Κώστας Χρ. Μαντζουκίδης

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ ΣΤΟ

πι ΚΑΙ φι

Διεύθυνση επικοινωνίας:

Μαντζουκίδης Κωνσταντίνος

Πτυχιούχος Τμήματος Χημείας Α.Π.Θ.

Τ.Θ. 1373, Τ.Κ. 57500, Τρίλοφος Θεσσαλονίκης

Τηλ: 23920 64829 – 6974 995091

e-mail : costasmantz@gmail.com

Το μεγαλύτερο και πιο σημαντικό μέρος της συγγραφής που ακολουθεί,
έχει κατατεθεί στη συμβολαιογράφο Ε. Φίτζιου με αριθμό Πράξης Κατάθεσης
Εγγράφου 10.087/21-4-2010

ISBN 978-960-93-3636-9

Εκτύπωση
Βιβλιοδεσία

Π. ΖΗΤΗ & Σια ΟΕ
18^{ο} χλμ Θεσσαλονίκης - Περαίας
Τ.Θ. 4171 • Περαία Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19
Τηλ.: 2392.072.222 - Fax: 2392.072.229 • e-mail: info@ziti.gr

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
www.ziti.gr

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ:
Αρμενοπούλου 27 - 546 35 Θεσσαλονίκη • Τηλ.: 2310-203.720 • Fax 2310-211.305
e-mail: sales@ziti.gr

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΑΘΗΝΩΝ - ΕΝΩΣΗ ΕΚΔΟΤΩΝ ΒΙΒΛΙΟΥ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ:
Στοά του Βιβλίου (Πεσμαζόγλου 5) - 105 64 ΑΘΗΝΑ • Τηλ.-Fax: 210-3211.097

ΑΠΟΘΗΚΗ ΑΘΗΝΩΝ - ΠΩΛΗΣΗ ΧΟΝΔΡΙΚΗ:
Ασκληπιού 60 - Εξάρχεια 114 71, Αθήνα • Τηλ.-Fax: 210-3816.650 • e-mail: athina@ziti.gr

ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ: www.ziti.gr

Πρόλογος

Σκοπός της εργασίας αυτής είναι η ανάδειξη ενός πρωτότυπου γεωμετρικού μηχανισμού ο οποίος μου έδωσε πολλές απαντήσεις σε παλαιότερα ερωτήματα αλλά και ταυτόχρονα μου δημιούργησε αρκετά νέα καθώς και αρκετές προσδοκίες.

Η προσέγγιση του μηχανισμού αυτού προσπάθησα να είναι όσο γίνεται πιο μαθηματικά τεκμηριωμένη. Τα αποτελέσματα αυτής, σε κάποια σημεία με οδήγησαν σε συμπεράσματα πέραν των μαθηματικών, για τα οποία γίνεται απλώς νύξη.

Ιδιαίτερη αίσθηση μου προκάλεσε η μαθηματική φιλοσοφία που πηγάζει μέσα από τον μηχανισμό. Το ότι δηλαδή όλα ξεκινούν από τους λόγους και τα σχήματα. Από αυτούς προκύπτουν οι πιο γνωστές γεωμετρικές σχέσεις και κατόπιν, η ανάγκη μέτρησης αυτών, μας οδήγησε στον ορισμό μονάδας, αριθμών και αριθμητικών πράξεων.

Η κλιμακούμενη ανάπτυξη του μηχανισμού κρατάει αμείωτο το ενδιαφέρον μέχρι τέλους και οι μαθηματικά τεκμηριωμένες αποδείξεις πιστεύω ότι άρουν την όποια δογματική αποδοχή ή απόρριψη αυτών.

Τέλος, υπογραμμίζοντας την απλότητα του μηχανισμού αυτού καθώς και την αβίαστη ακολουθία αποτελεσμάτων και συμπερασμάτων, σας αναφέρω ότι οι γνώσεις που απαιτούνται για την κατανόησή του είναι απλά γυμνασιακές, πράγμα που τον κάνει εύκολα προσβάσιμο σε πολλούς.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 4
ΜΗΧΑΝΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑ ΕΞΙΣΩΣΗ

Κεφάλαιο 5
ΜΗΧΑΝΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΟΣ Φ

Κεφάλαιο 1

ΜΗΧΑΝΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΤΜΗΜΑΤΩΝ

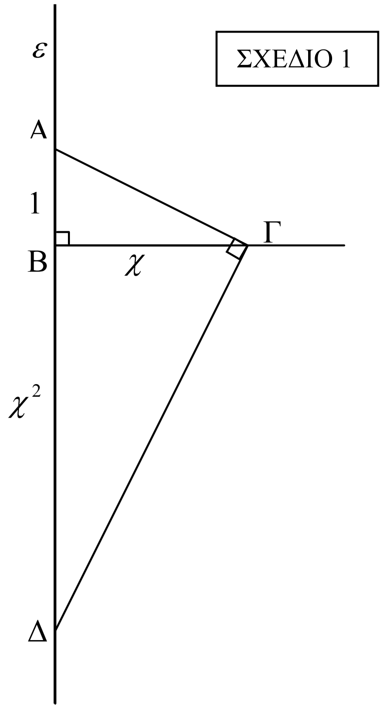
Για την καλύτερη κατανόηση του μηχανισμού είναι απαραίτητο να ξεκινήσουμε με μία γνωστή και συγκεκριμένη μέθοδο εύρεσης του τετραγώνου οποιουδήποτε ευθύγραμμου τμήματος γιατί αυτή αποτελεί τη βάση του μηχανισμού, η οποία θα αναπτυχθεί παρακάτω. Πιστεύω ότι είναι κατανοητό πως για να οριστεί γραμμικά (μονοδιάστατα) οποιαδήποτε μη μονοδιάστατο μέγεθος (δυνάμεις, ρίζες, σχήματα στο επίπεδο ή στο χώρο κ.λ.π.), πρέπει πρώτα να οριστεί η μονάδα μέτρησης , για αυτόν τον λόγο και ενώ τα γενεσιουργά μονοδιάστατα μεγέθη παραμένουν σταθερά ως προς το μέγεθος, οι γραμμικές απεικονίσεις των μη μονοδιάστατων μεγεθών παίρνουν μεγέθη και τιμές εξαρτώμενες του μεγέθους της μονάδας μέτρησης που αυθαίρετα εμείς κάθε φορά ορίζουμε.

ΕΥΡΕΣΗ ΤΕΤΡΑΓΩΝΟΥ & ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΡΙΖΑΣ ΟΠΟΙΟΥΔΗΠΟΤΕ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΘΕΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ (ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΥ ΤΜΗΜΑΤΟΣ)

Έστω ευθύγραμμο τμήμα $ΒΓ = \chi$. Από το σημείο Β φέρνουμε ευθεία ε κάθετη στη ΒΓ και παίρνουμε τμήμα $ΑΒ = 1$.Φέρνουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ και από το Γ ευθεία κάθετη στο ΑΓ η οποία τέμνει την ευθεία ε στο σημείο Δ. Το ευθύγραμμο τμήμα ΒΔ ισούται με το τετράγωνο του ευθυγράμμου τμήματος ΒΓ.

$$ΒΔ = ΒΓ^2 .$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:



Στο $\overset{\Delta}{\mathrm{A\Gamma\Delta}}$ ορθογώνιο τρίγωνο είναι γνωστό από την ομοιότητα των τριγώνων που σχηματίζονται φέρνοντας το ύψος $\mathrm{B\Gamma}$ προς την υποτείνουσα ότι ισχύει:

$$\mathrm{AB} \cdot \mathrm{B\Delta} = \mathrm{B\Gamma}^2 \Leftrightarrow 1 \cdot \mathrm{B\Delta} = \mathrm{B\Gamma}^2 \Leftrightarrow \underline{\mathrm{B\Delta} = \mathrm{B\Gamma}^2}$$

Επίσης ισχύει: $\mathrm{A}\overset{\Delta}{\mathrm{B}}\Gamma \sim \mathrm{A}\overset{\Delta}{\Gamma}\Delta$ άρα:

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A\Gamma}} = \frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{A\Delta}} \Leftrightarrow \mathrm{A\Gamma}^2 = \mathrm{AB} \cdot \mathrm{A\Delta} \Leftrightarrow \mathrm{A\Gamma}^2 = 1 \cdot \left(\chi^2 + 1\right) \Leftrightarrow \mathrm{A\Gamma}^2 = \chi^2 + 1 \Leftrightarrow$$

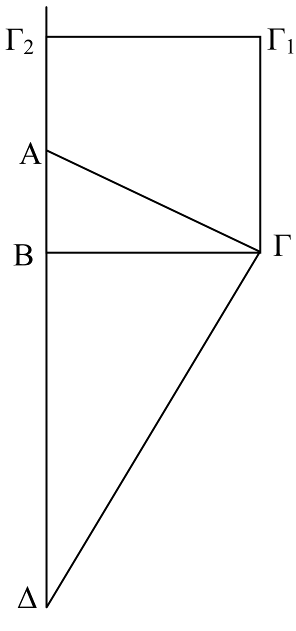
$$\mathrm{A\Gamma} = \sqrt{\chi^2 + 1}$$

Επίσης $\mathrm{A}\overset{\Delta}{\mathrm{B}}\Gamma \sim \Gamma\overset{\Delta}{\mathrm{B}}\Delta$ άρα $\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A\Gamma}} = \dfrac{\mathrm{\Gamma B}}{\Gamma\Delta} \Leftrightarrow 1 \cdot \Gamma\Delta = \mathrm{A\Gamma} \cdot \mathrm{B\Gamma} \Leftrightarrow$

$$\Gamma\Delta = \chi \cdot \left(\chi^2 + 1\right)$$

ΣΧΟΛΙΑ:

- Όλα τα ευθύγραμμα τμήματα βρέθηκαν με αναλογίες όμοιων τριγώνων , κάτι που θα μας χρειαστεί παρακάτω.
- Είναι απαραίτητη η χρήση μοναδιαίου ευθύγραμμου τμήματος, (μονάδας μέτρησης) έτσι ώστε να έχει και νόημα η έννοια της μέτρησης του τετραγώνου ενός ευθυγράμμου τμήματος.
- Ο άξονας στον οποίο παριστάνονται τα τετράγωνα ευθυγράμμων τμημάτων μας δίνει μονοδιάστατα το εμβαδόν των γεωμετρικών δυσδιάστατων τετραγώνων.



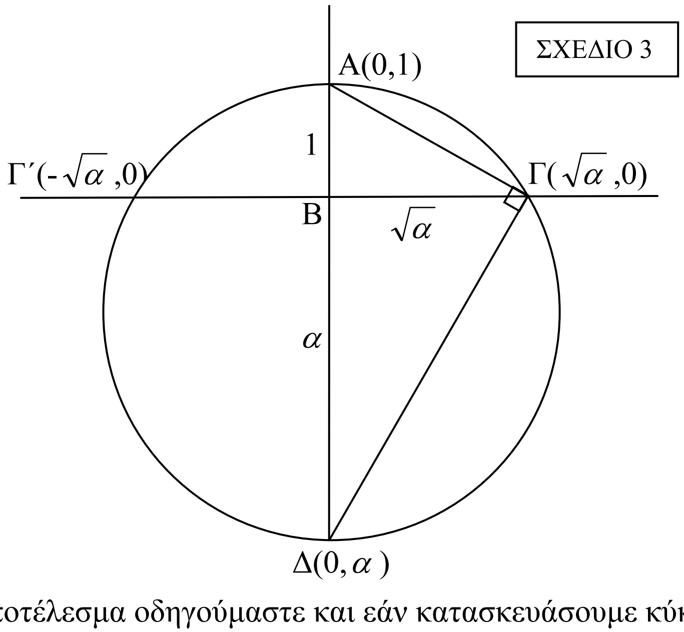
ΣΧΕΔΙΟ 2

Έτσι το εμβαδόν του τετραγώνου $ΒΓΓ_1Γ_2$ αριθμητικά ισούται με το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος. ΒΔ εφόσον θεωρήσουμε το ΑΒ ευθύγραμμο τμήμα ίσο με τη μονάδα.

ΕΥΡΕΣΗ ΤΟΥ ΤΕΤΡΑΓΩΝΟΥ & ΤΗΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΡΙΖΑΣ ΕΝΟΣ ΑΡΙΘΜΟΥ ΣΕ ΟΡΘΟΚΑΝΟΝΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΞΟΝΩΝ

Σ' ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων ,θέτουμε την ορθή κορυφή ενός γνώμονα πάνω στον άξονα $\chi\chi'$ στην τιμή του αριθμού α του οποίου την τιμή του τετραγώνου του, θέλουμε να βρούμε. Τον προσαρμόζουμε έτσι ώστε η μία κάθετη πλευρά του να περνά από την τιμή 1 του άξονα $\psi\psi'$. Τότε, η άλλη κάθετη πλευρά του τέμνει τον άξονα $\psi\psi'$ σε σημείο που η απόλυτη τιμή του είναι ίση με τον αριθμό α υψωμένο στο τετράγωνο $\left(\alpha^2\right)$.

Ομοίως ,για να υπολογίσουμε την τετραγωνική ρίζα ενός αριθμού α, στον άξονα $\psi\psi'$ τοποθετούμε την μία κάθετη πλευρά του γνώμονα ώστε να περνάει από τον αριθμό αυτόν και περιστρέφουμε τον γνώμονα έτσι ώστε η άλλη κάθετη πλευρά του να περνάει από το σημείο $(0,1)$ και η κορυφή της ορθής του γωνίας να βρίσκεται στον άξονα $\chi\chi'$. Το σημείο αυτό στον άξονα $\chi\chi'$ είναι η τιμή της τετραγωνικής ρίζας του αριθμού α.



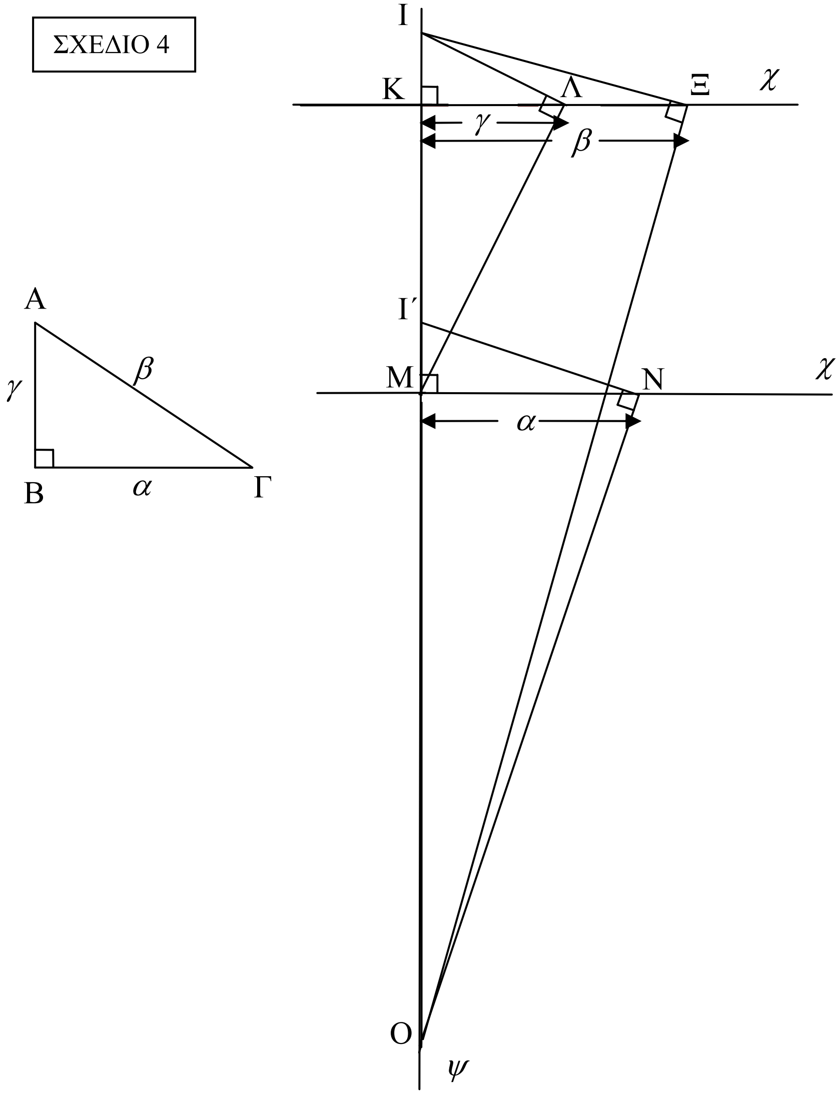
Στο ίδιο αποτέλεσμα οδηγούμαστε και εάν κατασκευάσουμε κύκλο με διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα $\mathrm{A\Delta} = \mathrm{AB} + \mathrm{B\Delta} = 1 + \alpha$. Τα σημεία Γ, Γ' που ο κύκλος τέμνει τον άξονα $\chi\chi'$ είναι οι δύο ρίζες $\sqrt{\alpha}$ και $-\sqrt{\alpha}$

Η μέθοδος αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να μας επαληθεύσει κατασκευαστικά την ορθότητα του Πυθαγορείου Θεωρήματος.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΣΤΙΚΗ ΕΠΑΛΗΘΕΥΣΗ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ

Έστω τυχαίο ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$ στο οποίο θέλουμε να επαληθεύσουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα.

ΣΧΕΔΙΟ 4



Σε ευθεία χ παίρνουμε ευθύγραμμο τμήμα $\mathrm{K\Lambda} = \mathrm{AB}$. Από το σημείο K φέρνουμε ευθεία ψ κάθετη στην ευθεία χ και ορίζουμε τυχαίο ευθύγραμμο τμήμα IK. Φέρνουμε το $\mathrm{I\Lambda}$ και από το σημείο Λ ευθεία κάθετη στην $\mathrm{I\Lambda}$ που τέμνει την ψ στο σημείο M. Οπότε στο $\mathrm{I}\overset{\Delta}{\Lambda}\mathrm{M}$ ορθογώνιο τρίγωνο ισχύει

$$\mathrm{IK} \cdot \mathrm{KM} = \mathrm{K\Lambda}^2 \Leftrightarrow \mathrm{KM} = \frac{\mathrm{K\Lambda}^2}{\mathrm{IK}} \qquad (1).$$

Από το σημείο M φέρνουμε ευθεία χ' κάθετη στην ψ και παίρνουμε ευθύγραμμο τμήμα $\mathrm{MN} = \mathrm{B\Gamma}$. Επίσης στην ευθεία ψ παίρνουμε ευθύγραμμο τμήμα $\mathrm{I'M} = \mathrm{IK}$. Όπως και πριν , φέρνουμε την $\mathrm{I'N}$ και την κάθετη σε αυτήν που τέμνει την ευθεία ψ στο σημείο O. Στο $\mathrm{I'}\overset{\Delta}{\mathrm{N}}\mathrm{O}$ ορθογώνιο τρίγωνο ισχύει:

$$\mathrm{I'M} \cdot \mathrm{MO} = \mathrm{MN}^2 \Leftrightarrow \mathrm{MO} = \frac{\mathrm{MN}^2}{\mathrm{I'M}} \Leftrightarrow \mathrm{MO} = \frac{\mathrm{MN}^2}{\mathrm{IK}} \qquad (2).$$

Τέλος στην ευθεία χ ορίζουμε ευθύγραμμο τμήμα $\mathrm{K\Xi} = \mathrm{A\Gamma}$, φέρνουμε το τμήμα $\mathrm{I\Xi}$ και την κάθετη σε αυτό η οποία επίσης τέμνει την ευθεία ψ στο σημείο O. Για το ορθογώνιο τρίγωνο $\mathrm{I}\overset{\Delta}{\Xi}\mathrm{O}$ ισχύει

$$\mathrm{IK} \cdot \mathrm{KO} = \mathrm{K\Xi}^2 \Leftrightarrow \mathrm{KO} = \frac{\mathrm{K\Xi}^2}{\mathrm{IK}} \qquad (3).$$

Έχουμε $\mathrm{KO} = \mathrm{KM} + \mathrm{MO}$ και με αντικατάσταση από τις σχέσεις (1),(2) και (3) έχουμε

$$\frac{\mathrm{K\Xi}^2}{\mathrm{IK}} = \frac{\mathrm{K\Lambda}^2}{\mathrm{IK}} + \frac{\mathrm{MN}^2}{\mathrm{IK}} \Leftrightarrow \mathrm{K\Xi}^2 = \mathrm{K\Lambda}^2 + \mathrm{MN}^2 \Leftrightarrow \mathrm{A\Gamma}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{B\Gamma}^2$$

δηλαδή η ισχύς του Πυθαγόρειου Θεωρήματος σε τυχαίο ορθογώνιο τρίγωνο $\mathrm{A}\overset{\Delta}{\mathrm{B}}\Gamma$.

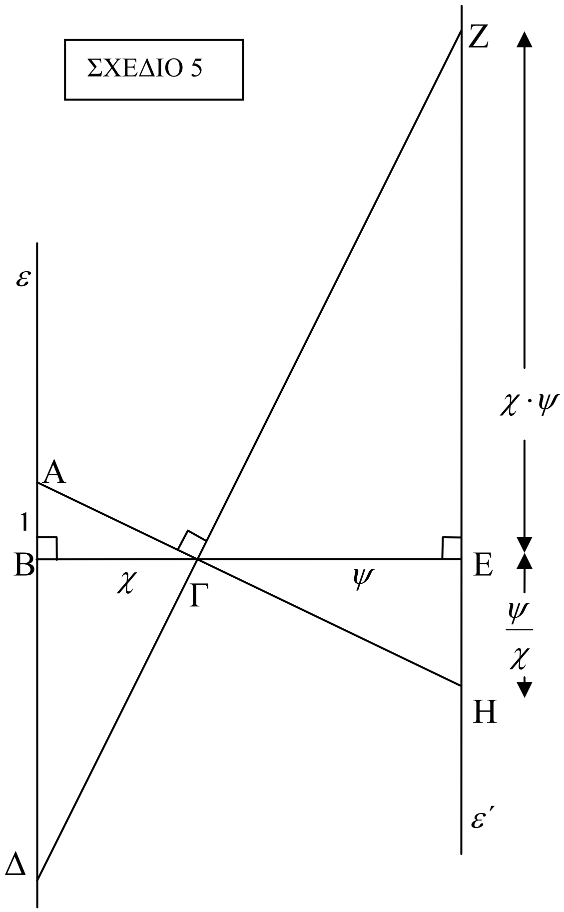
ΕΥΡΕΣΗ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ ΚΑΙ ΠΗΛΙΚΟΥ ΔΥΟ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΤΜΗΜΑΤΩΝ

Η ανάπτυξη του συγκεκριμένου μηχανισμού στην ουσία ξεκινά από την δυνατότητα υπολογισμού γινομένου και πηλίκου δύο συνεχόμενων ευθυγράμμων τμημάτων που βρίσκονται στην ίδια ευθεία.

Όπως και στην προηγούμενη κατασκευή έτσι και εδώ ,από τη στιγμή που θα προκύψει γινόμενο δηλαδή αλλαγή διάστασης από μία σε δύο, πρέπει να οριστεί μονάδα μέτρησης.

Έστω δύο συνεχόμενα στην ίδια ευθεία ευθύγραμμα τμήματα $\mathrm{B\Gamma} = \chi$ και $\mathrm{\Gamma E} = \psi$.

ΣΧΕΔΙΟ 5



Από το σημείο B φέρνουμε κάθετη ευθεία ε στην BE και ορίζουμε ευθύγραμμο τμήμα $\mathrm{AB} = 1$.

Από το σημείο Ε φέρνουμε ευθεία ε' κάθετη στην ΒΕ.

Από το σημείο Α φέρνουμε ευθεία η οποία διέρχεται από το Γ και τέμνει την ε' στο σημείο Η.

Από το Γ φέρνουμε ευθεία κάθετη στην ΑΗ η οποία τέμνει την ε στο σημείο Δ και την ε' στο σημείο Ζ. Αποδεικνύεται πώς

$$\mathrm{B\Gamma}\cdot\mathrm{\Gamma E}=\mathrm{EZ}\quad \text{και}\quad \frac{\mathrm{\Gamma E}}{\mathrm{B\Gamma}}=\mathrm{EH}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

$\mathrm{A}\overset{\Delta}{\mathrm{B}}\Gamma \sim \Gamma\overset{\Delta}{\mathrm{E}}\mathrm{Z}$ γιατί i) $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma=\Gamma\hat{\mathrm{E}}\mathrm{Z}=90°$

και ii) $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma=\mathrm{E}\hat{\Gamma}\mathrm{Z}$ επειδή πλευρές γωνιών κάθετες και γωνίες οξείες. Άρα $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{B\Gamma}}=\frac{\mathrm{\Gamma E}}{\mathrm{EZ}} \Leftrightarrow \mathrm{B\Gamma}\cdot\mathrm{\Gamma E}=\mathrm{AB}\cdot\mathrm{EZ}$ και επειδή από κατασκευής $\mathrm{AB}=1$ ισχύει

$$\mathrm{B\Gamma}\cdot\mathrm{\Gamma E}=\mathrm{EZ} \qquad (1)$$

ή

$$\boxed{\chi\cdot\psi=\mathrm{EZ}}$$

Επίσης $\mathrm{A}\overset{\Delta}{\mathrm{B}}\Gamma \sim \mathrm{H}\overset{\Delta}{\mathrm{E}}\Gamma$ γιατί : i)$\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma=\Gamma\hat{\mathrm{E}}\mathrm{H}=90°$

και ii)$\mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{B}=\mathrm{H}\hat{\Gamma}\mathrm{E}$ κατακορυφήν γωνίες.

Άρα $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{B\Gamma}}=\frac{\mathrm{EH}}{\mathrm{\Gamma E}} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{\Gamma E}}{\mathrm{B\Gamma}}=\frac{\mathrm{EH}}{\mathrm{AB}}$ και επειδή από κατασκευής $\mathrm{AB}=1$ ισχύει:

$$\frac{\mathrm{\Gamma E}}{\mathrm{B\Gamma}}=\mathrm{EH} \qquad (2)$$

ή

$$\boxed{\frac{\psi}{\chi}=\mathrm{EH}}$$

ΣΧΟΛΙΟ:

Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι $\mathrm{B\Gamma}=\frac{\mathrm{EZ}}{\mathrm{\Gamma E}}$ ή $\chi=\frac{\mathrm{EZ}}{\psi}$, αλλά στο $\Gamma\overset{\Delta}{\mathrm{E}}\mathrm{Z}$ ισχύει εφ$\mathrm{E}\hat{\Gamma}\mathrm{Z}=\frac{\mathrm{EZ}}{\psi}$ δηλαδή το ευθύγραμμο τμήμα $\mathrm{B\Gamma}=\chi$ δίνει αριθμητικά την εφαπτομένη της γωνίας $\mathrm{E}\hat{\Gamma}\mathrm{Z}$.

$$\varepsilon\phi\ \mathrm{E}\hat{\Gamma}\mathrm{Z}=\varepsilon\phi\ \mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma=\chi$$

ΕΥΡΕΣΗ ΜΗΚΟΥΣ ΤΩΝ ΥΠΟΛΟΙΠΩΝ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ. ΤΜΗΜΑΤΩΝ ΤΟΥ ΜΗΧΑΝΙΣΜΟΥ

Στο κεφάλαιο 1 είχαμε βρει και αποδείξει ότι

-

$$\mathrm{B\Delta} = \chi^2$$

$$\mathrm{A\Gamma} = \sqrt{\chi^2 + 1}$$

$$\Gamma\Delta = \chi \cdot \sqrt{\chi^2 + 1}$$

Υπολογισμός του ΖΗ ευθύγραμμου τμήματος

$$\mathrm{ZH} = \mathrm{ZE} + \mathrm{EH}$$

$$\mathrm{ZH} = \chi \cdot \psi + \frac{\psi}{\chi}$$

$$\mathrm{ZH} = \psi\left(\chi + \frac{1}{\chi}\right) \cdot \frac{\chi}{\chi}$$

$$\mathrm{ZH} = \frac{\psi \cdot \left(\chi^2 + 1\right)}{\chi}$$

$$\mathrm{ZH} = \frac{\psi}{\chi} \cdot \left(\chi^2 + 1\right)$$

$$\underline{\mathrm{ZH} = \mathrm{EH} \cdot \mathrm{A\Delta}}$$

Υπολογισμός του ΓΖ ευθύγραμμου τμήματος

Επειδή $\Gamma \overset{\Delta}{\mathrm{B}} \Delta \sim \Gamma \overset{\Delta}{\mathrm{E}} \mathrm{Z}$ ισχύει : $\dfrac{\Gamma\mathrm{Z}}{\Gamma\Delta} = \dfrac{\Gamma\mathrm{E}}{\mathrm{B}\Gamma}$

$$\Gamma\mathrm{Z} = \Gamma\Delta \cdot \frac{\Gamma\mathrm{E}}{\mathrm{B}\Gamma}$$

$$\Gamma\mathrm{Z} = \chi \cdot \sqrt{\chi^2 + 1} \cdot \frac{\psi}{\chi}$$

$$\Gamma\mathrm{Z} = \psi \cdot \sqrt{\chi^2 + 1}$$

$$\underline{\Gamma\mathrm{Z} = \Gamma\mathrm{E} \cdot \mathrm{A}\Gamma}$$

Υπολογισμός του ΓΗ ευθύγραμμου τμήματος

Επειδή $\Gamma \overset{\Delta}{\mathrm{B}} \mathrm{A} \sim \Gamma \overset{\Delta}{\mathrm{E}} \mathrm{H}$ ισχύει:

$$\frac{\Gamma\mathrm{H}}{\mathrm{A}\Gamma} = \frac{\Gamma\mathrm{E}}{\mathrm{B}\Gamma}$$

$$\Gamma\mathrm{H} = \mathrm{A}\Gamma \cdot \frac{\Gamma\mathrm{E}}{\mathrm{B}\Gamma}$$

$$\Gamma\mathrm{H} = \sqrt{\chi^2 + 1} \cdot \frac{\psi}{\chi}$$

$$\underline{\Gamma\mathrm{H} = \mathrm{A}\Gamma \cdot \mathrm{EH}}$$

Υπολογισμός του ΔΖ ευθύγραμμου τμήματος

$$\Delta\mathrm{Z} = \Delta\Gamma + \Gamma\mathrm{Z}$$

$$\Delta\mathrm{Z} = \chi \cdot \sqrt{\chi^2 + 1} + \psi \cdot \sqrt{\chi^2 + 1}$$

$$\Delta\mathrm{Z} = (\chi + \psi) \cdot \sqrt{\chi^2 + 1}$$

$$\underline{\Delta\mathrm{Z} = \mathrm{BE} \cdot \mathrm{A}\Gamma}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

- Με τον μηχανισμό αυτό έχουμε τη δυνατότητα να παραστήσουμε γραμμικά το εμβαδόν οποιουδήποτε παραλληλογράμμου με ύψος χ και βάση ψ αρκεί να ορίσουμε μονάδα μέτρησης μήκους. Το ευθύγραμμο τμήμα ZE που προκύπτει είναι ίσο με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου.

- Επίσης το εμβαδόν οποιουδήποτε τριγώνου με βάση ίση με χ και ύψος ίσο με ψ ισούται με το μισό του ευθύγραμμο τμήματος ZE $\left(\frac{\mathrm{ZE}}{2}\right)$.