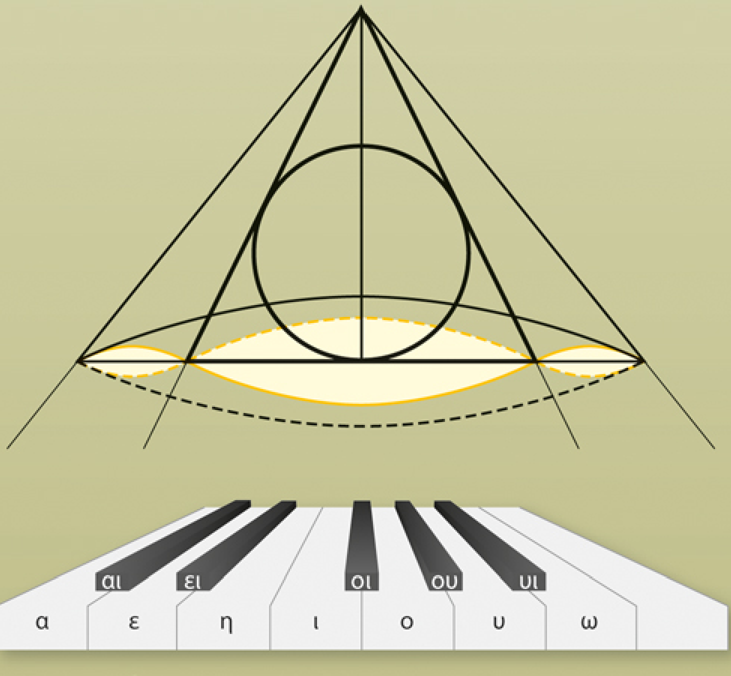
Κώστας Χρ. Μαντζουκίδης

η χρυσή τομή στη μουσική

Η ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΑ ΤΕΤΡΑΚΤΥΣ ΑΠΟΚΑΛΥΠΤΕΤΑΙ



$$\pi_{\varphi} = \frac{6}{5}\varphi^2$$

$$\frac{\pi_{\varphi}}{\pi} = \frac{c}{c_{\sigma\chi(\max)}}$$

$$c = \varphi \cdot 2^{17} \cdot \sqrt{2}$$

ΠΕΡΙΕΧΕΙ CD με μουσικά παραδείγματα και εφαρμογές

Διεύθυνση επικοινωνίας:

Μαντζουκίδης Κωνσταντίνος
Πτυχιούχος Τμήματος Χημείας Α.Π.Θ.
Τ.Θ. 1373, Τ.Κ. 57500, Τρίλοφος Θεσσαλονίκης
Τηλ.: 23920 64829 – 6974995091
e-mail: costasmantz@gmail.com

Το μεγαλύτερο και πιο σημαντικό μέρος της συγγραφής που ακολουθεί, έχει κατατεθεί στη συμβολαιογράφο *Ε. Φίτζιου* με αριθμό Πράξης Κατάθεσης Εγγράφου 509/22-12-2017

ISBN 978-960-93-9968-5

Εκτύπωση Βιβλιοδεσία

Π. ΖΗΤΗ & Σια Ι.Κ.Ε.
18ο χλμ Θεσσαλονίκης - Περαίας
Τ.Θ. 4171 • Περαία Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19
Τηλ.: 23920 72222 • Fax: 23920 72229 • e-mail: info@ziti.gr

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
www.ziti.gr

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ:
Αρμενοπούλου 27 • 546 35 Θεσσαλονίκη • Τηλ.: 2310 203720 • Fax 2310 211305
e-mail: sales@ziti.gr

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΑΘΗΝΩΝ:
Χαριλάου Τρικούπη 22 • Τ.Κ. 106 79 Αθήνα • Τηλ.-Fax: 210 3816650
e-mail: athina@ziti.gr

ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ: www.ziti.gr

Πρόλογος

Λέγεται πως άμα αποκαλυφθεί το τρικ, ο μηχανισμός δηλαδή που κάνει κάτι να φαίνεται μαγικό, τότε αυτό χάνει τη μαγεία του.

Τι συμβαίνει όμως, όταν αυτός ο μηχανισμός

- είναι τουλάχιστον το ίδιο γοητευτικός με το αποτέλεσμα του;
- με απλή εφαρμογή του, μας αποκαλύπτει έναν ολοκληρωμένο και τεράστιο μουσικό γαλαξία, με το σύνολο των χρονικών και τονικών αξιών που τον διέπουν, γνωστών και μη, ο οποίος στις μέρες μας απλώς αγνοείται;
- δίνει απαντήσεις για τον τρόπο λειτουργίας του μεγαλύτερου φυσικού εξελικτικού φαινομένου· του κύκλου ζωής του Σύμπαντος;
- προσδίδει στην ελληνική γλώσσα τη δυνατότητα μελωδικής της απόδοσης, με απαράμιλλα αποτελέσματα, αποδεικνύοντας ότι το σημαντικότατο αυτό επίτευγμα είναι αναπόσπαστα συνδεδεμένο με τον όλο μηχανισμό;
- μέσα από το μεγαλείο του, μας υποχρεώνει να αποδεχθούμε ότι είμαστε μέρος της Φύσης και όχι κυρίαρχοι αυτής;
- καταδεικνύει πως η εξέλιξη, η αρμονία, η αισθητική βασίζονται σε απλούς μαθηματικούς κανόνες, συμβάλλοντας έτσι στη διαμόρφωση της ενοποιημένης θεωρίας των πάντων, του ενός;

Τελικά, ποιοι νέοι ορίζοντες θα εμφανισθούν, αν αυτός ο ελεγκτής συμπαντικής συμβατότητας φυσικών εξελικτικών φαινομένων, που στην ουσία βασίζεται στην Ιερά Τετρακτύν του Πυθαγόρα, γίνει αποδεκτός;

Θα μιλήσουμε για Μουσική …

για Μουσική και όχι μόνο.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1
Ρυθμός της Ζωής και ακολουθία Φ

Κεφάλαιο 2
Η χρυσή τομή στις χρονικές αξίες

Κεφάλαιο 3
Η χρυσή τομή στις τονικές αξίες

Κεφάλαιο 4
Ελληνική γραφή και μουσικότητα

Κεφάλαιο 1

Ρυθμός της ζωής και ακολουθία Φ

Εισαγωγή

Η ενασχόληση με τη μουσική, από την απλή ακρόαση έως την αναπαραγωγή ή δημιουργία αυτής, σε ερασιτεχνικό ή επαγγελματικό επίπεδο, μας δίνει την δυνατότητα να αντιληφθούμε τα πολύ βασικά χαρακτηριστικά της.

Αυτά έχουν να κάνουν με τις νότες (συχνότητες) και είναι :

- Η διάρκεια
- Ο τόνος
- Η ένταση
- Η χροιά

Καταρχήν, θα ασχοληθούμε με την διάρκεια των μουσικών νοτών. Φυσικά και η διάρκεια της παύσης ακολουθεί τους ίδιους κανόνες.

Οι χρονικές διάρκειες των μουσικών νοτών, σχεδόν στο σύνολό τους, είναι ακέραια πολλαπλάσια της μικρότερης σε χρονική διάρκεια νότας που ορίσαμε. Συνήθως, ένα μουσικό μέτρο το χωρίζουμε σε δεύτερα, τέταρτα ή όγδοα και σπανιότερα σε τρίτα. Επάνω σε αυτούς τους διαχωρισμούς τοποθετούμε τις νότες ή τις παύσεις ή τις συγχορδίες ή τους χτύπους των κρουστών μουσικών οργάνων, ακόμη και τους χτύπους με τις παλάμες μας και έτσι φτιάχνουμε ένα μουσικό θέμα. Το μελοποιούμε και φτιάχνουμε ένα τραγούδι.

Μέσα από αυτές τις ομολογουμένως περιορισμένες επιλογές, στήθηκε όλη η σημερινή επικρατούσα δυτική μουσική σκηνή, με αυτόν τον τεράστιο πλούτο ρυθμών, ήχων, μελωδιών, τραγουδιών και κατά επέκταση χορών, μόδας, επιρροών, ακόμη και κινημάτων. Κάλλιστα, θα μπορούσαμε να χαρακτηρίσουμε τους ρυθμούς αυτούς σαν παραλλαγές ενός βασικού, αρχικού ΒΗΜΑΤΙΚΟΥ ΡΥΘΜΟΥ.

Είναι όμως αυτός ο βασικός μουσικός ρυθμός, ο ρυθμός δηλαδή που στηρίζεται σε ακέραια πολλαπλάσια της μικρότερης σε χρονική διάρκεια αξίας, η μοναδική μας επιλογή;

Μήπως υπάρχουν και άλλοι ρυθμοί, που όμως δεν ακολουθούν το παραπάνω κανόνα;

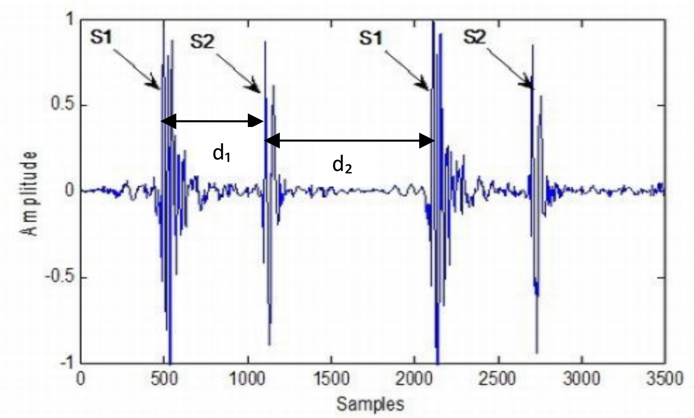
Η παρατήρηση και κυρίως η παρατήρηση της Φύσης, είναι αυτή που μπορεί να μας δώσει την απάντηση. Άλλωστε, η παρατήρηση είναι το πρώτο βήμα για την όποια έρευνα, επιστημονική ή όχι. Η απάντηση που δόθηκε από αρκετούς από όσους δέχθηκαν το παραπάνω ερώτημα ήταν η ίδια:

“ Ο Καρδιακός Ρυθμός ”

Είναι ο χαρακτηριστικός κτύπος της καρδιάς, που εύκολα γίνεται αντιληπτός τοποθετώντας το χέρι μας ή το αυτί μας στην περιοχή της καρδιάς, στον θώρακα, ή ακόμη πιο ευδιάκριτα, χρησιμοποιώντας ένα στηθοσκόπιο.

Άμεσα παρατηρούμε ότι οι χρονικές διάρκειες μεταξύ δύο συνεχόμενων κτύπων δεν είναι ούτε ίσες, αλλά ούτε και η διάρκεια του ενός είναι ακέραιο πολλαπλάσιο της διάρκειας του άλλου. Δηλαδή, δεν έχει κάποια καταρχήν σχέση με τον βηματικό μουσικό ρυθμό που γνωρίζουμε. Ο λόγος των χρονικών αξιών θα πρέπει να έχει μια τιμή μεταξύ του ένα και του δύο.

Αυτό που τώρα πρέπει να κάνουμε είναι να υπολογίσουμε τον συγκεκριμένο λόγο. Υπάρχει καρδιολογική συσκευή που ονομάζεται φωνοκαρδιογράφος και η οποία με ακρίβεια μπορεί να μας λύσει το πρόβλημα. Τοποθετώντας τη συσκευή αυτή σε συγκεκριμένη θέση στην περιοχή της καρδιάς, στον θώρακα, αυτή λαμβάνει τα σήματα S1 και S2 της καρδιάς και τα αποτυπώνει σε χαρτί με παράμετρο τον χρόνο. Ζητώντας εικόνες από φωνοκαρδιογραφήματα σε μηχανή αναζήτησης στο διαδίκτυο, δόθηκαν αρκετά δείγματα. Ένα από αυτά, ακολουθεί στην παρακάτω εικόνα.



Εικόνα 1.1 Φωνοκαρδιογράφημα

Οι αποστάσεις d1 και d2 μεταξύ των διαδοχικών σημάτων S1 και S2 του παραπάνω φωνοκαρδιογραφήματος μετρήθηκαν με όσο γίνεται μεγαλύτερη ακρίβεια, αφού πρώτα μεγεθύνθηκαν. Κατόπιν, υπολογίσθηκε ο λόγος d2/d1. Αν και ενδόμυχα αναμενόμενη, η ακρίβεια της τιμής που προέκυψε, ξάφνιασε και χαροποίησε συνάμα. Η τιμή ήταν ίση με τον αριθμό *φ*, τον λόγο της χρυσής τομής, δηλαδή d2/d1=1,618…

Ο καρδιακός ρυθμός, δηλαδή ο λόγος των χρονικών αξιών δύο συνεχόμενων κτύπων της καρδιάς ενός υγιούς ανθρώπου, είναι ίσος με τον αριθμό *φ*, τον αριθμό που προκύπτει από την χρυσή τομή.

Το ίδιο αποτέλεσμα προέκυψε και από προσωπικές πειραματικές μετρήσεις.

Πόσο σημαντικός είναι ο καρδιακός ρυθμός;

Από ιατρικής απόψεως, θεωρείται ότι η τιμή του συγκεκριμένου λόγου καθορίζει και την κατάσταση της υγείας του ανθρώπου. Η φυσιολογική τιμή είναι η τιμή του αριθμού φ. Απόκλιση από αυτήν τη τιμή δηλώνει δυσλειτουργία, ακόμη και πάθηση. Μάλιστα, το μέγεθος της απόκλισης μάλλον καθορίζει και την σοβαρότητα της πάθησης. Φυσικά η ύπαρξη του καρδιακού ρυθμού δηλώνει και την ίδια την ζωή. Για αυτόν τον λόγο θα μπορούσαμε να ονομάσουμε τον καρδιακό ρυθμό και ρυθμό της ζωής.

Η σημασία της καρδιάς και του καρδιακού ρυθμού φαίνεται και από μία ακόμη παράμετρο. Η λέξη καρδιά, στην ελληνική και όχι μόνο γλώσσα, χρησιμοποιείται σαν συνθετικό σε πολλά σύνθετα κοσμητικά επίθετα, όπως

- Μεγαλόκαρδος
- Καλόκαρδος
- Ανοιχτόκαρδος
- Καρδιακός
- Λεοντόκαρδος
- Ξεκαρδιστικός αλλά και
- Άκαρδος
- Αποκαρδιωτικός
- Σκληρόκαρδος

Είναι λέξεις που δηλώνουν έντονες συναισθηματικές έννοιες και αξίες ή αντίθετα, έλλειμμα, ή και απουσία συναισθημάτων. Βλέπουμε λοιπόν πως στην ελληνική γλώσσα έχει επιλεγεί η λέξη καρδιά για να συνθέσει λέξεις με τόσο δυνατές έννοιες. Είναι οι ίδιες συναισθηματικές αξίες που πολλές φορές εκφράζονται και μέσα από τραγούδια, από χορούς, από μουσική.

Φαίνεται πως η καρδιά, με τον καρδιακό ρυθμό της, σχετίζεται μεταφορικά και με τον μουσικό ρυθμό σαν πηγή έμπνευσης, έκφρασης και δημιουργίας. Μήπως όμως αυτή η συσχέτιση δεν είναι μόνο μεταφορική, αλλά είναι και πραγματική;

Για να απαντήσουμε στο παραπάνω ερώτημα θα πρέπει να ανοίξουμε ένα τεράστιο θέμα, γιατί τεράστιος είναι και ο μουσικός ορίζοντας ο οποίος ανοίγεται μπροστά μας. Ας μη βιαστούμε να βγάλουμε συμπεράσματα. Ας αφήσουμε τα ίδια τα αποτελέσματα να μιλήσουν. Άλλωστε, η μουσική είναι έκφραση, είναι ρυθμός, είναι μελωδία, είναι αρμονία και απλά απαντάει στο ερώτημα εάν μας αρέσει ή όχι.

Στο πρώτο μέρος θα δούμε, θα κατανοήσουμε και θα καταγράψουμε την επίδραση του αριθμού φ στις χρονικές αξίες των μουσικών φθόγγων (συχνοτητων). Οι ρυθμοί που θα προκύψουν, θα αποκαλούνται λόγω της προέλευσής τους, ρυθμοί φ. Θα αποδείξουμε ότι οι φ ρυθμοί δεν εμφανίστηκαν για να αντικαταστήσουν τους Βηματικούς ρυθμούς που ακολουθούμε μέχρι σήμερα. Θα δούμε, ότι απλά οι Βηματικοί ρυθμοί είναι ένα μικρό υποσύνολο από το σύνολο των φ ρυθμών. Θα ταξινομήσουμε, όσο μπορούμε, τους ρυθμούς που θα προκύπτουν. Θα προσπαθήσουμε να τους κατονομάσουμε, να τους καταγράψουμε, να τους παραστήσουμε σαν σχήματα, που ενδεχομένως να βοηθήσει στην κατανόηση τους και φυσικά, να τους αποδώσουμε με ηχητικά παραδείγματα. Θα δούμε κάποιους μικτούς ρυθμούς, δηλαδή ρυθμούς που περιέχουν βηματικά μέρη- μέτρα, άλλα και μέρη-μέτρα με ρυθμούς φ. Στο τέλος, θα αποκαλυφθεί ότι φυσικά οι ρυθμοί αυτοί δεν προέκυψαν από παρθενογένεση. Θα αποδειχθεί ότι οι ρυθμοί αυτοί υπάρχουν μέσα μας και αρκεί να επιτρέψουμε τους εαυτούς μας να τους ξαναθυμηθεί και να τους εξωτερικέψει. Δεν πρέπει να λησμονούμε άλλωστε, ότι αυτοί οι ρυθμικοί κτύποι της καρδιάς των μανάδων μας αποτέλεσαν και τον πρώτο στην ουσία μουσικό ρυθμό που όλοι μας ακούγαμε, σαν έμβρυα ακόμα και που άλλοτε μας ηρεμούσε και άλλοτε μας τρόμαζε, ανάλογα με την ταχύτητα και την ένταση του. Με ηχητικά παραδείγματα θα καταγραφούν μουσικά θέματα του πρόσφατου, άλλα και του μακρινού παρελθόντος που ακολουθούν ρυθμούς φ, θα ταυτοποιηθούν οι συγκεκριμένοι ρυθμοί και θα εξαχθούν πολύ σημαντικά συμπεράσματα για το είδος και το επίπεδο των πολιτισμών που εκφράζονταν και εκφράζονται μέχρι και σήμερα με τους ρυθμούς της ζωής, μέσα από τον χορό και την μουσική.

Στο δεύτερό μέρος θα ασχοληθούμε με την επίδραση του αριθμού φ και της ακολουθίας του στις τονικές αξίες. Θα δούμε πως προκύπτουν οι γνωστές, αλλά και νέες μουσικές νότες και κλίμακες. Θα μελετήσουμε την ακολουθία τους και θα βρούμε τη σχέση τους τόσο με την Πυθαγόρεια Μουσική Κλίμακα, όσο και με την Τετρακτύν. Θα ακούσουμε μία νέα μουσική κλίμακα που προκύπτει με τη χρήση γνωστών, αλλά και νέων τονικών αξιών. Θα δούμε πώς αυτή προκύπτει. Θα σχεδιάσουμε κάποιες αλλαγές σε κιθάρα, έτσι ώστε να μπορεί να την υποστηρίξει. Θα ασχοληθούμε με την συχνότητα κουρδίσματος των μουσικών οργάνων που χρησιμοποιείται στην εποχή μας (Λα στα 440 Hz), αλλά κυρίως με αυτή που αντικαταστήθηκε (Λα στα 432 Hz). Θα ανακαλύψουμε ποιες είναι οι μοναδικές ιδιαιτερότητες της συγκεκριμένης συχνότητας, καταρχήν σαν αριθμός και ποια μπορεί να είναι η σχέση της με πανάρχαιες, αλλά και σύγχρονες επιστημονικές αναζητήσεις σε διάφορα επίπεδα. Μη ξεχνάμε ότι η επιστήμη γεννήθηκε όταν για πρώτη φορά ειπώθηκε η λέξη «γιατί». Θα δούμε ποιες απαντήσεις μπορούν να δοθούν και ποιες νέες απορίες μπορούν να γίνουν αφετηρίες νέων προβληματισμών, αμφισβητήσεων, ερευνών.

Στο τρίτο και τελευταίο μέρος θα γίνει μια καταρχήν, φαινομενικά αυθαίρετη και ίσως αιρετική προσέγγιση της ελληνικής γλώσσας με την μουσική, ταυτίζοντας τα φωνήεντα με την πιο γνωστή μουσική κλίμακα. Το σύνολο των συμπτώσεων, των προσεγγίσεων, του τρόπου και της λογικής επιλογής και χρήσης των χρονικών, αλλά και των τονικών αξιών των συλλαβών, κυρίως όμως των αποτελεσμάτων που θα προκύψουν και θα ακουστούν, είναι βέβαιο ότι θα εγείρουν τεράστιο ενδιαφέρον και προβληματισμό για την ελληνική γλώσσα, κυρίως την αρχαία, αλλά και την νεότερη. Ελπίζω και εύχομαι, τα συμπεράσματα που θα προκύψουν για την ελληνική γλώσσα, να βοηθήσουν στην έγκυρη και έγκαιρη επανατοποθέτηση όσων αποφασίζουν για την ορθή, αλλά και την πρέπουσα για την βαρύτητα της ιστορικής της κληρονομιάς, μετεξέλιξή της.

Οι διάσπαρτες μικρές ή μεγάλες αναφορές και απαντήσεις σε θέματα που αυτούσια αποτελούσαν και αποτελούν αντικείμενα έρευνας άλλων επιστημών (Γεωμετρίας, Μαθηματικών, Φυσικής, Χημείας, Κοσμογονίας, Αρχιτεκτονικής, Βιολογίας), πέρα από την σημαντικότητα των απαντήσεων, δείχνουν και την ισχυρή σχέση της Μουσικής με αυτές. Ουσιαστικά δηλώνεται ότι όλα είναι Μουσική, όλα είναι Αρμονία, όλα είναι Ένα.

Ο αριθμός *Φ* και η ακολουθία του

Μια υποθετική ερώτηση της μορφής, σε τι χρειάζεται η Γεωμετρία για ένα θέμα που έχει σχέση με τη μουσική, ίσως να μη μπορούσε να απαντηθεί αντικειμενικά. Το βέβαιο όμως είναι, ότι πριν την όποια τεχνική κατασκευή χρειάζεται ο σχεδιασμός αυτής. Ένα από τα καλύτερα σχεδιαστικά εργαλεία είναι η Γεωμετρία. Είναι εργαλείο που μπορεί να βοηθήσει στην κατανόηση του εγχειρήματος, στην αποφυγή λαθών, στην εξοικονόμηση χρόνου. Μπορεί επίσης να δώσει και νέες ιδέες, νέες δυνατότητες, που σε συνδυασμό με κάποια άλλα θέματα, μπορεί να οδηγήσει σε νέες διαδρομές και αναζητήσεις. Καλό είναι όμως τα νέα δεδομένα, για να γίνονται πιο πιστευτά και πιο κατανοητά, να αποδεικνύονται.

Στα επόμενα κεφάλαια και όπου χρειάζονται αποδείξεις, αυτές υπάρχουν για να τεκμηριώνουν τα γραφόμενα. Οι απαραίτητες γνώσεις για την παρακολούθησή τους είναι οι γυμνασιακές. Εάν πάλι κάποιος θα θελήσει να τις προσπεράσει, μπορεί να το κάνει αποδεχόμενος τα αποτελέσματα και τα συμπεράσματα, χωρίς να χαθεί κάτι από την ουσία των όσων θα αναφερθούν.

Θα ξεκινήσουμε με αναφορά στον αριθμό φ και στην ακολουθίας του. Αναγκαίο είναι, αυτή να είναι σχετικά εκτενής. Εκτός από τα γνωστά χαρακτηριστικά του που τον καθιστούν μοναδικό, θα αναδειχθούν και θα αποδειχθούν ιδιαίτερες ιδιότητές του, που και εργαλεία για την έρευνα μας είναι, αλλά και πρώτη φορά αναφέρονται. Άλλωστε, η ανάδειξη και η ανάπτυξη ενός πολύ ιδιαίτερου και θεμελιώδους, όπως θα φανεί, γεωμετρικού μηχανισμού είναι αυτή, που θα μας δείξει το δρόμο που πρέπει να ακολουθήσουμε.

Πόσο σημαντικός όμως είναι αυτός ο μηχανισμός;

Καταρχήν, έστω και προσεγγιστικά, θα μας δώσει την τιμή του αριθμού π και θα μας τετραγωνίσει τον κύκλο.

Θα μας ωθήσει στην εύρεση «εργαλείων» που θα μας δώσουν την δυνατότητα για περεταίρω προσέγγιση του αριθμού π (απόκλιση της τάξης του 10^{-11}), καθώς και στο λόγο ύπαρξης των δύο τιμών.

Τα ίδια αυτά «εργαλεία» θα μας υποδείξουν την επίδραση του αριθμού φ στις χρονικές μουσικές αξίες, στους ρυθμούς, στην μελωδική απόδοση της ελληνικής γλώσσας και σε πλήθος σπουδαίων φυσικών εξελικτικών φαινομένων, με σπουδαιότερο όλων τον σχεδιασμό και λειτουργία του ίδιου του Σύμπαντος, το κοσμογονικό μοντέλο της πυθαγόρειας Τετρακτύος.

Η περαιτέρω ανάπτυξη του μηχανισμού, μεταξύ άλλων, θα μας δώσει την «άποψη» του αριθμού φ για την δημιουργία της θεμελιώδους μουσικής κλίμακας, την προσέγγιση του στην επίλυση του Δήλιου προβλήματος, καθώς και το σχέδιο κατασκευής της μεγάλης πυραμίδας του Χέοπος.

Αριθμός Φ και Χρυσή Τομή

Στη Γεωμετρία, σαν Χρυσή Τομή ονομάζουμε ένα σημείο Γ το οποίο τέμνει, διαχωρίζει δηλαδή ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ σε δύο άλλα, το ΑΓ και το ΓΒ, έτσι ώστε να ισχύει η σχέση

$$\frac{A\Gamma}{\Gamma B} = \frac{AB}{A\Gamma}$$

Με λόγια.

Όταν ο λόγος του μεγαλύτερου προς το μικρότερο ευθύγραμμο τμήμα, που δημιουργούνται από την τομή ενός αρχικού ευθύγραμμου τμήματος, είναι ίσος με τον λόγο του αρχικού ευθύγραμμου τμήματος προς το μεγαλύτερο, τότε η τομή αυτή ονομάζεται Χρυσή Τομή.

Ο λόγος αυτός έχει όνομα, “φ”, έχει και τιμή. Αυτή είναι ίση με τον αριθμό 1,618033984… που προκύπτει από τη σχέση $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Υπάρχουν αρκετοί γνωστοί τρόποι γεωμετρικής εύρεσης της Χρυσής Τομής. Εδώ θα αναφερθεί η μέθοδος που πρωτοπαρουσιάστηκε στο βιβλίο μου «Γεωμετρικές Κατασκευές στο Πι και Φι» όχι μόνο γιατί ίσως είναι η πιο γρήγορη μέθοδος, αλλά γιατί αποτελεί τη θεμελιώδη λίθο του συνολικού έργου που θα παρουσιαστεί.

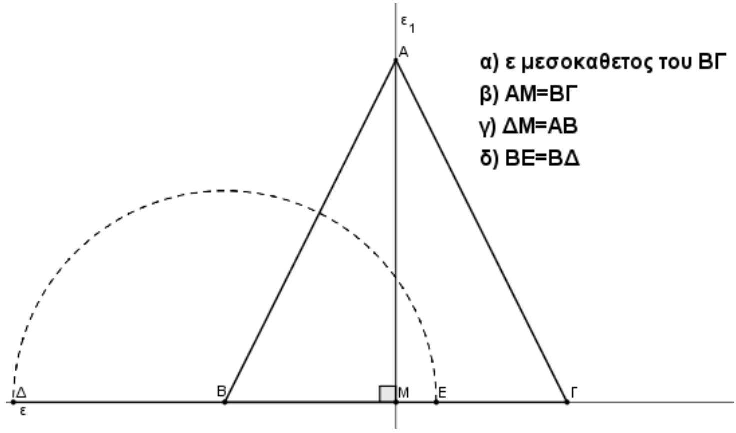
Εύρεση Χρυσής Τομής – Χρυσό Τρίγωνο

Πάνω σε ευθεία ε ορίζουμε ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ, του οποίου την Χρυσή Τομή θέλουμε να βρούμε.

Φέρνουμε την μεσοκάθετο, η οποία τέμνει το ΒΓ ευθύγραμμο τμήμα στο σημείο Μ.

Ορίζουμε ευθύγραμμο τμήμα ΑΜ ίσο με το ΒΓ και έτσι κατασκευάζουμε το ιδιαίτερο ισοσκελές τρίγωνο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ με ύψος προς τη βάση του τριγώνου ίσο με τη βάση.

Επάνω στην ευθεία ε ορίζουμε ευθύγραμμο τμήμα ΔΜ ίσο με το ΑΒ, και στη συνέχεια ΒΕ ευθύγραμμο τμήμα ίσο με το ΔΒ.



Σχέδιο 1.1 Εύρεση Χρυσής Τομής

Αποδεικνύεται ότι το σημείο Ε είναι η Χρυσή Τομή του ΒΓ ευθύγραμμου τμήματος.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Έστω ότι $B\Gamma = \alpha$, άρα και $AM = \alpha$ και $BM = \frac{\alpha}{2}$, γιατί το Μ είναι το μέσον του ΒΓ. Με εφαρμογή του Πυθαγορείου Θεωρήματος στο $\overset{\Delta}{AMB}$ έχουμε:

$$AB = \sqrt{BM^2 + AM^2} = \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \alpha^2} = \sqrt{\frac{\alpha^2+4\alpha^2}{4}} = \sqrt{\frac{5\alpha^2}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}\alpha$$

Για να είναι το σημείο Ε η χρυσή τομή του ΒΓ ευθύγραμμου τμήματος θα πρέπει να ισχύει η σχέση: $\frac{BE}{E\Gamma} = \frac{B\Gamma}{BE}$. Θα υπολογίσουμε τα ευθύγραμμα τμήματα και θα συγκρίνουμε τους λόγους.

$BE = \Delta B$ από κατασκευή, άρα:

$$BE = \Delta B = \Delta M - BM = AB - BM = \frac{\sqrt{5}\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = \frac{(\sqrt{5}-1)\alpha}{2}$$

$$E\Gamma = B\Gamma - BE = \alpha - \frac{(\sqrt{5}-1)\alpha}{2} = \frac{2\alpha-(\sqrt{5}-1)\alpha}{2} = \frac{\alpha(2-\sqrt{5}+1)}{2} = \frac{(3-\sqrt{5})\alpha}{2}$$

Με αντικατάσταση έχουμε: $\frac{BE}{E\Gamma} = \frac{\frac{(\sqrt{5}-1)\alpha}{2}}{\frac{(3-\sqrt{5})\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}}$ (1) και:

$$\frac{B\Gamma}{BE} = \frac{\alpha}{\frac{(\sqrt{5}-1)\alpha}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}-1)^2} = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{5-2\sqrt{5}+1} = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{6-2\sqrt{5}} = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{2(3-\sqrt{5})} = \frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}} \quad (2)$$

Από τη σύγκριση των σχέσεων (1) και (2) προκύπτει ότι όντως $\frac{BE}{E\Gamma} = \frac{B\Gamma}{BE}$, επομένως και το σημείο Ε είναι η Χρυσή Τομή του ΒΓ ευθύγραμμου τμήματος.

Εάν τώρα τον λόγο $\frac{B\Gamma}{BE} = \frac{2}{\sqrt{5}-1}$, από τη σχέση (2) τον μετατρέψουμε με χρήση της ταυτότητας διαφοράς τετραγώνων, τότε παίρνουμε την αριθμητική τιμή του φ. Πράγματι:

$$\frac{B\Gamma}{BE} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{(\sqrt{5}+1)2}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)} = \frac{(\sqrt{5}+1)2}{5-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \varphi$$

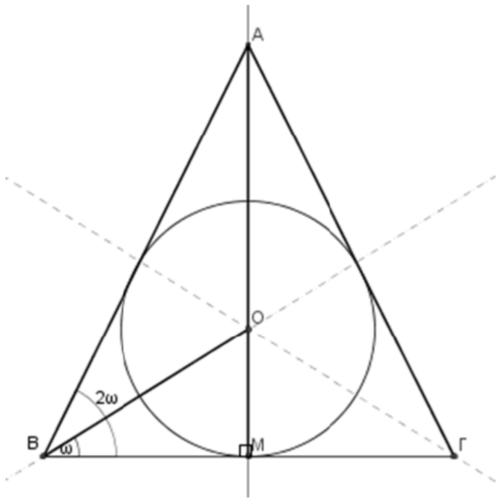
Τί είναι όμως αυτό που μας επιτρέπει το συγκεκριμένο ισοσκελές τρίγωνο να το χαρακτηρίζουμε μοναδικό; Να το χαρακτηρίσουμε ΧΡΥΣΟ ΤΡΙΓΩΝΟ;

Εκτός του ότι μας δίνει την δυνατότητα εύρεσης της χρυσής τομής, όπως είδαμε με την προηγούμενη κατασκευή, οι αναλογίες του αριθμού φ υπάρχουν χωρίς να είναι άμεσα εμφανείς. Μάλιστα, το σημείο Δ εύκολα αποδεικνύεται ότι είναι η εξωτερική χρυσή τομή του ΒΓ ευθυγράμμου τμήματος, δηλαδή ότι ισχύει η σχέση: $\frac{\varDelta\varGamma}{B\varGamma} = \frac{B\varGamma}{\varDelta B}$. Εάν θεωρήσουμε ότι $B\varGamma = \varphi$ τότε έχουμε:

- $BE = 1$
- $E\varGamma = {}^{1}/_{\varphi}$
- $\varDelta\varGamma = \varphi^2$

Το σημαντικότερο όμως είναι ότι, με το ΧΡΥΣΟ ΤΡΙΓΩΝΟ αποδεικνύεται η ΑΜΕΣΗ σχέση του αριθμού φ με τον Μοναδιαίο ΚΥΚΛΟ.

Σχέση αριθμού φ και μοναδιαίου κύκλου



Σχέδιο 1.2 Χρυσό Τρίγωνο και Μοναδιαίος Κύκλος

Όταν λέμε ότι δύο ευθύγραμμα τμήματα έχουν μεταξύ τους λόγο ίσο με τον αριθμό φ, εννοούμε ότι εάν ορίσουμε αυθαίρετα ένα ευθύγραμμο τμήμα σαν μοναδιαίο, τότε το άλλο θα είναι ίσο με φ≈1,618…

Αφού ορίσουμε αυθαίρετα το μοναδιαίο ευθύγραμμο τμήμα, κατασκευάζουμε Χρυσό Τρίγωνο $\overset{\varDelta}{AB\varGamma}$ με βάση ΒΓ ίση με φ. Κατασκευάζουμε τον εγγεγραμμένο κύκλο.

Σκοπός μας είναι να υπολογίσουμε την διάμετρό του.

Το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου Ο είναι το σημείο στο οποίο τέμνονται οι διχοτόμοι των γωνιών του τριγώνου. Φέρνουμε τις διχοτόμους και με κέντρο Ο το σημείο τομής αυτών, κατασκευάζουμε κύκλο ακτίνας $\rho = OM$.

Υπολογισμός της ακτίνας.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\varDelta}{AMB}$ έχουμε: $\varepsilon\varphi B = \frac{AM}{BM} = \frac{\varphi}{\frac{\varphi}{2}} = 2$

Εάν τώρα θεωρήσουμε πως στο $\overset{\varDelta}{OMB}$ ορθογώνιο τρίγωνο η $O\hat{B}M = \widehat{\omega}$ τότε $A\hat{B}M = 2\widehat{\omega}$, γιατί το ΒΜ ευθύγραμμο τμήμα είναι η διχοτόμος της $O\hat{B}M$.

Έστω ότι $\varepsilon\varphi(\omega) = \chi$

Χρησιμοποιώντας τον γνωστό τριγωνομετρικό τύπο της εφαπτομένης διπλάσιας γωνίας και με αντικατάσταση έχουμε:

$$\varepsilon\varphi(2\omega)=\frac{2\varepsilon\varphi(\omega)}{1-\varepsilon\varphi^2(\omega)} \Leftrightarrow\ 2=\frac{2\chi}{1-\chi^2}\Leftrightarrow 2-2\chi^2=2\chi \Leftrightarrow 2\chi^2+2\chi-2=0 \Leftrightarrow$$

$$\chi^2+\chi-1=0$$

Η διακρίνουσα της παραπάνω δευτεροβάθμιας εξίσωσης είναι:

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=1+4=5$, άρα $\chi_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ και έτσι έχουμε τις ρίζες: $\chi_1=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ και $\chi_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}<0$ που την απορύπτουμε.

Βρήκαμε λοιπόν ότι $\varepsilon\varphi OBM=\varepsilon\varphi\omega=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

αλλά $\varepsilon\varphi OBM=\frac{OM}{MB}$ *οπότε*:

$$OM=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot\frac{\varphi}{2}\Leftrightarrow OM=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{4}\Leftrightarrow OM=\frac{5-1}{8}\Leftrightarrow OM=\frac{1}{2}$$

Η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου στο χρυσό τρίγωνο με βάση ίση με φ είναι ίση με 0,5. Άρα, η διάμετρος θα είναι ίση με τη μονάδα.

Αποδείξαμε λοιπόν, ότι ο εγγεγραμμένος κύκλος στο χρυσό τρίγωνο, με βάση ίση με τον αριθμό φ, είναι ο Μοναδιαίος Κύκλος.

Άρα, αποδείξαμε περίτρανα ότι ο αριθμός φ σχετίζεται με τον μοναδιαίο κύκλο.

Είναι όμως γνωστό πως η περίμετρος του μοναδιαίου κύκλου είναι ίση με τον άλλο μοναδικό αριθμό, τον αριθμό π≈3,1416.

Δια της κλασικής επαγωγικής σκέψης θα περιμέναμε λογικά να ισχύει η επόμενη πρόταση.

Επειδή ο αριθμός φ σχετίζεται με τον μοναδιαίο κύκλο και ο μοναδιαίος κύκλος σχετίζεται με το αριθμό π, διότι η περίμετρός του είναι ίση με τον αριθμό π, τότε θα πρέπει και ο αριθμός φ, με κάποια σχέση να συνδέεται με τον αριθμό π.

Ο αριθμός φ όμως, καμία απολύτως σχέση δεν έχει με τον αριθμό π, όπως μας λέει η επιστημονική κοινότητα, γιατί έχει αποδειχθεί ότι ο αριθμός π είναι υπερβατικός.

Παρόλα αυτά και με βάση τους προηγούμενους συσχετισμούς, η αμφιβολία και ενδεχομένως η αμφισβήτηση, έχουν λόγο ύπαρξης. Άλλωστε η μαθηματική τιμή του $\frac{6}{5}\varphi^2$ είναι $3{,}14164\ldots$

Η γεωμετρική εύρεση του ευθύγραμμου τμήματος με τιμή ίση με $\frac{6}{5}\varphi^2$ είναι το δεύτερο βήμα, μετά την εύρεση της Χρυσής Τομής και την κατασκευή του Χρυσού Τριγώνου.

Είναι το βήμα που προηγείται της πρώτης ισχυρής ένδειξης της σχέσης του αριθμού φ με τις μουσικές κλίμακες.

Είναι επίσης, το βήμα που καταδεικνύει τον συγκεκριμένο γεωμετρικό μηχανισμό και τον τρόπο εξέλιξής του.

Σχέση αριθμού φ και αριθμού π –Περίμετρος Μοναδιαίου Κύκλου

Παίρνουμε σαν οδηγό τον τρόπο εύρεσης της Χρυσής Τομής ευθυγράμμου τμήματος ΒΓ, την οποίο έχουμε βρει με την βοήθεια του Χρυσού Τριγώνου. Θεωρούμε ότι $B\Gamma = \varphi$. Τα σημεία Δ και Ε είναι η εξωτερική και η εσωτερική Χρυσή Τομή του ΒΓ ευθύγραμμου τμήματος αντίστοιχα.

Φέρνουμε δύο ευθείες, τις ε και ε΄ που περνούν κάθετα από τα άκρα Β και Γ του ευθύγραμμου τμήματος.

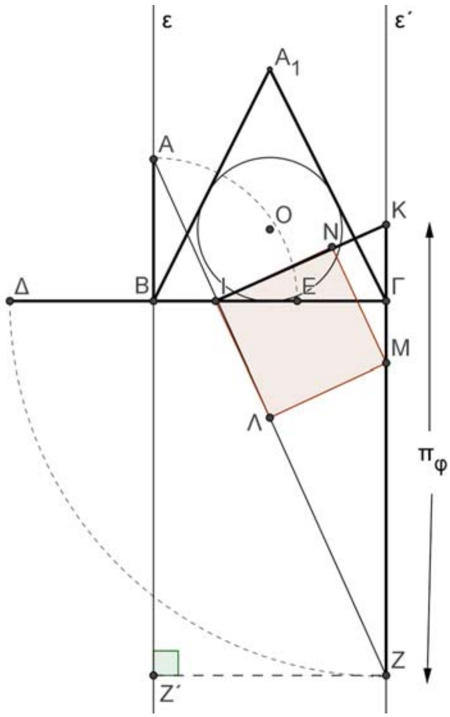
Στην ευθεία ε ορίζουμε ευθύγραμμο τμήμα $AB = \Delta B = BE = 1$ και στην ε΄ ευθύγραμμο τμήμα $\Gamma Z = \Delta Z = \varphi^2$.

Φέρνουμε το AZ ευθύγραμμο τμήμα που τέμνει το $B\Gamma$ στο σημείο I και από το σημείο I φέρνουμε ευθεία κάθετη στο AZ που τέμνει την ε' στο σημείο K.

Αποδεικνύεται ότι: $ZK = \frac{6}{5}\varphi^2 = 3{,}14164 \ldots$

Ορίζουμε σαν Ζ΄ την προβολή του σημείου Ζ στην ευθεία ε. Από την προφανή ομοιότητα των τριγώνων $\overset{\Delta}{ABI}$ και $\overset{\Delta}{AZ'Z}$ (ορθογώνια με κοινή οξεία γωνία, $\hat{A}$) προκύπτει ότι:

$$\frac{AB}{BI} = \frac{AZ'}{Z'Z} \Leftrightarrow BI = \frac{AB \cdot Z'Z}{AZ'} = \frac{1 \cdot \varphi}{\varphi^2+1} = \frac{\varphi}{\varphi+2} = \frac{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}+\frac{4}{2}} = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+5} = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}(1+\sqrt{5})} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$



Σχέδιο 1.3 Εύρεση του π_φ- Τετραγωνισμός του Κύκλου (προσεγγιστικά)

Επίσης, τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{ABI}$ και $\overset{\Delta}{Z\Gamma I}$ είναι όμοια (ορθογώνια με κατά κορυφή γωνίες ίσες) και με λόγο ομοιότητας $\frac{\Gamma Z}{AB} = \frac{\varphi^2}{1} = \varphi^2$. Άρα και $I\Gamma = BI \cdot \varphi^2 = \frac{\varphi^2}{\sqrt{5}}$.

Έτσι έχουμε $K\Gamma = BI \cdot I\Gamma = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\varphi^2}{\sqrt{5}} = \frac{\varphi^2}{5}$ και $KZ = K\Gamma + \Gamma Z = \frac{\varphi^2}{5} + \varphi^2 = \frac{6}{5}\varphi^2$.

Αλλά $\frac{6}{5}\varphi^2 = 3{,}14164 \ldots$

Αυτή είναι και η καταρχήν πρόταση του αριθμού φ για την τιμή του π.

Θα την συμβολίσουμε σαν $\boxed{\pi_\varphi = \frac{6}{5}\varphi^2 = 3{,}14164 \ldots}$

Η απόκλιση της τιμής αυτής από την ισχύουσα τιμή του π είναι της τάξης του 10^{-4} $\frac{\pi_\varphi}{\pi} = \frac{3{,}14164\ldots}{3{,}14159\ldots} = 1{,}000015321\ldots$

Εάν αυτή η απόκλιση, η οποία δεν είναι μεγάλη, αλλά ούτε και αμελητέα, θεωρηθεί αποδεκτή, τότε το ευθύγραμμο τμήμα ΚΖ θα είναι ίσο με την περίμετρο του μοναδιαίου κύκλου.

Τετραγωνισμός του κύκλου (προσεγγιστικά)

Βρίσκουμε το μέσον Λ του ΑΖ ευθύγραμμου τμήματος. Από το σημείο Λ φέρνουμε ευθεία κάθετη στο ΑΖ ευθύγραμμο τμήμα που τέμνει την ε΄ στο σημείο Μ.

Υπολογίζουμε με το Πυθαγόρειο Θεώρημα τα ΑΖ και ΑΙ ευθύγραμμα τμήματα. Έχουμε:

$AZ = \sqrt{AZ'^2 + Z'Z^2} = \sqrt{(\varphi^2+1)^2 + \varphi^2} = \sqrt{6\varphi^2} = \sqrt{6}\varphi$.

$AI = \sqrt{AB^2 + BI^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} = \sqrt{\frac{6}{5}}$. Έτσι:

$$I\Lambda = \frac{AZ}{2} - AI = \frac{\sqrt{6}\cdot\varphi}{2} - \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{6}(\sqrt{5}\varphi - 2)}{2\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{6}{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) - \frac{4}{2}}{2}$$

$$= \sqrt{\frac{6}{5}}\cdot\frac{\frac{5+\sqrt{5}-4}{2}}{2} = \sqrt{\frac{6}{5}}\cdot\frac{\varphi}{2}$$

Επίσης $\overset{\Delta}{Z\Lambda M} \sim \overset{\Delta}{ABI}$ (ορθογώνια και $\hat{Z} = \hat{A}$ εντός εναλλάξ). Έτσι:

$$\frac{\Lambda M}{\Lambda Z} = \frac{BI}{AB} \Leftrightarrow \Lambda M = \frac{\frac{AZ}{2}\cdot BI}{AB} = \frac{\frac{\sqrt{6}\varphi}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}}{1} = \sqrt{\frac{6}{5}}\cdot\frac{\varphi}{2} = I\Lambda$$

Αποδείχθηκε λοιπόν ότι $I\Lambda = \Lambda M = \sqrt{\frac{6}{5}}\cdot\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{6\varphi^2}{5}\cdot\frac{1}{2}}$.

Κατασκευάζουμε το τετράγωνο ΙΛΜΝ . Το εμβαδόν του θα είναι $E_{(I\Lambda MN)} = I\Lambda^2 = \frac{6}{5}\varphi^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \pi_\varphi\left(\frac{1}{2}\right)^2$

Το εμβαδόν αυτό, εάν θα μπορούσε να θεωρηθεί ότι $\pi_\varphi = \frac{6}{5}\varphi^2 = \pi$, θα ήταν ίσο με το εμβαδόν του μοναδιαίου κύκλου (δηλαδή του κύκλου με διάμετρο ίση με τη μονάδα), το οποίο και εγγράφεται στο Χρυσό Τρίγωνο με βάση ίση με τον αριθμό φ.

$E_{(I\Lambda MN)} = E_{\left(O,\frac{1}{2}\right)}$

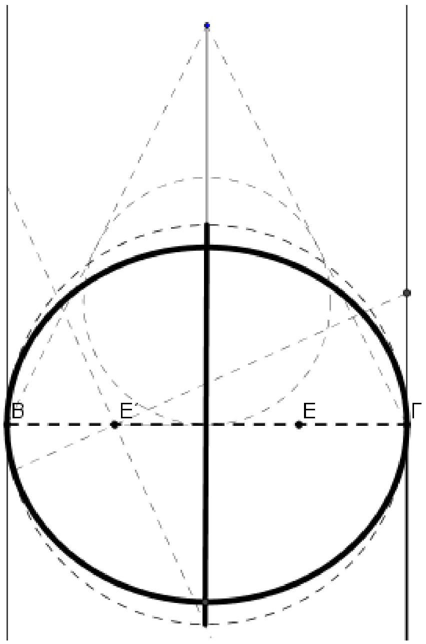
Χρυσή Έλλειψη

Στην προηγούμενη κατασκευή ορίστηκε ένα χαρακτηριστικό σημείο του $ΒΓ$ ευθυγράμμου τμήματος, το σημείο Ε΄. Υπάρχει όμως και ένα δεύτερο σημείο, το Ε, το οποίο είναι το συμμετρικό του Ε΄ ως προς το μέσον Μ του $ΒΓ$ ευθυγράμμου τμήματος.

Τα σημεία Ε και Ε΄ μπορούν να αποτελέσουν εστίες μιας πολύ συγκεκριμένης έλλειψης με μεγάλο άξονα το ευθύγραμμο τμήμα $ΒΓ$ και μικρό άξονα διπλάσιο της απόστασης των δύο εστιών Ε και Ε΄.

Αποδεικνύεται ότι ισχύει: $\frac{ΕΕ'}{ΒΕ'} = \varphi \; και \; \frac{Ε'Γ}{ΕΕ'} = \varphi$

Την μοναδική αυτή έλλειψη, η οποία έχει άμεση σχέση με τον αριθμό φ και η οποία και σαν σύμβολο εμφανίζεται σαν το γράμμα $Φ$, θα την χαρακτηρίσουμε Χρυσή Έλλειψη.



Σχέδιο 1.4 Χρυσή Έλλειψη

Ο τετραγωνισμός του κύκλου, ο κυβισμός της σφαίρας, η Χρυσή Έλλειψη, οι αποδείξεις τους καθώς και ένα πλήθος συμπερασμάτων παρουσιάζονται αναλυτικά στο βιβλίο «Γεωμετρικές Κατασκευές στο Πι και Φι».

Εδώ είδαμε την απλότητα και την ευκολία με την οποία προχωρήσαμε στο δεύτερο κατασκευαστικό βήμα και τη γοητεία της αρμονίας με την οποία ο μηχανισμός μας προσφέρει απλόχερα την δυνατότητα τετραγωνισμού του κύκλου, αρκεί να αποδεχθούμε ότι ισχύει η σχέση $\pi = \frac{6}{5}\varphi^2$, έστω και προσεγγιστικά.

Γιατί όμως να υπάρχουν δύο τιμές για τον αριθμό π; Ο λόγος θα μας αποκαλυφθεί σταδιακά και είναι απλά συναρπαστικός. Αρχικά ο αριθμός φ θα μας δώσει και την ισχύουσα τιμή του αριθμού π με πάρα πολύ μεγάλη προσέγγιση. Για να το πετύχουμε όμως, θα χρειαστούμε κάποια εργαλεία, γνώσεις που θα μας δώσει η ακολουθία φ^{ν}. Θα χρειαστούμε και ένα πολύτιμο εργαλείο, έναν αριθμό που θα μας τον δώσει το Χρυσό Τρίγωνο.

Αυτά θα δούμε αμέσως παρακάτω.

Μια σπουδαία ιδιότητα: $\boldsymbol{\varphi^{\nu+2} = \varphi^{\nu+1} + \varphi^{\nu}}$

Ίσως η σπουδαιότερη ιδιότητα της ακολουθίας του αριθμού φ είναι η ακόλουθη.

Αποδεικνύεται ότι ο κάθε επόμενος όρος της γεωμετρικής προόδου του φ είναι ίσος με το άθροισμα των δύο προηγούμενων. Έτσι

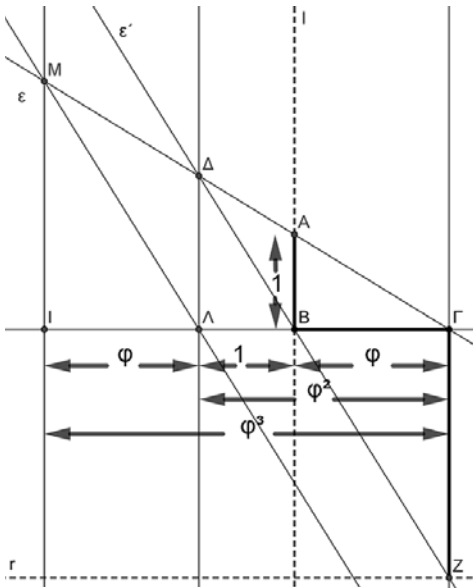
$$\varphi^2 = \varphi + 1$$

$$\varphi^3 = \varphi^2 + \varphi$$

και γενικότερα $\quad \varphi^{\nu+2} = \varphi^{\nu+1} + \varphi^{\nu}$

Η αριθμητική του απόδειξη προκύπτει από τη γνωστή τιμή του αριθμού $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, με αντικατάσταση.

Η γεωμετρική της απόδειξη έχει περισσότερη αξία στην συγκεκριμένη περίπτωση, γιατί μας γίνονται ορατοί στην κυριολεξία οι λόγοι για τους οποίους μπορούμε να συνδέσουμε τις χρονικές αξίες σε ένα μουσικό μέτρο, με τον αριθμό φ.



Σχέδιο 1.5 Απόδειξη: $\boldsymbol{\varphi^2 = \varphi + 1}$

Στην γνωστή κατασκευή όπου: AB ευθύγραμμο τμήμα είναι ίσο με τη μονάδα,

$B\Gamma$ ευθύγραμμο τμήμα είναι ίσο με φ και κάθετο στο AB και

ΓZ ευθύγραμμο τμήμα είναι ίσο με φ^2 και κάθετο στο $B\Gamma$,

φέρνουμε τις ευθείες ε και ε', που διέρχονται από τα σημεία Α,Γ και Β,Ζ αντίστοιχα. Αυτές τέμνονται στο σημείο Δ.

Από το σημείο Δ, φέρνουμε ευθεία κάθετη στην ΒΓ, η οποία την τέμνει στο σημείο Λ.

Αποδεικνύεται ότι:

$$\Lambda B = 1 \quad \kappa\alpha\iota \quad \Lambda\Gamma = \varphi^2$$

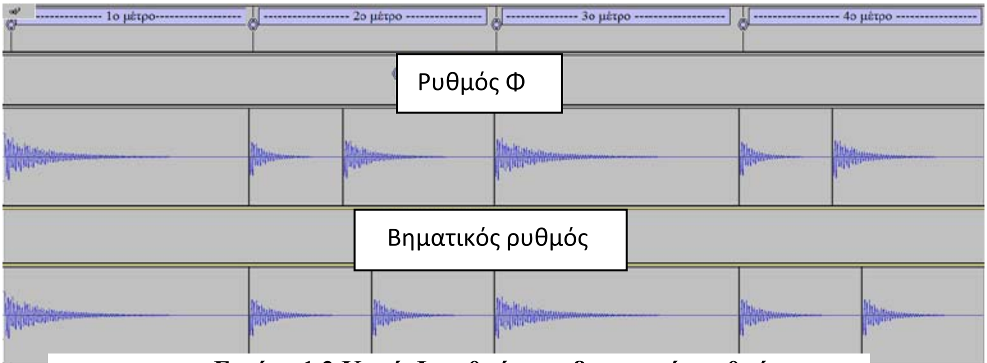
Επομένως, θα ισχύει: $\Lambda\Gamma = \Lambda B + B\Gamma \iff \varphi^2 = 1 + \varphi$ (Γεωμετρικές Κατασκευές στο Πι και Φι).

Ευθεία παράλληλη στην ΔB, που περνά από το σημείο Λ, τέμνει την ε στο σημείο M. Η προβολή του στην ευθεία AB είναι το σημείο I. Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι $I\Gamma = \varphi^3$ και $I\Gamma = I\Lambda + \Lambda\Gamma$, από τις οποίες συνεπάγεται ότι:

$$\varphi^3 = \varphi + \varphi^2$$

Η πρώτη εμφάνιση κατά Φ μουσικών ρυθμών

Θα θεωρήσουμε ότι η ευθεία που ορίζεται από τα σημεία Λ και Γ είναι ο άξονας μέτρησης του χρόνου ενός μουσικού θέματος και ότι το κάθε μέτρο έχει χρονική αξία ίση με $ΛΓ = αφ^2$. Έστω ότι έχουμε τέσσερα τέτοια μέτρα, δηλαδή ένα τετράμετρο. Εάν η κάθε μουσική χρονική αξία είναι ίση με το χρόνο $ΛΓ$ ή με ακέραιες υποδιαιρέσεις του, τότε έχουμε ένα κλασικό βηματικό ρυθμό. Εάν όμως χωρίσουμε τις χρονικές αξίες σε υποδιαιρέσεις, όπως $ΛΓ = ΛΒ + ΒΓ$ δηλαδή $αφ^2 = αφ + α \cdot 1$, τότε γίνεται αντιληπτό πως ο ρυθμός που θα προκύπτει κάθε φορά και ανάλογα με την επιθυμία μας, θα είναι διαφορετικός, είτε $φ$ ρυθμός, είτε μικτός. Περισσότερα όμως θα δούμε παρακάτω.



Εικόνα 1.2 Κατά Φ ρυθμός και βηματικός ρυθμός

Πριν το επόμενο εξελικτικό βήμα του παραπάνω καταρχήν γεωμετρικού μηχανισμού, ας δούμε για να θυμηθούμε ή για να κατανοήσουμε κάποια βασικά πράγματα για την μουσική.

Όλοι μας, κάποια στιγμή, έχουμε πιάσει στα χέρια μας ή τουλάχιστον έχουμε δει μια κιθάρα ή ένα άλλο έγχορδο μουσικό όργανο. Κτυπώντας με τα δάκτυλα των χεριών μας ή με πένα τις χορδές, προκαλούμε ταλάντωση αυτών, με αποτέλεσμα να δημιουργούνται ήχοι. Ένα από τα χαρακτηριστικά γνωρίσματα του ήχου είναι ο τόνος του, δηλαδή η συχνότητα του ήχου. Σαν συχνότητα του ήχου ονομάζουμε τον αριθμό των ταλαντώσεων της πηγής του ήχου σε ένα δευτερόλεπτο. Στην συγκεκριμένη περίπτωση της κιθάρας, η συχνότητα του ήχου που παράγεται είναι ίση με τον αριθμό των ταλαντώσεων της χορδής της στο δευτερόλεπτο. Εύκολα γίνονται αντιληπτοί οι παράγοντες που μπορούν να επηρεάσουν την συχνότητα που παράγει μία χορδή. Αυτοί είναι το υλικό της χορδής, το πάχος της χορδής, δηλαδή η διατομή της, η δύναμη με την οποία έχουμε τεντώσει την χορδή και φυσικά το μήκος αυτής. Ας θεωρήσουμε τους πρώτους παράγοντες σταθερούς, δηλαδή ότι τη συγκεκριμένη χορδή στην κιθάρα την έχουμε κουρδίσει (στην ουσία τεντώσει, σφίξει με συγκεκριμένη δύναμη). Σαν μήκος της χορδής λογίζεται η απόσταση των σταθερών σημείων της, δηλαδή από το ζυγό (που στην ουσία διαχωρίζει την κεφαλή του μπράτσου της κιθάρας από τον λαιμό της) έως