Μιχ. Γ. Μαριάς

Μαθήματα

Ολοκληρωτικού Λογισμού Μίας Μεταβλητής

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

ISBN 978-960-456-467-5

Εκτύπωση
Βιβλιοδεσία

Π. ΖΗΤΗ & Σια ΟΕ
18ο χλμ Θεσσαλονίκης - Περαίας
Τ.Θ. 4171 • Περαία Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19
Τηλ.: 2392.072.222 - Fax: 2392.072.229 • e-mail: info@ziti.gr

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
www.ziti.gr

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ:
Αρμενοπούλου 27 - 546 35 Θεσσαλονίκη • Τηλ.: 2310-203.720 • Fax 2310-211.305
e-mail: sales@ziti.gr

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΑΘΗΝΩΝ:
Χαριλάου Τρικούπη 22 - Τ.Κ. 106 79, Αθήνα • Τηλ.-Fax: 210-3816.650
e-mail: athina@ziti.gr

ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ: www.ziti.gr

Περιεχόμενα

Όπως τα πεύκα κρατούνε την μορφή του αγέρα,
ενώ ο αγέρας έφυγε, δεν είναι εκεί,
το ίδιο και τα λόγια,
φυλάγουν την μορφή του ανθρώπου...

Γ. Σεφέρης

Πρόλογος

Στην Αφροδίτη Κ. και την Μαρία Π.,
ευγνωμονών

Το ανά χείρας εγχειρίδιο είναι η τακτοποίηση των πρόχειρων σημειώσεών μου για το μάθημα του "Λογισμού ΙΙ", που διδάσκω στο Τμήμα Μαθηματικών του ΑΠΘ.

Οι πρόχειρες σημειώσεις αντιστοιχούν πάντα στην άποψη του συγγραφέα για το μάθημα που διδάσκει, δηλαδή για τα αντικείμενα, τα θεωρήματα και τις τεχνικές που αποτελούν τον κορμό του μαθήματος, καθώς και την παρουσίασή τους, ώστε να "περάσουν" καλύτερα στο κοινό των διδασκομένων. Σε μια δεύτερη φάση και μετά την πρώτη παρουσίασή τους στην τάξη, διορθώνονται παραλείψεις και λάθη, προστίθενται ή αφαιρούνται παράγραφοι, παραδείγματα και ασκήσεις, ώστε το σώμα να γίνει πληρέστερο και πιο συμπαγές, ενώ αποτυπώνεται και η εμπειρία της πρώτης επαφής με το κοινό.

Αυτές είναι, κατά τη γνώμη μου, οι γενικές αρχές. Κι επειδή το τέλειο εγχειρίδιο, για όλα τα μήκη και πλάτη, για όλα τα ακροατήρια και για όλες τις εποχές δεν έχει, ευτυχώς ακόμα, γραφεί (αλλοιώς εμείς οι πανεπιστημιακοί δάσκαλοι θα υποβιβαζόμασταν σε μεταφραστές, αντιγραφείς ή ακόμα σε χειριστές βίντεο-προζέκτορα), όταν "κτίζουμε" ένα νέο μάθημα πρέπει πρώτα να διαμορφώσουμε την άποψή μας γι αυτό. Αν τύχει και το διδάσκουμε πολλά χρόνια από τότε που το διδαχθήκαμε εμείς και η ανάμνηση της διδαχής αυτής, αν ήταν καλή, έχει ξεθωριάσει, ή αν δεν το διδαχθήκαμε ποτέ, τότε η άποψή μας διαμορφώνεται από διαβάσματα σε συνδυασμό με την γνώμη που έχουμε αποκομίσει με την τριβή μας με τα αντικείμενα, τα θεωρήματα και τα εργαλεία του μαθήματος, από την δραστηριότητά μας ως ερευνητές ή διδάσκοντες.

Έτσι, σημαντικό ρόλο στην διαμόρφωση της άποψής μας παίζει η επιλογή των εγχειριδίων που θα στηριχθούμε, αφού όπως λέει ο ποιητής "*τα λόγια μας είναι παιδιά πολλών ανθρώπων*". Για το παρόν εγχειρίδιο αποφάσισα να στηριχθώ στον κραταιό και λακωνικό J. Dixmier [7], που διάβασα ως πρωτοετής, τον κλασικό αλλά φλύαρο M. Spivac [13], που παραμένει σταθερή αναφορά για το μάθημα Calculus σε πολλά καλά Πανεπιστήμια του κόσμου, το χειρόγραφο-βιβλίο του Στ. Πηχωρίδη με τα ωραία γράμματα της Γ. Κυρέζη, [12], ενώ για την συλλογή των ασκήσεων προτίμησα τους Γάλλους, που είναι "ασκησιολόγοι" [4], όπως συνήθιζε να λέει ο αείμνηστος Ν. Δανίκας, καθώς και το βιβλίο του Σ. Ντούγια, [11]. Για την επαφή με τα ελληνικά ακροατήρια τους συναδέλφους Κ. Δασκαλογιάννη [3] και Α. Γιαννόπουλο [2]. Για τον ορισμό του ολοκληρώματος Riemann στηρίχθηκα στα "Μαθήματα Ολοκληρωτικού Λογισμού πολλών μεταβλητών" [10], που συνέγραψα με τον αγαπητό Ν. Μαντούβαλο πριν από χρόνια. Για τη συλλογή των ασκήσεων βοήθησε ο Α. Φωτιάδης, ο οποίος επίσης, διάβασε με προσοχή τα δοκίμια.Τον ευχαριστώ θερμά. Η "Εισαγωγή" των "Μαθημάτων" στηρίζεται σε δύο κείμενα του κλασικού ιστορικού βιβλίου "*Pour l'honneur de l'esprit humain*" του γίγαντα J. Dieudonné, που μεταφράζω στον ελεύθερο χρόνο μου. Για γρήγορη βοήθεια, πολλές φορές χρησιμοποίησα την Wikipedia. Τέλος, ευχαριστώ τον Π. Καϊμάκη, που για πολλοστή φορά "χτένισε" τα ελληνικά μου.

Όπως έλεγα παλαιότερα στα "Μαθήματα" των Λογισμών πολλών μεταβλητών που συνέγραψα με τους Ν. Μαντούβαλο και Ν. Δανίκα, [9], [10], "προσπαθήσαμε να κρατήσουμε την ισορροπία ανάμεσα στην Ανάλυση και τον Λογισμό. Ο φοιτητής πρέπει να καταλάβει τις έννοιες και τα θεωρήματα, αλλά και να μάθει να λογαριάζει. Η έλλειψη του ενός εκ των δύο οδηγεί σε επικίνδυνες ατραπούς. Έτσι, όλα τα βαρειά θεωρήματα δίνονται με πλήρεις αποδείξεις. Η επεξεργασία των αποδείξεων, ώστε να παρουσιαστούν όσο το δυνατόν πιο καθαρές και εύληπτες, ήταν και χρονοβόρα και κουραστική. Ελπίζουμε να τα καταφέραμε. Αλλά αυτό θα μας το πουν οι φοιτητές μας. Τα θεωρήματα και οι ορισμοί συνοδεύονται από πληθώρα επιλεγμένων παραδειγμάτων, ώστε να εμπεδωθεί και να εφαρμοστεί η θεωρία, και να μάθει ο φοιτητής να λογαριάζει".

Τέλος, ελπίζω τα "Μαθήματα" να βοηθήσουν τους φοιτητές να κατανοήσουν τον πολύ σημαντικό Ολοκληρωτικό Λογισμό, που μαζί με τον Διαφορικό, παιδιά του Νεύτωνα και του Leibnitz, έδρεψαν δάφνες με τις εφαρμογές τους τον 17ο και 18ο αιώνα και έγιναν πρωτοπόροι στην γενική άνθιση των Μαθηματικών και την μετέπειτα ένδοξη πορεία τους, που συνεχίζεται μέχρι και σήμερα. Ελπίζω επίσης, τα "Μαθήματα" με τις συγκλίσεις και περισσότερο με τις αποκλίσεις τους από τα αντίστοιχα διδακτικά κείμενα, να προσθέσουν κάτι στην ελληνική βιβλιογραφία.

Θα τελειώσω με τα λόγια του Αποστόλου Παύλου, που έγιναν πια το moto των διαδακτικών εγχειριδίων μου και που είναι πάντα επίκαιρα:

Και γαρ εάν άδηλον φωνήν σάλπιγξ δώ, τίς παρασκευάσεται εις πόλεμον; Ούτω και υμείς δια της γλώσσης εάν μη εύσημον λόγον δώτε, πώς γνωσθήσεται το λαλούμενον; έσεσθε γαρ εις αέρα λαλούντες. [1]

Πρός Κορινθίους Α, XIV, 8-9.

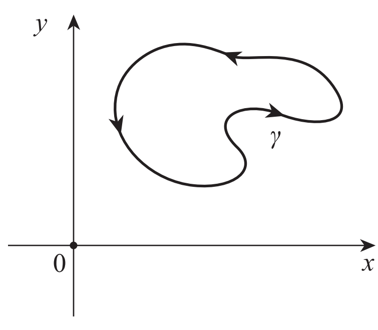
Θεσσαλονίκη, Ιανουάριος 2017.

[1]Σε ελεύθερη απόδοση το νόημα είναι το ακόλουθο: Αν η σάλπιγγα ηχήσει ήχο χωρίς νόημα, ποιός θα προετοιμαστεί για πόλεμο; Έτσι κι εσείς, εάν ο λόγος σας δεν είναι κατανοητός, πώς θέλετε να σας καταλάβουν; Θα μιλάτε στον αέρα.

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Ας ξεκινήσουμε μ' ένα παλιό πρόβλημα. Έστω $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ μια συνεχής απλή και κλειστή καμπύλη γ όπως στο Σχήμα 1. Ποιό άραγε είναι το *μήκος* της και ποιό το *εμβαδόν* που περικλείει;

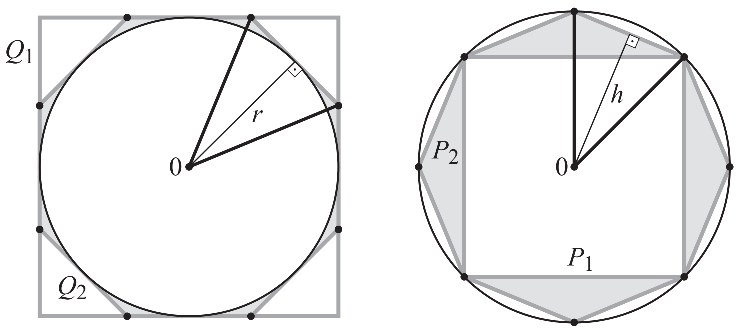


Σχήμα 1.

Ας θυμηθούμε δύο από τις μεγάλες επιδόσεις της εποποιίας των αρχαίων ελληνικών Μαθηματικών: την *προσέγγιση* του π και άρα την προσέγγιση του *μήκους της περιφερείας του κύκλου και του εμβαδού του δί-σκου*. Εδώ, ο Ευκλείδης και ο Αρχιμήδης χρησιμοποίησαν τη *μέθοδο της εξάντλησης* του Ευδόξου.

1.0.1 Προσέγγιση του μήκους της περιφερείας του κύκλου και του εμβαδού του δίσκου

Έστω $S(0, r)$ ο κύκλος με κέντρο το 0 και ακτίνα r. Όπως ο Ευκλείδης, [8, Βιβλίο XII, 2], θεωρούμε τα *εγγεγραμμένα πολύγωνα* όπως στο Σχήμα 2.



Σχήμα 2. Περιγεγραμμένα και εγγεγραμμένα πολύγωνα.

Ξεκινούμε με το εγγεγραμμένο τετράγωνο P_1 και κατασκευάζουμε το εγγεγραμμένο οκτάγωνο P_2, ενώνοντας τα μέσα των χορδών με τις κορυφές του τετραγώνου.

Συνεχίζουμε μ' αυτό τον τρόπο και κατασκεάζουμε *μια ακολουθία εγγεγραμμένων πολυγώνων* P_1, P_2 ,..., P_n, ..., με 2^2, 2^3, ..., 2^{n+1},... πλευρές. Συνεχίζουμε με το περιγεγραμμένο τετράγωνο Q_1 και κατασκευάζουμε το οκτάγωνο Q_2, φέροντας τις εφαπτομένες από τα μέσα των χορδών. Συνεχίζουμε μ' αυτό τον τρόπο και κατασκεάζουμε *μια ακολουθία περιγεγραμμένων πολυγώνων* Q_1, Q_2, ..., Q_n, ..., με 2^2, 2^3, ..., 2^{n+1},... πλευρές.

Ας είναι

$$p_n = |P_n| = \text{εμβ}\,(P_n) \quad \text{και} \quad q_n = |Q_n| = \text{εμβ}\,(Q_n)\,.$$

Με Τριγωνομετρία, ο Ευκλείδης δείχνει ότι

$$q_{n+1} - p_{n+1} \leq \frac{1}{2}\,(q_n - p_n)\,. \tag{1.1}$$

Έχουμε λοιπόν τα *εγκιβωτισμένα διαστήματα*

$$[p_1, q_1] \supset [p_2, q_2] \supset \cdots [p_n, q_n] \supset \cdots$$

και το *μοναδικό σημείο της τομής*

$$\bigcap_{n\geq 1} [p_n, q_n] = \{s_0(r)\},$$

είναι το εμβαδόν του δίσκου $D(0, r)$ με κέντρο το 0 και ακτίνα r

$$|D(0, r)| = s_0(r). \tag{1.2}$$

Έτσι, με την μέθοδο της εξάντλησης του Ευδόξου, ο Ευκλείδης προσέγγισε το εμβαδόν του δίσκου $D(0, r)$ όσο καλά θέλουμε.

Όμως, ο Αρχιμήδης απέδειξε *ότι το εμβαδόν του δίσκου είναι ίσον με το έμβαδόν ορθογωνίου τριγώνου με κάθετες πλευρές την ακτίνα r και την περιφέρεια $2\pi r$*:

$$|D(0, r)| = \tfrac{1}{2} r(2\pi r) = \pi r^2. \tag{1.3}$$

Έτσι, για να υπολογίσουμε επακριβώς το εμβαδόν του δίσκου, αρκεί να υπολογίσουμε το π, δηλαδή την *αναλογία* περιφέρειας και διαμέτρου.

1.0.2 Προσέγγιση του π από τον Αρχιμήδη

Ξαναγυρίζουμε στα εγγεγραμμένα και περιγεγραμμένα πολύγωνα P_n και Q_n της προηγούμενης παραγράφου. Για $r = 1$, θέτουμε

$$l_n = \text{μήκος}(P_n) \quad \text{και} \quad L_n = \text{μήκος}(Q_n).$$

Προφανώς

$$l_n \leq 2\pi \leq L_n.$$

Ο μέγας Αρχιμήδης λοιπόν υπολογίζει τα μήκη l_{96} και L_{96} και βίσκει την καταπληκτική προσέγγιση του π

$$3 + \frac{10}{71} \leq \pi \leq 3 + \frac{1}{7},$$

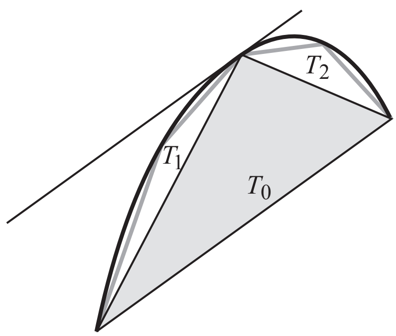
ή

$$3,1408 < \pi < 3,1429.$$

Από τότε ακολούθησαν πολλοί άλλοι: ο Πτολεμαίος, ο Απολλώνιος, Άραβες, Κινέζοι, μέχρι που η προσέγγιση του π κατάντησε ένα είδος εμμονής. Σήμερα, γνωρίζουμε μερικά εκατομύρια δεκαδικών ψηφίων του π. Μάλιστα, ένας "σφυριγμένος" ξέρει απ' έξω τα πρώτα δέκα χιλιάδες!

1.0.3 Τετραγωνισμός της παραβολής από τον Αρχιμήδη

Πρόβλημα: Να βρεθεί το *εμβαδόν του τμήματος της παραβολής* του Σχήματος 3, [1].



Σχήμα 3.

Ο Αρχιμήδης θεωρεί το μεγάλο τρίγωνο T_0 του σχήματος, η τρίτη κορυφή του οποίου είναι το σημείο επαφής της παραβολής με την ευθεία που είναι παράλληλη προς την βάση, και αποδεικνύει ότι

$$\varepsilon\mu\beta\,(\pi\alpha\rho\alpha\beta) = \frac{4}{3}\,|T_0|\,.$$

Η απόδειξη χρησιμοποιεί την μέθοδο της εξάντλησης και πάει ως εξής: Στα υπόλοιπα τμήματα της παραβολής, θεωρεί τα μικρότερα τρίγωνα T_1 και T_2 και συνεχίζει με τον ίδιο τρόπο επ' άπειρον.

Αποδεικνύει ότι

$$|T_1| = |T_2| = \frac{1}{8}|T_0| = \frac{1}{2^3}|T_0|. \tag{1.4}$$

Έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned} \varepsilon\mu\beta\,(\pi\alpha\rho\alpha\beta) &= |T_0| + |T_1| + |T_2| + |T_3| + |T_4| + \cdots \\ &\overset{(1.4)}{=} |T_0| + \frac{2}{8}|T_0| + \frac{4}{8^2}|T_0| + \cdots \\ &\overset{(1.4)}{=} |T_0|\, 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{8}\right)^2 + \cdots \\ &= |T_0| \left(1 + \frac{1}{2^2} + \left(\frac{1}{2^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^2}\right)^3 + \cdots \right). \end{aligned} \tag{1.5}$$

Σήμερα, όλοι ξέρουμε να αθροίζουμε την *γεωμετρική σειρά*

$$\frac{1}{2^2} + \left(\frac{1}{2^2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2^2}\right)^n + \cdots = \frac{\frac{1}{2^2}}{1 - \frac{1}{2^2}} = \frac{1}{4} \times \frac{4}{3} = \frac{1}{3}.$$

Άρα

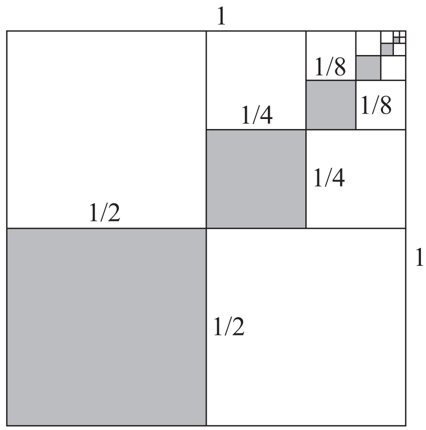
$$\varepsilon\mu\beta\,(\pi\alpha\rho\alpha\beta) = |T_0| \left(1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}|T_0|.$$

Όμως ο Αρχιμήδης δεν ήξερε από σειρές, και για να υπολογίσει τη σειρά

$$\frac{1}{2^2} + \left(\frac{1}{2^2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2^2}\right)^n + \cdots$$

χρησιμοποιεί την εξής ιδιοφυή ιδέα: Κόβει το τετράγωνο 1×1 σε 4 τετράγωνα όπως στο Σχήμα 4, και αθροίζει τα εμβαδά των διαγωνίων τετραγώνων που είναι ίσα με

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{8}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2^n}\right)^2 + \cdots$$



Σχήμα 4.

Όμως τα εμβαδά αυτά αποτελούν το $\frac{1}{3}$ του τετραγώνου 1×1, αφού κάθε διαγώνιο τετράγωνο μαζί με τα δύο ίσα του τετράγωνα είναι τα $\frac{3}{4}$ του αμέσως μεγαλύτερου τετραγώνου που τα περιέχει.

Έτσι

$$\varepsilon\mu\beta\,(\pi\alpha\rho\alpha\beta) = \frac{4}{3}\,|T_0|\,,$$

και το εμβαδόν του τριγώνου T_0 ξέρουμε να το υπολογίζουμε.

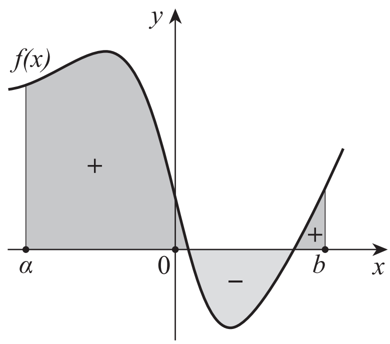
1.1 Σύγχρονη αντιμετώπιση των παλαιών αυτών προβλημάτων

1.1.1 Υπολογισμός εμβαδών

Έστω $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, μια συνεχής συνάρτηση. Όλοι ξέρουμε από το Λύκειο ότι το *ολοκλήρωμα*

$$\int_a^b f\,(x)\,dx,$$

της f επί του διαστήματος $[a, b]$, παριστάνει το προσημασμένο εμβαδόν της περιοχής που ορίζεται από το γράφημα της f, τον άξονα των x, και τις κάθετες που περνούν από τα a και b, (δες Σχήμα 5).



Σχήμα 5.

Το εμβαδόν πάνω από τον άξονα των x έχει θετικό πρόσημο, ενώ αυτό κάτω του άξονα, έχει αρνητικό πρόσημο.

Όμως, το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)\,dx$ δίνεται από τα *αθροίσματα Riemann*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|\Delta_n\|\to 0} \sum_{0\le j\le n-1} f\left(x_j^*\right)(x_{j+1}-x_j)\,,$$

όπου

$$\Delta_n = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$$

είναι μια *διαμέριση* του $[a,b]$,

$$\|\Delta_n\| = \max_{0\le j\le n-1}(x_{j+1}-x_j)$$

είναι το *βήμα* της και x_j^* τυχαίο σημείο του $[x_j, x_{j+1}]$.

Όμως, ο υπολογισμός των αθροισμάτων Riemann δεν είναι καθόλου εύκολος. Από την δυσκολία αυτή μας βγάζει το *θεμελιώδες θεώρημα του Λογισμού:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)\,, \tag{1.6}$$

όπου F είναι μια *παράγουσα* της f, δηλαδή μια συνάρτηση που ικανοποιεί

$$F'(x) = f(x)\,,\quad x\in[a,b]\,. \tag{1.7}$$

Έτσι για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)\,dx$, αντί να υπολογίσουμε το όριο των αθροισμάτων Riemann, λύνουμε την διαφορική εξίσωση (1.7), που γενικά είναι κάτι πιο εύκολο.

Μια σημαντική παρατήρηση είναι ότι το θεμελιώδες θεώρημα του Λογισμού, δηλαδή οι σχέσεις (1.6) και (1.7), αποτελεί την σύνδεση μεταξύ της *παραγώγου* και του *ολοκληρώματος*, δύο εννοιών εκ πρώτης όψεως ξένων μεταξύ τους.

Παράδειγμα 1.1 Το εμδαδόν του δίσκου $D(0,r) = \{x^2 + y^2 \leq r^2\}$.

Ας είναι

$$\frac{D(0,r)}{4} = \left\{(x,y) : y = f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}, \ \ x \in [0,r]\right\},$$

το πρώτο τεταρτημορίου του δίσκου $D(0,r)$. Το εμβαδόν του $\frac{|D(0,r)|}{4}$ δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$\frac{|D(0,r)|}{4} = \int_0^r f(x)\,dx = \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx.$$

Με την αλλαγή μεταβλητής

$$x = r\sin\theta,$$

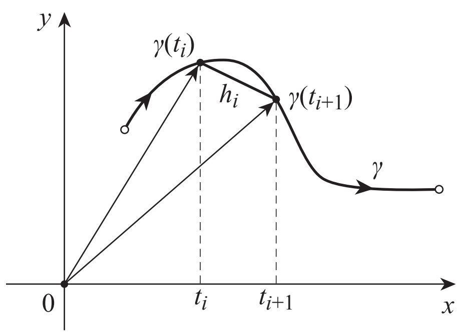
έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{|D(0,r)|}{4} &= \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{r^2 - r^2\sin^2\theta}\, r(\cos\theta)\,d\theta \\ &= r^2\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\,d\theta = r^2\int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 2\theta}{2}d\theta \\ &= \frac{\pi r^2}{4}.\end{aligned}$$

1.1.2 Μήκος καμπύλης

Έστω $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ μια παραγωγίσιμη επίπεδη καμπύλη. Αν $\Delta = \{0 = t_0 < \cdots < t_n = 1\}$ είναι μια διαμέριση του $[0,1]$ με βήμα αρκούντος μικρό, τότε η παράγωγος $\gamma'(t)$ είναι περίπου σταθερή στο διαστημα $[t_j, t_{j+1}]$ της διαμέρισης: για κάθε $t \in [t_j, t_{j+1}]$,

$$\gamma'(t) \sim \gamma'\left(t_j^*\right), \quad t_j^* \in [t_j, t_{j+1}].$$



Σχήμα 6.

Άρα το

$$\begin{aligned} \text{μήκος του τόξου } [\gamma(t_j), \gamma(t_{j+1})] &= \text{ταχύτητα} \times \text{χρόνος} \\ &= \left\|\gamma'\left(t_j^*\right)\right\| \times (t_{j+1} - t_j), \end{aligned}$$

και αθροίζοντας έχω το μήκος L_γ της καμπύλης γ:

$$L_\gamma = \lim_{n\to\infty} \sum_{0\le j\le n-1} \left\|\gamma'\left(t_j^*\right)\right\| \times (t_{j+1} - t_j) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\|\, dt,$$

από τον ορισμό του ολοκληρώματος.

Παράδειγμα 1.2 Μήκος του κύκλου $S(0,r) = \{x^2 + y^2 = r^2\}$.

Ο κύκλος $S(0,r)$ ορίζεται ως η καμπύλη

$$\gamma(t) = (r\cos 2\pi t, r\sin 2\pi t), \quad t \in [0,1].$$

Έτσι,

$$\begin{aligned} L_\gamma &= \int_0^1 \|\gamma'(t)\| \; dt = \int_0^1 \sqrt{(2\pi r)^2 \sin^2 2\pi t + (2\pi r)^2 \cos^2 2\pi t} \; dt \\ &= 2\pi r \int_0^1 \; dt = 2\pi r. \end{aligned}$$

Θα τελειώσουμε με ένα σημαντικό

Ερώτημα: Για ποιές φραγμένες συναρτήσεις $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, τα αθροίσματα Riemann

$$R(f,\Delta) = \sum_{j\le n} f\left(x_j^*\right)(x_{j+1} - x_j), \quad x_j^* \in [x_j, x_{j+1}],$$

συγκλίνουν καθώς το βήμα της Δ τείνει στο 0, δηλαδή η f είναι ολοκληρώσιμη.

Μια πρώτη μερική απάντηση, θα δοθεί σύντομα: αν η f είναι *συνεχής*, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη. Την τελική απάντηση μας την δίνει το θεώρημα του Lebesgue που μας λέει πως η f είναι ολοκληρώσιμη, *αν και μόνον εάν οι ασυνέχειες της f είναι μέτρου μηδέν.*