πρόβλημα φέρεται ότι ετέθη το 1782 από τον Euler. Όπως θα δούμε σε επόμενο κεφάλαιο, η απάντηση σε ανάλογο ερώτημα με 9, ή με 16 ή με 25 αξιωματικούς είναι θετική και η κατασκευή της οφείλεται στην ύπαρξη ορθογωνίων μεταξύ τους λατινικών τετραγώνων. Πίστευε ότι η απάντηση είναι "ΟΧΙ". Αποδείχθηκε το 1900 από τον Tarry. Ο Euler είχε διατυπώσει την εικασία ότι στο γενικότερο πρόβλημα για n^2 αξιωματικούς η απάντηση είναι αρνητική όταν $n\equiv 2 \bmod 4$. Το 1900 αποδείχθηκε από τον Tarry η μη ύπαρξη τέτοιας τοποθέτησης για τους 36 αξιωματικούς.

Το 1960 οι Bose, Shrikhande και Parker έδειξαν ότι η εικασία του Euler ισχύει μόνο για τις τιμές n=2 και n=6.

■

Πρόβλημα 8: Πέντε τύποι ελαστικών (1, 2, 3, 4, 5) πρόκειται να ελεγχθούν ως προς την αντοχή τους. Τοποθετούνται σε 5 αυτοκίνητα (Α, Β, Γ, Δ, Ε) στις 4 θέσεις ΕΑ (εμπρός αριστερά), ΕΔ (εμπρός δεξιά), ΠΑ (πίσω αριστερά), ΠΔ (πίσω δεξιά) με διαφορετικούς τρόπους και κάποιοι οδηγοί αναλαμβάνουν να τα οδηγήσουν και να παρατηρήσουν τα αποτελέσματα. Ανάλογα με την τοποθέτηση τα αποτελέσματα είναι περισσότερο ή λιγότερο ικανοποιητικά. Πως μπορούμε να τοποθετήσουμε τα ελαστικά στα αυτοκίνητα, ώστε να είμαστε βέβαιοι ότι τα αποτελέσματα θα είναι όσο περισσότερο γίνεται ικανοποιητικά;

Αποδεικνύεται στη Στατιστική, ότι η βέλτιστη τοποθέτηση γίνεται σύμφωνα με ένα ισορροπημένο σχεδιασμό, που τοποθετεί κάθε τύπο ελαστικού στο ίδιο πλήθος αυτοκινήτων, καθώς επίσης και κάθε ζεύγος ελαστικών στο ίδιο πλήθος αυτοκινήτων. Μια τέτοια τοποθέτηση για το πρόβλημά μας, είναι η επόμενη:

	Α	Β	Γ	Δ	Ε
ΕΑ	1	2	3	4	5
ΕΔ	2	3	4	5	1
ΠΑ	3	4	5	1	2
ΠΔ	4	5	1	2	3

Η δομή αυτή λέγεται (5, 5, 4, 4, 3) – BIB σχεδιασμός. Όπως παρατηρούμε κάθε τύπος ελαστικού τοποθετείται σε 4 αυτοκίνητα, ενώ κάθε ζεύγος ελαστικών τοποθετείται σε 3 αυτοκίνητα. Στη συγκεκριμένη τοποθέτηση παρατηρούμε ότι κάθε τύπος ελαστικού τοποθετείται από ακριβώς μία φορά σε κάθε θέση (ΕΑ, ΕΔ, ΠΑ, ΠΔ), κάτι που είναι σημαντικό για το πρόβλημά μας. ■

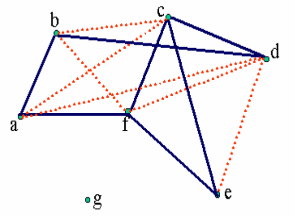
Πρόβλημα 9: Το πρόβλημα του Kirkman. 15 μαθήτριες κάνουν περίπατο κάθε μέρα σε τριάδες. Είναι δυνατό να οργανωθεί ο περίπατος με τρόπο ώστε κάθε μέρα να έχει κάθε μαθήτρια διαφορετική παρέα;

Καταρχήν, το πρόβλημα δεν έχει λόγο να μη λύνεται. Πράγματι, αφού κάθε μαθήτρια κάνει παρέα με 2 άλλες κάθε μέρα, χρειάζεται 7 μέρες να κάνει παρέα και με τις 14 συμμαθήτριές της. Στις 7 μέρες της εβδομάδας θα σχηματιστούν $7{\cdot}5=35$ τριάδες, που περιέχουν συνολικά $35{\cdot}3=105$ ζεύγη κοριτσιών. Αλλά, και όλα τα δυνατά ζεύγη κοριτσιών είναι $\binom{15}{2}=\frac{15\cdot 14}{1\cdot 2}=105$.

Το πρόβλημα τέθηκε το 1847 από τον επίσκοπο Kirkman και λύθηκε από τον ίδιο. Στο παράρτημα δίνεται ένας τρόπος κατασκευής της λύσης, που είναι φανερό ότι είναι ένας (15, 35, 7, 3, 1) – BIB σχεδιασμός. Επειδή επιπλέον οι 35 τριάδες χωρίζονται σε 7 ομάδες (μέρες) όπου κάθε στοιχείο από τα 1 έως 15 (μαθήτριες) εμφανίζονται από ακριβώς μία φορά, ο BIB σχεδιασμός λέγεται επιλύσιμος. Το 1967 οι Ray-Chaudhuri και Wilson έδειξαν ότι υπάρχουν λύσεις για αριθμό κοριτσιών n=3mod6.

■

Πρόβλημα 10: Το παιχνίδι του Ramsey. Δύο παίκτες έχουν διαφορετικού χρώματος μολύβια (έστω κόκκινο και μπλε) και ένα φύλλο χαρτί με σημειωμένα n σημεία. Οι παίκτες ενώνουν διαδοχικά δύο σημεία με μία γραμμή του χρώματος που διάλεξαν. Ο πρώτος που συμπληρώνει τρίγωνο κερδίζει. Για ποια n, συμβαίνει να κερδίζει πάντοτε κάποιος παίκτης; Ποιο είναι το ελάχιστο n ώστε να συμβαίνει αυτό;



Συμβολίζοντας το ένα χρώμα με συνεχή γραμμή και το άλλο με στικτή και παίρνοντας το n ίσο με 7, υλοποιήσαμε στο διπλανό σχήμα μία εκτέλεση του παιχνιδιού του Ramsey.

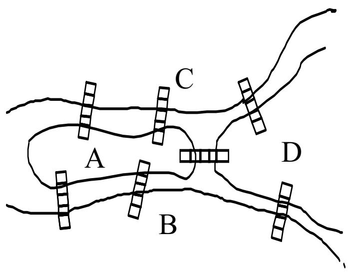
Πράγματι, στη συγκεκριμένη εκτέλεση οι παίκτες Α και Β έπαιξαν διαδοχικά:

A:	ab	af	cf	bd	cd	ce	fe
B:	bf	bc	ac	ad	fd	de	

όπου xy συμβολίζει το ευθύγραμμο τμήμα που σχηματίζει ο αντίστοιχος παίκτης στην κίνησή του.

Το παιχνίδι στηρίζεται σε μια θεωρία, που ανάγεται στο 1930, οπότε ο οικονομολόγος F.P. Ramsey απέδειξε ένα λήμμα για μια εργασία του στη Μαθηματική λογική. Το λήμμα αυτό αποδείχτηκε πολύ σημαντικό, διότι έδωσε τη δυνατότητα σε διαφορετικά πεδία των Μαθηματικών, όπως συνδυαστική, λογική, τοπολογία και θεωρία πιθανοτήτων να αλληλεπιδράσουν προς όφελος της επιστήμης. Πολλά θεωρήματα σπουδαίων μαθηματικών (Hilbert, Schur, van der Waerden κλπ) που αποδείχτηκαν πριν το 1930, θεωρούνται σήμερα ως μέρος της θεωρίας Ramsey. Θα αναπτύξουμε τα βασικά σημεία της θεωρίας του Ramsey στη θεωρία γραφημάτων, που δίνει και τον απλούστερο τρόπο προσέγγισής της. ■

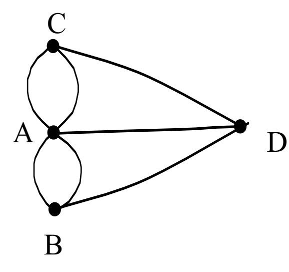
Πρόβλημα 11: Οι γέφυρες του Königsberg. Το 1735 επτά γέφυρες συνέδεαν τις δύο νησίδες που σχηματίζει το ποτάμι της πόλης Königsberg (Kalliningrand στη σημερινή Ρωσία στα σύνορα με τη Λιθουανία).



Ο Euler που βρέθηκε εκεί, αναρωτήθηκε αν υπάρχει τρόπος να κάνει κάποιος βόλτα, ξεκινώντας από ένα σημείο και επιστρέφοντας σ' αυτό περνώντας από κάθε γέφυρα ακριβώς μία φορά;

Ο Euler απέδειξε ότι δεν υπάρχει τέτοιος τρόπος. Για την απόδειξη, που δίνεται λεπτομερειακά στο παράρτημα, χρησιμοποίησε μόνο τις σχέσεις μεταξύ γεφυρών και τμημάτων ξηράς, γι' αυτό και θεωρείται ως το γενέθλιο πρόβλημα της θεωρίας Γραφημάτων (Graph Theory).

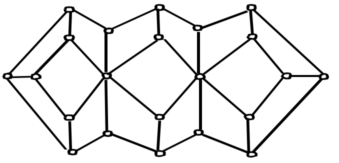
Το πρόβλημα των γεφυρών του Königsberg, μπορεί να παρασταθεί και ως πρόβλημα της θεωρίας γραφημάτων. Πράγματι, παριστάνοντας τις στεριές A, B, C, D με σημεία και τις γέφυρες με γραμμές που συνδέουν τα σημεία, παίρνουμε το διπλανό σχήμα. Έτσι, τα σημεία A και C συνδέονται με δύο γραμμές στο σχήμα, επειδή υπάρχουν δύο διαφορετικές γέφυρες που συνδέουν τις στεριές A και C. Μία βόλτα όπως αυτή που σκέφθηκε ο Euler ισοδυναμεί τώρα με το σχηματισμό του σχήματος με μονοκονδυλιά, χωρίς δηλαδή να περάσει το μολύβι δύο φορές από την ίδια γραμμή. Με τη μορφή αυτή το πρόβλημα γίνεται ειδική περίπτωση του γνωστού ως «προβλήματος του Κινέζου ταχυδρόμου». Η απάντηση, όπως εξηγείται στο παράρτημα, είναι και πάλι αρνητική.



Γραφήματα που έχουν αυτή την ιδιότητα λέγονται γραφήματα Euler και μελετώνται σε ξεχωριστή παράγραφο.

■

Πρόβλημα 12: Το γράφημα δίπλα παριστάνει τις μεταξύ 22 πόλεων άμεσες δυνατές συνδέσεις μέσω αεροπορικών γραμμών. Εξετάστε αν είναι δυνατόν να περάσει κανείς από όλες τις πόλεις χωρίς όμως να χρειαστεί να περάσει δεύτερη φορά από την ίδια πόλη.



Το πρόβλημα είναι ειδική περίπτωση του γνωστού ως «προβλήματος του περιοδεύοντος αντιπροσώπου», το οποίο στη γενικότητά του είναι άλυτο. Μάλιστα, ακόμη και αλγοριθμικές λύσεις δεν οδηγούν με βεβαιότητα στη λύση, διότι έχει αποδειχθεί ότι είναι «NP-complete» πρόβλημα, δηλαδή πρόβλημα στο οποίο δεν υπάρχει πολυώνυμο ως προς το μέγεθός του, που να φράσσει το χρόνο αναζήτησης του αλγορίθμου για την εύρεση λύσης.

Για το δοσμένο πρόβλημα, όμως, είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι δεν υπάρχει τρόπος να συμβεί το ζητούμενο. Για την απάντηση (βλέπε παράρτημα) χρησιμοποιήθηκε κατάλληλος χρωματισμός των κορυφών του γραφήματος.

■

Τα προβλήματα που αναφέρθηκαν είναι ένα μικρό δείγμα του εύρους των θεμάτων με τα οποία ασχολείται η Συνδυαστική. Στις επόμενες παραγράφους θα μελετήσουμε πολλά ακόμη προβλήματα, που στις περισσότερες περιπτώσεις θεωρούνται αντιπροσωπευτικά κάποιας θεματικής ενότητας σχετικής με τη Συνδυαστική.

Εκείνο που πρέπει να γίνει από την αρχή κατανοητό, είναι ότι στα προβλήματα που περιγράφουμε φροντίζουμε, όπου αυτό είναι δυνατό, να δίνουμε τέτοιες λύσεις, που να μπορούν να εφαρμοστούν και σε προβλήματα μεγαλύτερης τάξης μεγέθους. Για παράδειγμα αν έχουμε τα τρία γράμματα α, β, γ είναι πάρα πολύ εύκολο να διαπιστώσουμε ότι υπάρχουν 6 διαφορετικές τοποθετήσεις σε σειρά (μεταθέσεις), οι αβγ, αγβ, βαγ, βγα, γαβ, γβα. Εμείς όμως ενδιαφερόμαστε να βρούμε κάποιο τύπο που να εφαρμόζεται για οποιοδήποτε πλήθος γραμμάτων. Για το παράδειγμα που αναφέρθηκε, αποδεικνύεται εύκολα, ότι γενικά για n σύμβολα υπάρχουν n! διαφορετικές μεταθέσεις. Έτσι, για τα τρία γράμματα θα είναι 3!=6.

1.2. Θεμελιώδης Αρχή Απαρίθμησης

Μία από τις βασικότερες τεχνικές στην επιστήμη, συνίσταται στην κατάτμηση των δύσκολων προβλημάτων σε επιμέρους απλούστερα και του ορισμού μιας διαδικασίας για την εξαγωγή της γενικής λύσης από τις μερικές*. Στη Συνδυαστική αυτή η τεχνική εκφράζεται με τη θεμελιώδη αρχή απαρίθμησης. Ας δούμε, όμως, πρώτα κάποια παραδείγματα:

Παράδειγμα 1.1. Ρίχνουμε διαδοχικά δύο ζάρια και καταγράφουμε τις ενδείξεις τους με τη σειρά που εμφανίστηκαν. Πόσα διαφορετικά ζεύγη ενδείξεων είναι δυνατό να εμφανιστούν (α) αν δεν υπάρχει κανένας περιορισμός και (β) αν είναι γνωστό ότι τα δύο ζάρια έχουν διαφορετική ένδειξη;

α) Αν με **κλ** συμβολίσουμε το ζεύγος ενδείξεων στην περίπτωση κατά την οποία το πρώτο ζάρι έφερε **κ** και το δεύτερο έφερε **λ**, τότε οι δυνατές περιπτώσεις καταγράφονται στον πίνακα 1.1α. Η πρώτη στήλη περιέχει τις περιπτώσεις στις οποίες το πρώτο ζάρι έφερε 1, η δεύτερη στήλη αυτές που το πρώτο ζάρι έφερε 2 και τελικά η τελευταία αυτές που το πρώτο ζάρι έφερε 6. Η τελευταία γραμμή του πίνακα απαριθμεί το πλήθος των διαφορετικών περιπτώσεων της αντίστοιχης στήλης, ενώ το τελευταίο αποτέλεσμα δεξιά μας δίνει το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Πίνακας 1.1α Ρίψη δύο ζαριών

11	21	31	41	51	61	
12	22	32	42	52	62	
13	23	33	43	53	63	
14	24	34	44	54	64	
15	25	35	45	55	65	
16	26	36	46	56	66	
6	**6**	**6**	**6**	**6**	**6**	**6·6=36**

Παρατηρούμε ότι το σύνολο των αντικειμένων που θέλουμε να απαριθμήσουμε, ταξινομήθηκε, ως προς δύο χαρακτηριστικά, σε δύο φάσεις. Στην πρώτη φάση ταξινομήθηκαν οι περιπτώσεις σε σχέση με το τι έφερε το πρώτο ζάρι, ενώ στη δεύτερη φάση ταξινομήθηκαν οι περιπτώσεις σε σχέση

* Ο Καρτέσιος (1596-1650), που ήταν φιλόσοφος εκτός από μαθηματικός, έδωσε τέσσερις αρχές για το αιτιατό. (1) Μην αποδέχεσαι τίποτε ως αληθές, αν δεν είναι αυταπόδεικτο, (2) να υποδιαιρείς πολύπλοκα προβλήματα σε απλούστερα, (3) λύνε τα προβλήματα προχωρώντας από τα απλά προς τα σύνθετα και (4) στο τέλος να ελέγχεις πάντα το αποτέλεσμα.

με το τι έφερε το δεύτερο ζάρι και με δεδομένο ότι είναι γνωστό το τι έφερε το πρώτο ζάρι. Στην πρώτη φάση έχουμε 6 διαφορετικές περιπτώσεις. Στη δεύτερη φάση έχουμε και πάλι 6 διαφορετικές περιπτώσεις ανεξάρτητα από την ένδειξη του ζαριού στην πρώτη φάση.

Αυτό συμβαίνει επειδή ισχύει η ιδιότητα: «Το δεύτερο ζάρι έχει σταθερό πλήθος διαφορετικών δυνατοτήτων, ανεξάρτητα από το τι ένδειξη εμφανίστηκε στο πρώτο ζάρι». Μια τέτοια ιδιότητα είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι ισχύει σε ανεξάρτητες καταστάσεις, όπως είναι στην περίπτωσή μας οι ενδείξεις του ενός ζαριού σε σχέση με αυτές του δεύτερου ζαριού. Λόγω της ιδιότητας αυτής μπορούμε να βρούμε το ζητούμενο με χρήση του πολλαπλασιασμού όπως φαίνεται στην τελευταία γραμμή του πίνακα 1.1α.

β) Αν τα ζάρια έχουν διαφορετικές ενδείξεις, τότε οι δυνατές ζαριές θα δίνονται στον πίνακα 1.1β

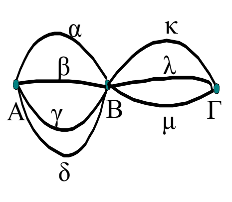
Πίνακας 1.1β Ρίψη δύο ζαριών (διαφορ. ενδείξεις)

12	21	31	41	51	61	
13	23	32	42	52	62	
14	24	34	43	53	63	
15	25	35	45	54	64	
16	26	36	46	56	65	
5	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**6·5=30**

Παρατηρούμε, ότι αν και οι ενδείξεις στην περίπτωση αυτή δεν είναι ανεξάρτητες, αφού αν το πρώτο ζάρι φέρει κάποιον αριθμό το δεύτερο δεν μπορεί να φέρει τον ίδιο, εντούτοις, η προηγούμενη ιδιότητα συνεχίζει να ισχύει. Δηλαδή, ανεξάρτητα από την ένδειξη του πρώτου ζαριού, το δεύτερο έχει 5 δυνατότητες. Λόγω της ιδιότητας αυτής μπορούμε να βρούμε το ζητούμενο με χρήση του πολλαπλασιασμού, όπως φαίνεται στην τελευταία γραμμή του πίνακα 1.1β.

■

Παράδειγμα 1.2. Τέσσερις δρόμοι (α, β, γ, δ) οδηγούν από την πόλη Α στην πόλη Β και τρεις (κ, λ, μ) από την πόλη Β σε μια τρίτη πόλη την Γ. Με πόσες διαφορετικές διαδρομές μπορεί κάποιος να πάει από την πόλη Α στην πόλη Γ μέσω της πόλης Β;



Εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι υπάρχουν 12 διαφορετικές διαδρομές, οι εξής:

$\underbrace{(\alpha,\kappa),\ (\alpha,\lambda),\ (\alpha,\mu),}_{\text{3 ΔΙΑΔΡΟΜΕΣ}}$	$\underbrace{(\beta,\kappa),\ (\beta,\lambda),\ (\beta,\mu),}_{\text{3 ΔΙΑΔΡΟΜΕΣ}}$	$\underbrace{(\gamma,\kappa),\ (\gamma,\lambda),\ (\gamma,\mu),}_{\text{3 ΔΙΑΔΡΟΜΕΣ}}$	$\underbrace{(\delta,\kappa),\ (\delta,\lambda),\ (\delta,\mu)}_{\text{3 ΔΙΑΔΡΟΜΕΣ}}$

Παρατηρούμε ότι και στο παράδειγμα αυτό μπορούμε να θεωρήσουμε ότι έχουμε δύο φάσεις. Στην πρώτη απαριθμούμε το πλήθος των διαδρομών που συνδέουν την πόλη Α με την πόλη Β. Στη δεύτερη φάση απαριθμούμε το πλήθος των διαδρομών από την πόλη Β στην πόλη Γ, έχοντας δεδομένη μια διαδρομή της πρώτης φάσης. Οι δύο αυτές φάσεις είναι ανεξάρτητες, αφού με όποιον τρόπο και να πάει κανείς από την πόλη Α στην πόλη Β, υπάρχει πάντα το ίδιο πλήθος διαδρομών από την πόλη Β για την πόλη Γ. Αυτό εξηγεί γιατί η χρησιμοποίηση του γινομένου 4·3=12 δίνει το ζητούμενο πλήθος διαδρομών. ■

Μπορούμε τώρα να διατυπώσουμε την θεμελιώδη αρχή απαρίθμησης.

Έστω, ότι ζητούμε να απαριθμήσουμε τα στοιχεία ενός πεπερασμένου συνόλου. Έστω ακόμη ότι για τον καθορισμό ή το σχηματισμό του τυχαίου στοιχείου του συνόλου ακολουθούμε m διαδοχικές φάσεις, τέτοιες ώστε, στην πρώτη φάση υπάρχουν n_1 δυνατές περιπτώσεις, στη δεύτερη φάση και ανεξάρτητα από αυτό που συνέβη στην πρώτη φάση υπάρχουν n_2 δυνατές περιπτώσεις, στην τρίτη φάση και ανεξάρτητα από αυτό που συνέβη στις δύο πρώτες φάσεις υπάρχουν n_3 δυνατές περιπτώσεις και συνεχίζοντας ανάλογα στην τελευταία φάση και ανεξάρτητα από αυτό που συνέβη στις προηγούμενες φάσεις υπάρχουν n_m δυνατές περιπτώσεις. Τότε το ζητούμενο πλήθος n των στοιχείων του συνόλου, δίνεται από το γινόμενο των n_1, n_2, …, n_m. Ώστε:

Θεμελιώδης Αρχή Απαρίθμησης ή Πολλαπλασιαστική Αρχή.

Το πλήθος n των στοιχείων ενός συνόλου που ο καθορισμός τους ή ο σχηματισμός τους μπορεί να θεωρηθεί ότι γίνεται σε m διαδοχικές φάσεις, τέτοιες ώστε, σε οποιαδήποτε φάση το πλήθος των δυνατοτήτων που απαριθμούνται να είναι το ίδιο, ανεξάρτητα από το τι συνέβη στις προηγούμενες φάσεις, ισούται με:

$$n = n_1 \cdot n_2 \cdot \cdots \cdot n_m ,$$

όπου n_k , $(k = 1,2,...,m)$, η απαρίθμηση των δυνατοτήτων στην k φάση.

Στα προηγούμενα παραδείγματα η Θεμελιώδης Αρχή Απαρίθμησης μπορούσε να εφαρμοστεί, αφού ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις εφαρμογής της για τις δύο φάσεις που ορίστηκαν.

Παράδειγμα 1.3. Με πόσους τρόπους από ένα σύνολο 7 ατόμων, μπορούμε να σχηματίσουμε 3-μελή επιτροπή της οποίας ένα μέλος να είναι πρόεδρος;

Θεωρούμε, ότι ο σχηματισμός της επιτροπής, γίνεται σε δύο φάσεις. Στην πρώτη σχηματίζεται η τριμελής επιτροπή, ενώ στη δεύτερη επιλέγεται ο πρόεδρός της. Εύκολα διαπιστώνεται ότι υπάρχουν 35 διαφορετικές τριμελείς επιτροπές. Μάλιστα, συμβολίζοντας τα άτομα με τα γράμματα α, β, γ, δ, ε, ζ, η, οι επιτροπές αυτές θα είναι οι:

αβγ	αβζ	αγε	αδε	αεζ	βγδ	βγη	βδη	βζη	γδη	γζη	δζη
αβδ	αβη	αγζ	αδζ	αεη	βγε	βδε	βεζ	γδε	γεζ	δεζ	εζη
αβε	αγδ	αγη	αδη	αζη	βγζ	βδζ	βεη	γδζ	γεη	δεη	

Στη δεύτερη φάση και ανεξάρτητα από το ποια επιτροπή σχηματίστηκε στην πρώτη, έχουμε τρεις δυνατότητες να ορίσουμε τον πρόεδρο. Άρα σύμφωνα με τη Θεμελιώδη Αρχή Απαρίθμησης (ΘΑΑ) υπάρχουν 35·5=105 τρόποι να σχηματιστεί η ζητούμενη επιτροπή. Συμβολικά, γράφουμε:

3-μελής επιτροπή	Πρόεδρος	ΘΑΑ
35	3	35·3=105

■

Παράδειγμα 1.4. Οι πινακίδες των ιδιωτικών αυτοκινήτων στην Ελλάδα σχηματίζονται από τρία γράμματα του Ελληνικού αλφαβήτου που έχουν αντίστοιχά τους στο Λατινικό και από 4 αριθμητικά ψηφία που σχηματίζουν τετραψήφιο αριθμό. Πόσα το πολύ ιδιωτικά αυτοκίνητα μπορούν να κυκλοφορούν στην Ελλάδα; Πόσα το πολύ από αυτά θα έχουν διαφορετικά ψηφία; Πόσα το πολύ θα έχουν όλα τα σύμβολα διαφορετικά; Πόσα το πολύ αρχίζουν από Μ ή Ν;

Παρατηρούμε ότι οποιαδήποτε πινακίδα μπορεί να θεωρηθεί ότι σχηματίζεται σε 7 φάσεις. Πράγματι στις τρεις πρώτες που σχηματίζονται τα γράμματα, επιλέγονται τρία γράμματα από το σύνολο {Α, Β, Ε, Ζ, Η, Ι, Κ, Μ, Ν, Ο, Ρ, Τ, Υ, Χ}. Στις επόμενες τέσσερις φάσεις επιλέγονται τέσσερα ψηφία από τα {0, 1, 2, …, 9}, με την απαίτηση το πρώτο από αυτά να μην είναι 0.

Στο πρώτο ερώτημα μπορούμε να εφαρμόσουμε τη θεμελιώδη αρχή απαρίθμησης, διότι όλες οι φάσεις είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Στο δεύτερο ερώτημα οι τέσσερις πρώτες φάσεις είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Στην πέμπτη φάση για τον καθορισμό του 2ου ψηφίου, έχουμε 9 δυνατότητες ανεξάρτητα από το ψηφίο που επιλέχθηκε στην 4η φάση, αφού πρέπει το ψηφίο αυτό να είναι διαφορετικό από το προηγούμενο. Όμοια στην έκτη φάση έχουμε 8 δυνατότητες αφού το ψηφίο πρέπει να είναι διαφορετικό από τα δύο προηγούμενα. Συνεχίζοντας ανάλογα, συμπεραίνουμε ότι και στο δεύτερο ερώτημα, αλλά και στα επόμενα, μπορούμε να εφαρμόσουμε τη Θεμελιώδη αρχή απαρίθμησης. Έτσι καταλήγουμε στο σχήμα:

1ο γράμμα	2ο γράμμα	3ο γράμμα	1ο ψηφίο	2ο ψηφίο	3ο ψηφίο	4ο ψηφίο	ΘΑΑ
14	14	14	9	10	10	10	24 696 000
14	14	14	9	9	8	7	12 446 784
14	13	12	9	9	8	7	9 906 624
2	14	14	9	10	10	10	3 528 000

που δίνει τα ζητούμενα πλήθη πινακίδων για τα τέσσερα ερωτήματα.

Παρατηρήστε ότι αν στις πινακίδες χρησιμοποιούνταν δύο μόνον γράμματα το μέγιστο πλήθος πινακίδων θα ήταν 1 764 000, που σημαίνει ότι δεν θα έφθαναν για να καλύψουν όλα τα ιδιωτικά αυτοκίνητα.

■

Παράδειγμα 1.5. Πόσοι περιττοί τριψήφιοι αριθμοί σχηματίζονται με τα ψηφία 1, 3, 6, 7 και 8, όταν (α) μπορούν να έχουν και όμοια ψηφία, (β) έχουν όλα τα ψηφία διαφορετικά.

α) Θεωρούμε ότι ο σχηματισμός του τριψηφίου αριθμού γίνεται σε τρεις φάσεις. Στην 1η διαλέγουμε το πρώτο ψηφίο του, στη 2η το δεύτερο και στην 3η το τρίτο. Οι τρεις φάσεις είναι ανεξάρτητες, αφού το ψηφίο που διαλέγουμε σε κάθε φάση δεν δίνει κανέναν περιορισμό για τα ψηφία που θα διαλέξουμε στις επόμενες. Συμβολικά γράφουμε:

1ο ψηφίο	**2ο ψηφίο**	**3ο ψηφίο**	**ΘΑΑ**
5	**5**	**3**	**5·5·3=75**
Διότι και τα 5 ψηφία που δόθηκαν μπορούν να είναι στην 1η θέση	Διότι και τα 5 ψηφία που δόθηκαν μπορούν να είναι στη 2η θέση	Διότι μόνο τα 3 από τα ψηφία που δόθηκαν μπορούν να είναι στην 3η θέση	

δηλαδή υπάρχουν 75 αριθμοί.

β) Αν θεωρήσουμε τις ίδιες φάσεις όπως στο (α), τότε στην γ΄ φάση δεν ικανοποιείται η προϋπόθεση εφαρμογής της θεμελιώδους αρχής απαρίθμησης. Πράγματι, το αποτέλεσμα στην 3η φάση θα είναι 3, αν δεν έχει επιλεγεί περιττός αριθμός στις δύο πρώτες φάσεις, θα είναι 2, αν το ένα από τα δύο πρώτα ψηφία είναι περιττό και θα είναι 1, αν τα δύο πρώτα ψηφία είναι περιττοί.

Το πρόβλημα λύνεται, αν θεωρήσουμε ως πρώτη φάση το σχηματισμό του τρίτου ψηφίου και ως 2η και 3η το σχηματισμό των άλλων ψηφίων. Τώρα η Θεμελιώδης Αρχή μπορεί να εφαρμοστεί και δίνει 36 αριθμούς.

3ο ψηφίο	**1ο ψηφίο**	**2ο ψηφίο**	**ΘΑΑ**
3	4	3	3·4·3=36
Διότι 3 από τα ψηφία είναι περιττοί	Διότι δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί το ψηφίο που επιλέξαμε στην προηγούμενη φάση	Διότι δεν μπορεί να χρησιμοποιηθούν τα ψηφία που επιλέξαμε στις προηγούμενες φάσεις	

Ένας δεύτερος τρόπος για να δοθεί απάντηση στο ερώτημα αυτό, προϋποθέτει τη διάσπαση του προβλήματος σε απλούστερα προβλήματα, για τα οποία να μπορεί να εφαρμοστεί η θεμελιώδης αρχή απαρίθμησης. Έτσι, εξετάζοντας κατά σειρά το 1ο, 2ο και 3ο ψηφίο, διακρίνουμε τέσσερις περιπτώσεις:

i. άρτιος – άρτιος – περιττός
ii. άρτιος – περιττός – περιττός
iii. περιττός – άρτιος – περιττός
iv. περιττός – περιττός – περιττός

Η θεμελιώδης αρχή απαρίθμησης για κάθε μία από αυτές τις περιπτώσεις, δίνει:

	1ο ψηφίο	2ο ψηφίο	3ο ψηφίο	ΘΑΑ
i.	2	1	3	6
ii.	2	3	2	12
iii.	3	2	2	12
iv.	3	2	1	6
			Σύνολο	**36**

Προσθέτοντας βρίσκουμε πάλι το ίδιο αποτέλεσμα.

■

Στο δεύτερο τρόπο του προηγουμένου παραδείγματος, για την εύρεση του τελικού αποτελέσματος χρειάστηκε να προσθέσουμε τα επιμέρους αποτελέσματα. Αυτό είναι σωστό όταν οι κατηγορίες στις οποίες υποδιαιρέσαμε το σύνολο που μας ενδιαφέρει, δεν έχουν μεταξύ τους κοινά στοιχεία. Τότε, ισχύει μια αρχή της απαρίθμησης, που λέγεται Προσθετική Αρχή.

Προσθετική Αρχή Απαρίθμησης.

Το πλήθος n των στοιχείων ενός συνόλου που έχει διαμεριστεί σε m ξένες μεταξύ τους κατηγορίες, ισούται με :

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_m ,$$

όπου n_k , $(k = 1, 2, \ldots, m)$, το πλήθος στοιχείων στην k κατηγορία.

Παράδειγμα 1.6. Με πόσους τρόπους μπορούμε να συγκροτήσουμε τριμελή επιτροπή από 10 καθηγητές και 15 φοιτητές, όταν θέλουμε η επιτροπή να έχει τουλάχιστον ένα καθηγητή και τουλάχιστον ένα φοιτητή;

Είναι φανερό ότι οι απαιτήσεις του προβλήματος ικανοποιούνται όταν η επιτροπή περιέχει είτε (α) έναν καθηγητή και δύο φοιτητές είτε (β) δύο καθηγητές και έναν φοιτητή. Και στις δύο περιπτώσεις θεωρούμε την επιτροπή να σχηματίζεται σε δύο φάσεις ανεξάρτητες μεταξύ τους. Στην πρώτη επιλέγουμε τους καθηγητές και στη δεύτερη τους φοιτητές. Η θεμελιώδης αρχή δίνει για την περίπτωση (α) 10·105=1050 τρόπους, και για την περίπτωση (β) 45·15=675 τρόπους. Η προσθετική αρχή δίνει το τελικό αποτέλεσμα, ότι η επιτροπή σχηματίζεται με 1725 (=1050+675) τρόπους.

■

Ασκήσεις

1.2.1. Πόσα χρήματα στοιχίζει ένα σύστημα στο ΠΡΟΠΟ με μία τριπλή και τρεις διπλές παραλλαγές (και οι υπόλοιποι αγώνες στάνταρ);

1.2.2. Ένας καταστηματάρχης ετοίμων ενδυμάτων πρόκειται να ανανεώσει τα πουκάμισα που διαθέτει. Πόσα πρέπει να παραγγείλει αρχικά, όταν υπάρχουν 5 είδη σε τρία διαφορετικά χρώματα και 4 διαφορετικά μεγέθη και θέλει να έχει δύο από κάθε συνδυασμό;

1.2.3. Πόσα μονοπάτια μήκους 3 υπάρχουν σε ένα μοναδιαίο κύβο, που να συνδέουν μια κορυφή του με αυτήν που βρίσκεται διαγωνίως απέναντι;

1.2.4. Η αίθουσα ενός κινηματογράφου έχει 6 πόρτες. Με πόσους τρόπους μπορεί κάποιος να μπει από μια πόρτα και να βγει από άλλη;

1.2.5. Πόσοι ακέραιοι μεγαλύτεροι από 53000 έχουν όλα τα ψηφία τους διαφορετικά και κανένα από τα ψηφία τους δεν είναι 8 ή 9;

1.2.6. Μία επιτροπή πρέπει να έχει τουλάχιστον δύο μέλη. Η επιτροπή μπορεί να περιέχει το πολύ έναν υδραυλικό, το πολύ έναν πιανίστα, το πολύ έναν νταλικέρη, το πολύ έναν καθηγητή, το πολύ έναν πυροσβέστη και το πολύ δύο γιατρούς. Έστω ότι δύο επιτροπές με το ίδιο πλήθος επαγγελματιών από κάθε επάγγελμα είναι ισοδύναμες. Πόσες διαφορετικές επιτροπές (μη- ισοδύναμες), μπορούν να οριστούν;

1.2.7. Αν υπολογιστεί το 52! πόσα διαδοχικά μηδενικά θα εμφανιστούν στο τέλος του αποτελέσματος;

1.2.8. Μία βιβλιοθήκη έχει 50 000 βιβλία που πρόκειται να μηχανογραφηθούν. Ο βιβλιοθηκάριος σκέφθηκε να δώσει σε κάθε βιβλίο έναν κωδικό που να αποτελείται από 2 γράμματα και τρία ψηφία. Υπάρχουν αρκετοί κωδικοί ώστε να κωδικοποιηθούν όλα τα βιβλία με διαφορετικούς κωδικούς;

1.2.9. Ένας πίνακας με όλα τα στοιχεία του ίσα με 0 ή 1 λέγεται (0,1)-πίνακας. Πόσοι (0,1)-πίνακες διάστασης $m \times n$ υπάρχουν;

1.2.10. Παίρνουμε τυχαία τρία από τα γράμματα του Ελληνικού αλφαβήτου. Πόσες είναι οι διαφορετικές τριάδες στις οποίες δεν εμφανίζονται διαδοχικά γράμματα;

1.2.11. Πόσοι ακέραιοι μικρότεροι από 1 000 000, περιέχουν το ψηφίο 2;

1.2.12. Για την παράσταση των ακεραίων αριθμών οι υπολογιστές χρησιμοποιούν δυαδικές συμβολοσειρές (ακολουθίες με στοιχεία 0 ή 1) μήκους p. Η τελευταία θέση στη συμβολοσειρά χρησιμοποιείται για το πρόσημο ενώ οι προηγούμενες $p-1$ θέσεις περιέχουν το δυαδικό ανάπτυγμα του αριθμού. Το πρόσημο του αριθμού 0 είναι + ή –. Βρέστε (α) ποιο είναι το μέγιστο πλήθος διαφορετικών ακεραίων που μπορούν να παρασταθούν με τον τρόπο αυτό για δοσμένο p, (β) ποιος είναι ο μέγιστος ακέραιος που παριστάνεται με τον τρόπο αυτό.

1.3. Μεταθέσεις – Διατάξεις - Συνδυασμοί

Ας ξαναδούμε κάποια σημεία από τα παραδείγματα της παραγράφου 1.2. Στην πρώτη φάση του Παραδ. 1.3 χρειάστηκε να βρούμε το πλήθος των τριμελών επιτροπών που σχηματίζονται από 7 άτομα. Αυτό το κάναμε με καταγραφή των 35 περιπτώσεων. Τι θα κάναμε, όμως, αν π.χ. είχαμε να υπολογίσουμε το πλήθος των 15-μελών επιτροπών από 650 άτομα; Στο Παράδ. 1.6 βρήκαμε ότι υπάρχουν 105 τρόποι να πάρουμε 2 φοιτητές από τους 15 και 45 τρόποι να πάρουμε δύο καθηγητές από τους 10. Θα μπορούσαμε να βρούμε αυτά τα αποτελέσματα με καταγραφή των περιπτώσεων. Τι θα συμβεί, όμως, αν οι καθηγητές είναι 100 και οι φοιτητές 1500;

Ερωτήματα όπως τα προηγούμενα μας υποχρεώνουν να αναζητήσουμε τρόπους οργάνωσης των διαφόρων περιπτώσεων, έτσι ώστε να γίνει ευκολότερος και ακριβέστερος ο υπολογισμός του πλήθους συνόλων που εμφανίζονται συχνά σε προβλήματα απαρίθμησης. Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με τέτοιους τύπους υπολογισμού.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε n αντικείμενα ή καταστάσεις που διακρίνονται μεταξύ τους από το χρώμα, το μέγεθος ή εν γένει κάποια χαρακτηριστική τους ιδιότητα. Έστω ακόμη ότι διαλέγουμε k από τα αντικείμενα απ' αυτά κάτω από κάποιες προϋποθέσεις και τα τοποθετούμε δίπλα-δίπλα σε σειρά. Η ομάδα των k αντικειμένων θα λέγεται *συνδυασμός*, όταν δεν μας ενδιαφέρει η σειρά των αντικειμένων και *διάταξη* όταν μας ενδιαφέρει. Αν σε μια διάταξη εξαντλούνται όλα τα n αντικείμενα, τότε λέμε ότι έχουμε *μετάθεση*. Αν επιτρέπεται στα k αντικείμενα που επιλέξαμε να υπάρχουν και όμοια, αν δηλ. επιτρέπεται η επανάληψη των αντικειμένων, τότε θα μιλάμε για *επαναληπτικούς συνδυασμούς*, *επαναληπτικές διατάξεις* και για *μεταθέσεις με επανάληψη*, αντίστοιχα.

Για τις ανάγκες των προβλημάτων απαρίθμησης, και όχι μόνο, είναι χρήσιμο να γνωρίζουμε το πλήθος των διαφορετικών συνδυασμών, διατάξεων, μεταθέσεων κλπ., που σχηματίζονται για δοσμένες τιμές των n και k.

Μία χρήσιμη αποδεικτική μέθοδος στη Συνδυαστική είναι η μέθοδος της *διπλής απαρίθμησης*. Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή,

> Αν ένα σύνολο απαριθμηθεί με δύο διαφορετικούς τρόπους, τα δύο αποτελέσματα οφείλουν να είναι ίσα.

Η μέθοδος προκύπτει από την προφανή ιδιότητα που ισχύει σε πίνακες διπλής εισόδου, στους οποίους προκειμένου να βρούμε το άθροισμα όλων των στοιχείων βρίσκουμε πρώτα τα αθροίσματα γραμμών και τα προσθέτουμε και στη συνέχεια τα αθροίσματα στηλών και τα προσθέτουμε επίσης. Η ισότητα των δύο τελικών αθροισμάτων υπολογίζει και ταυτόχρονα ελέγχει το ζητούμενο άθροισμα.

Για την απλοποίηση των τύπων που υπολογίζουν τις μεταθέσεις, συνδυασμούς διατάξεις κλπ., χρησιμοποιούμε το σύμβολο n! (διαβάζουμε n παραγοντικό), που ορίζεται ως το γινόμενο των n πρώτων φυσικών αριθμών ή με 1 όταν n=0, δηλ.

$$n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n,\ \ n\geq 1 \quad \text{και} \quad 0!=1 \tag{1.2}$$

1.3.1 Μεταθέσεις

Ας υποθέσουμε, ότι έχουμε n αντικείμενα, τα οποία πρόκειται να τοποθετηθούν σε μια σειρά. Όποια και αν είναι τα αντικείμενα, μπορούμε χωρίς περιορισμό της γενικότητας να τα αντιστοιχίσουμε στα πρώτα n γράμματα (αν το n είναι σχετικά μικρό), ή στους πρώτους n φυσικούς αριθμούς. Έτσι, οι διάφορες τοποθετήσεις των n αντικειμένων σε σειρά, μπορούν να παρασταθούν με τις τοποθετήσεις των n γραμμάτων ή αριθμών σε σειρά. Δίνουμε τον επόμενο ορισμό:

> Μεταθέσεις n διαφορετικών αντικειμένων ονομάζονται οι διάφοροι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να τα τοποθετήσουμε το ένα μετά το άλλο σε μία σειρά επάνω σε μία ευθεία γραμμή. Το πλήθος των μεταθέσεων συμβολίζεται με M_n.

Είναι φανερό ότι για ένα (n=1) αντικείμενο έχουμε μία μόνο μετάθεση (M_1=1). Για δύο αντικείμενα, που τα συμβολίζουμε α, β, έχουμε δύο μεταθέσεις τις:

α β και β α ,

που σημαίνει ότι M_2=2.

Για να υπολογίσουμε τις μεταθέσεις 3 αντικειμένων, των α, β και γ, θεωρούμε τις μεταθέσεις των δύο (α β και β α) και τις συμπληρώνουμε με το τρίτο αντικείμενο γ. Το γ μπορεί να τοποθετηθεί είτε πριν, είτε ανάμεσα, είτε και μετά τα άλλα, σχηματίζοντας τις έξι μεταθέσεις:

γ α β, α γ β, α β γ ,

γ β α, β γ α, β α γ ,

που σημαίνει ότι M_3=6.

Συνεχίζοντας με τον τρόπο αυτό και χρησιμοποιώντας τη μαθηματική επαγωγή, μπορούμε να καταλήξουμε εύκολα στο συμπέρασμα, ότι για n αντικείμενα ισχύει:

$$M_n=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n=n!,\ \ n\geq 1 \tag{1.3}$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα μπορούμε να καταλήξουμε ευκολότερα με τη χρήση της Θεμελιώδους Αρχής Απαρίθμησης. Πράγματι, ας θεωρήσουμε ότι ο καθορισμός μιας μετάθεσης των n αντικειμένων γίνεται σε n διαδοχικές φάσεις. Στην 1η καθορίζουμε ποιο από τα αντικείμενα θα μπει πρώτο στη σειρά, στη 2η ποιο θα μπει δεύτερο, κ.ο.κ. στην n-στή καθορίζουμε ποιο από τα αντικείμενα θα μπει τελευταίο στη σειρά. Οι φάσεις αυτές δεν είναι ανεξάρτητες, ικανοποιούν, όμως, τις προϋποθέσεις εφαρμογής της ΘΑΑ.

Έτσι, εύκολα διαπιστώνουμε κατ’ αρχήν ότι το πρώτο αντικείμενο μπορεί να επιλεγεί με n τρόπους, αφού κάθε αντικείμενο μπορεί να μπει στην πρώτη θέση. Το δεύτερο στη σειρά δεν είναι ανεξάρτητο από αυτό που τοποθετήθηκε πρώτο, αφού πρέπει να διαφέρει από αυτό. Όμως, όποιο και αν είχε τοποθετηθεί στην πρώτη θέση, στη δεύτερη θα υπάρχουν n–1 δυνατότητες (κάποιο από τα υπόλοιπα). Συνεχίζοντας με αυτό τον τρόπο, έχουμε συμβολικά:

1η θέση	2η θέση	3η θέση	…	(n-1)-στή θέση	n-στή θέση	ΘΑΑ
n	n–1	n–2	…	2	1	$1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$

που μας δίνει πάλι το αποτέλεσμα (1.3)

Σε διάφορες περιπτώσεις, είναι χρήσιμο εκτός από τον υπολογισμό του πλήθους των διαφορετικών μεταθέσεων, να μπορούμε επίσης να τις καταγράψουμε. Διάφοροι τρόποι καταγραφής μπορούν να προταθούν. Ένας από αυτούς είναι ο τρόπος που χρησιμοποιήθηκε προηγούμενα για την απόδειξη του τύπου (1.3). Δηλαδή, από κάθε μετάθεση των n αντικειμένων, που υποτίθεται ότι έχουν ήδη καταγραφεί, να σχηματιστούν n+1 μεταθέσεις των n+1 αντικειμένων, με παρεμβολή του (n+1)-στού αντικειμένου στις n+1 θέσεις που δημιουργούνται. Η κατασκευή ενός αλγορίθμου που καταγράφει με τον τρόπο αυτό τις μεταθέσεις, αφήνεται ως άσκηση για τους αναγνώστες.

Ένας ενδιαφέρων τρόπος είναι η καταγραφή των μεταθέσεων με αύξουσα αλφαριθμητική σειρά. Για παράδειγμα, οι μεταθέσεις 3 αντικειμένων με αύξουσα αλφαριθμητική σειρά είναι Α Β Γ, Α Γ Β, Β Α Γ, Β Γ Α, Γ Α Β, Γ Β Α. Ο αλγόριθμος που μας δίνει αυτή την καταγραφή, δίνεται αναλυτικά στην παράγραφο 1.6. Ένα εκτελέσιμο πρόγραμμα, το metath.exe, που μας δίνει με αύξουσα αλφαριθμητική σειρά τις μεταθέσεις των n αντικειμένων 1, 2, ..., n, ή των A, B, C, …., (n το πλήθος γράμματα), κατασκευάστηκε σύμφωνα με τις παρατηρήσεις της παραγράφου 1.6 και είναι διαθέσιμο στην ιστοσελίδα http://users.auth.gr/cmoi.

Παράδειγμα 1.7. Δύο άνδρες (α, β) και τρεις γυναίκες (γ, δ, ε) είναι υποψήφιοι για μια θέση σε μία εταιρεία. Μία επιτροπή για να κάνει την τελική επιλογή, κάλεσε τους υποψηφίους για συνέντευξη. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να δοθούν αυτές οι συνεντεύξεις; Σε πόσους από τους τρόπους αυτούς ο πρώτος και ο τελευταίος είναι γυναίκα;

Για το πρώτο ερώτημα είναι φανερό ότι κάθε τρόπος που θα δοθούν οι συνεντεύξεις είναι μία μετάθεση των πέντε γραμμάτων α, β, γ, δ και ε. Άρα υπάρχουν $M_5=5!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5=120$ τρόποι.

Για το δεύτερο ερώτημα, θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε ότι η σειρά των συνεντεύξεων καθορίζεται σε πέντε φάσεις, όπου ως 1η και 2η φάση θεωρούμε την επιλογή του πρώτου και του τελευταίου από τους υποψηφίους ενώ ως 3η,4η και 5η φάση θα είναι η επιλογή των ενδιάμεσων υποψηφίων. Η θεμελιώδης αρχή, τότε, δίνει:

1ος υποψήφιος	5ος υποψήφιος	2ος υποψήφιος	3ος υποψήφιος	4ος υποψήφιος	ΘΑΑ
3	2	3	2	1	36

δηλαδή 36 τρόποι.

■

Παράδειγμα 1.8. Ένας περιοδεύων πωλητής πρόκειται να επισκεφθεί n πόλεις για δειγματισμό. Υποθέτουμε ότι οποιαδήποτε σειρά επίσκεψης των πόλεων είναι εφικτή με διαφορετικό βέβαια κόστος. Πόσοι είναι οι διαφορετικοί τρόποι να γίνει η επίσκεψη των n πόλεων όταν ο πωλητής μένει σε μία από αυτές; Ποιο το ελάχιστο κόστος της επίσκεψης, όταν είναι γνωστό το κόστος c_{ij} μεταξύ των πόλεων i και j;

Ας υποθέσουμε ότι οι πόλεις αριθμούνται από 1 έως n και ότι ο πωλητής μένει στην πόλη 1. Τότε, αφού ο πωλητής πρέπει να επιστρέψει στην έδρα του, θα υπάρχουν $(n-1)!$ τρόποι να γίνει η επίσκεψη. Κατασκευάζοντας επομένως έναν αλγόριθμο που υπολογίζει το κόστος για όλες τις μεταθέσεις των $n-1$ πόλεων, θα μπορούσαμε να βρούμε εύκολα τη ζητούμενη βέλτιστη διαδρομή.

Αν το n είναι σχετικά μικρό, τότε η προηγούμενη διαδικασία είναι πράγματι ικανοποιητική. Για μεγάλα n, όμως, τα πράγματα δεν είναι πολύ καλά. Για να δούμε το μέγεθος του προβλήματος, θεωρούμε ότι ο υπολογισμός του κόστους ολόκληρης της διαδρομής είναι για τον υπολογιστή μία πράξη. Τότε, η συνολική διαδικασία θα είναι για τον υπολογιστή $(n-1)!$ πράξεις. Ο παρακάτω πίνακας δίνει τις τιμές του $(n-1)!$ για διάφορες τιμές του n.

n	5	6	7	8	9	10	26
$(n-1)!$	24	120	720	5040	40320	362800	$1.55\cdot 10^{25}$

Η τιμή 25! που δίνεται στον πίνακα αυτό είναι τεράστιος αριθμός. Πράγματι αν υποθέσουμε ότι ένας ισχυρός υπολογιστής μπορεί να ολοκληρώσει ένα δισεκατομμύριο πράξεις το δευτερόλεπτο, για να κάνει 25! πράξεις θα χρειαστεί σχεδόν μισό δισεκατομμύριο χρόνια.

■

Η παραπάνω παρατήρηση δικαιολογεί το χαρακτηρισμό του προβλήματος του περιοδεύοντος αντιπροσώπου ως NP-complete προβλήματος, δηλαδή ως προβλήματος για το οποίο δεν μπορεί να βρεθεί αλγόριθμος που να λύνει το γενικό πρόβλημα σε πραγματικό χρόνο.

Από την άλλη πλευρά από το τελευταίο παράδειγμα διαπιστώνουμε ότι υπάρχουν περιπτώσεις που απαιτείται ο υπολογισμός μεγάλων τιμών του n!. Έτσι, προσπάθησαν πολλοί να δώσουν προσεγγιστικούς τύπους υπολογισμού για την ποσότητα αυτή, με πιο γνωστό τον τύπο του Stirling.

Τύπος Stirling: Ισχύει κατά προσέγγιση

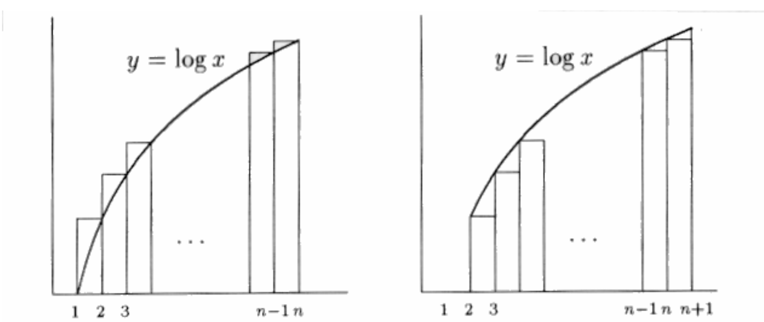
$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \tag{1.4}$$

Η απόδειξη του τύπου (1.4) παραλείπεται. Αντί αυτού αποδεικνύουμε μια σχετική ανισότητα.

Θεώρημα 1.1. Ισχύει: $$e\left(\frac{n}{e}\right)^n \le n! \le \frac{1}{4}(n+1)e^2\left(\frac{n}{e}\right)^n \tag{1.5}$$

Απόδειξη

Παρατηρούμε καταρχήν ότι $\ln(n!) = \sum_{i=2}^{n} \ln i$. Προσεγγίζουμε στη συνέχεια το άθροισμα των λογαρίθμων που εμφανίστηκε, με το ολοκλήρωμα της συνάρτησης $y = \ln x$, όπως φαίνεται στο σχήμα (1.1), απ' όπου προκύπτει:



Σχήμα 1.1