Βασίλης Δ. Μάνος
Καθηγητής Α.Π.Θ.

ΜΕΘΟΔΟΙ ΠΟΣΟΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

Κάθε γνήσιο αντίτυπο φέρει την υπογραφή του συγγραφέα

ISBN 978-960-456-172-8

Φωτοστοιχειοθεσία
Εκτύπωση
Βιβλιοδεσία

Π. ΖΗΤΗ & Σια ΟΕ
18ο χλμ Θεσσαλονίκης - Περαίας
Τ.Θ. 4171 • Περαία Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19
Τηλ.: 2392.072.222 - Fax: 2392.072.229 • e-mail: info@ziti.gr

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

www.ziti.gr

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ - ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΔΙΑΘΕΣΗ:
Αρμενοπούλου 27 - 546 35 Θεσσαλονίκη • Τηλ.: 2310-203.720 •- Fax 2310-211.305
e-mail: sales@ziti.gr

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΑΘΗΝΩΝ - ΕΝΩΣΗ ΕΚΔΟΤΩΝ ΒΙΒΛΙΟΥ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ:
Στοά του Βιβλίου (Πεσμαζόγλου 5) - 105 64 ΑΘΗΝΑ • Τηλ.-Fax: 210-3211.097

ΑΠΟΘΗΚΗ ΑΘΗΝΩΝ - ΠΩΛΗΣΗ ΧΟΝΔΡΙΚΗ:
Ασκληπιού 60 - Εξάρχεια 114 71, Αθήνα • Τηλ.-Fax: 210-3816.650 • e-mail: athina@ziti.gr

ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ: www.ziti.gr

Πρόλογος

Το βιβλίο αυτό απευθύνεται στους φοιτητές της Γεωπονικής Σχολής, κατεύθυνσης Αγροτικής Οικονομίας, για να αποτελέσει βοήθημα στο μάθημα των Ποσοτικών Μεθόδων.

Ο όρος Ποσοτικές Μέθοδοι σύμφωνα με την ευρεία του έννοια δηλώνει το σύνολο των μαθηματικών εκείνων, καθώς και τις μαθηματικές μεθόδους που χρησιμοποιούνται στην οικονομική ανάλυση και στο μάνατζμεντ. Όπως είναι επομένως φανερό, το περιεχόμενο των Ποσοτικών Μεθόδων είναι πάρα πολύ ευρύ, αφού μπορεί να περιλαμβάνει θέματα συνδυαστικής και οριακής ανάλυσης συναρτήσεων γεωργικής οικονομικής, μέχρι θέματα μαθηματικού προγραμματισμού και θεωρίας παγνίων.

Το βιβλίο αυτό, με βάση το γεγονός ότι οι φοιτητές στους οποίους απευθύνεται έχουν διδαχθεί σε προηγούμενα έτη διαφορικό και ολοκληρωτικό λογισμό, προχωρεί πέρα ή συμπληρώνει το μαθηματικό τους υπόβαθρο με τα μαθηματικά εκείνα και τις μαθηματικές μεθόδους που θα συναντήσουν και θα χρησιμοποιήσουν στα οικονομικά κυρίως, αλλά και στα άλλα μαθήματα των επομένων ετών της κατεύθυνσης.

Με το πνεύμα αυτό, στο βιβλίο περιλαμβάνονται θέματα συνδυαστικής ανάλυσης, όπως μεταθέσεις, διατάξεις και συνδυασμοί, θέματα γραμμικής άλγεβρας, όπως άλγεβρα πινάκων, συστήματα γραμμικών εξισώσεων και ανισώσεων πρώτου βαθμού, στοιχεία ανάλυσης εισροών-εκροών, στοιχεία οριακής ανάλυσης συναρτήσεων γεωργικής οικονομικής, καθώς και θέματα επιχειρησιακής έρευνας, όπως ο γραμμικός προγραμματισμός, το πρόβλημα μεταφορών, ο προγραμματισμός και ο έλεγχος αποθεμάτων, κ.λ.π.. Για την καλύτερη κατανόηση των μαθηματικών αυτών εννοιών και μεθόδων δίνονται στο τέλος κάθε κεφαλαίου παραδείγματα από τη γεωργική οικονομική πραγματικότητα.

Ευχαριστώ πολύ τον κ. Θωμά Μπουρνάρη και τις κ.κ. Φαίδρα Κιομουρτζή και Χριστίνα Μουλογιάννη για τις διορθώσεις και την επιμέλεια του κειμένου.

Θεσσαλονίκη 2009 *Βασίλης Μάνος*

Πίνακας Περιεχομένων

IV. ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΩΝ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

V. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

VI. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΓΕΩΡΓΙΚΗΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΟΡΙΑΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΥΤΩΝ

VII. ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΓΕΩΡΓΙΚΗΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ

VIII. ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ

IX. ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

X. Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX

XI. ΤΟ ΔΥΪΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

XII. ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΕΤΑΦΟΡΩΝ

XIII. ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΕΛΕΓΧΟΣ ΑΠΟΘΕΜΑΤΩΝ

XIV. ΘΕΩΡΙΑ ΠΑΙΓΝΙΩΝ

I ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ

Η Συνδυαστική είναι ένας κλάδος των εφαρμοσμένων μαθηματικών που αναπτύχθηκε πολύ τα τελευταία χρόνια και έχει ως αντικείμενο την απαρίθμηση (μέτρηση) των στοιχείων πεπερασμένων συνόλων και τη μελέτη πεπερασμένων ομάδων αντικειμένων ή γεγονότων. Πολλές επιστήμες, όπως η Βιολογία και η Γεωπονική, αλλά κυρίως η Στατιστική, χρησιμοποιούν τις μεθόδους της για να δώσουν λύσεις σε προβλήματα μέτρησης όπως για παράδειγμα:

“Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να κάνει κάποιο πείραμα ένας ερευνητής”.

“Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να εκλεγεί το προεδρείο ενός συνεταιρισμού από το δεκαπενταμελές συμβούλιό του”.

“Πόσους διαφορετικούς τύπους εκμεταλλεύσεων μπορούμε να σχηματίσουμε με βάση ένα ορισμένο αριθμό κλάδων φυτικής και ζωϊκής παραγωγής”.

“Πόσα χρήματα πρέπει να πληρώσουμε για ένα δελτίο του ΠΡΟ–ΠΟ που έχει τέσσερις διπλές και τρεις τριπλές”.

“Ποιό είναι πιθανότερο να συμβεί όταν ρίχνουμε δύο ζάρια, το άθροισμα 6 ή 9”.

Παρ’ όλο που η Συνδυαστική αποτελεί, όπως αναφέρθηκε, ιδιαίτερο κλάδο, πολλές φορές συναντάται ως ένα απλό μόνο κεφάλαιο στα βιβλία της Στατιστικής και της Θεωρίας Πιθανοτήτων. Αυτό οφείλεται, όπως άλλωστε προκύπτει και από τα προηγούμενα παραδείγματα, στο γεγονός ότι η Συνδυαστική με τις μεθόδους της βοηθάει στον προσδιορισμό του αριθμού των στοιχείων ενός δειγματικού χώρου και των γεγονότων που συνδέονται μ’ αυτόν και στη συνέχεια στον υπολογισμό των πιθανοτήτων τους.

Στο κεφάλαιο αυτό θα εξετάσουμε μερικά μόνο θέματα της Συνδυαστικής και συγκεκριμένα τις βασικές αρχές απαρίθμησης, τις μεταθέσεις (απλές, κυκλικές και επαναληπτικές) και τις διατάξεις και συνδυασμούς χωρίς επανάληψη.

1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΑΠΑΡΙΘΜΗΣΗΣ

Η απαρίθμηση των στοιχείων ενός πεπερασμένου συνόλου Α στηρίζεται στους κανόνες του αθροίσματος και του γινομένου. Κατά την απαρίθμηση πρέπει να ικανοποιείται το κριτήριο απαρίθμησης, σύμφωνα με το οποίο κάθε στοιχείο ενός συνόλου μετράται μια και μόνο μια φορά.

1.1 Κανόνας του αθροίσματος ή αρχή της διαζευκτικής μέτρησης

Έστω τα σύνολα Α και Β που είναι ξένα μεταξύ τους, δηλαδή $A \cap B = \emptyset$. Αν με $n(A)$ και $n(B)$ παραστήσουμε τον αριθμό των στοιχείων (πληθικό αριθμό) των δύο συνόλων Α και Β αντίστοιχα, τότε το πλήθος των στοιχείων της ένωσης των δύο συνόλων $A \cup B$ δίνεται από τον τύπο:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

Ο κανόνας του αθροίσματος γενικεύεται στην περίπτωση κ συνόλων ως εξής: Έστω Α ένα οποιοδήποτε σύνολο και $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_\kappa$ υποσύνολα του Α τέτοια ώστε πρώτο $A = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup \ldots \cup B_\kappa$ και δεύτερο ανά δύο να είναι ξένα μεταξύ τους, δηλαδή $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$. Στην περίπτωση αυτή όπως είναι γνωστό τα σύνολα B_i, $i = 1, 2, \ldots, \kappa$ αποτελούν ένα διαμελισμό του συνόλου Α. Τότε θα έχουμε:

$$n(A) = n(B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup \ldots \cup B_\kappa) = n(B_1) + n(B_2) + \ldots + n(B_\kappa)$$

Στην περίπτωση που τα σύνολα B_i, $i=1,2,\ldots\kappa$ δεν αποτελούν διαμελισμό του συνόλου Α και υπάρχουν επικαλύψεις μεταξύ τους, χρησιμοποιείται η **αρχή εγκλεισμού – αποκλεισμού**. Με τη βοήθεια αυτής αποδεικνύεται ότι για δύο οποιαδήποτε σύνολα B_1 και B_2 ο κανόνας του αθροίσματος δίνει:

$$n(B_1 \cup B_2) = n(B_1) + n(B_2) - n(B_1 \cap B_2)$$

Είναι προφανές ότι όταν τα σύνολα B_1 και B_2 είναι ξένα μεταξύ τους θα ισχύει:

$$n(B_1 \cup B_2) = n(B_1) + n(B_2)$$

Για τρία οποιαδήποτε σύνολα B_1, B_2 και B_3 ο κανόνας του αθροίσματος δίνει:

$$\begin{aligned} n(B_1 \cup B_2 \cup B_3) = n(B_1) + n(B_2) + n(B_3) - n(B_1 \cap B_2) - n(B_1 \cap B_3) - \\ - n(B_2 \cap B_3) + n(B_1 \cap B_2 \cap B_3) \end{aligned}$$

και πάλι αν τα σύνολα B_1, B_2 και B_3 είναι ξένα μεταξύ τους ανά δύο θα ισχύει:

$$n(B_1 \cup B_2 \cup B_3) = n(B_1)+n(B_2)+n(B_3)$$

Αποδεικνύεται τέλος ότι για δύο υποσύνολα B_1, B_2 ενός συνόλου Α ισχύουν οι τύποι:

$$\begin{cases} n(B_1) \le n(A) \\ n(B_1 - B_2) = n(B_1) - n(B_1 \cap B_2) \\ n(\overline{B}_1) = n(A) - n(B_1) \end{cases}$$

όπου $\overline{B}_1$ το συμπλήρωμα του υποσυνόλου B_1 ως προς το σύνολο Α.

Παράδειγμα 1

Από ένα τυχαίο δείγμα 50 γεωργών, 10 βρέθηκαν να συμφωνούν με τη φορολόγηση του γεωργικού εισοδήματος, 15 απλώς συμφωνούν και οι υπόλοιποι 25 διαφωνούν. Συνεπώς υπάρχουν 15+25 = 40 γεωργοί που απλώς συμφωνούν ή διαφωνούν με τη φορολόγηση του γεωργικού εισοδήματος.

Παράδειγμα 2

Ένα δείγμα καταναλωτών ρωτήθηκε αν αγοράζει χυμούς που παράγουν οι δύο βιομηχανίες Α και Β. Από αυτούς οι 80 δήλωσαν ότι αγοράζουν χυμούς της βιομηχανίας Α, 50 ότι αγοράζουν χυμούς της βιομηχανίας Β και 30 ότι αγοράζουν χυμούς και των δύο βιομηχανιών γιατί τους βρίσκουν ίδιους, τόσο στην τιμή, όσο και στην ποιότητα. Τέλος, άλλοι 40 δήλωσαν ότι αγοράζουν χυμούς άλλων βιομηχανιών και όχι των βιομηχανιών Α και Β. Πόσοι ήταν οι καταναλωτές που ρωτήθηκαν;

Αν παραστήσουμε με Χ τους καταναλωτές που αγοράζουν χυμούς της Α βιομηχανίας και με Υ τους καταναλωτές που αγοράζουν χυμούς της Β βιομηχανίας, τότε θα έχουμε:

$$n(X) = 80 \quad n(Y) = 50 \quad \text{και} \quad n(X \cap Y) = 30$$

Συνεπώς οι καταναλωτές που αγοράζουν χυμούς της Α ή της Β βιομηχανίας είναι:

$$n(X \cup Y) = n(X)+n(Y)-n(X \cap Y) = 80+50-30 = 100$$

Αν σ' αυτούς προστεθούν οι 40 καταναλωτές που δεν αγοράζουν χυμούς ούτε της Α ούτε της Β βιομηχανίας, τότε οι καταναλωτές του δείγματος ήταν 100+40 = 140.

1.2 Κανόνας του γινομένου ή αρχή της σειριακής μέτρησης

Σύμφωνα με την αρχή αυτή, αν A και B είναι δύο μη κενά σύνολα, τότε ο αριθμός των στοιχείων του καρτεσιανού γινομένου $C = A\times B$ θα είναι:

$$n(C) = n(A\times B) = n(A)\bullet n(B)$$

Δηλαδή το σύνολο C θα περιλαμβάνει $n(A)\bullet n(B)$ διατεταγμένα ζεύγη (x, y) όπου $x\in A$, και $y\in B$.

Η αρχή αυτή που καλείται και **θεμελιώδης αρχή της απαρίθμησης** γενικεύεται ως εξής:

Έστω ότι ζητάμε να απαριθμήσουμε τα στοιχεία ενός συνόλου C που προκύπτει ως γινόμενο m μη κενών συνόλων C_1, C_2, ..., C_m. Τα στοιχεία του C είναι προφανώς διατεταγμένες m–άδες της μορφής $(x_1, x_2, ..., x_m)$, όπου $x_1\in C_1$, $x_2\in C_2$, ..., $x_m\in C_m$. Το πλήθος των m–άδων αυτών θα είναι:

$$n(C) = n(C_1)\cdot n(C_2)\ldots n(C_m)$$

Από τα παραπάνω προκύπτει, ότι η απαρίθμηση των στοιχείων ενός συνόλου A που μπορούν να θεωρηθούν ως διατεταγμένες m–άδες της μορφής $(x_1, x_2, ..., x_m)$ μπορεί να γίνει ως εξής: Αν η πρώτη συνιστώσα x_1 της m–άδας $(x_1, x_2, ..., x_m)$ έχει K_1 δυνατότητες (π.χ. ότι μπορεί να πάρει K_1 διαφορετικές τιμές, ή να έχει K_1 διαφορετικά χρώματα), η δεύτερη συνιστώσα x_2 έχει K_2 δυνατότητες κ.ο.κ. και η m–στή συνιστώσα x_m έχει K_m δυνατότητες. Τότε το σύνολο A θα έχει

$$K_1\cdot K_2\,.\,.\,.\,.\,.\,K_m$$

διαφορετικά στοιχεία m–άδες $(x_1, x_2, ..., x_m)$.

Γενικότερα αν η σύνθετη απαρίθμηση μπορεί να γίνει σε m διαδοχικά στάδια με τρόπο ώστε, κάθε στάδιο να μην επηρεάζει τα επόμενα και αν K_1, K_2, ..., K_m είναι αντίστοιχα τα αποτελέσματα των επιμέρους απαριθμήσεων στα m αυτά στάδια, τότε το αποτέλεσμα της σύνθετης απαρίθμησης θα είναι:

$$K_1\cdot K_2\,.\,.\,.\,.\,.\,K_m$$

Παράδειγμα 1

Ρίχνουμε ένα πράσινο και ένα κόκκινο ζάρι. Πόσα διαφορετικά ζευγάρια τιμών μπορεί να έρθουν;

Αν A είναι το σύνολο των διαφορετικών ζευγαριών που έρχονται, μπορούμε να συμβολίσουμε κάθε στοιχείο του Α σαν διατεταγμένο ζεύγος (x_1,x_2) με πρώτη συνιστώσα την ένδειξη του πράσινου ζαριού και δεύτερη την ένδειξη του κόκκινου ζαριού.

Είναι φανερό ότι, τόσο η πρώτη, όσο και η δεύτερη συνιστώσα έχει 6 διαφορετικές δυνατότητες, τις (1, 2, 3, 4, 5, 6). Συνεπώς, το σύνολο Α θα έχει:

$$6 \cdot 6 = 36$$

διαφορετικά στοιχεία.

Έτσι, αν το πρώτο νούμερο παριστάνει την ένδειξη του πράσινου και το δεύτερο του κόκκινου ζαριού, τότε το σύνολο Α θα έχει ως στοιχεία τα:

1,1	2,1	3,1	4,1	5,1	6,1
1,2	2,2	3,2	4,2	5,2	6,2
1,3	2,3	3,3	4,3	5,3	6,3
1,4	2,4	3,4	4,4	5,4	6,4
1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5
1,6	2,6	3,6	4,6	5,6	6,6

Παράδειγμα 2

Ένας γεωργός διαθέτει τρία αγροτεμάχια Α, Β, Γ διαφορετικής έκτασης το καθένα που βρίσκονται σε τρεις διαφορετικές τοποθεσίες του χωριού του. Λόγω διαφορετικών εδαφοκλιματικών αλλά και τεχνικοοικονομικών συνθηκών μπορεί να καλλιεργήσει στο αγροτεμάχιο Α ένα από τους τρεις κλάδους παραγωγής α_1, α_2 και α_3. Στο αγροτεμάχιο Β μπορεί να καλλιεργήσει ένα από τους κλάδους β_1 και β_2. Στο αγροτεμάχιο τέλος Γ ένα από τους κλάδους $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ και γ_4. Από πόσα και ποιά διαφορετικά σχέδια παραγωγής πρέπει να επιλέξει ο γεωργός το σχέδιο της εκμετάλλευσής του;

Το σύνολο των σχεδίων παραγωγής περιλαμβάνει τριάδες της μορφής:

$$\alpha_i, \beta_j, \gamma_\kappa$$

Η πρώτη συνιστώσα των τριάδων αυτών έχει τρεις δυνατότητες, η δεύτερη συνιστώσα δύο δυνατότητες και η τρίτη συνιστώσα τέσσερις δυνατότητες. Συνεπώς το σύνολο των σχεδίων παραγωγής περιλαμβάνει:

$$3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$$

διαφορετικές τριάδες. Δηλαδή ο γεωργός πρέπει να επιλέξει ένα από τα 24 διαφορετικά σχέδια παραγωγής.

Τα σχέδια αυτά είναι:

$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$	$\alpha_2, \beta_1, \gamma_1$	$\alpha_3, \beta_1, \gamma_1$
$\alpha_1, \beta_2, \gamma_1$	$\alpha_2, \beta_2, \gamma_1$	$\alpha_3, \beta_2, \gamma_1$
$\alpha_1, \beta_1, \gamma_2$	$\alpha_2, \beta_1, \gamma_2$	$\alpha_3, \beta_1, \gamma_2$
$\alpha_1, \beta_2, \gamma_2$	$\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$	$\alpha_3, \beta_2, \gamma_2$
$\alpha_1, \beta_1, \gamma_3$	$\alpha_2, \beta_1, \gamma_3$	$\alpha_3, \beta_1, \gamma_3$
$\alpha_1, \beta_2, \gamma_3$	$\alpha_2, \beta_2, \gamma_3$	$\alpha_3, \beta_2, \gamma_3$
$\alpha_1, \beta_1, \gamma_4$	$\alpha_2, \beta_1, \gamma_4$	$\alpha_3, \beta_1, \gamma_4$
$\alpha_1, \beta_2, \gamma_4$	$\alpha_2, \beta_2, \gamma_4$	$\alpha_3, \beta_2, \gamma_4$

2 ΜΕΤΑΘΕΣΕΙΣ

Έστω ένας ακέραιος αριθμός n. Το γινόμενο:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots n$$

παριστάνεται με το σύμβολο n! το οποίο ονομάζεται **n παραγοντικό**. Για την πληρότητα του συμβόλου n! δεχόμαστε ότι:

$$0! = 1 \quad \text{και} \quad 1! = 1$$

Έστω ότι έχουμε n διαφορετικά πράγματα ή στοιχεία των οποίων δεν μας ενδιαφέρει η φύση και τα οποία για διάκριση τα σημειώνουμε με τους αριθμούς 1, 2, 3, ..., n.

Μετάθεση των n αυτών πραγμάτων ονομάζεται κάθε κατάταξή τους στη σειρά επάνω σε ευθεία γραμμή. Αποδεικνύεται ότι το πλήθος των διαφορετικών μεταθέσεων των n πραγμάτων είναι

$$M_n = n!$$

Για τα τρία π.χ. γράμματα Α, Β, Γ μια μετάθεση τους είναι η ΑΒΓ, ενώ μια άλλη θα είναι η ΒΓΑ και μια τρίτη η ΓΑΒ. Το πλήθος όλων των δυνατών μεταθέσεων των τριών αυτών γραμμάτων θα είναι

$$M_3 = 3! = 6$$

Κυκλική μετάθεση των n πραγμάτων λέγεται κάθε κατάταξή τους σε σειρά, επάνω σε μια περιφέρεια κύκλου. Είναι φανερό ότι το πλήθος των κυκλικών μεταθέσεων των n πραγμάτων είναι

$$K_n = (n-1)!$$

Εάν τα n πράγματα δεν είναι όλα διαφορετικά μεταξύ τους, αλλά χωρίζονται σε m ομάδες, όπου κάθε ομάδα έχει κ_i πράγματα, i=1, 2, 3,..., m ίδια μεταξύ τους, αλλά διαφορετικά από τα στοιχεία κάθε άλλης ομάδας, τότε οι μεταθέσεις των n πραγμάτων δεν είναι όλες διαφορετικές μεταξύ τους. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι έχουμε **μεταθέσεις με επανάληψη**. Το πλήθος των διαφορετικών μεταθέσεων στην περίπτωση αυτή είναι

$$M_n^{\kappa_1,\kappa_2,\ldots,\kappa_m} = \frac{n!}{\kappa_1!\kappa_2!\ldots\kappa_m!} \quad \text{όπου } \kappa_1+\kappa_2+\ldots+\kappa_m = n$$

Παράδειγμα 1

Εάν έχουμε 9 ανθρώπους, 4 από τους οποίους είναι άντρες, 3 γυναίκες και 2 παιδιά, τότε ενώ οι μεταθέσεις των 9 ανθρώπων είναι 9! = 362880, οι διαφορετικές μεταθέσεις τους είναι

$$\frac{n!}{\kappa_1!\kappa_2!\ldots\kappa_m!} = \frac{9!}{4!\cdot 3!\cdot 2!} = 1260$$

όπου $m=3$, $\kappa_1=4$, $\kappa_2=3$, $\kappa_3=2$ και $\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3 = 9$.

Παράδειγμα 2

Με πόσους τρόπους 5 γυναίκες και 4 άνδρες μπορούν να σταθούν

1) σε σειρά αν δεν ενδιαφέρει η σειρά με την οποία θα τοποθετηθούν
2) σε σειρά αν τόσο οι άνδρες, όσο και οι γυναίκες πρέπει να βρίσκονται δίπλα–δίπλα και
3) σε κύκλο αν δεν ενδιαφέρει η σειρά με την οποία θα τοποθετηθούν.

Στην πρώτη περίπτωση η παράθεση των 9 συνολικά ατόμων μπορεί να γίνει κατά:

$$M_9 = 9! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\ldots 9 = 362.880 \text{ τρόπους}$$

Στη δεύτερη περίπτωση η απαρίθμηση πρέπει να γίνει σε δύο στάδια. Στο πρώτο στάδιο γίνεται η παράθεση των γυναικών κατά M_5 τρόπους. Στο δεύτερο στάδιο γίνεται η παράθεση των ανδρών κατά M_4 τρόπους. Έτσι σύμφωνα με τη θεμελιώδη αρχή της απαρίθμησης η τοποθέτηση των 9 ατόμων μπορεί να γίνει κατά:

$$M_5\cdot M_4 = 5!\cdot 4! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 2.880 \text{ τρόπους}$$

Τέλος στην τρίτη περίπτωση η τοποθέτηση των 9 ατόμων μπορεί να γίνει κατά:

$$K_9 = (9-1)! = 40.320 \text{ τρόπους.}$$

3 ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ

Έστω ότι έχουμε n διακεκριμένα πράγματα ή στοιχεία. Κάθε σύνολο m στοιχείων τα οποία παίρνονται από τα n αυτά πράγματα (1<m<n) και τα οποία τοποθετούνται στη σειρά επάνω σε μια ευθεία γραμμή, λέγεται **διάταξη των n πραγμάτων τάξης m**. Επομένως δύο διατάξεις των n πραγμάτων τάξης m είναι διαφορετικές όταν, είτε δεν αποτελούνται από τα ίδια στοιχεία ή αποτελούνται μεν από τα ίδια στοιχεία, αλλά τα στοιχεία αυτά είναι τοποθετημένα με διαφορετική σειρά. Το πλήθος των διαφορετικών διατάξεων των n πραγμάτων τάξης m συμβολίζεται με

$$\Delta_n^m$$

το οποίο διαβάζεται "δέλτα n ανά m" και ισούται με

$$\Delta_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n(n-1)\ \dots\ (n-m+1)$$

Παράδειγμα 1

Εάν έχουμε τα τρία γράμματα Α, Β, Γ οι διατάξεις τους δεύτερης τάξης θα είναι τα 6 ζεύγη

ΑΒ, ΒΑ, ΑΓ, ΓΑ, ΒΓ, ΓΒ

Παρατηρούμε ότι ο τύπος

$$\Delta_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

δίνει

$$\Delta_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = 6.$$

4 ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ

Έστω ότι έχουμε ένα σύνολο S το οποίο αποτελείται από n–διακεκριμένα στοιχεία.

Κάθε υποσύνολο C του συνόλου S το οποίο αποτελείται από m ακριβώς στοιχεία, ονομάζεται **συνδυασμός των n στοιχείων ανά m.**

Δύο συνδυασμοί θεωρούνται διαφορετικοί μεταξύ τους μόνο στην περίπτωση που δεν έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία. Δηλαδή, στους συνδυασμούς δεν μας ενδιαφέρει η σειρά κατάταξης των m στοιχείων, αλλά μόνο ποιά είναι τα στοιχεία. Το πλήθος των διαφορετικών συνδυασμών των n στοιχείων ανά m συμβολίζεται με το σύμβολο

$$\binom{n}{m}$$

και ισούται με

$$\frac{n!}{m!(n-m)!}$$

δηλαδή

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!}$$

Για την πληρότητα του συμβόλου $\binom{n}{m}$ δεχόμαστε ότι $\binom{n}{0} = 1$.

Παράδειγμα 1

Έστω ότι έχουμε τα τέσσερα γράμματα Α, Β, Γ, Δ. Οι συνδυασμοί των τεσσάρων γραμμάτων ανά 2 θα είναι

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{24}{2 \cdot 2} = 6$$

στο πλήθος και είναι οι εξής:

ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ, ΒΓ, ΒΔ, ΓΔ

Παράδειγμα 2

Με τη βοήθεια του συμβόλου $\binom{n}{m}$ μπορούμε να υπολογίσουμε τους συντελεστές του διωνύμου

$$(\alpha + \beta)^n$$

οι οποίοι δίνονται από τον τύπο του Νεύτωνα (διωνυμικό θεώρημα)

$$(\alpha+\beta)^n = \binom{n}{0}\alpha^n + \binom{n}{1}\alpha^{n-1}\beta + \ldots + \binom{n}{m}\alpha^{n-m}\beta^m + \ldots + \binom{n}{n}\beta^n$$

Εάν πάρουμε $\alpha=1$ και $\beta=1$ τότε θα έχουμε

$$(1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{m} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Παρατηρούμε ότι το σύμβολο $\binom{n}{m}$ μας δίνει το πλήθος των υποσυνόλων ενός συνόλου S, τα οποία αποτελούνται από m ακριβώς στοιχεία. Άρα το άθροισμα

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n}$$

μας δίνει το πλήθος όλων των υποσυνόλων του συνόλου S το οποίο είναι ίσο με

$$2^n$$

όπου n το πλήθος των στοιχείων του S.

Έτσι αν $S = \{Α, Β, Γ\}$ τότε τα υποσύνολα του S είναι τα

$$0\ , \{Α\}, \{Β\}, \{Γ\}, \{Α, Β\}, \{Α, Γ\}, \{Β, Γ\}, \{Α, Β, Γ\}$$

Το πλήθος τους είναι:

$$κ = 2^3 = 8$$

5 ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΕΤΑΘΕΣΕΩΝ, ΔΙΑΤΑΞΕΩΝ ΚΑΙ ΣΥΝΔΥΑΣΜΩΝ

Έστω ένα σύνολο αντικειμένων που διακρίνονται είτε από το χρώμα τους ή το μέγεθός τους ή την ύπαρξη μιας ιδιότητας, κ.λ.π.. Εκλέγουμε ένα αριθμό από αυτά. Αν

1) στην εκλογή αυτή μας ενδιαφέρει ποιά από τα αντικείμενα εκλέγουμε και όχι η σειρά με την οποία τα εκλέγουμε, τότε πρόκειται για συνδυασμό. Κάθε διαφορετική εκλογή που κάνουμε είναι κι ένας συνδυασμός. Δύο συνδυασμοί με το ίδιο πλήθος αντικειμένων είναι διαφορετικοί αν διαφέρουν σε ένα τουλάχιστον αντικείμενο.
2) στην εκλογή αυτή μας ενδιαφέρει όχι μόνο ποιά από τα αντικείμενα εκλέγουμε αλλά και το πώς, δηλαδή με ποιά σειρά εκλέγονται τα αντικείμενα, τότε πρόκειται για μετάθεση αν χρησιμοποιούμε όλα τα αρχικά αντικείμενα ή για διάταξη αν χρησιμοποιούμε μερικά μόνο από αυτά. Δύο μεταθέσεις ή διατάξεις με ίδιο αριθμό αντικειμένων είναι διαφορετικές αν σε κάποια τουλάχιστο θέση έχουν διαφορετικά αντικείμενα.

Θεωρείστε π.χ. τα αντικείμενα α, β, γ, δ, ε. Τότε οι τριάδες αβδ, γαε, αεγ, βγε, βγδ

είναι συνδυασμοί. Απ' αυτούς ο δεύτερος και ο τρίτος είναι ίδιοι, ενώ οι άλλοι διαφορετικοί. Οι ίδιες τριάδες είναι και διατάξεις. Τότε όμως όλες οι τριάδες είναι διαφορετικές μεταξύ τους. Οι παραπάνω τριάδες δεν αποτελούν μεταθέσεις των αρχικών αντικειμένων. Μια μετάθεση αυτών είναι η

α, γ, β, δ, ε.

6 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Παράδειγμα 1

Πέντε μάρκες αλαντικών Α, Β, Γ, Δ και Ε κατατάσσονται ως προς την προτίμηση από διάφορους καταναλωτές. Πόσοι διαφορετικοί τρόποι κατάταξης υπάρχουν;

Κάθε διαφορετική κατάταξη περιέχει και τις πέντε μάρκες και η σειρά με την οποία τις περιέχει μας ενδιαφέρει. Άρα κάθε κατάταξη είναι μια μετάθεση των 5 πραγμάτων Α, Β, Γ, Δ, Ε.

Τέτοιες κατατάξεις – μεταθέσεις υπάρχουν

$$M_5 = 5! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120$$

Παράδειγμα 2

Πόσους τριψήφιους αριθμούς με διαφορετικά ψηφία μπορούμε να σχηματίσουμε χρησιμοποιώντας τα ψηφία 1,2,4;

Κάθε τριψήφιος αριθμός με διαφορετικά ψηφία αποτελεί μετάθεση των 1,2 και 4. Συνεπώς οι τριψήφιοι αριθμοί που ζητάμε είναι

$$M_3 = 3! = 6$$

οι

$$124, 241, 412, 142, 421, 214$$

Παράδειγμα 3

Για τις 2 θέσεις προέδρου και αντιπροέδρου στο διοικητικό συμβούλιο ενός συνεταιρισμού είναι υποψήφια και τα 7 άτομα του συμβουλίου. Αν υποθέσουμε ότι η εκλογή γίνεται ταυτόχρονα και για τις 2 θέσεις και ότι και τα 7 άτομα είναι υποψήφια και για τις 2 θέσεις να βρεθούν πόσες δυνατότητες υπάρχουν για την εκλογή αυτή.

Πρόκειται προφανώς για διάταξη των 7 ατόμων ανά 2. Ένας οποιοσδήποτε από τους 7 υποψήφιους μπορεί να είναι ο πρώτος επιτυχών, δηλαδή ο πρόεδρος. Μετά την επιλογή αυτή, στη θέση του αντιπροέδρου μπορεί να εκλεγεί ένας από τους υπόλοιπους 6 υποψήφιους. Συνεπώς υπάρχουν:

$$\Delta_7^2 = \frac{7!}{(7-2)!} = 6\cdot 7 = 42 \text{ δυνατότητες}$$

Παράδειγμα 4

Ζητάμε να βρούμε πόσους τύπους γεωργικών εκμεταλλεύσεων μπορούμε να σχηματίσουμε αν η κάθε εκμετάλλευση πρέπει να περιλαμβάνει 7 κλάδους παραγωγής, 4 φυτικής και 3 ζωϊκής, όταν έχουμε δικαίωμα επιλογής από 17 κλάδους φυτικής παραγωγής και 7 ζωϊκής παραγωγής.

Στο πρώτο ερώτημα το πλήθος των τριάδων που ζητάμε είναι ίσο με τον αριθμό των συνδυασμών των 9 ανά 3.

$$\binom{9}{3} = \frac{9!}{3!(9-3)!} = 84$$

Στο δεύτερο ερώτημα τους 4 κλάδους φυτικής παραγωγής μπορούμε να τους διαλέξουμε από 17 κλάδους με 17 ανά 4 τρόπους. Το ίδιο, τους 3 κλάδους ζωϊκής παραγωγής μπορούμε να τους διαλέξουμε από 7 κλάδους με 7 ανά 3 τρόπους. Έτσι σύμφωνα με τη θεμελιώδη αρχή της απαρίθμησης μπορούμε να σχηματίσουμε συνολικά

$$\binom{17}{4}\cdot\binom{7}{3} = \frac{17!\ 7!}{4!\ 13!\ 4!\ 3!} = 83300$$

τύπους γεωργικών εκμεταλλεύσεων.

Σημειώνουμε ότι σε παρόμοια προβλήματα αν μας ενδιέφερε και η σειρά των στοιχείων μέσα σε κάθε εφτάδα τότε θα έπρεπε να πολλαπλασιάσουμε το προηγούμενο αποτέλεσμα με 7!.

Παράδειγμα 5

Να βρεθούν οι διατάξεις δεύτερης τάξης των τεσσάρων στοιχείων α,β,γ,δ

Είναι $$\Delta_4^2 = \frac{4!}{2!} = 12$$

και οι διατάξεις είναι οι εξής

αβ, αγ, αδ, βγ, βδ, γδ

βα, γα, δα, γβ, δβ, δγ

Παράδειγμα 6

Πέντε Έλληνες, τέσσερις Γερμανοί και έξη Γάλλοι διπλωμάτες πρόκειται να συζητήσουν ένα θέμα τριμερούς συνεργασίας σε μια αίθουσα που έχει ένα στρογγυλό τραπέζι 15 θέσεων. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να καθήσουν στο τραπέζι όταν όπως συνηθίζεται, οι διπλωμάτες κάθε εθνικότητας κάθονται σε διπλανά καθίσματα;

Η απαρίθμηση των διαφορετικών τρόπων μπορεί να γίνει σε τέσσερα στάδια. Στο πρώτο να μετρήσουμε τις διαφορετικές τοποθετήσεις των εθνικοτήτων στο τραπέζι και στα άλλα τρία τις τοποθετήσεις των ατόμων κάθε εθνικότητας ξεχωριστά. Από τη θεμελιώδη αρχή απαρίθμησης έχουμε

Εθνικότητες	Έλληνες	Γερμανοί	Γάλλοι
K_3	M_5	M_4	M_6

γιατί έχουμε τρεις εθνικότητες σε κυκλικό τραπέζι, επομένως οι διαφορετικές τοποθετήσεις τους είναι όσες οι κυκλικές μεταθέσεις των τριών πραγμάτων. Από την άλλη μεριά στη θέση κάθε εθνικότητας μπορούμε να βάλουμε τους διπλωμάτες με οποιαδήποτε μετάθεση.

Έτσι έχουμε

$$K_3 \cdot M_5 \cdot M_4 \cdot M_6 = (3-1)!\ 5!\ 4!\ 6! = 4147200$$

διαφορετικές τοποθετήσεις των διπλωματών στο τραπέζι.

Παράδειγμα 7

Με βάση τα δεδομένα του παραδείγματος 4 να βρεθεί ο αριθμός των τύπων γεωργικών εκμεταλλεύσεων που μπορούμε να σχηματίσουμε αν ο κάθε τύπος θα πρέπει να περιλαμβάνει 7 κλάδους παραγωγής με τουλάχιστον 3 κλάδους φυτικής και 2 ζωϊκής παραγωγής.

Επειδή η κάθε εκμετάλλευση πρέπει να περιλαμβάνει 7 κλάδους παραγωγής με τουλάχιστο 3 κλάδους φυτικής και 2 ζωϊκής παραγωγής, οι υπόλοιποι κλάδοι μέχρι τον αριθμό 7 θα μπορεί να είναι είτε 2 κλάδοι φυτικής είτε 2 κλάδοι ζωϊκής είτε 1 κλάδος φυτικής και 1 κλάδος ζωϊκής παραγωγής. Για κάθε μια από τις περιπτώσεις αυτές και με ανάλογο τρόπο με το παράδειγμα 4 θα έχουμε:

$$\text{5 φυτικής, 2 ζωϊκής:} \quad \binom{17}{5}\binom{7}{2} = 129948$$

$$3 \text{ φυτικής, } 4 \text{ ζωϊκής:} \quad \binom{17}{3}\binom{7}{4} = 23800$$

$$4 \text{ φυτικής, } 3 \text{ ζωϊκής:} \quad \binom{17}{4}\binom{7}{3} = 83300 \,.$$

Οι τύποι δηλαδή εκμεταλλεύσεων που μπορούμε να σχηματίσουμε είναι τώρα σύμφωνα με τον κανόνα του αθροίσματος:

$$129948 + 23800 + 83300 = 237048$$

Παράδειγμα 8

Αν η κάθε στήλη του ΠΡΟ–ΠΟ κοστίζει 0,15 €, τότε να βρεθούν τα χρήματα που θα πρέπει να πληρώσουμε:

α) για να κερδίσουμε με βεβαιότητα 100%

β) για ένα δελτίο με 3 διπλές και 2 τριπλές

Θεωρούμε τους 13 αγώνες του ΠΡΟ–ΠΟ ως δεκατριάδες της μορφής (x_1, x_2, ..., x_{13}). Επειδή σε κάθε αγώνα μπορεί να έρθει 1 ή Χ ή 2, συμπεραίνουμε ότι κάθε συνιστώσα x_i έχει τρεις δυνατότητες. Έτσι σύμφωνα με τη θεμελιώδη αρχή της απαρίθμησης υπάρχουν

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3 = 3^{13} = 1.594.320$$

διαφορετικές στήλες ΠΡΟ–ΠΟ. Για να κερδίσουμε συνεπώς σίγουρα πρέπει να συμπληρώσουμε ένα δελτίο ΠΡΟ–ΠΟ με 13 τριπλές οπότε θα πληρώσουμε

$$0{,}15 \cdot 1594320 = 239.148 \text{ €}.$$

Στο δεύτερο ερώτημα θα έχουμε 3 διπλές και 2 τριπλές, δηλαδή 3 συνιστώσες με 2 δυνατότητες, 2 συνιστώσες με 3 δυνατότητες και 8 συνιστώσες με 1 δυνατότητα (8 standards). Έτσι το δελτίο αυτό θα περιλαμβάνει

$$2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1 = 72$$

διαφορετικές στήλες. Το δελτίο αυτό κοστίζει

$$0{,}15\cdot72 = 10{,}80 \text{ €}.$$

Παράδειγμα 9

Από ένα σύνολο 300 γεωργών, 50 απάντησαν ότι καλλιεργούν καλαμπόκι, 40 ότι καλλιεργούν βαμβάκι και 30 ότι καλλιεργούν βαμβάκι και καλαμπόκι. Να βρεθούν πόσοι γεωργοί καλλιεργούν μόνο καλαμπόκι, πόσοι μόνο βαμβάκι και πόσοι δεν καλλιεργούν κανένα από τους δύο αυτούς κλάδους παραγωγής.

Αν με Χ και Υ παραστήσουμε τα σύνολα των γεωργών που καλλιεργούν καλαμπόκι και βαμβάκι αντίστοιχα και με Ω το σύνολο των παραγωγών που ρωτήθηκαν, τότε:

$$n(X) = 50 \quad n(Y) = 40 \quad \text{και} \quad n(X \cap Y) = 30$$

Συνεπώς:

$n(X-Y) = n(X)-n(X \cap Y) = 50-30 = 20$ γεωργοί καλλιεργούν μόνο καλαμπόκι

$n(Y-X) = n(Y)-n(X \cap Y) = 40-30 = 10$ γεωργοί καλλιεργούν μόνο βαμβάκι

$n(\Omega)-n(X \cup Y) = n(\Omega)-n(X)-n(Y)+n(X \cap Y) = 300-50-40+30 = 240$ γεωργοί δεν καλλιεργούν ούτε καλαμπόκι ούτε βαμβάκι.

Παράδειγμα 10

Οι προτιμήσεις ενός δείγματος καταναλωτών για τρια προϊόντα Α, Β και Γ είναι οι εξής: 60 καταναλωτές προτιμούν το Α, 40 το Β, 30 το Γ, 20 τα Α και Β, 15 τα Α και Γ, 12 τα Β και Γ και 6 τα Α, Β και Γ. Ζητείται ο αριθμός των καταναλωτών που προτιμούν

1) τουλάχιστο ένα από τα προϊόντα Α, Β ή Γ και
2) μόνο τα προϊόντα Α και Β.

Παριστάνουμε με Ω το σύνολο των καταναλωτών, με Χ τους καταναλωτές που προτιμούν το προϊόν Α, με Υ αυτούς που προτιμούν το προϊόν Β και με Ζ αυτούς που προτιμούν το προϊόν Γ. Τότε

$$n(X) = 60 \qquad n(Y) = 40 \qquad n(Z) = 30$$
$$n(X \cap Y) = 20 \qquad n(X \cap Z) = 15 \qquad n(Y \cap Z) = 12 \qquad n(X \cap Y \cap Z) = 6$$

Με βάση αυτά έχουμε

$$n(X \cup Y \cup Z) = n(X)+n(Y)+n(Z)-n(X \cap Y)-n(X \cap Z)-n(Y \cap Z)+n(X \cap Y \cap Z) =$$
$$= 60+40+30-20-15-12+6 = 83$$

$$n(X \cap Y)-n(X \cap Y \cap Z) = 20-6 = 14$$

Δηλαδή 83 καταναλωτές προτιμούν τουλάχιστο ένα από τα προϊόντα Α, Β ή Γ και 14 καταναλωτές προτιμούν μόνο τα προϊόντα Α και Β.

Παράδειγμα 11

Αν η κάθε στήλη (εξάδα) του ΛΟΤΤΟ κοστίζει 0,15 €, τότε να βρεθούν τα χρήματα που θα πρέπει να πληρώσουμε:

α) για να κερδίσουμε με βεβαιότητα 100%

β) για ένα δελτίο στο οποίο επιλέγουμε 7 αριθμούς και ζητάμε τους 6 απ᾽ αυτούς

γ) για ένα δελτίο στο οποίο επιλέγουμε 9 αριθμούς και ζητάμε τους 6 απ᾽ αυτούς

δ) για ένα δελτίο στο οποίο επιλέγουμε 10 αριθμούς και ζητάμε τους 5 απ᾽ αυτούς

ε) για ένα δελτίο στο οποίο επιλέγουμε 8 αριθμούς και ζητάμε τους 2 απ᾽ αυτούς

Ο αριθμός όλων των δυνατών διαφορετικών εξάδων που μπορούν να σχηματισθούν από τους 49 αριθμούς του ΛΟΤΤΟ είναι ίσος με όλους τους συνδυασμούς των 49 αριθμών ανά 6. Συνεπώς όλες οι δυνατές εξάδες–στήλες είναι

$$\binom{49}{6} = \frac{49!}{43!\ 6!} = 13.983.816$$

Έτσι για να κερδίσουμε με βεβαιότητα 100% θα πρέπει να πληρώσουμε

$$13.983.816 \cdot 0{,}15 = 2.097.572{,}40\ €$$

Στο δεύτερο ερώτημα ο αριθμός των στηλών σε ένα δελτίο ΛΟΤΤΟ στο οποίο επιλέγουμε 7 αριθμούς με σκοπό να έλθουν οι 6 απ᾽ αυτούς είναι ίσος με τους συνδυασμούς των 7 ανά 6, δηλαδή

$$\binom{7}{6} = \frac{7!}{1!\ 6!} = 7 \text{ στήλες}$$

και τα αντίστοιχα χρήματα

$$7 \cdot 0{,}15 = 1{,}05\ €.$$

Στο τρίτο ερώτημα έχουμε ομοίως

$$\binom{9}{6} = \frac{9!}{3!\ 6!} = 84 \text{ στήλες}$$

και τα χρήματα που θα πληρώσουμε είναι

$$84 \cdot 0{,}15 = 12{,}60\ €.$$

Στο τέταρτο ερώτημα επιλέγουμε 10 αριθμούς και ζητάμε να έλθουν οι 5 απ᾽ αυτούς. Συνεπώς ο αριθμός των στηλών του αντίστοιχου δελτίου ΛΟΤΤΟ είναι

$$\binom{10}{5} = \frac{10!}{5!\ 5!} = 252 \text{ στήλες}$$

και τα χρήματα που πρέπει να πληρώσουμε είναι

$$252 \cdot 0{,}15 = 37{,}80 \text{ €}.$$

Με τον ίδιο τρόπο το δελτίο που θα συμπληρώσουμε στο τελευταίο ερώτημα ισοδυναμεί με

$$\binom{8}{2} = \frac{8!}{2!\ 6!} = 28 \text{ στήλες}$$

και τα χρήματα που πρέπει να πληρώσουμε είναι

$$28 \cdot 0{,}15 = 4{,}20 \text{ €}.$$

II ΠΙΝΑΚΕΣ

1 ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΚΑΙ ΟΡΙΣΜΟΙ

Έστω ένα σύνολο m×n στοιχείων α_{ij}, i = 1,2, ..., m, j = 1,2, ..., n, τα οποία είναι τοποθετημένα με την παρακάτω σειρά

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \alpha_{m3} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

Λέμε ότι η παραπάνω διάταξη αποτελεί ένα **πίνακα τύπου m×n** ή ένα πίνακα με m γραμμές και n στήλες.

Κάθε στοιχείο του πίνακα έχει δύο δείκτες οι οποίοι μας δίνουν τη θέση του στοιχείου μέσα στον πίνακα. Ο πρώτος μας δίνει τη γραμμή και ο δεύτερος τη στήλη στην οποία βρίσκεται το στοιχείο.

Ένα πίνακα μπορούμε να τον παραστήσουμε συμβολικά και με τη μορφή

$$A = (\alpha_{ij})$$

Εάν n=1 τότε ο πίνακας αποτελείται από μια στήλη και λέμε ότι έχουμε ένα **πίνακα στήλη** ή ένα πίνακα τύπου m×1.

Εάν m=1 τότε ο πίνακας λέγεται **πίνακας γραμμή** ή πίνακας τύπου 1×n.

Το σχήμα π.χ.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 7 & 9 & 5 \\ 3 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 8 & 4 & 7 \\ 1 & 5 & 2 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

είναι ένας πίνακας τύπου 4×5.

Το στοιχείο α_{32} είναι το στοιχείο που βρίσκεται στην τρίτη γραμμή και στη δεύτερη στήλη, δηλαδή $\alpha_{32} = 4$.

Ο πίνακας

$$B=\begin{pmatrix}3\\5\\2\\7\end{pmatrix}$$

είναι πίνακας στήλη τύπου 4×1, ενώ ο πίνακας

$$C=\begin{pmatrix}3 & 7 & 4 & 2 & 9\end{pmatrix}$$

είναι ένας πίνακας γραμμή τύπου 1×5.

Ο πίνακας για τον οποίο ισχύει m=n ονομάζεται **τετραγωνικός** πίνακας τύπου n×n ή τετραγωνικός πίνακας τάξης n. Ο πίνακας π.χ.

$$A=\begin{pmatrix}3 & 7 & 3 & 5\\2 & 4 & 10 & 4\\1 & 8 & 8 & 3\\5 & 9 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

είναι τετραγωνικός πίνακας τύπου 4×4 ή τετραγωνικός πίνακας τάξης 4.

Σε ένα τετραγωνικό πίνακα τύπου n×n τα στοιχεία με ίσους δείκτες, δηλαδή τα α_{11}, α_{22}, α_{33}, ..., α_{nn}, λέμε ότι αποτελούν την **κύρια** ή **πρωτεύουσα** διαγώνιο του πίνακα, ενώ τα στοιχεία

$$\alpha_{1n},\ \alpha_{2,\,n-1},\ \alpha_{3,\,n-2},\ \ldots,\ \alpha_{n,\,1}$$

αποτελούν τη **δευτερεύουσα διαγώνιο** του πίνακα. Στον πίνακα π.χ.

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 7\\1 & 2 & 5\\4 & -1 & 6\end{pmatrix}$$

τα στοιχεία 2, 2, 6 αποτελούν την κύρια διαγώνιο ενώ τα στοιχεία 7, 2, 4 τη δευτερεύουσα διαγώνιο.

Εάν έχουμε ένα τετραγωνικό πίνακα τύπου n×n στον οποίο τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου είναι ίσα με 1, ενώ όλα τα άλλα ίσα με 0, τότε λέμε ότι έχουμε το **μοναδιαίο** πίνακα n×n.

Ο πίνακας π.χ.

$$I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

είναι ο μοναδιαίος πίνακας 4×4.

Εάν όλα τα στοιχεία ενός τετραγωνικού πίνακα που βρίσκονται κάτω από την κύρια διαγώνιο είναι 0, τότε ο πίνακας λέγεται **άνω τριγωνικός.** Ενώ εάν είναι 0 τα πάνω από την κύρια διαγώνιο στοιχεία, ο πίνακας λέγεται **κάτω τριγωνικός**.

Ο πίνακας π.χ.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

είναι άνω τριγωνικός, ενώ ο πίνακας

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

είναι κάτω τριγωνικός

Διαγώνιος λέγεται ένας πίνακας εάν όλα τα στοιχεία του είναι ίσα με 0 εκτός από τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου του

Ο πίνακας π.χ.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

είναι ένας διαγώνιος πίνακας.

Ανάστροφος πίνακας A^t ενός πίνακα A λέγεται εκείνος που έχει για στήλες τις γραμμές του πίνακα A και για γραμμές τις στήλες του πίνακα A. Δηλαδή είναι ο πίνακας για τον οποίο ισχύει

$$\alpha_{ij}^{t} = \alpha_{ji}$$

Έστω π.χ. ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & -3 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -8 \\ 7 & 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ο ανάστροφός του είναι ο πίνακας

$$A' = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 7 \\ -2 & 5 & -3 & 6 \\ 4 & -3 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

Ένας τετραγωνικός πίνακας λέμε ότι είναι **συμμετρικός** ως προς την κύρια διαγώνιο αν ισχύει

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$$

Ο πίνακας π.χ.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 & -7 \\ 3 & 5 & 6 & 2 \\ -1 & 6 & 3 & 4 \\ -7 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

είναι συμμετρικός ως προς την κύρια διαγώνιό του.

2 ΠΡΑΞΕΙΣ ΑΝΑΜΕΣΑ ΣΕ ΠΙΝΑΚΕΣ

2.1 Πολλαπλασιασμός πίνακα με αριθμό

Έστω ο πίνακας $A = (\alpha_{ij})$. **Γινόμενο** του πίνακα A επί τον αριθμό λ λέγεται ο πίνακας

$$\lambda A = (\lambda \cdot \alpha_{ij})$$

Δηλαδή είναι ο πίνακας που προκύπτει εάν πολλαπλασιάσουμε όλα τα στοιχεία του A με τον αριθμό λ. Εάν π.χ.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

και $\lambda = 3$, τότε το γινόμενο $\lambda \cdot A$ θα είναι ο πίνακας

$$\lambda \cdot A = \begin{pmatrix} 3.2 & 3.1 \\ 3.4 & 3.5 \\ 3.3 & 3.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 12 & 15 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}$$

2.2 Πρόσθεση και αφαίρεση δύο πινάκων

Έστω ότι έχουμε δύο πίνακες $A = (\alpha_{ik})$ και $B = (\beta_{ik})$ του ίδιου τύπου $m \times n$.

Άθροισμα των δύο αυτών πινάκων είναι ο πίνακας

$$A + B = (\alpha_{ik} + \beta_{ik})$$

Είναι δηλαδή ο πίνακας που προκύπτει από την πρόσθεση των στοιχείων του πίνακα A με τα αντίστοιχα στοιχεία του πίνακα B.

Διαφορά του πίνακα B από τον πίνακα A είναι ο πίνακας

$$A - B = (\alpha_{ik} - \beta_{ik})$$

δηλαδή ο πίνακας που έχει σαν στοιχεία τις διαφορές των στοιχείων του πίνακα B από τα αντίστοιχα στοιχεία του πίνακα A.

Εάν π.χ. $$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 6 & 3 & 7 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

τότε είναι

$$A+B = \begin{pmatrix} 3+1 & 6+0 & 2+1 \\ 5+6 & 4+3 & 3+7 \\ 2+4 & 1+2 & 1+3 \end{pmatrix}, \quad A+B = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 3 \\ 11 & 7 & 10 \\ 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

και $$A-B = \begin{pmatrix} 3-1 & 6-0 & 2-1 \\ 5-6 & 4-3 & 3-7 \\ 2-4 & 1-2 & 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -1 & 1 & -4 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

2.3 Πολλαπλασιασμός πινάκων

Έστω ο πίνακας A τύπου $m \times n$ και ο πίνακας B τύπου $n \times k$. **Γινόμενο του πίνακα A επί τον πίνακα B** λέγεται ο πίνακας C του οποίου τα στοιχεία c_{ij} δίνονται από την σχέση

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} \cdot \beta_{kj}$$

Είναι φανερό ότι για να πολλαπλασιάσουμε δύο πίνακες A και B πρέπει ο αριθμός των στηλών του πρώτου πίνακα να είναι ίσος με τον αριθμό των γραμμών του δεύτερου. Γίνεται επομένως αμέσως φανερό ότι για τον πολλαπλασιασμό πινάκων δεν ισχύει γενικά η αντιμεταθετική ιδιότητα, δηλαδή είναι

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

Στην περίπτωση που ο πίνακας B είναι τύπου $n \times m$ υπάρχει το γινόμενο B.A αλλά και πάλι ισχύει, εκτός από ορισμένες περιπτώσεις

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

Από τον ορισμό του γινομένου C δύο πινάκων A και B προκύπτει ότι τα στοιχεία c_{ij} του πίνακα C είναι το άθροισμα των γινομένων των στοιχείων της i γραμμής του πίνακα A επί τα αντίστοιχα στοιχεία της j στήλης του πίνακα B. Επομένως ο πίνακα C θα έχει διαστάσεις $m \times k$, όπου m ο αριθμός των γραμμών του πίνακα A και k ο αριθμός των στηλών του πίνακα B.

Εάν A είναι ένας πίνακας τύπου $m \times 1$, δηλαδή ένας πίνακας στήλη και B ένας πίνακας τύπου $1 \times m$, τότε το γινόμενο A.B θα είναι ένας πίνακας τύπου $m \times m$, ενώ το γινόμενο $B \cdot A$ θα είναι ένας πίνακας τύπου 1×1, δηλαδή ένας αριθμός.

Το γινόμενο ενός πίνακα A τύπου $m \times n$ επί το μοναδιαίο πίνακα I τύπου $n \times n$ είναι ίσο με τον πίνακα A. Εάν π.χ. πολλαπλασιάσουμε τον A δεξιά επί τον I έχουμε

$$A \cdot I = A$$

όπως μπορεί να επαληθευτεί αμέσως εάν κάνουμε τις πράξεις.

Εάν ο πίνακας A είναι τετραγωνικός τότε ισχύει, όπως αποδεικνύεται με την εκτέλεση των πράξεων, ότι

$$I \cdot A = A \cdot I = A$$

εφόσον φυσικά ο μοναδιαίος πίνακας είναι του ίδιου τύπου με τον A.

3 ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΙΣ ΠΡΑΞΕΙΣ

Έστω ένας τετραγωνικός πίνακας A τάξης n. Με τον όρο στοιχειώδεις πράξεις (ή και στοιχειώδεις μετασχηματισμοί) εννοούμε τις ακόλουθες πράξεις επί των γραμμών του πίνακα A:

α) Τη μετάθεση δύο γραμμών του πίνακα A.

β) Τον πολλαπλασιασμό ή τη διαίρεση μιας οποιασδήποτε σειράς του πίνακα A με ένα σταθερό αριθμό διάφορο από το μηδέν.

γ) Την πρόσθεση ή αφαίρεση του πολλαπλάσιου μιας σειράς του πίνακα A από οποιαδήποτε άλλη σειρά του.

Για παράδειγμα έστω ο ακόλουθος τετραγωνικός πίνακας Α τάξης 3.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 6 \\ 3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

Χρησιμοποιώντας στοιχειώδεις πράξεις μπορούμε να μετασχηματίσουμε τον πίνακα Α, έτσι ώστε αυτός να έχει μονάδες στην κύρια διαγώνιο και μηδενικά πάνω από την κύρια διαγώνιο.

Αρχικά μεταθέτουμε τις σειρές 1 και 3, οπότε έχουμε

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 3 & -1 & 6 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Τώρα κάνουμε τις απαραίτητες πράξεις ώστε η τρίτη στήλη να έχει μηδενικά στοιχεία και μονάδα στη θέση που αντιστοιχεί στην κύρια διαγώνιο. Για το λόγο αυτό πολλαπλασιάζουμε την τρίτη γραμμή με 2 και την αφαιρούμε από την πρώτη γραμμή. Συγχρόνως πολλαπλασιάζουμε την τρίτη γραμμή με 6 και την αφαιρούμε από τη δεύτερη γραμμή.

$$A_2 = \begin{pmatrix} -5 & 5 & 0 \\ -21 & -7 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Το ίδιο κάνουμε για τη δεύτερη στήλη. Διαιρούμε πρώτα τα στοιχεία της δεύτερης σειράς με –7, οπότε

$$A_3 = \begin{pmatrix} -5 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε τη δεύτερη σειρά με 5 και την αφαιρούμε από την πρώτη σειρά και συγχρόνως πολλαπλασιάζουμε τη δεύτερη σειρά με 3 και την αφαιρούμε από την τρίτη σειρά.

$$A_4 = \begin{pmatrix} -20 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ότι κάναμε για τη δεύτερη και τρίτη στήλη κάνουμε και για την πρώτη στήλη. Έτσι αρχικά διαιρούμε τα στοιχεία της πρώτης σειράς με –20, οπότε

$$A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Στη συνέχεια αφαιρούμε την πρώτη σειρά από τη δεύτερη σειρά και συγχρόνως πολλαπλασιάζουμε την πρώτη σειρά με 7 και την προσθέτουμε στην τρίτη σειρά.

$$A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Γενικά, όταν δίνεται ένας τετραγωνικός πίνακας, μπορούμε με τις στοιχειώδεις πράξεις να τον μετασχηματίσουμε έτσι ώστε:

α) Κάθε στοιχείο πάνω από την κύρια διαγώνιο να είναι μηδέν
β) Κάθε στοιχείο της κύριας διαγωνίου να είναι μηδέν ή μονάδα
γ) Αν το διαγώνιο στοιχείο είναι μηδέν, τότε όλα τα στοιχεία της αντίστοιχης σειράς είναι μηδέν
δ) Αν το διαγώνιο στοιχείο είναι μονάδα, τότε κάθε στοιχείο κάτω απ’ αυτό είναι μηδέν

Όταν ένας τετραγωνικός πίνακας μετασχηματιστεί σε τέτοια μορφή, τότε ονομάζεται **κανονική μορφή ή μορφή Hermite**. Ο πίνακας π.χ. A_6 που αποτελεί μετασχηματισμό του πίνακα Α βρίσκεται σε κανονική μορφή.

Έστω ακόμη ο ακόλουθος τετραγωνικός πίνακας Β τάξης 3.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

Χρησιμοποιώντας στοιχειώδεις πράξεις (δες παράδειγμα 4) ο πίνακας Β μπορεί να πάρει την κανονική του μορφή που είναι η ακόλουθη.

$$B' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Και ο πίνακας Β′ που αποτελεί μετασχηματισμό του πίνακα Β βρίσκεται σε κανονική μορφή.

Η μορφή Hermite είναι **μοναδική** για ένα πίνακα, πολλοί όμως πίνακες είναι δυνατόν να έχουν την ίδια μορφή Hermite.