Ν. Χ. Μαντούβαλος - Μιχ. Γ. Μαριάς

Μαθήματα

Ολοκληρωτικού Λογισμού

Πολλών Μεταβλητών

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

Περιεχόμενα

Πρόλογος

Το ανά χείρας εγχειρίδιο είναι η τακτοποίηση των σημειώσεών μας για το μάθημα του 'Ολοκληρωτικού Λογισμού ΙΙ' που διδάσκουμε στο Τμήμα Μαθηματικών του ΑΠΘ. Ο κορμός τους είναι κατ' ουσίαν οι 'Πρόχειρες Σημειώσεις' του δεύτερου συγγραφέα, που κυκλοφορούν παρανόμως εδώ και δύο χρόνια από τους πειρατές της Μελενίκου και των παράπλευρων στενών. Στο διάστημα αυτό, έγινε μια πιο συστηματική επεξεργασία, και όπου χρειάστηκε, τροποποιήθηκαν, συμπληρώθηκαν και επεκτάθηκαν.

Δεν ήταν στις προθέσεις μας να γράψουμε μια 'Πραγματεία', Traité που λένε οι Γάλλοι. Οι Πραγματείες είναι πιο χρήσιμες στους διδάσκοντες παρά στους διδασκόμενους. Ούτε ένα ογκώδες βοήθημα όπου ο αρχάριος είναι εύκολο να πελαγώσει και να χαθεί. Έτσι, καταλήξαμε στην συγγραφή ενός σύντομου και ισορροπημένου συνόλου με μορφή φιλική για τον αναγνώστη.

Τα '*Μαθήματα*' αντλούν υλικό από διάφορες πηγές. '*Τα λόγια μας είναι παιδιά πολλών ανθρώπων*', για να θυμηθούμε τον ποιητή. Αναφέρουμε ενδεικτικά τα εγχειρίδια των Γ. Γεωργανόπουλου, Τ. Χατζηαφράτη, Marsden και Tromba, τον μικρό Spivak.

Το υλικό παρουσιάζεται με τρόπο ζωντανό, θυμίζοντας πολλές φορές την α-τμόσφαιρα του αμφιθεάτρου, ώστε να προκαλέσει το ενδιαφέρον της πλειονότητας των φοιτητών. Η προσέγγιση του ουσιαστικού είναι άμεση και συνοδεύεται συνήθως από ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα, το *μοντέλο*, όπως λέμε στην ακαδημαϊκή καθομιλουμένη. Το περιττό, το φλύαρο και το κενό, που στην εποχή μας έχουν πάρει το πάνω χέρι, έγινε προσπάθεια να εξοβελιστούν.

Προσπαθήσαμε να κρατήσουμε την ισορροπία ανάμεσα στην Ανάλυση και τον Λογισμό. Ο φοιτητής πρέπει να καταλάβει τις έννοιες και τα θεωρήματα, αλλά και να μάθει να λογαριάζει. Η έλλειψη του ενός εκ των δύο οδηγεί σε επικίνδυνες ατραπούς. Έτσι, όλα τα βαρειά θεωρήματα δίνονται με πλήρεις αποδείξεις.

Η επεξεργασία των αποδείξεων, ώστε να παρουσιαστούν όσο το δυνατόν πιο καθαρές και εύληπτες, ήταν και χρονοβόρα και κουραστική. Ελπίζουμε να τα καταφέραμε. Αλλά αυτό θα μας το πουν οι φοιτητές μας. Τα θεωρήματα και οι ορισμοί συνοδεύονται από πληθώρα επιλεγμένων παραδειγμάτων, ώστε να χωνευτεί και να εφαρμοστεί η θεωρία, και να μάθει ο φοιτητής να λογαριάζει.

Τέλος έγινε προσπάθεια να παρουσιαστούν οι εφαρμογές της Διανυσματικής Ανάλυσης στην Φυσική. Ας μην ξεχνάμε ότι η Φυσική είναι la raison d' être της Διανυσματικής Ανάλυσης.

Πολλοί βοήθησαν και ποικιλοτρόπως, για να γραφτεί αυτό το εγχειρίδιο. Οι οικογένειες και οι φίλοι με την ανοχή και την κατανόησή τους. Οι συνάδελφοι με τις εποικοδομητικές συζητήσεις, και οι φοιτητές μας με τις ερωτήσεις, τις απορίες και τις εκφράσεις του προσώπου τους, που λένε πολλά. Τέλος, θέλουμε να κάνουμε ιδιαίτερη μνεία για την βοήθεια που μας προσέφερε ο φίλος και συνάδελφος Γιώργος Πέρρος. Το εγχειρίδιο αυτό του οφείλει πολλά. Πρώτον, γράφτηκε στο Ελληνικό LaTeX με ένα πολύ φιλικό και εύχρηστο κειμενογράφο που είναι πατέντα του πολυμήχανου Γιώργου. Η πιθανότητα να γράφαμε το βιβλίο με το κλασικό σύστημα TeX είναι μηδενική. Δεύτερον, τα υπέροχα σχέδια που κοσμούν το κείμενο είναι δική του ευγενική προσφορά. Τον ευχαριστούμε θερμά. Επίσης, ευχαριστούμε τον φίλο Παύλο Καϊμάκη που χτένισε τα Ελληνικά μας.

Θα τελειώσουμε με τα λόγια του Αποστόλου Παύλου που είναι πάντα επίκαιρα:

[1]

(Πρός Κορινθίους Α, XIV, 8-9)

Θεσσαλονίκη, Άνοιξη του 2001.

[1]Σε ελεύθερη απόδοση το νόημα είναι το ακόλουθο: Αν η σάλπιγγα ηχήσει ήχο χωρίς νόημα, ποιός θα προετοιμαστεί για πόλεμο; Έτσι κι εσείς, εάν ο λόγος σας δεν είναι κατανοητός, πώς θέλετε να σας καταλάβουν; Θα μιλάτε στον αέρα.

Μέρος I

Το ολοκλήρωμα Riemann

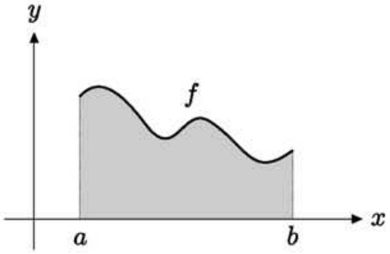
Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή (Μάθημα πρώτο)

1.1 Το διπλό ολοκλήρωμα

Ας ξεκινήσουμε με μια οικεία εικόνα του Ολοκληρωτικού Λογισμού συναρτήσεων μιας μεταβλητής. Αν η $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι θετική και συνεχής (δες Σχήμα 1), τότε το εμβαδόν του χωρίου που βρίσκεται κάτω από το γράφημα της f δίδεται ως γνωστόν από το ολοκλήρωμα

$$\int_a^b f(x)dx.$$

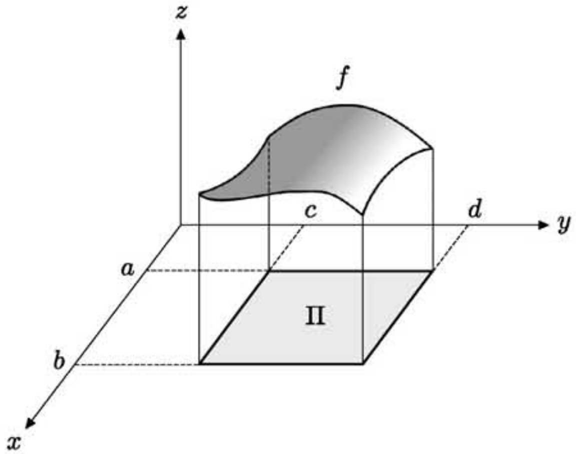


Σχήμα 1

Το αντίστοιχο ερώτημα τίθεται για μια συνάρτηση δύο μεταβλητών $f(x, y)$ που ορίζεται πάνω σ' ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $\Pi = [a, b] \times [c, d]$. Αν

$$f : [a, b] \times [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$$

είναι συνεχής και θετική, τι μπορεί να είναι ο όγκος V του στερεού που βρίσκεται κάτω από το γράφημα της f;



Σχήμα 2

Το στερεό του Σχήματος 2 σίγουρα έχει κάποιον όγκο V που τον συμβολίζουμε ως εξής:

$$V = \int_{\Pi} f(x,y)dxdy = \int_{\Pi} f.$$

Τον ονομάζουμε *διπλό ολοκλήρωμα* της $f(x,y)$ επί του ορθογωνίου Π. Πώς άραγε μπορούμε να ορίσουμε, και εν συνεχεία να υπολογίσουμε το διπλό ολοκλήρωμα της $f(x,y)$ επί του ορθογωνίου Π;

Πρίν, ας θυμηθούμε τον ορισμό του ολοκληρώματος

$$\int_a^b f(x)dx$$

στην διάσταση 1. Αν

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

είναι μια διαμέριση Δ του διαστήματος $[a,b]$, τότε σχηματίζουμε τα αθροίσματα Riemann $R_\Delta(f)$ της $f(x)$:

$$R_\Delta(f) = \sum_{0 \le j \le n-1} f(\xi_j)(x_{j+1} - x_j), \qquad \xi_j \in [x_j, x_{j+1}].$$

Το ολοκλήρωμα Riemann

$$\int_a^b f(x)dx$$

ορίζεται σαν το όριο των αθροισμάτων Riemann $R_\Delta(f)$ καθώς το βήμα

$$\delta = \max_{0 \leq j \leq n-1} (x_{i+1} - x_j)$$

της διαμέρισης Δ τείνει στο 0.

Στην περίπτωση των συναρτήσεων δύο μεταβλητών που ορίζονται πάνω σ' ένα ορθογώνιο $\Pi = [a, b] \times [c, d]$, κάνουμε ακριβώς το ίδιο. Μια διαμέριση

$$\Delta_1 : \qquad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

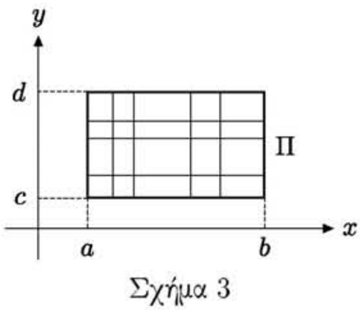
του $[a, b]$, και μια διαμέριση

$$\Delta_2 : \qquad c = y_0 < y_1 < \cdots < y_{n-1} < y_k = d$$

του $[c, d]$, δίνουν μια διαμέριση του ορθογωνίου $\Pi = [a, b] \times [c, d]$ στα ορθογώνια

$$S_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}],$$

όπως στο επόμενο σχήμα.



Σχήμα 3

Σχηματίζουμε λοιπόν τα αθροίσματα Riemann της $f(x, y)$

$$R_\Delta(f) = \sum_{\substack{0 \leq i \leq n-1 \\ 0 \leq j \leq k-1}} f(\xi_i, \eta_j) \left| S_{ij} \right|, \qquad (\xi_i, \eta_j) \in S_{ij},$$

όπου

$$|S_{ij}| = (x_{i+1} - x_i) \times (y_{j+1} - y_j)$$

είναι το εμβαδόν του S_{ij}. Ορίζουμε το *ολοκλήρωμα Riemann*

$$\iint_{\Pi} f(x,y)dxdy$$

της $f(x,y)$ ως το όριο, εφόσον βέβαια υπάρχει, των ως άνω αθροισμάτων Riemann, καθώς το βήμα της διαμέρισης

$$\delta = \max_{i,j} \delta_{ij} = \max_{i,j} \operatorname{diam} S_{ij}$$

τείνει στο 0. Θυμίζουμε ότι $\operatorname{diam} S_{ij}$ είναι η διάμετρος του ορθογωνίου S_{ij}.

Θα δούμε στην συνέχεια ότι μια συνεχής συνάρτηση επί ενός ορθογωνίου είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann. Προηγείται όμως η εξέταση του παρακάτω ουσιώδους ερωτήματος: Πώς άραγε μπορούμε να υπολογίσουμε το διπλό ολοκλήρωμα

$$\iint_{\Pi} f(x,y)dxddy$$

μιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης $f(x,y)$;

Υπενθυμίζουμε ότι στην περίπτωση της μίας μεταβλητής, την απάντηση στο ως άνω ερώτημα την δίνει το Θεμελιώδες Θεώρημα του Λογισμού:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

όπου F είναι μια *αντιπαράγωγος* της f. Δυστυχώς στις πολλές μεταβλητές δεν υπάρχει αντίστοιχο θεώρημα. Από την δυσκολία αυτή μας έβγαλαν, κατ' αρχήν ο Αρχιμήδης και πολύ αργότερα ο μαθητής του Γαλιλαίου Cavalieri.

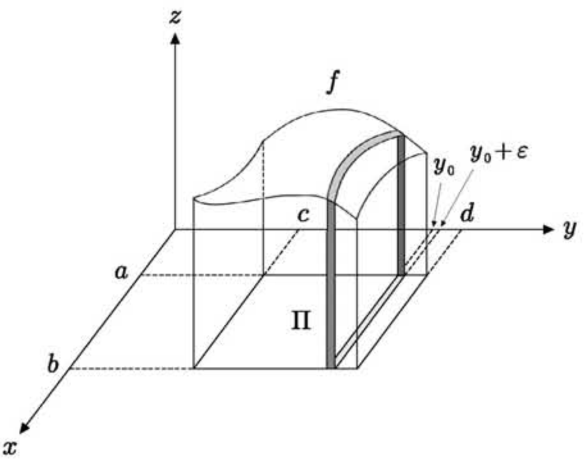
1.2 Η αρχή του Cavalieri

Για τον υπολογισμό του όγκου V που βρίσκεται κάτω από το γράφημα της συνεχούς και θετικής συνάρτησης $f(x,y)$, ακολουθούμε την εξής διαδικασία:

Κόβουμε μια λεπτή φέτα V_ε του όγκου V παράλληλα με το επίπεδο xOz, αυτήν ακριβώς που βρίσκεται πάνω από το ορθογώνιο

$$\Pi_\varepsilon = [a, b] \times [y_0 + \varepsilon, y_0],$$

όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.



Σχήμα 4

Θεωρούμε ως βάση της φέτας την αριστερή κάθετη πλευρά. Η βάση αυτή έχει εμβαδόν ίσο με

$$\int_a^b f(x, y_0)dx.$$

Έτσι ο όγκος V_ε υπολογίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} V_\varepsilon &= \text{εμβαδόν βάσης} \times \text{ύψος} \\ &= \int_a^b f(x, y_0)dx \times (y_0 + \varepsilon - y_0) \\ &= \varepsilon \int_a^b f(x, y_0)dx. \end{aligned}$$

Αν τώρα κόψουμε σε τέτοιες μικρές φέτες το στερεό και αθροίσουμε τους όγκους $V_{\varepsilon_1}, \ldots, V_{\varepsilon_n}$ που προκύπτουν, έχουμε

$$\begin{aligned} V = V_{\varepsilon_1} + \cdots + V_{\varepsilon_n} &= \sum_{1\leq j\leq n} V_{\varepsilon_j} \\ &= \sum_{1\leq j\leq n} \left(\int_a^b f(x, y_j)dx \right) \varepsilon_j \\ &= \sum_{1\leq j\leq n} F(y_j)(y_j + \varepsilon_j - y_j), \end{aligned}$$

όπου

$$F(y) = \int_a^b f(x, y)dx.$$

Τα ως άνω αθροίσματα Riemann της F συγκλίνουν στο

$$\int_c^d F(y)dy$$

καθώς $\max \varepsilon_j \to 0$. Έτσι,

$$V = \int_c^d F(y)dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)dx \right) dy,$$

δηλαδή, για να υπολογίσουμε το διπλό ολοκλήρωμα

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x, y)dxdy,$$

ολοκληρώνουμε την $f(x, y)$ πρώτα ως πρός x θεωρώντας το y σταθερό, και στην συνέχεια ολοκληρώνουμε το αποτέλεσμα ως προς y.

Ας δώσουμε ένα απλό αλλά χαρακτηριστικό παράδειγμα. Άν

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

και

$$\Pi = [-1, 1] \times [0, 1],$$

τότε έχουμε

$$\begin{aligned}\iint_{\Pi} f(x,y)dxdy &= \int_0^1 \left(\int_{-1}^1 f(x,y)dx\right)dy\\ &= \int_0^1 \left(\int_{-1}^1 \left(x^2+y^2\right)dx\right)dy\\ &= \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3}+y^2x\right]_{x=-1}^{x=1} dy\\ &= \int_0^1 \left(\frac{2}{3}+2y^2\right)dy = \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι στην εφαρμογή της αρχής του Cavalieri, μπορούμε να κόψουμε τις φέτες διαφορετικά, δηλαδή παράλληλα προς το επίπεδο yOz. Στην περίπτωση αυτή προκύπτει ότι ο όγκος

$$V = \iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)dxdy$$

είναι ίσος με το ολοκλήρωμα

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx,$$

το οποίο λέγεται *επαναλαμβανόμενο ολοκλήρωμα*. Θα δούμε στη συνέχεια ότι για τις ολοκληρώσιμες συναρτήσεις, τα επαναλαμβανόμενα ολοκληρώματα

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy \qquad \text{και} \qquad \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx$$

είναι ίσα μεταξύ τους και ισούνται με το διπλό ολοκλήρωμα

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)dxdy.$$

Αυτό μας το εγγυάται ένα από τα κεντρικά θεωρήματα του μαθήματος, το Θεώρημα του Fubini.