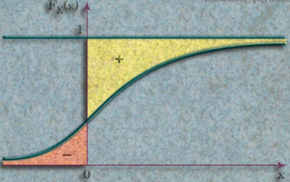
ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ Ι

ΚΛΑΣΙΚΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ
ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

Στρατής Κουνιάς
Καθηγ. Πανεπιστ. Αθηνών

Χρόνης Μωυσιάδης
Αναπλ. Καθηγητής Α.Π.Θ.



ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ 1995

Πρόλογος

Η πρώτη έκδοση του παρόντος βιβλίου έγινε το 1985. Δέκα χρόνια μετά, το βιβλίο επανεκδίδεται με πολλές προσθήκες και βελτιώσεις. Περιέχει την ύλη που διδάσκεται σε ένα πρώτο εξαμηνιαίο μάθημα Πιθανοτήτων στα τμήματα Μαθηματικών, Φυσικής, Μηχανικών διαφόρων ειδικοτήτων των Πανεπιστημίων και Πολυτεχνείων της χώρας μας.

Καταβλήθηκε προσπάθεια να υπάρχουν αρκετές εφαρμογές στα παραδείγματα και τις ασκήσεις ώστε να φανεί η χρησιμότητα του κλάδου αυτού των Μαθηματικών σε διάφορες επιστήμες, Ιατρική, Βιολογία, Φυσική, Οικονομικά, Τηλεπικοινωνίες, Γενετική, Ηλεκτρονικούς Υπολογιστές κ.λπ.

Επειδή είναι το πρώτο μάθημα που παίρνουν οι φοιτητές στις Πιθανότητες, έγινε προσπάθεια να δοθούν οι βασικές έννοιες χωρίς περιττές μαθηματικές λεπτομέρειες αλλά με αρκετή ακρίβεια ώστε να αναπτύσσεται τόσο η διαίσθηση όσο και η μαθηματική ωριμότητα του φοιτητή.

Η συμπλήρωση των βασικών γνώσεων στις Πιθανότητες δίνεται σε δεύτερο εξαμηνιαίο μάθημα Πιθανοτήτων που ίσως δεν είναι υποχρεωτικό για όλους τους φοιτητές.

Υπάρχουν πέντε κεφάλαια και στο τέλος κάθε κεφαλαίου προτείνονται ασκήσεις για λύση. Στο παράρτημα που ακολουθεί στο τέλος του βιβλίου δίνονται σε συντομία οι λύσεις πολλών ασκήσεων ενώ σε άλλες δίνονται υποδείξεις λύσεων. Τέλος δίνονται και μερικές ασκήσεις ιστορικού ενδιαφέροντος καθώς και βιβλιογραφία στο τέλος του βιβλίου.

Ευελπιστούμε ότι το παρόν βιβλίο καλύπτει μια βασική ανάγκη στην Ελληνική βιβλιογραφία και ότι θα είναι χρήσιμο για τον αναγνώστη.

Ευχαριστούμε τη διεύθυνση και το προσωπικό των Εκδόσεων Π. Ζήτη για την προσεγμένη εκτύπωση και τη φροντίδα αυτής της έκδοσης.

Αθήνα, Θεσσαλονίκη, Νοέμβριος 1995

Στρατής Κουνιάς
Χρόνης Μωϋσιάδης

Αιών παίς εστί
παίζων, πεσσεύων

Ηράκλειτος

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 4

ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΕΣ ΤΥΧΑΙΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ

Κεφάλαιο 5

ΜΕΡΙΚΕΣ ΕΙΔΙΚΕΣ ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

Παράρτημα

Λύσεις των προτεινόμενων ασκήσεων:

κεφάλαιο 1

βασικές έννοιες - αξιώματα

1.1. Εισαγωγή

Η θεωρία Πιθανοτήτων είναι ο κλάδος εκείνος της Μαθηματικής Επιστήμης που μελετά τη συμπεριφορά των τυχαίων φαινομένων. Είναι η επιστήμη που εξετάζει τους **νόμους της τύχης** και έχει εφαρμογές σε όλες σχεδόν τις άλλες επιστήμες, όπως π.χ. Φυσική, Βιολογία, Κοινωνιολογία, Ψυχολογία, Ιατρική κ.λπ. Η θεωρία Πιθανοτήτων αναπτύχθηκε κάτω από την ανάγκη επίλυσης συγκεκριμένων προβλημάτων.

Οι έννοιες του "τυχαίου" και του "πιθανού" είναι, σήμερα, λίγο-πολύ γνωστές και εξηγούνται με τη "διαίσθηση" και την "κοινή λογική". Έτσι η έκφραση ότι κατά τη ρίψη ενός ζαριού είναι τυχαίο το ποια πλευρά θα εμφανιστεί, δεν ξενίζει κανέναν. Επίσης η παρατήρηση ότι κατά τη ρίψη ενός κανονικού ζαριού και οι έξι πλευρές που έχουν την ίδια πιθανότητα να εμφανιστούν φαίνεται να δικαιολογείται από την κοινή λογική. Όμοια όταν διαλέγουμε "τυχαία" ένα παιδί από μία σχολική τάξη στην οποία φοιτούν 10 αγόρια και 15 κορίτσια, είναι προφανές και σύμφωνο με την κοινή λογική ότι είναι πιθανότερο να διαλέξουμε κορίτσι παρά αγόρι. Με αυτό κατανοούμε ότι αν επαναλάβουμε το ίδιο πείραμα 25 φορές, προσδοκούμε να επιλέξουμε στις 15 φορές κορίτσι και στις 10 φορές αγόρι. Ή ακόμη ότι αν 100 άτομα έκαναν το ίδιο πείραμα, τα 60 περίπου άτομα θα διάλεγαν κορίτσι και τα υπόλοιπα αγόρι.

Οι αρχαίοι Έλληνες δεν ασχολήθηκαν συστηματικά με έννοιες της θεωρίας πιθανοτήτων. Ο Αριστοτέλης (384-322 π.Χ.) διατύπωσε τη διάκριση μεταξύ των λέξεων **γνώση** και **γνώμη**. Θεώρησε δηλαδή ότι η γνώση αφορά σε κάτι που *είναι* σωστό ή λάθος, ενώ η γνώμη σε κάτι που *μπορεί να είναι* σωστό ή λάθος. Έδωσε επίσης τις έννοιες του **τυχαίου**, του **απροσδόκητου** και της **σχετικής συχνότητας**. Θεωρούσε όμως ότι το τυχαίο δεν είναι επιστημονική έννοια, οφείλεται στη δική μας αδυναμία να ερμηνεύσουμε τα φαινόμενα και έδωσε το παράδειγμα: Οποιαδήποτε ανακοίνωση για το αποτέλεσμα μιας ναυμαχίας που θα γίνει την επόμενη μέρα θα είναι σωστή ή λάθος μετά το τέλος της ναυμαχίας. Πριν τη ναυμαχία καμμία ανακοίνωση δε μπορεί να είναι αληθής.

Ο Καρνεάδης (214-129 π.Χ.), που έζησε στα ελληνιστικά χρόνια, έδωσε μια πρώτη έννοια της πιθανότητας ως μορφής γνώσης, αρνούμενος την ύπαρξη **κριτηρίου της αλήθειας**. Όπως γράφει ο Σέξτος ο Εμπειρικός, ο Καρνεάδης διέκρινε τρεις βαθμούς πιθανότητας (πιθανής γνώσης). Ο πρώτος βαθμός πιθανότητας, **η πιθανή φαντασία**, χρησιμοποιείται όταν ασχολούμαστε με κοινά πράγματα ή όταν δεν έχουμε καιρό. Π.χ. κάποιος κυνηγημένος φτάνοντας σε ένα χαντάκι φαντάζεται ότι μέσα στο χαντάκι είναι κρυμμένοι οι κυνηγοί του, οπότε χωρίς να το ξανασκεφθεί αλλάζει κατεύθυνση και φεύγει από το χαντάκι. Ο δεύτερος βαθμός πιθανότητας, **η απερίσπαστος φαντασία**, χρησιμοποιείται για σπουδαιότερα πράγματα όταν κάποια παράσταση που μας δημιουργείται δεν έρχεται σε αντίφαση με άλλες παραστάσεις του ίδιου λογικού πλαισίου. Π.χ. αν κινούμενοι σε σκοτεινό δωμάτιο δούμε ένα σκοινί στριμμένο αμέσως πηδάμε πάνω από αυτό γιατί το φανταζόμαστε ότι είναι φίδι, αλλά καθώς ξανακοιτάμε πίσω το σκοινί να είναι ακόμη ακίνητο, αποφασίζουμε ότι δεν είναι φίδι. Ο τρίτος βαθμός πιθανότητας, **η διεξωδευμένη φαντασία**, απαιτεί ένα ολόκληρο σύστημα από παραστάσεις να αποδειχθεί ότι έχει εσωτερική αλληλουχία και δεν αντιφάσκει με την εμπειρία. Π.χ. στο τελευταίο παράδειγμα με το σκοινί, αφού δούμε ότι είναι ακίνητο, σκεφτόμαστε ότι ενδέχεται να είναι ακίνητο λόγω του χειμερινού κρύου, γι' αυτό παίρνουμε ένα ραβδί και το κουνάμε. Εφόσον ούτε και τώρα βλέπουμε το σκοινί να κινείται καταλήγουμε να αποκλείσουμε ότι είναι φίδι. Ούτε όμως ο Καρνεάδης ούτε και κανείς άλλος στην αρχαιότητα, όρισε **ποσοτική έννοια της πιθανότητας**.

Αλλά και πολύ αργότερα ο Thomas Aquinas (1225-1274 μ.Χ.) θεωρούσε ότι ορισμένα γεγονότα ονομάζονται τυχαία διότι δεν έχουμε ή δεν μπορούμε να συγκεντρώσουμε όλες τις πληροφορίες για να τα ερμηνεύσουμε. Δίνει μάλιστα το παράδειγμα ενός αφεντικού που είχε δύο υπηρέτες και δίνει μυστικά στον καθένα την εντολή να είναι ορισμένη ώρα σε συγκεκριμένο μέρος. Όταν οι υπηρέτες συναντώνται το αποδίδουν στην τύχη, ενώ το αφεντικό γνώριζε ότι θα συναντηθούν.

Ο Spinoza (1632-1677) πίστευε ότι η άγνοια της πραγματικότητας μας οδηγεί να αποδίδουμε στην τύχη ορισμένα γεγονότα.

Παρ' όλα αυτά το τυχαίο χρησιμοποιήθηκε για πρακτικούς σκοπούς στην Αθηναϊκή πολιτεία. Στη νομοθεσία του Δράκοντα (624 ή 621 π.Χ.) η επιλογή των αρχόντων (βουλευτές, στρατηγοί) γινόταν με κλήρο και όχι με εκλογή. Όσοι κληρώνονταν για μια θητεία δεν μετείχαν στην επόμενη κλήρωση. Αυτό διατηρήθηκε και στη νομοθεσία του Σόλωνα (639-559 π.Χ.).

Η θεωρία Πιθανοτήτων αναπτύχθηκε από την ανάγκη να αντιμετωπισθούν πρακτικά προβλήματα. Ο 17ος αιώνας χαρακτηρίζεται από την ανάπτυξη του διεθνούς εμπορίου και την πληρωμή ασφαλίστρων, όπου έπρεπε να ληφθούν υπόψη τα ατυχήματα κατά τη μεταφορά.

Επίσης η οργάνωση του κράτους με τα νέα δεδομένα απαιτούσε υπολογισμούς εσόδων και εξόδων. Γνωστοί μαθηματικοί συμβούλευαν τους ηγεμόνες για το ποσό που αναμένεται να συγκεντρωθεί από φόρους, για το πλήθος των κατοίκων της χώρας ή του στρατού κ.λπ. Αναφέρεται ότι ο Leonard Euler (1707-1783) έδωσε συμβουλές στο βασιλιά Frederick της Πρωσσίας το 1754 και το 1763 για την τιμή πώλησης των κρατικών λαχείων.

Τέλος η ανάπτυξη της αστρονομίας οδήγησε τον Galileo Galilei (1564-1642) να μελετήσει τα σφάλματα των παρατηρήσεων που τα θεωρούσε τυχαία.

Τα προβλήματα αυτά ήταν σύνθετα και δύσκολα, γι' αυτό οι πρώτοι ποσοτικοί υπολογισμοί της πιθανότητας δόθηκαν σε πιο απλά προβλήματα, όπως αυτά που προέκυπταν από τυχερά παιχνίδια.

Η αλληλογραφία, γύρω στα 1650 των Blaise Pascal (1623-1662) και Pierre de Fermat (1601-1665) περιέχει τον υπολογισμό πιθανοτήτων σε αρκετά παραδείγματα από τυχερά παιχνίδια. Είχε προηγηθεί ο υπολογισμός των πιθανοτήτων στη ρίψη κύβου (ζαριού) ή κύβων, όπως δίνεται στο βιβλίο του G. Cardano (1501-1576) που δημοσιεύτηκε το 1663 ένα αιώνα περίπου μετά το θάνατό του.

Οι υπολογισμοί αυτοί γίνονταν με συνδυαστικές μεθόδους και για συμμετρικά ζάρια. Τους υπολογισμούς του Gardano έκανε με μαθηματική μεθοδικότητα και ο G. Galilei.

Τα πρώτα βιβλία στις πιθανότητες ήταν των Cristjaan Huygens (1629-1695) με τίτλο "De Ratiociniis in Aleae Ludo", το 1657 και του Jacob Bernoulli (1654-1705) με τίτλο "Ars Conjectandi" που τυπώθηκε μετά το θάνατό του το 1713. Η κλασική θεωρία πιθανοτήτων θεμελιώθηκε από τον P.S. Laplace (1749-1827) με το βιβλίο του "Theorie Analytique des Probabilités", το 1795. Σημαντική ήταν και η συμβολή των Gauss (1777-1855), Poisson (1781-1840), de Montmort (1678-1719), de Moivre (1667-1754), V. Bounjatovski (1804-1889).

Η ανάγκη για μια αξιωματική θεμελίωση της θεωρίας πιθανοτήτων με μαθηματική αυστηρότητα παρουσιάσθηκε από τον D. Hilbert στον κατάλογο των σπουδαίων άλυτων προβλημάτων που έδωσε το 1900. Η πρώτη σοβαρή, προσπάθεια σ' αυτήν την κατεύθυνση έγινε από τον von Mises το 1919 χωρίς ικανοποιητικά αποτελέσματα. Η σημερινή αξιωματική θεμελίωση οφείλεται στον A.N. Kolmogorov το 1933 που παρουσίασε τις πιθανότητες ως ειδική περίπτωση της θεωρίας μέτρου.

Η θεωρία του Kolmogorov, δεν είναι μόνον απλή και ικανοποιητική όσον αφορά τη μαθηματική αυστηρότητα, αλλά έβαλε και τα θεμέλια για τις εφαρμογές της θεωρίας πιθανοτήτων. Προβλήματα, όπου η πιθανότητα δεν έχει πεπερασμένη τιμή και παρουσιάζονται στη στατιστική μηχανική, κβαντική μηχανική, τη στατιστική Bayes κ.λπ. δεν αντιμετωπίζονται με τη θεμελίωση του Kolmogorov που θεωρεί ότι η πιθανότητα παίρνει τιμές στο διάστημα [0, 1]. Έτσι αναπτύχθηκε από τον A. Renyi το 1955 μία αξιωματική θεμελίωση βασισμένη στις δεσμευμένες πιθανότητες.

Στα επόμενα θα δώσουμε μεν την αξιωματική θεμελίωση, δεν θα επιμείνουμε όμως στη μαθηματική πληρότητα, διότι μας ενδιαφέρει σ' αυτό το στάδιο κυρίως η διαίσθηση και η κατανόηση των βασικών εννοιών.

1.2. Πείραμα τύχης - Γεγονός

Βασική έννοια στη θεωρία πιθανοτήτων είναι το **πείραμα τύχης** (random experiment). Με τον όρο αυτό εννοούμε κάθε διαδικασία που εκτελείται (πείραμα) ή παρατηρείται (φαινόμενο) και στην οποία το τελικό αποτέλεσμα είναι τυχαίο (όχι γνωστό εκ των προτέρων). Έτσι για παράδειγμα τα:

α. ο αριθμός ατυχημάτων που συμβαίνουν σε συγκεκριμένο χρονικό διάστημα σε συγκεκριμένο τόπο,

β. το πλήθος παιδιών που κάνει μια οικογένεια,

γ. ο αριθμός ψήφων που παίρνει ένα κόμμα σε συγκεκριμένη εκλογική περιφέρεια,

δ. η ρίψη ενός ζαριού,

ε. η κλήρωση του ΛΟΤΤΟ,

ζ. η διάρκεια μιας τηλεφωνικής συνδιάλεξης,

η. η καθυστέρηση στην πραγματοποίηση μιας πτήσης αεροπλάνου,

κ.λπ. είναι κατά τη θεωρία πιθανοτήτων πειράματα τύχης.

Αυτό που χαρακτηρίζει ένα πείραμα τύχης είναι ότι μπορεί να επαναληφθεί, κάτω από τις ίδιες συνθήκες, πολλές φορές.

Στην πράξη η επανάληψη ενός πειράματος κάτω από τις ίδιες ακριβώς συνθήκες είναι δύσκολη έως αδύνατη. Π.χ. είναι δυνατό να επαναλάβουμε πολλές φορές με ίδιες αρχικές συνθήκες τη ρίψη ενός ζαριού ή την κλήρωση του ΛΟΤΤΟ. Είναι αδύνατο όμως να παρακολουθήσουμε την ίδια οικογένεια να ξαναζεί, για να μετρήσουμε πόσα παιδιά θα κάνει κάθε φορά. Θεωρούμε όμως τις διάφορες οικογένειες που ζουν στον ίδιο τόπο και χρόνο ως επαναλήψεις του πειράματος αυτού. Γενικά τη δυνατότητα επανάληψης ενός πειράματος τύχης κάτω από τις ίδιες συνθήκες, τη δεχόμαστε ως αξίωμα, όπως δεχόμαστε την ύπαρξη σημείου και ευθείας στη Γεωμετρία.

Το αποτέλεσμα ενός πειράματος τύχης λέγεται **απλό γεγονός** ή **απλό ενδεχόμενο** (simple event), και ένα σύνολο απλών γεγονότων λέγεται **γεγονός** ή **ενδεχόμενο** (event).

Στην Ελληνική γλώσσα οι λέξεις γεγονός και ενδεχόμενο έχουν διαφορετικές έννοιες διότι η μία εκφράζει αυτό που έγινε, ενώ η άλλη αυτό που αναμένεται να γίνει.

Στη θεωρία Πιθανοτήτων, όμως, δίνουμε και στις δύο λέξεις το ίδιο περιεχόμενο, όπως ορίστηκε παραπάνω και θα χρησιμοποιούμε κυρίως τη λέξη γεγονός.

Ορίζουμε ότι ένα γεγονός **πραγματοποιείται** ή **συμβαίνει** (occurs), όταν το απλό γεγονός που προκύπτει από την εκτέλεση του πειράματος περιέχεται στο γεγονός αυτό.

Οι εκφράσεις που ακολουθούν είναι γεγονότα σχετικά με τα πειράματα τύχης που αναφέρθηκαν προηγούμενα

α1. Το πλήθος των ατυχημάτων είναι το πολύ δύο.

α2. Ο αριθμός των ατυχημάτων είναι μεγαλύτερος του 5 και μικρότερος ή ίσος του 10.

β1. Η οικογένεια κάνει τουλάχιστον ένα παιδί.

β2. Η οικογένεια κάνει πάνω από τέσσερα παιδιά.

γ. Το κόμμα παίρνει πάνω από 12.000 ψήφους.

δ1. Θα έλθει έξι.

δ2. Το ζάρι θα φέρει περιττό αριθμό.

ε1. Ένα τουλάχιστον από τα έξι νούμερα που κληρώνονται λήγει σε 7.

ε2. Πετυχαίνουμε 5-άρι, έχοντας διαλέξει 10 αριθμούς.

ζ. Το τηλεφώνημα διαρκεί λιγότερο από 3 λεπτά.

η. Η καθυστέρηση της πτήσης είναι μεγαλύτερη των 30 λεπτών.

Τα γεγονότα συμβολίζονται με κεφαλαία γράμματα. Π.χ. για τα γεγονότα που αναφέρθηκαν προηγούμενα, συμβολίζουμε:

$A_1 = \{$Το πλήθος των ατυχημάτων είναι το πολύ δύο$\}$,

$\Gamma = \{$Το κόμμα παίρνει πάνω από 12.000 ψήφους$\}$,

κ.ο.κ. Το **απλό ενδεχόμενο** (ή **απλό γεγονός**), που είναι το αποτέλεσμα ενός πειράματος τύχης συμβολίζεται συνήθως με το γράμμα ω. Π.χ. τα

$\omega = \{$έρχεται 6 στη ρίψη ενός ζαριού$\}$

$\omega = \{$το πλήθος των ατυχημάτων είναι δύο$\}$

είναι απλά ενδεχόμενα.

Ένα γεγονός περιέχει ένα ή περισσότερα απλά γεγονότα. **Βέβαιο γεγονός** είναι εκείνο που συμβαίνει σε κάθε εκτέλεση του πειράματος, που όπως είπαμε γίνεται κάτω από τις ίδιες συνθήκες.

1.3. Δειγματοχώρος

Το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης, το σύνολο δηλ. όλων των απλών ενδεχομένων του, λέγεται **δειγματοχώρος** ή **δειγματικός χώρος** (sample space) του πειράματος και συμβολίζεται με Ω. Αν με ω_i, $i=1, 2 \ldots$ συμβολίσουμε τα απλά ενδεχόμενα του πειράματος τότε

$$\Omega = \{\omega, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots\}$$

ή $$\Omega = \{\omega\text{: } \omega \text{ απλό ενδεχόμενο του πειράματος}\}\ . \qquad (1.1)$$

Αν το πλήθος των απλών ενδεχομένων είναι πεπερασμένο, τότε το Ω είναι πεπερασμένο σύνολο και ο δειγματοχώρος λέγεται επίσης **πεπερασμένος**. Σε κάθε άλλη περίπτωση αναφερόμαστε σε χώρους άπειρα αριθμήσιμους που θα τους διακρίνουμε σε **αριθμήσιμους** και **μη-αριθμήσιμους** δειγματοχώρους.

Δίνονται στη συνέχεια μερικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 1.1. Ρίχνουμε ένα κανονικό ζάρι. Ποιος είναι ο δειγματοχώρος;

Λύση

Κατά τη ρίψη του ζαριού τα δυνατά αποτελέσματα είναι μόνο έξι, ανάλογα με το ποια είναι η άνω πλευρά του ζαριού, όταν αυτό ακινητοποιείται. Συμβολίζοντας με 1 το απλό ενδεχόμενο να έρθει (ή να εμφανιστεί) η πλευρά 1, με 2 το να έρθει η πλευρά 2 κ.λπ. έχουμε

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}. \qquad (1.2)$$

Θα μπορούσαμε ισοδύναμα να χρησιμοποιήσουμε και το συμβολισμό

Ω = { ⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅ }, (1.3)

Θεωρούμε όμως το συμβολισμό (1.2) πιο βολικό. ▲

Παράδειγμα 1.2. Ρίχνουμε δύο νομίσματα. Ποιος είναι ο δειγματοχώρος;

Λύση

Συμβολίζουμε με Κ την περίπτωση να εμφανιστεί "κεφαλή" στη ρίψη ενός νομίσματος και με Γ την περίπτωση να εμφανιστεί "γράμματα". Ρίχνοντας δύο νομίσματα θα έχουμε τέσσερις περιπτώσεις ανάλογα με το τι εμφανίστηκε σε καθένα από αυτά. Αν συμφωνήσουμε να γράψουμε πρώτα την ένδειξη που φέρνει το ένα από αυτά και μετά την ένδειξη που φέρνει το άλλο, τότε οι τέσσερις περιπτώσεις μπορούν να συμβολίζονται ΚΚ, ΚΓ, ΓΚ, ΓΓ. Άρα ο δειγματοχώρος είναι:

$$\Omega = \{KK, K\Gamma, \Gamma K, \Gamma\Gamma\} \tag{1.4}$$

▲

Είναι σημαντικό να προσδιορίζουμε ποιος είναι ο δειγματοχώρος κάθε συγκεκριμένου πειράματος, αλλιώς κινδυνεύουμε να περιπέσουμε σε παράδοξα συμπεράσματα. Είναι γνωστό το **παράδοξο του Chevalier de Méré** (παραδ. 1.15) και τα παράδοξα που προκύπτουν σε προβλήματα γεωμετρικών πιθανοτήτων όπως το **παράδοξο του Bertrand** (παραδ. 2.28). Στα προβλήματα αυτά δεν προσδιορίζεται σωστά ο δειγματοχώρος ή υπάρχει αδυναμία ακριβούς προσδιορισμού του.

Ακόμη και μεγάλοι μαθηματικοί έκαναν τέτοια λάθη. Ο D' Alembert (1717-1783) ισχυριζόταν ότι η πιθανότητα να εμφανιστεί μία τουλάχιστον φορά κεφαλή σε 2 ρίψεις ενός νομίσματος ήταν $\frac{2}{3}$ αντί του ορθού $\frac{3}{4}$. Θεωρούσε ως δειγματοχώρο το σύνολο $\Omega = \{0, 1, 2\}$, με ισοπίθανα ενδεχόμενα, όπου ο αριθμός συμβολίζει το πλήθος των κεφαλών στις δύο ρίψεις.

Η μορφή του δειγματοχώρου καθορίζεται και από τον τρόπο καταγραφής των απλών ενδεχομένων, από τον τρόπο δηλ. που ο πειραματιστής αντιλαμβάνεται και καταγράφει το αποτέλεσμα του πειράματος.

Παράδειγμα 1.3. Περιμένοντας κάποιος να πάρει ταξί μετράει πόσα ταξί περνούν χωρίς να σταματήσουν, έως ότου σταματήσει κάποιο και τον εξυπηρετήσει. Ποιος είναι ο δειγματοχώρος;

Λύση

Ας θεωρήσουε ως επιτυχία (E) αν το ταξί, σταματήσει και ως αποτυχία (A) αν δεν σταματήσει.

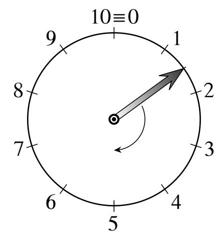
Ας υποθέσουμε ότι μέχρι να εξυπηρετηθεί ο ενδιαφερόμενος περνούν k ταξί $(k \in \mathbb{N})$, χωρίς να σταματήσουν. Το απλό ενδεχόμενο συμβολίζεται στην περίπτωση αυτή με $\underbrace{AA\ldots A}_{k \text{ φορές}}E$ ενώ αν εξυπηρετηθεί από το πρώτο ταξί τότε το απλό ενδεχόμενο είναι E. Ώστε ο δειγματοχώρος του πειράματος θα είναι:

$$\Omega = \{E, AE, AAE, \ldots \underbrace{AA\ldots A}_{n \text{ φορές}}E, \ldots\} \tag{1.5}$$

▲

Ο δειγματοχώρος (1.5) είναι άπειρος και μάλιστα αριθμήσιμος. Δειγματοχώροι που είναι είτε πεπερασμένοι είτε αριθμήσιμοι, λέγονται **απαριθμητοί** ή **διακριτοί** (discrete sample spaces).

Παράδειγμα 1.4. Ομογενής κυκλικός δίσκος, αριθμημένος από το 0 έως το 10, στρέφεται γύρω από άξονα διερχόμενο από το κέντρο του. Όταν σταματά ένας ακίνητος δείκτης δείχνει κάποιο σημείο της περιφέρειάς του. Ποιος είναι ο δειγματοχώρος;



Σχήμα 1.1.

Λύση

Ο δείκτης μπορεί να δείξει οποιοδήποτε σημείο του δίσκου, το οποίο αντιστοιχεί σε κάποιο πραγματικό αριθμό του διαστήματος $[0, 10)$. Άρα ο δειγματοχώρος είναι

$$\Omega = [0, 10) = \{\omega\colon 0 \le \omega < 10\}. \tag{1.6}$$

▲

Ο δειγματοχώρος (1.6) είναι άπειρος, αλλά μη αριθμήσιμος. Είναι ένας συνεχής δειγματοχώρος (continuous sample space).

Μετά τον καθορισμό του δειγματοχώρου σε ένα πείραμα τύχης, κάθε γεγονός που σχετίζεται με το πείραμα αυτό μπορεί να παρασταθεί ως υποσύνολο του δειγματοχώρου. Για κάθε γεγονός A ισχύει δηλ.

$$A \subseteq \Omega\,. \tag{1.7}$$

Π.χ. αν στη ρίψη δύο νομισμάτων (παράδ. 1.2) ορίσουμε ως A το γεγονός να εμφανιστεί μία τουλάχιστον κεφαλή και B το γεγονός τα δύο νομίσματα να εμφανίσουν διαφορετικές πλευρές, τότε θα έχουμε:

$$A = \{ΚΚ, ΚΓ, ΓΚ\}, \tag{1.8}$$

και

$$B = \{ΚΓ, ΓΚ\}. \tag{1.9}$$

Όμοια αν στην καταμέτρηση των ταξί που περνούν (παράδ. 1.3) ορίσουμε ως γεγονός Δ ότι θα σταματήσει το δεύτερο ή το τρίτο ταξί, θα έχουμε:

$$\Delta = \{ΑΕ, ΑΑΕ\}. \tag{1.10}$$

Ο συμβολισμός των γεγονότων με σύνολα διευκολύνει και την ορολογία, αλλά και τις πράξεις μεταξύ των γεγονότων, όπως θα δούμε στην επόμενη παράγραφο. Πράγματι μεταφέροντας κατάλληλα ιδιότητες και ορολογία των συνόλων στα γεγονότα, προκύπτουν ιδιότητες και ορολογία στα γεγονότα. Π.χ. αν κατά την εκτέλεση ενός πειράματος τύχης πραγματοποιηθεί ή συμβεί το απλό ενδεχόμενο ω, τότε **πραγματοποιείται** ή **συμβαίνει** κάθε γεγονός A για το οποίο $\omega \in A$, ενώ **δεν πραγματοποιείται** ή **δεν συμβαίνει** κάθε γεγονός A για το οποίο $\omega \notin A$.

Για παράδειγμα αν ρίχνοντας δύο νομίσματα έρθουν 2 κεφαλές τότε πραγματοποιείται το γεγονός A που ορίζεται με τη σχέση (1.8), ενώ δεν πραγματοποιείται το γεγονός B που ορίζεται με την (1.9). Επίσης αν σταματήσει το πρώτο ταξί που περνά, στο παράδ. 1.3 τότε το γεγονός Δ που ορίζεται με την (1.10), δεν πραγματοποιείται.

Ο ίδιος ο δειγματοχώρος Ω θεωρείται ότι είναι γεγονός, το οποίο μάλιστα πραγματοποιείται πάντοτε αφού όποιο και αν είναι το αποτέλεσμα του πειράματος θα ανήκει στο Ω. Το γεγονός Ω λέγεται **βέβαιο γεγονός**. Αν για παράδειγμα το γεγονός A ορίζεται ως:

$$A = \{ \text{η πλευρά } x \text{ που εμφανίζεται κατά τη ρίψη ενός ζαριού, ικανοποιεί την ανισότητα } 7x - x^2 > 0 \}$$

τότε $A=\Omega$, διότι είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι η ανισότητα $7x-x^2 > 0$, ικανοποιείται για όλα τα $x = 1, 2, \ldots, 6$.

Ένα γεγονός το οποίο δεν πραγματοποιείται ποτέ, λέγεται **αδύνατο γεγονός** και συμβολίζεται, όπως και στη θεωρία συνόλων, με $\varnothing$. Για παράδειγμα το γεγονός

$$A = \{ \text{οι πλευρές τριών ζαριών που ρίχνονται ταυτόχρονα είναι διαδοχικοί αριθμοί, με άθροισμα } 10 \},$$

είναι αδύνατο, δηλ. $A=\varnothing$, διότι εύκολα μπορεί να δειχθεί ότι τρεις διαδοχικοί αριθμοί έχουν άθροισμα πολλαπλάσιο του 3.

Τα παραδείγματα που ακολουθούν διασαφηνίζουν ακόμη περισσότερο την έννοια του γεγονότος ως υποσυνόλου του Ω.

Παράδειγμα 1.5. Δύο παίκτες A και B παίζουν με ένα ζάρι. Ο παίκτης A κερδίζει αν φέρει περιττό αριθμό ενώ ο B αν φέρει πολλαπλάσιο του 3. Να εκφραστούν τα A και B ως υποσύνολα του αντίστοιχου δειγματοχώρου.

Λύση

Ο δειγματοχώρος στη ρίψη ενός ζαριού είναι (παράδ. 1.1)

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Αν με A συμβολίσουμε το γεγονός να κερδίσει ο παίκτης A το παιχνίδι, τότε το A πραγματοποιείται όταν το ζάρι έρθει 1, 3 ή 5. Άρα:

$$A = \{1, 3, 5\}.$$

Όμοια αν B το γεγονός να κερδίσει ο B, τότε

$$B = \{3, 6\}.$$ ▲

Παράδειγμα 1.6. Περιμένοντας κάποιος για ταξί θεωρεί τον εαυτό του τυχερό, αν εξυπηρετηθεί το πολύ με το πέμπτο ταξί που περνά. Αν T το γεγονός να είναι τυχερός, να περιγραφεί το Τ.

Λύση

Χρησιμοποιώντας τους ίδιους συμβολισμούς όπως στο παράδειγμα 1.3, έχουμε:

$$T = \{E, AE, AAE, AAAE, AAAAE\}.$$

▲

Παράδειγμα 1.7. Ένας παίκτης στρέφει τον ομογενή δίσκο του παραδ. 1.4 και κερδίζει αν ο δείκτης, όταν σταματήσει ο δίσκος, δείχνει αριθμό είτε μεταξύ 2 και 3, ή μεταξύ 7 και 8. Αν K το γεγονός κέρδους του παίκτη να εκφραστεί το K με μορφή συνόλου.

Λύση

Ο δειγματοχώρος στο πείραμα τύχης της περιστροφής του ομογενούς δίσκου είναι $\Omega=[0, 10)$ και για το γεγονός K, θα είναι

$$K = [2, 3] \cup [7, 8]$$

ή
$$K = \{\omega: 2 \le \omega \le 3 \quad ή \quad 7 \le \omega \le 8\}.$$

▲

Παράδειγμα 1.8. Ρίχνουμε δύο κανονικά ζάρια και έστω τα γεγονότα:

$A = \{$εμφανίζεται ακριβώς ένα εξάρι$\}$,

$B = \{$το άθροισμα των ενδείξεων των ζαριών είναι $10\}$,

$\Gamma = \{$το ένα ζάρι φέρνει τουλάχιστο 5, ενώ το άλλο φέρνει άρτιο$\}$.

Να βρεθεί ο δειγματοχώρος και να εκφραστούν τα A, B, Γ ως υποσύνολά του.

Λύση

Συμβολίζοντας το απλό ενδεχόμενο της ρίψης των δύο ζαριών με ένα διατεταγμένο ζεύγος (α, β), όπου α η ένδειξη του πρώτου ζαριού και β του δεύτερου, έχουμε ότι ο δειγματοχώρος είναι:

$$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (1, 6), (2, 1), \dots, (2, 6), (3, 1), \dots, (6, 6)\},$$

ή
$$\Omega = \{(\alpha, \beta): \alpha,\beta = 1, 2, 3, 4, 5 \text{ ή } 6\}.$$

Άρα θα είναι:

$$A = \{(1, 6), (2, 6), \dots, (5, 6), (6, 1), (6, 2), \dots, (6, 5)\},$$

$$B = \{(6, 4), (5, 5), (4, 6)\},$$

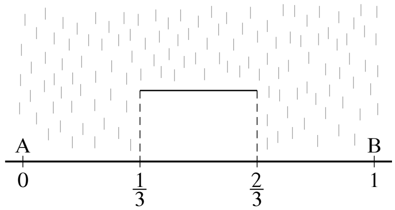
$$\Gamma = \{ (5, 2), (6, 2), (5, 4), (6, 4), (5, 6), (6, 6), (2, 5), (2, 6), (4, 5), (4, 6), (6, 5)\}.$$

▲

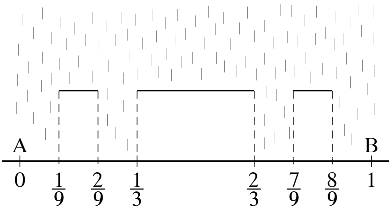
Όπως θα δούμε στα επόμενα, τα απλά ενδεχόμενα του Ω έχουν την ιδιότητα, ότι συμβαίνουν το ίδιο συχνά, είναι όπως λέμε ισοπίθανα.

Είδαμε ότι κάθε γεγονός είναι υποσύνολο του δειγματοχώρου Ω. Τίθεται, επομένως εύλογα, το ερώτημα αν συμβαίνει και το αντίστροφο. Είναι δηλαδή κάθε υποσύνολο του Ω γεγονός; Η απάντηση στη γενική περίπτωση είναι αρνητική και έχουν κατασκευαστεί υποσύνολα του [0, 1] που δεν είναι γεγονότα. Στο παράδειγμα που ακολουθεί κατασκευάζεται ένα γεγονός που είναι μη-αριθμήσιμο και έχει πιθανότητα ίση με μηδέν.

Παράδειγμα 1.9. Δίνεται το ευθύγραμμο τμήμα AB, μήκους 1, το οποίο βρέχεται από βροχή που πέφτει τελείως κατακόρυφα. Τοποθετούμε στέγαστρα στο AB με την εξής διαδικασία. Διαιρούμε πρώτα το AB σε τρία τμήματα και τοποθετούμε στέγαστρο στο μεσαίο τμήμα, δηλαδή στο $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ (σχήμα 1.2α). Υποδιαιρούμε στη συνέχεια σε τρία τμήματα καθένα από τα δύο τμήματα του σχήματος 1.2α, που συνεχίζουν να βρέχονται και τοποθετούμε από ένα στέγαστρο στο μεσαίο από αυτά, δηλαδή στα τμήματα $\left[\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ και $\left[\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$ (σχήμα 1.2β). Συνεχίζουμε με αυτή τη διαδικασία, υποδιαιρώντας κάθε φορά τα τμήματα που βρέχονται σε τρία και σκεπάζοντας με στέγαστρο το μεσαίο απ' αυτά, διαρκώς μέχρι το άπειρο.



Σχήμα 1.2α



Σχήμα 1.2β.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι επιλέγουμε τυχαία ένα σημείο του AB και ας συμβολίσουμε με C το γεγονός: "Ένα σημείο του ευθύγραμμου τμήματος AB βρέχεται". Το γεγονός αυτό είναι υποσύνολο του δειγματοχώρου, που εδώ ταυτίζεται με το διάστημα [0, 1], και είναι το γνωστό **σύνολο** του **Cantor**.

Το σύνολο του Cantor αποδεικνύεται ότι είναι μη αριθμήσιμο, συμπαγές ενώ το μήκος του είναι μηδέν. Πράγματι το συμπληρωματικό γεγονός C' έχει μήκος 1, αφού:

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{4}{27}+\ldots=\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^k=1. \qquad \blacktriangle$$

Αν στο δειγματοχώρο $[0, 1]$ ορίσουμε ως πιθανότητα ενός γεγονότος το μήκος του, τότε το σύνολο του Cantor είναι ένα μη αριθμήσιμο γεγονός με πιθανότητα μηδέν.

Παρατήρηση Αν $\alpha_\nu = 1$ η 2, τότε ισχύει η σχέση:

$$\frac{\alpha_1}{3}+\frac{\alpha_2}{3^2}+\ldots+\frac{\alpha_\nu}{3^\nu}=\frac{\alpha_1}{3}+\frac{\alpha_2}{3^2}+\ldots+\frac{\alpha_\nu-1}{3^\nu}+\frac{2}{3^{\nu+1}}+\frac{2}{3^{\nu+2}}+\ldots\frac{2}{3^{\nu+\mu}}+\ldots,$$

που σημαίνει ότι κάθε αριθμός του $[0, 1]$, που το τριαδικό του ανάπτυγμα έχει πεπερασμένου πλήθους σημαντικά (μη-μηδενικά) ψηφία, έχει επίσης ένα τριαδικό ανάπτυγμα με άπειρο πλήθος σημαντικών ψηφίων, δηλ.

$$(0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{\nu-1}\alpha_\nu)_3 = \big(0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{\nu-1}(\alpha_\nu-1)\ 222\ \ldots\big)_3.$$

Το ανάπτυγμα αυτό λέγεται **μη-τερματιζόμενο** (non-terminating).

Αποδεικνύεται ότι κάθε αριθμός του $[0, 1]$ έχει ένα μοναδικό μη-τερματιζόμενο τριαδικό ανάπτυγμα. Αποδεικνύεται επίσης ότι αν το τριαδικό μη-τερματιζόμενο ανάπτυγμα ενός αριθμού δεν περιέχει καθόλου το ψηφίο 1 τότε ο αριθμός αυτός ανήκει στο σύνολο του Cantor. Έτσι για παράδειγμα οι αριθμοί:

$$\frac{1}{3}=(0.1)_3=(0.0222\ldots)_3,\quad \frac{7}{9}=\frac{2}{3}+\frac{1}{9}=(0.21)_3=(0.2022\ldots)_3$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{2}{3^{\nu(\nu+1)/2}}=(0.202002000200002\ldots)_3,\quad 1=\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\frac{2}{27}+\ldots=(0.222\ldots)_3,$$

ανήκουν στο σύνολο C. Επίσης οι αριθμοί:

$$\frac{2}{3}\ (0.2)_3=(0.1222\ldots)_3,\quad \frac{8}{9}=\frac{2}{3}+\frac{2}{9}=(0.22)_3=(0.21222\ldots)_3,$$

αλλά και οι αριθμοί:

$$\frac{16}{27}=\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{1}{27}=(0.121)_3=(0.120222\ldots)_3,$$

$$\frac{15}{18}=\frac{2}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots+\frac{1}{3^n}+\ldots=(0.2111\ldots)_3,$$

δεν ανήκουν στο C διότι για παράδειγμα $\frac{16}{27}\in\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ και $\frac{15}{18}\in\left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right)$ αντίστοιχα.

1.4. Πράξεις με γεγονότα

Η χρήση των συνόλων για την περιγραφή των γεγονότων μας επιτρέπει να εκφράσουμε και τις πράξεις μεταξύ των γεγονότων με τις γνωστές πράξεις μεταξύ των συνόλων. Στις περισσότερες από τις πράξεις ακόμη και οι συμβολισμοί παραμένουν οι ίδιοι. Έχουμε:

α. **Ισότητα**. Δύο γεγονότα A και B, που όταν συμβαίνει το A συμβαίνει πάντοτε και το B και επίσης, όταν συμβαίνει το B συμβαίνει πάντοτε και το A, λέγονται **ίσα** (equal events) $A=B$.

β. **Συμπλήρωμα**. Το γεγονός που συμβαίνει ακριβώς τότε, όταν δεν συμβεί το A, λέγεται **συμπλήρωμα** (complement) του A και το συμβολίζουμε με A' (ή A^c ή $\overline{A}$). Από τον ορισμό αυτόν προκύπτει ότι, αν το απλό ενδεχόμενο ω ανήκει στο A, τότε δεν θα ανήκει στο A' και αντίστροφα, αν το ω ανήκει στο A', τότε δεν θα ανήκει στο A. Αυτό σημαίνει ότι τα A και A', ως υποσύνολα του δειγματοχώρου, είναι συμπληρωματικά σύνολα
Είναι φανερό ότι $(A')'=A$.

δ. **Τομή**. Το γεγονός που συμβαίνει όταν συμβούν ταυτόχρονα τα γεγονότα A και B, λέγεται **τομή** (intersection) των γεγονότων A και B και συμβολίζεται AB. Αν κάτι τέτοιο είναι αδύνατο να συμβεί, τότε λέμε ότι τα A και B είναι **ασυμβίβαστα** ή **ξένα** (mutually exclusive) και συμβολίζουμε $AB=\varnothing$. Η πράξη της τομής γενικεύεται και για πεπερασμένου ή άπειρου πλήθους γεγονότα. Έτσι, το γεγονός, που συμβαίνει όταν συμβαίνουν ταυτόχρονα τα γεγονότα $A_1, A_2, \ldots A_n$ είναι η τομή των n γεγονότων που συμβολίζεται

$$A_1A_2 \ldots A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i.$$

γ. **Ένωση**. Το γεγονός που συμβαίνει, όταν συμβεί ένα τουλάχιστον από τα γεγονότα A και B, λέγεται **ένωση** (union) των γεγονότων A και B και συμβολίζεται με $A\cup B$. Η πράξη αυτή της ένωσης γενικεύεται και για πεπερασμένου πλήθους γεγονότα. Έτσι, το γεγονός, που συμβαίνει όταν τουλάχιστον ένα από τα γεγονότα $A_1, A_2, \ldots, A_n$ συμβαίνει, είναι η ένωση των n γεγονότων που συμβολίζεται

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i.$$

Αν τα γεγονότα $A_1, A_2, A_3, \ldots$ είναι ασυμβίβαστα μεταξύ τους ανά δύο και η ένωσή τους είναι όλος ο δειγματοχώρος, αν δηλαδή ισχύει

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \ldots = \Omega, \quad A_iA_j = \varnothing \quad \text{για κάθε } i \neq j,$$

τότε λέμε ότι τα γεγονότα αυτά αποτελούν μία **διαμέριση** (partition) του δειγματοχώρου.

ε. **Διαφορά**. Το γεγονός που συμβαίνει ακριβώς τότε όταν συμβεί το A αλλά δεν συμβεί το B, λέγεται **διαφορά του γεγονότος B από το A** και συμβολίζουμε $A–B$. Είναι εύκολο να δειχθεί ότι

$$A - B = AB'$$

στ. **Συμμετρική διαφορά**. Το γεγονός που συμβαίνει ακριβώς τότε όταν συμβεί ακριβώς ένα από τα A και B, λέγεται **συμμετρική διαφορά** των γεγονότων A και B, και συμβολίζεται $A \dotplus B$ (ή $A \triangle B$). Ισχύουν

$$A \dotplus B = (A - B) \cup (B - A),$$

$$A \dotplus B = AB' \cup A'B.$$

Για ακολουθίες γεγονότων $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ ορίζουμε επίσης:

ζ. **Ανώτερο όριο**. Το γεγονός που συμβαίνει όταν συμβούν άπειρα από τα γεγονότα A_n της ακολουθίας $\{A_n\}$ λέγεται **ανώτερο όριο** της ακολουθίας και συμβολίζεται με $\limsup A_n$ ή με $\overline{\lim} A_n$. Αποδεικνύεται ότι

$$\limsup A_n = \overline{\lim} A_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

η. **Κατώτερο όριο**. Το γεγονός που συμβαίνει όταν συμβούν, όλα, εκτός ίσως πεπερασμένου πλήθους γεγονότα A_n της ακολουθίας $\{A_n\}$, λέγεται **κατώτερο όριο** της ακολουθίας και συμβολίζεται με $\liminf A_n$ ή με $\underline{\lim} A_n$. Αποδεικνύεται ότι

$$\liminf An = \underline{\lim} A_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Αποδεικνύεται επίσης ότι:

$$\underline{\lim} A_n \subset \overline{\lim} A_n.$$

Μάλιστα αν συμβεί $A = \underline{\lim} A_n = \overline{\lim} A_n$, τότε λέμε ότι η ακολουθία $\{A_n\}$ έχει όριο το γεγονός A και συμβολίζουμε $\lim A_n = A$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.1. Ισχύουν οι ιδιότητες:

$A\cup A = A$	$A\cdot A = A$	(ταυτοδυναμίας)
$A\cup\Omega = \Omega$	$A\cdot\Omega = A$	(ταυτοτικές)
$A\cup\varnothing = A$	$A\cdot\varnothing = \varnothing$	»
$A\cup A' = \Omega$	$A\cdot A' = \varnothing$	(συμπληρώματος)
$A\cup B = B\cup A$	$A\cdot B = B\cdot A$	(αντιμεταθετικές)
$A\cup(B\cup\Gamma) = (A\cup B)\cup\Gamma$	$A\cdot(B\cdot\Gamma) = (A\cdot B)\cdot\Gamma$	(προσεταιριστικές)
$A\cdot(B\cup\Gamma) = AB \cup A\Gamma$	$A\cup(B\cdot\Gamma) = (A\cup B)\cdot(A\cup\Gamma)$	(επιμεριστική)
$(A\cup B)' = A'B'$	$(AB)' = A'\cup B'$	(de Morgan)
$(\bigcup_i A_i)' = \bigcap_i A_i'$	$(\bigcap_i A_i)' = \bigcup_i A_i'$	»

Απόδειξη

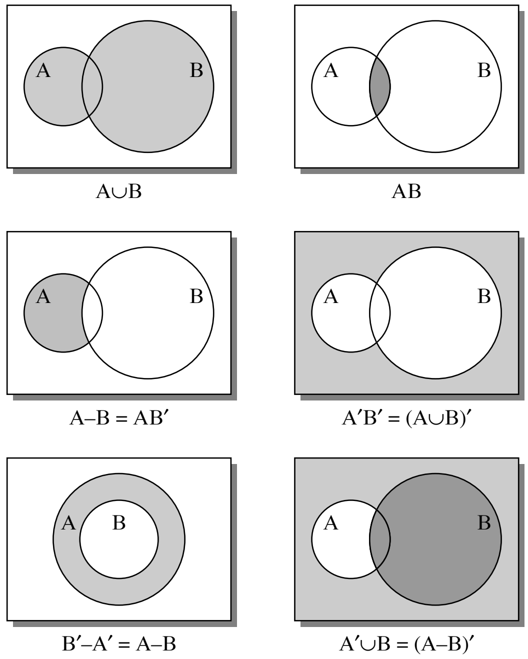
Η απόδειξη των ιδιοτήτων αυτών, σχεδόν είναι συνέπεια των ορισμών των πράξεων. Θα δείξουμε την τελευταία από αυτές, που έχει κάποια μεγαλύτερη δυσκολία.

Έστω ω απλό ενδεχόμενο που ανήκει στο γεγονός $(\bigcup_i A_i)'$. Από τον ορισμό του συμπληρωματικού, το ω δεν ανήκει στην ένωση $\bigcup_i A_i$ και επομένως δεν ανήκει σε κανένα από τα A_i, για όλα τα i (διότι αν ανήκε σε κάποιο A_i θα ανήκε και στην ένωση). Άρα το ω ανήκει στο A_i' για όλα τα i, πράγμα που σημαίνει ότι ανήκει στην τομή $\bigcap_i A_i'$. Δείξαμε επομένως ότι κάθε φορά που πραγματοποιείται το γεγονός $(\bigcup_i A_i)'$ πραγματοποιείται και το γεγονός $\bigcap_i A_i'$. Αντιστέφοντας τη φορά των συλλογισμών διαπιστώνουμε ότι ισχύει και το αντίστροφο και άρα τελικά:

$$(\bigcup_i A_i)' = \bigcap_i A_i'.$$

■

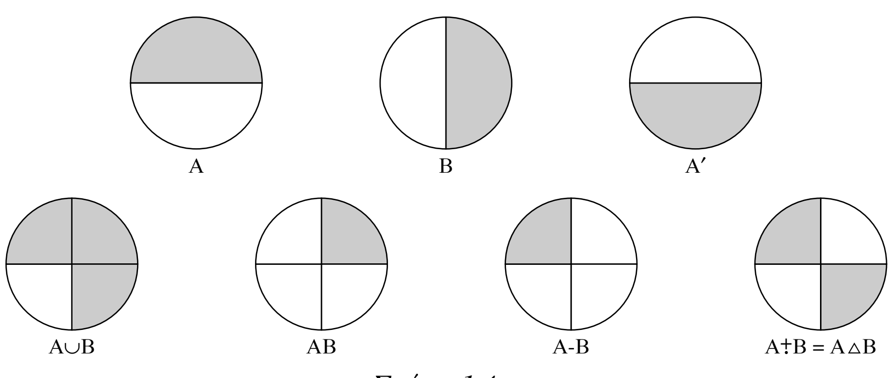
Για την κατανόηση των πράξεων και των ιδιοτήτων των γεγονότων, αλλά και για την αποκάλυψη με εποπτικό τρόπο σχέσεων μεταξύ γεγονότων, χρήσιμα είναι τα **Βέννια διαγράμματα** ή **διαγράμματα των Venn**. Στο σχήμα 1.3 δίνονται μερικά διαγράμματα του Venn, στα οποία τα A και B συμβολίζουν γεγονότα. Κάτω από κάθε διάγραμμα σημειώνεται ποιο γεγονός συμβολίζει το γραμμοσκιασμένο χωρίο.



Σχήμα 1.3.

Παράδειγμα 1.10. Σκοπευτής βάλλει εναντίον κυκλικού στόχου. Έστω A το γεγονός να πετύχει το στόχο σε σημείο του άνω ημικυκλίου και B το γεγονός να τον πετύχει σε σημείο του δεξιού ημικυκλίου. Να περιγραφούν με διαγράμματα τα γεγονότα A, B καθώς και αυτά που προκύπτουν με πράξεις μεταξύ των A και B.

Λύση Έχουμε:



Σχήμα 1.4.

▲

1.5. Πολυώνυμα γεγονότων

Έστω $A_1, A_2, \ldots, A_n$, γεγονότα ενός δειγματοχώρου Ω. Κάθε άλλο γεγονός που εκφράζεται με τη βοήθεια των γεγονότων αυτών και των πράξεων της ένωσης, τομής ή συμπληρώματος λέγεται **πολυώνυμο** των **γεγονότων** $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2} \ldots \mathbf{A_n}$. Για παράδειγμα τα γεγονότα

$$A \cup B\Gamma, \quad (A'B \cup A'B'\Gamma)' \cup B, \quad B' \cup A'(B \cup \Gamma)$$

είναι πολυώνυμα των γεγονότων A, B, Γ. Επειδή

$$A - B = AB', \quad A \dotplus B = AB' \cup A'B,$$

έπεται ότι η διαφορά και η συμμετρική διαφορά των A, B είναι πολυώνυμα των A, B και επομένως και οι πράξεις αυτές ορίζουν πολυώνυμα γεγονότων.

Ένα πολυώνυμο των γεγονότων $A_1, A_2, \ldots, A_n$ που εκφράζεται με τη μορφή

$$A_1^{\varepsilon_1} A_2^{\varepsilon_2} \ldots A_n^{\varepsilon_n}, \quad \varepsilon_i = 0 \text{ ή } 1, \quad A_j^{\varepsilon_j} = \begin{cases} A_j, & \text{αν } \varepsilon_j = 1 \\ A_j', & \text{αν } \varepsilon_j = 0 \end{cases} \tag{1.11}$$

λέγεται **βασικό πολυώνυμο** των γεγονότων $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Είναι προφανές ότι υπάρχουν 2^n βασικά πολυώνυμα n γεγονότων. Π.χ. για δύο γεγονότα A και B, τα βασικά πολυώνυμα είναι:

$$A'B', A'B, AB', AB,$$

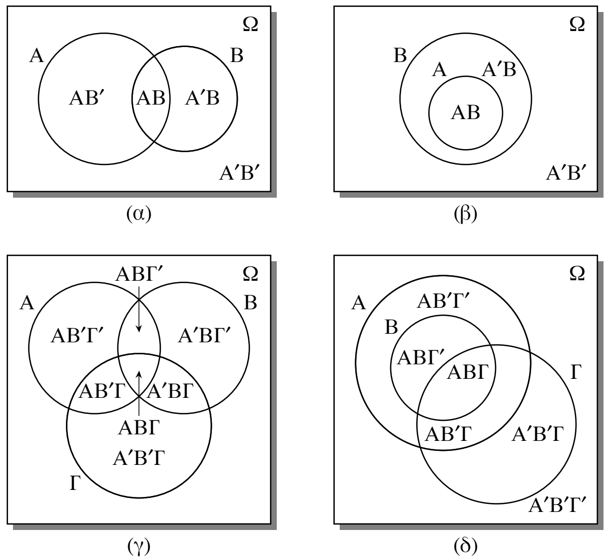
ενώ για τρία γεγονότα A, B και Γ, είναι:

$$A'B'\Gamma', A'B'\Gamma, A'B\Gamma', A'B\Gamma, AB'\Gamma', AB'\Gamma, AB\Gamma', AB\Gamma.$$

Τα βασικά πολυώνυμα αποτελούν μια διαμέριση του Ω, διότι είναι ξένα μεταξύ τους και χωρίζουν το δειγματοχώρο σε 2^n γεγονότα, από τα οποία μερικά μπορεί να είναι αδύνατα (κενά).

Στα σχήματα 1.5α και γ όλα τα 2^n βασικά πολυώνυμα είναι εν γένει μη κενά. Στο σχήμα 1.5β, όπου το γεγονός A είναι υποσύνολο του B, το βασικό πολυώνυμο AB' δεν εμφανίζεται διότι προφανώς ισούται με το κενό. Επίσης στο σχήμα 1.5δ, όπου $B \subset A$, τα βασικά γεγονότα $A'B\Gamma = \varnothing$ και $A'B\Gamma' = \varnothing$ και γι' αυτό δεν εμφανίζονται.

Κάθε πολυώνυμο των γεγονότων $A_1, A_2, \ldots, A_n$ περιέχει πράξεις μεταξύ των A_i ή/και A_i' για $i = 1, 2, \ldots, n$ και ισχύει το θεώρημα:



Σχήμα 1.5.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.2. Κάθε πολυώνυμο των γεγονότων $A_1, A_2, \ldots, A_n$ εκφράζεται με μοναδικό τρόπο ως ένωση των βασικών πολυωνύμων των $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ■

Παράδειγμα 1.11. Να εκφραστούν με τη βοήθεια των βασικών πολυωνύμων των A, B, και Γ, τα γεγονότα

$$A, \quad (A\cup B)', \quad (A\cup B\Gamma)'-A'\Gamma$$

Λύση

Ισχύει $\Omega = B'\Gamma' \cup B'\Gamma \cup B\Gamma' \cup B\Gamma$

οπότε $A = A\,\Omega = A(B'\Gamma' \cup B'\Gamma \cup B\Gamma' \cup B\Gamma) =$

$= AB'\Gamma' \cup AB'\Gamma \cup AB\Gamma' \cup AB\Gamma.$

Όμοια

$(A\cup B)' = A'B' = A'B'\Omega = A'B'(\Gamma'\cup\Gamma) =$

$= A'B'\Gamma'\cup A'B'\Gamma.$

Τέλος

$(A\cup B\Gamma)'-A'\Gamma = (A\cup B\Gamma)'\,(A'\Gamma)' =$

$= A'(B\Gamma)'\,(A'\Gamma)' =$

$$= A'(B'\cup\Gamma')\,(A\cup\Gamma') = A'(A\cup\Gamma')\,(B'\cup\Gamma') =$$
$$= (A'A\cup A'\Gamma')\,(B'\cup\Gamma') = A'\Gamma'(B'\cup\Gamma') =$$
$$= A'B'\Gamma'\cup A'\Gamma' =$$
$$= A'B'\Gamma'\cup A'\Gamma'(B'\cup B) =$$
$$= A'B'\Gamma' \cup A'B'\Gamma' \cup A'B\Gamma' =$$
$$= A'B'\Gamma'\cup A'B\Gamma'. \qquad \blacktriangle$$

Παράδειγμα 1.12. Να δειχθεί ότι $A-\{A-[B-(B-\Gamma)]\} = AB\Gamma$.

Λύση

Έχουμε διαδοχικά:

$$A-\{A-[B-B\Gamma']\} =$$
$$= A-\{A-B(B\Gamma')'\} =$$
$$= A-\{A[B(B\Gamma')']'\} =$$
$$= A\{A[B(B\Gamma')']'\}' =$$
$$= A\{A'\cup[B(B\Gamma')']\} =$$
$$= AA'\cup A[B(B'\cup\Gamma)] =$$
$$= \varnothing \cup ABB' \cup AB\Gamma =$$
$$= AB\Gamma. \qquad \blacktriangle$$

1.6. Κλασική πιθανότητα

Πολλά πειράματα τύχης, ιδιαίτερα δε αυτά που αφορούν τυχερά παιχνίδια, έχουν, λόγω συμμετρίας και ομοιογένειας των υλικών που χρησιμοποιούνται, την ιδιότητα όλα τα απλά ενδεχόμενα κατά την εκτέλεσή τους να έχουν τις ίδιες ευκαιρίες να εμφανιστούν. Είναι δηλαδή σύμφωνο με την κοινή λογική ότι στα πειράματα αυτά κανένα από τα απλά ενδεχόμενα δεν έχει πλεονέκτημα έναντι των άλλων. Τέτοια πειράματα τύχης είναι π.χ. τα:

α. Η ρίψη ενός (ή περισσότερων) κανονικού ζαριού ή νομίσματος.
β. Η επιλογή ενός (ή περισσότερων) χαρτιού από μία καλά ανακατεμένη τράπουλα.
γ. Η περιστροφή μιας ομογενούς ρουλέττας.
δ. Η παρατήρηση του φύλου των παιδιών μιας οικογένειας.
ε. Η παρατήρηση της ημέρας της εβδομάδας ή της ημερομηνίας στην οποία έχει ένα άτομο, διαλεγμένο στην τύχη, γενέθλια.

Η παρατήρηση αυτής της ιδιότητας οδήγησε τον De Moivre (1711) στον ορισμό της κλασικής πιθανότητας.

Σε πειράματα όπου το πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων ή απλών γεγονότων (outcomes) είναι πεπερασμένο και όλα τα δυνατά αποτελέσματα είναι ισοπίθανα, τότε η **πιθανότητα** (probability) πραγματοποίησης ενός γεγονότος ισούται με το πηλίκο του πλήθους των ευνοϊκών για την πραγματοποίηση του γεγονότος αποτελεσμάτων, προς το πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων.

Τόσο το πλήθος των ευνοϊκών αποτελεσμάτων του πειράματος για το γεγονός που μας ενδιαφέρει, όσο και το πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων υπολογίζονται πριν την εκτέλεση του πειράματος.

Ώστε αν Ω είναι ο δειγματοχώρος του πειράματος που αποτελείται από N ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα και αν το γεγονός A περιέχει N_A από αυτά, τότε η πιθανότητα $P(A)$ θα ισούται με:

$$P(A) = \frac{N_A}{N} = \frac{\text{πλήθος ευνοϊκών για το A αποτελεσμάτων}}{\text{πλήθος δυνατών αποτελεσμάτων}}. \tag{1.12}$$

Η συνθήκη του ισοπίθανου των δυνατών αποτελεσμάτων είναι σημαντική στον κλασικό ορισμό της πιθανότητας και συνάμα δίνει το μέτρο της αδυναμίας αυτού του ορισμού. Πράγματι σε πολλές περιπτώσεις είναι δύσκολο να αποφανθούμε αν υπάρχει συμμετρία που να εξασφαλίζει το ισοπίθανο. Εξάλλου και στις απλές περιπτώσεις, όπως αυτή της ρίψης ενός ζαριού, το ισοπίθανο απαιτεί από το ζάρι μία κατασκευή με τελείως επίπεδες έδρες και με ομοιόμορφη κατανομή του βάρους του ζαριού.

Στην πράξη, όπου πολύ μικρές διαφορές, θεωρούνται αμελητέες, το ισοπίθανο εξασφαλίζεται με την επίκληση της **αρχής του μη επαρκούς λόγου** (principle of insufficient reason). Κατά την αρχή αυτή, τα απλά ενδεχόμενα κατά την εκτέλεση ενός πειράματος τύχης είναι **ισοπίθανα** (equally likely), εκτός αν υπάρχουν λόγοι περί του αντιθέτου. Παλαιότερα η υπόθεση του ισοπίθανου για τα διαφορετικά αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης ήταν περισσότερο συχνή απ' ότι είναι σήμερα και διατυπωνόταν συνήθως άκριτα και χωρίς κανένα έλεγχο. Σήμερα οι πειραματιστές ελέγχουν τα πειράματά τους με την εκτέλεση σειράς πραγματικών (πιλοτικά) ή ιδεατών (με προσομοίωση) πειραμάτων, που αποκαλύπτουν αν υπάρχει ή όχι **επαρκής λόγος** να μην θεωρούνται ισοπίθανα τα απλά ενδεχόμενα.

Εξάλλου η παραδοχή του ισοπίθανου στις πιθανότητες είναι αντίστοιχη με την παραδοχή της ύπαρξης σημείου και ευθείας στη Γεωμετρία.

Η συστηματοποίηση του λογισμού των πιθανοτήτων με βάση τον κλασικό ορισμό οφείλεται στον Laplace (1812). Οι βασικές ιδιότητες των πιθανοτήτων, οι οποίες στη συνέχεια οδήγησαν στην αξιωματική τους θεμελίωση είναι οι εξής:

Έστω Ω ένας δειγματοχώρος που αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα και $P(A)$ η πιθανότητα που ορίζεται στα γεγονότα A, που είναι υποσύνολα του Ω, με τη σχέση (1.12). Η συνολοσυνάρτηση $P(\cdot)$ έχει τις ιδιότητες:

(P1): $P(A) \geq 0$ για κάθε γεγονός A

(P2): $P(\Omega) = 1$

(P3): $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, για οποιαδήποτε ασυμβίβαστα μεταξύ τους γεγονότα A και B.

Οι ιδιότητες (P1) και (P2) προκύπτουν άμεσα από τον ορισμό. Για την ιδιότητα (P3), που είναι γνωστή ως **απλά προσθετική ιδιότητα** (simply additive law), αρκεί να παρατηρήσουμε ότι αν υπάρχουν $N(A) = \kappa$ ευνοϊκοί τρόποι για την πραγματοποίηση του γεγονότος A και $N(B) = \lambda$ τρόποι για την πραγματοποίηση του B τότε οι $\kappa+\lambda$ τρόποι είναι μεταξύ τους διαφορετικοί, διότι αλλιώς τα A και B δεν θα ήταν ασυμβίβαστα. Θα υπάρχουν επομένως $N(A \cup B) = \kappa + \lambda = N(A) + N(B)$ τρόποι για την πραγματοποίηση της ένωσης $A \cup B$, πράγμα που αποδεικνύει την (P3).

Με απλή επαγωγή η (P3) επεκτείνεται και για οποιοδήποτε πεπερασμένο πλήθος ασυμβίβαστων ανά δύο γεγονότων. Ισχύει δηλ.

(P3)′: $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$,

όπου $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ασυμβίβαστα μεταξύ τους ανά δύο

δηλ. $A_i A_j = \varnothing$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Παράδειγμα 1.13. Ρίχνουμε δύο κανονικά ζάρια. Να βρεθούν οι πιθανότητες των γεγονότων A, B και Γ, όπου:

$A = \{$εμφανίζεται ακριβώς ένα εξάρι$\}$

$B = \{$το άθροισμα των ενδείξεων των ζαριών είναι $10\}$

$\Gamma = \{$το ένα ζάρι φέρνει τουλάχιστον 5, ενώ το άλλο φέρνει άρτιο$\}$.

Λύση

Ο δειγματοχώρος του πειράματος της ρίψης δύο κανονικών ζαριών είναι το σύνολο

$$\Omega = \{(\alpha, \beta) : \alpha, \beta \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$$

$$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), \ldots, (1, 6), (2, 1), \ldots, (2, 6), (3, 1), \ldots, (6, 6)\}.$$

Τα 36 ενδεχόμενα του Ω, λόγω του ότι τα δύο ζάρια είναι κανονικά, μπορούν σύμφωνα με την αρχή του μη επαρκούς λόγου να θεωρηθούν ως ισοπίθανα, οπότε για την εύρεση της πιθανότητας των γεγονότων A, B και

Γ αρκεί να βρεθούν τα πλήθη των απλών ενδεχομένων που πραγματοποιούν καθένα από αυτά.

Στο παράδειγμα (1.8) βρέθηκε ότι:

A = $\{(1, 6), (2, 6), \ldots, (5, 6), (6, 1), (6, 2), \ldots, (6, 5)\}$,

B = $\{(6, 4), (5, 5), (4, 6)\}$,

Γ = $\{(5, 2), (6, 2), (5, 4), (6, 4), (5, 6), (6, 6), (2, 5), (2, 6), (4, 5), (4, 6), (6, 5)\}$.

Επομένως θα είναι:

$$P(A) = \frac{N_A}{N} = \frac{10}{36} = 0.278,$$

$$P(B) = \frac{N_B}{N} = \frac{3}{36} = 0.083,$$

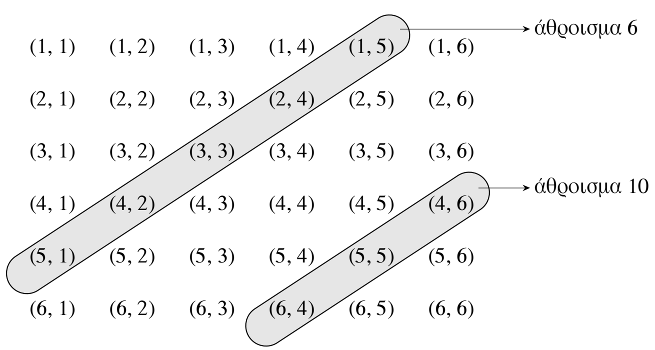
$$P(\Gamma) = \frac{N_\Gamma}{N} = \frac{11}{36} = 0.305. \qquad \blacktriangle$$

Παράδειγμα 1.14. Ρίχνουμε δύο κανονικά ζάρια και καταγράφουμε το άθροισμα των ενδείξεων. Να βρεθεί η πιθανότητα κάθε δυνατού αθροίσματος. Να γίνει το ίδιο για την απόλυτη διαφορά των ενδείξεων.

Λύση

Σύμφωνα με το προηγούμενο παράδειγμα ο δειγματοχώρος θα έχει ως απλά ενδεχόμενα 36 διατεταγμένα ζεύγη (α, β) με α, β$\in \{1, 2, \ldots, 6\}$.

Γράφουμε τα 36 αυτά ζεύγη σε ένα ορθογώνιο σχηματισμό όπως στο σχήμα (1.6).



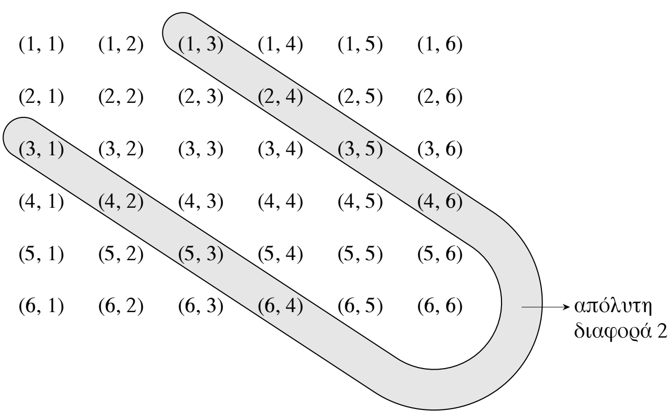
Σχήμα 1.6.

Παρατηρούμε τώρα ότι διατεταγμένα ζεύγη τοποθετημένα στην ίδια διαγώνιο, παράλληλα με αυτές που σημειώθηκαν στο σχήμα (1.6) έχουν σταθερό και μοναδικό άθροισμα. Εφαρμόζοντας τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας και συμβολίζοντας με $\{Z{=}k\}$ το γεγονός ότι το άθροισμα των ενδείξεων των δύο ζαριών είναι k, k=2, 3, … , 12 βρίσκουμε εύκολα ότι:

$$P(Z{=}k) = \begin{cases} \dfrac{k-1}{36} & , \text{ αν } k = 2, 3, \ldots, 7 \\ \dfrac{12-(k-1)}{36} & , \text{ αν } k = 7, 8, \ldots, 12 \end{cases}$$

Για την απόλυτη διαφορά των ενδείξεων των δύο ζαριών παρατηρούμε ότι διατεταγμένα ζεύγη τοποθετημένα σε διαγώνιο που απέχει εξίσου από την κύρια διαγώνιο του ορθογώνιου σχηματισμού (σχήμα 1.7) έχουν ίδια απόλυτη διαφορά. Συμβολίζοντας με $\{D{=}k\}$ το γεγονός η απόλυτη διαφορά των ενδείξεων των δύο ζαριών να είναι k, k = 0, 1, … , 5, βρίσκουμε με τον κλασικό ορισμό:

$$P(Z{=}k) = \begin{cases} \dfrac{6}{36} & , \text{ αν } k{=}0 \\ \dfrac{12-2k}{36} & , \text{ αν } k = 1, 2, \ldots, 5 \end{cases}$$



Σχήμα 1.7.

▲

Παράδειγμα 1.15. (*Παράδοξο του Chevalier de Méré*). Ο de Méré ένας ιππότης που ήταν μανιώδης παίκτης, συνήθιζε να παίζει με τρία ζάρια ποντάροντας εναλλακτικά στο άθροισμα 11 ή 12 γιατί πίστευε ότι πρόκειται για ισοπίθανες περιπτώσεις. Πράγματι ο de Méré υπολόγιζε ότι υπάρχουν έξι τρόποι για εμφάνιση του 11, οι:

6–4–1, 6–3–2, 5–5–1, 5–4–2, 5–3–3, 4–4–3, και άλλοι έξι για εμφάνιση του 12, οι:

$$6–5–1,\ 6–4–2,\ 6,\ –3–3,\ 5–5–2,\ 5–4–3,\ 4–4–4.$$

Στην πράξη όμως διαπίστωσε ότι το 11 έρχεται συχνότερα από το 12, πράγμα που το θεώρησε παράδοξο.

Έθεσε το πρόβλημα στον Pascal, ο οποίος έλυσε σωστά το πρόβλημα καθορίζοντας ως σύνολο ισοπίθανων δυνατών περιπτώσεων (δειγματοχώρο) το σύνολο των 6^3=216 διατεταγμένων τριάδων

$$(\alpha, \beta, \gamma), \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3, 4, 5, \quad ή \quad 6,$$

και όχι τις 56 μη διατεταγμένες τριάδες που σχηματίζονται με τα τρία ζάρια.

Ο Pascal παρατήρησε ότι ο τρόπος 6-4-1 πετυχαίνεται με έξι διατεταγμένες τριάδες, τις (6,4,1), (6,1,4), (4, 6, 1), (4, 1, 6), (1, 6, 4), (1, 4, 6). Όμοια ο τρόπος 5-5-1 πετυχαίνεται με τρεις διατεταγμένες τριάδες, τις (5, 5, 1), (5, 1, 5), (1, 5, 5), ενώ ο τρόπος 4-4-4 πετυχαίνεται με μία μοναδική τριάδα.

Μετρώντας τώρα όλες τις διατεταγμένες τριάδες που δίνουν 11 ή 12 και θέτοντας P(11) ή P(12) την αντίστοιχη πιθανότητα βρίσκουμε:

$$P(11) = \frac{27}{216}, \quad P(12) = \frac{25}{216}.$$

Άρα $P(11):P(12) = 27:25$, που σημαίνει ότι το 11 εμφανίζεται συχνότερα από το 12, όπως σωστά παρατήρησε ο de Méré. ▲

Σημείωση Με ένα ανάλογο πρόβλημα ασχολήθηκε και ο Galileo Galilei (1564-1642). Το πρόβλημα ήταν: Τι είναι πιθανότερο να πάρω άθροισμα 10 ή 9 ρίχνοντας τρία ζάρια; Έδωσε την απάντηση $\frac{27}{216}$ και $\frac{25}{216}$ αντίστοιχα, ενώ μέχρι τότε θεωρούσαν ότι οι πιθανότητες αυτές είναι ίσες.

Παράδειγμα 1.16. Έστω ότι ρίχνουμε ένα ζάρι 4 φορές αναμένοντας την εμφάνιση ενός τουλάχιστον "6". Αν μαζί με το πρώτο ζάρι ρίχναμε και ένα δεύτερο, τότε κάθε φορά που το πρώτο φέρνει "6", το δεύτερο θα φέρνει 1, 2, …, ή 6. Έτσι δημιουργείται η εντύπωση ότι εκτελώντας 6 φορές το προηγούμενο πείραμα, δηλ. ισοδύναμα ρίχνοντας 24 φορές τα δύο ζάρια θα περιμένουμε να έρθει τουλάχιστον μία φορά το (6, 6), το ίδιο συχνά που έρχεται ένα τουλάχιστον "6" όταν ρίχνουμε ένα ζάρι 4 φορές.

Να βρεθεί η πιθανότητα των δύο γεγονότων:

Α = Εμφανίζεται ένα τουλάχιστον 6, σε τέσσερις ρίψεις ενός ζαριού.

Β = Εμφανίζεται μία φορά τουλάχιστον εξάρες, σε 24 ρίψεις δύο ζαριών.

Λύση

Στη ρίψη ενός ζαριού 4 φορές, το απλό ενδεχόμενο μπορεί να παραστα-