Βασίλης Δ. Μάνος
Καθηγητής Α.Π.Θ.

ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

2η έκδοση
βελτιωμένη

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

Κάθε γνήσιο αντίτυπο φέρει την υπογραφή του συγγραφέα

ISBN 978-960-456-154-4

Φωτοστοιχειοθεσία Εκτύπωση – Βιβλιοδεσία

Π. ΖΗΤΗ & Σια ΟΕ
18ο χλμ Θεσ/νίκης-Περαίας
Τ.Θ. 4171 • Περαία Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19
Τηλ.: 23920 72.222 (10 γραμ.) - Fax: 23920 72.229
e-mail: info@ziti.gr

Βιβλιοπωλείο

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
Αρμενοπούλου 27 • 546 35 Θεσσαλονίκη
Τηλ. 2310 203.720, Fax 2310 211.305
e-mail: sales@ziti.gr

www.ziti.gr

Πρόλογος

Το βιβλίο αυτό απευθύνεται στους φοιτητές της Αγροτικής Οικονομίας της Γεωπονικής Σχολής του Αριστοτέλειου Πανεπιστήμιου Θεσσαλονίκη για να αποτελέσει βοήθημα στο μάθημα της Εφαρμοσμένης Στατιστικής.

Με αυτό επιδιώκεται η εισαγωγή των φοιτητών στις βασικές έννοιες και εφαρμογές της Στατιστικής που είναι απαραίτητες για μια πλήρη και ουσιαστική γεωργοοικονομική και κοινωνική στατιστική ανάλυση. Ανάλογο με το σκοπό αυτό είναι συνεπώς και το περιεχόμενό του. Έτσι καταβλήθηκε ιδιαίτερη προσπάθεια, ώστε να περιληφθούν βασικά και αναγκαία θέματα της Στατιστικής και να αναλυθούν αυτά, άλλα περισσότερο και άλλα λιγότερο, ανάλογα με τις πραγματικές καταστάσεις που αναμένεται να αντιμετωπίσει ένας μελλοντικός γεωργοοικονομολόγος. Στην επιδίωξη του παραπάνω αυτού σκοπού βοηθάει σημαντικά η παράθεση πολλών παραδειγμάτων.

Για να διορθωθούν τα λάθη ή οι παραλήψεις που πιθανόν να έγιναν σε αυτό, είναι ευπρόσδεκτη κάθε καλοπροαίρετη υπόδειξη και κριτική.

Για τη διόρθωση και επιμέλεια των κειμένων ευχαριστώ τις κ. Φ. Κιομουρτζή και Χ. Μουλογιάννη.

Βασίλης Δ. Μάνος

Περιεχόμενα

IV Πίνακες συχνοτήτων και διαγράμμα

V Μέτρα θέσης και διασποράς

VI Συμμεταβολή και συσχέτιση

VII Εκτιμητική

VIII Έλεγχος Υποθέσεων

IX Έλεγχος καλής προσαρμογής και πίνακες σαφήνειας

X Απλή παλινδρόμηση

XI Πολλαπλή παλινδρόμηση

XII Ανάλυση διακύμανσης

XIII Χρονολογικές σειρές και τεχνικές προβλέψεων

Εισαγωγή

Στατιστική είναι η επιστήμη που ασχολείται με τη συγκέντρωση, την επεξεργασία και την ανάλυση δεδομένων με σκοπό την εξαγωγή συμπερασμάτων και τη διεξαγωγή προβλέψεων. Τα δεδομένα αυτά που μπορεί να είναι ποσοτικά, ποιοτικά ή τακτικά, διαχρονικά ή διαστρωματικά, πειραματικά ή κοινωνικοοικονομικά, συγκεντρώνονται με κάποια από τις ειδικές μεθόδους δειγματοληψίας και αναφέρονται σε μια ή περισσότερες παραμέτρους ενός πληθυσμού. Η ανάλυση ενός δείγματος και η εξαγωγή συμπερασμάτων για τον πληθυσμό γίνεται με βάση ειδικές μεθόδους της Στατιστικής.

Αρχικά η λέξη «στατιστική» χρησιμοποιήθηκε με την έννοια των αριθμητικών δεδομένων που αναφέρονται σε πληθυσμιακά και οικονομικά μεγέθη. Στις μέρες μας η λέξη «στατιστική» χρησιμοποιείται με δύο έννοιες. Η πρώτη σημαίνει απλώς στατιστικούς υπολογισμούς, ενώ η δεύτερη τις στατιστικές αρχές και μεθόδους που έχουν αναπτυχθεί με την επεξεργασία και την ανάλυση δεδομένων.

Η ανάπτυξη της Στατιστικής τόσο από την άποψη της θεωρίας, όσο και των εφαρμογών της έχει κάνει τη γνώση της απαραίτητη στην εποχή μας για κάθε επιστήμονα. Χωρίς την επιστήμη αυτή θα ήταν αδύνατη η εξαγωγή συμπερασμάτων για φαινόμενα που είτε δεν είναι συνολικά αντιληπτά στον άνθρωπο, είτε περιλαμβάνουν κάποιο στοιχείο τύχης ή αβεβαιότητας. Όπως αναφέρουν χαρακτηριστικά οι Wonnacotts[27] με τη Στατιστική μπορείς να περιγράψεις ένα άγνωστο κόσμο ανοίγοντας μόνο λίγα παράθυρά του.

Η Επιστήμη της Στατιστικής διακρίνεται σε δύο βασικούς κλάδους, την Περιγραφική Στατιστική και την Επαγωγική ή Συμπερασματική Στατιστική. Η πρώτη ενδιαφέρεται εκτός από τη συγκέντρωση και ταξινόμηση των δεδομένων για την ανάλυση αυτών και την παρουσίαση των αποτελεσμάτων στηριζόμενη στις βασικές αρχές και μεθόδους της Στατιστικής, ενώ η δεύτερη δανειζόμενη και στοιχεία από τη θεωρία των Πιθανοτήτων προχωρεί σε γενικεύσεις των αποτελεσμάτων και σε προβλέψεις για τη λήψη αποφάσεων.

Με την εξέλιξη των επιστημών και τις ειδικές ανάγκες τους σε στατιστικές αναλύσεις δημιουργήθηκαν κλάδοι της Στατιστικής προσαρμοσμένοι στις ανάγκες των επιστημών αυτών. Έτσι έχουμε την Πειραματική Στατιστική, τη Βιοστατιστική, την Οικονομική Στατιστική, τη Στατιστική των Επιχειρήσεων, τη

Γεωργική Στατιστική, κ.λπ. Στις Στατιστικές αυτές δίνονται πάντοτε οι γενικές αρχές της Στατιστικής, αναλύονται περισσότερο τα θέματα της Στατιστικής που ενδιαφέρουν άμεσα τις αντίστοιχες επιστήμες και περιλαμβάνονται εφαρμογές προσαρμοσμένες σε θέματα αυτών. Γενικά όμως μπορούμε να πούμε ότι υπάρχει η Μαθηματική Στατιστική και η Εφαρμοσμένη Στατιστική. Η πρώτη απευθύνεται στους Μαθηματικούς και στους επιστήμονες που ερευνούν τις μεθόδους και τις τεχνικές της Στατιστικής, ενώ η δεύτερη με τις βασικές αρχές, τα ειδικά θέματα και τις ειδικές εφαρμογές που περιλαμβάνει, απευθύνεται σε φοιτητές και επιστήμονες πειραματικών και εφαρμοσμένων επιστημών. Στην Εφαρμοσμένη Στατιστική, αντίθετα με τη Μαθηματική Στατιστική, δεν απαιτούνται γνώσεις προχωρημένων μαθηματικών.

Τους οικονομολόγους και γεωργοοικονομολόγους ενδιαφέρει όπως είναι φανερό η Εφαρμοσμένη στην Αγροτική Οικονομία και Κοινωνιολογία Στατιστική.

I ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΑΠΟ ΤΙΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Η Θεωρία Πιθανοτήτων αποτελεί ιδιαίτερο κλάδο των Μαθηματικών και αποτελεί τη βάση όχι μόνο για την Επαγωγική Στατιστική, αλλά και για άλλους κλάδους Επιστημών, όπως η Θεωρία Αποφάσεων, η Θεωρία Παιγνίων, η Θεωρία Πληροφοριών, οι Επικοινωνίες, ο Δυναμικός Προγραμματισμός κ.λπ. Στο κεφάλαιο αυτό καθώς και στα δύο επόμενο δίνονται μόνο οι βασικές έννοιες από τις πιθανότητες και ορισμένα στοιχεία από τις κατανομές τυχαίων μεταβλητών που θα χρειασθούν στην ανάλυση των επομένων κεφαλαίων.

1 ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ

Για κάθε πείραμα τύχης E ορίζουμε το δειγματικό χώρο (sample space) σαν το σύνολο όλων των πιθανών αποτελεσμάτων. Ο δειγματικός χώρος συμβολίζεται συνήθως με S.

Έτσι για τα πειράματα (ή δοκιμασίες)

E_1 = «ρίχνουμε ένα ζάρι και σημειώνουμε τον αριθμό που έρχεται»

E_2 = «απόφαση δικαστηρίου για κάποιον που δικάζεται»

E_3 = «μετράμε την ακαθάριστη πρόσοδο προβατοτροφικών εκμεταλλεύσεων νομού Θεσσαλονίκης»

δειγματικοί χώροι είναι τα σύνολα

$S_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

S_2 = {αθώος, ένοχος}

$S_3 = \{x : x > 0\}$

Κάθε δειγματικός χώρος που έχει πεπερασμένο ή αριθμήσιμο πλήθος στοιχείων λέγεται **διακριτός.** Στην αντίθετη περίπτωση, όταν δηλαδή το πλήθος των στοιχείων του δεν είναι αριθμήσιμο, ο χώρος λέγεται **συνεχής.** Οι δειγματικοί χώροι S_2 και S_2 είναι διακριτοί, ενώ ο S_3 είναι συνεχής.

2 ΓΕΓΟΝΟΤΑ

Έστω το πείραμα τύχης E και S ο αντίστοιχος δειγματικός χώρος. Ένα γεγονός (event) A είναι ένα σύνολο πιθανών αποτελεσμάτων του δειγματικού χώρου S, δηλαδή ένα γεγονός A είναι ένα υποσύνολο του δειγματικού χώρου S.

Ένα γεγονός λέγεται **απλό** αν περιλαμβάνει μόνο ένα στοιχείο και **σύνθετο** αν περιλαμβάνει περισσότερα από ένα στοιχεία. Τα γεγονότα πολλές φορές αναφέρονται και ως **ενδεχόμενα**.

Στο πείραμα τύχης

E = «ρίψη ενός ζαριού»

με δειγματικό χώρο

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

μπορούμε να έχουμε τα γεγονότα

A_1 = «έρχεται άσσος» = $\{1\}$

A_2 = «έρχεται δύο» = $\{2\}$

A_3 = «έρχεται τρία» = $\{3\}$

A_4 = «έρχεται τέσσερα» = $\{4\}$

A_5 = «έρχεται πέντε» = $\{5\}$

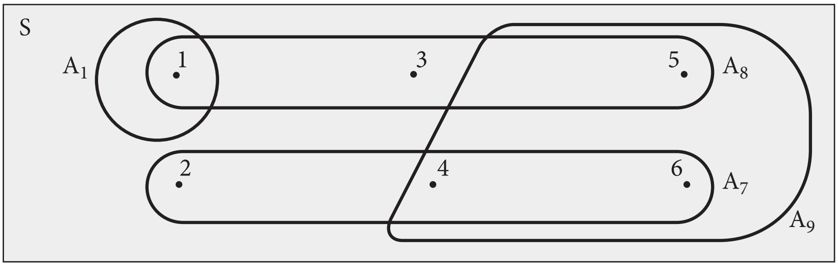
A_6 = «έρχεται έξι» = $\{6\}$

A_7 = «εμφανίζεται ζυγός αριθμός» = $\{2, 4, 6\}$

A_8 = «εμφανίζεται μονός αριθμός» = $\{1, 3, 5\}$

A_9 = «εμφανίζεται αριθμός μεγαλύτερος του 3» = $\{4, 5, 6\}$

Από τα γεγονότα αυτά τα A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 είναι απλά και τα A_7, A_8, A_9 είναι σύνθετα.



Σχήμα 1: *Δειγματικός χώρος και γεγονότα στη δοκιμασία της ρίψης ενός ζαριού.*

Δύο γεγονότα A και B λέγονται **αμοιβαία αποκλειστικά** (mutually exclusive) ή **ασυμβίβαστα** όταν δεν μπορούν να συμβούν συγχρόνως στο ίδιο πείραμα. Δηλαδή όταν

$$A \cap B = \varnothing$$

Τα γεγονότα A_7 και A_8 στο σχήμα 1 είναι ασυμβίβαστα ενώ δε συμβαίνει το ίδιο με τα γεγονότα A_1 και A_8 γιατί

$$A_1 \cap B_8 = \{1\} \neq \varnothing$$

3 ΣΧΕΤΙΚΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ

Έστω ότι ένα πείραμα τύχης E επαναλαμβάνεται n φορές και ότι A και B είναι δύο γεγονότα που συνδέονται με το πείραμα αυτό. Σημειώνουμε με n_A και n_B τον αριθμό των φορών που συμβαίνουν τα γεγονότα A και B στις n επαναλήψεις του πειράματος αντίστοιχα. Ο αριθμός

$$f_A = \frac{n_A}{n}$$

καλείται σχετική συχνότητα του γεγονότος A στις n επαναλήψεις του πειράματος E και έχει τις παρακάτω ιδιότητες

α) $0 \leq f_A \leq 1$

β) $f_A = 1$ αν και μόνο αν το γεγονός A συμβαίνει και στις n επαναλήψεις.

γ) $f_A = 0$ αν και μόνο αν το γεγονός A συμβαίνει και στις n επαναλήψεις.

δ) Αν A και B είναι δύο ασυμβίβαστα γεγονότα, τότε η σχετική συχνότητα του γεγονότος $A \cup B$ είναι

$$f_{A\cup B} = f_A + f_B \,.$$

ε) Αν A και B είναι δύο μη ασυμβίβαστα γεγονότα, τότε η σχετική συχνότητα του γεγονότος $A \cup B$ είναι

$$f_{A\cup B} = f_A + f_B - f_{A\cap B}$$

στ) Η σχετική συχνότητα f_A είναι συνάρτηση του αριθμού των επαναλήψεων n και συγκλίνει σε κάποιο αριθμό $P(A)$ καθώς το n τείνει στο άπειρο.

Η σχετική συχνότητα των σύνθετων γεγονότων στις περιπτώσεις που δεν μπορεί να υπολογισθεί κατευθείαν, υπολογίζεται με τη βοήθεια των απλών γεγονότων που αποτελούν το σύνθετο γεγονός.

Αν υποθέσουμε ότι το πείραμα τύχης

E = «ρίψη ενός ζαριού»

επαναλαμβάνεται 10 φορές $(n=10)$ στις οποίες εμφανίζονται κατά σειρά οι αριθμοί

2, 1, 3, 4, 3, 6, 2, 3, 5, 5

τότε για τα γεγονότα A_1, A_7, A_8 και A_9 της προηγούμενης παραγράφου θα έχουμε

$$f_{A_1}=\frac{1}{10}$$

$$f_{A_7}=\frac{4}{10}$$

ή $$f_{A_7}=f_{A_2\cup A_4\cup A_6}=f_{A_2}+f_{A_4}+f_{A_6}=\frac{2}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}=\frac{4}{10}$$

$$f_{A_8}=\frac{6}{10} \qquad f_{A_9}=\frac{4}{10}$$

$$f_{A_7\cup A_8}=f_{A_7}+f_{A_8}=\frac{4}{10}+\frac{6}{10}=1$$

4 ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ

Έστω E ένα πείραμα και S ο δειγματικός του χώρος. Πιθανότητα του γεγονότος A, και θα σημειώνεται με P(A) ή P_A, λέγεται το όριο της σχετικής συχνότητας του γεγονότος A καθώς το n τείνει στο άπειρο.

Δηλαδή $$P(A)=\underset{n\to\infty}{\text{ορ.}}\, f_A$$

Η πιθανότητα έχει τις παρακάτω ιδιότητες

α) $0\le P(A)\le 1$

β) $P(S)=1$

γ) $P(\varnothing)=0$

δ) Αν ε_i, $i=1, 2, 3, \ldots, n$ είναι τα στοιχεία του δειγματικού χώρου S τότε

$$\sum_{i=1}^{n}P(\varepsilon_i)=1$$

ε) Αν τα γεγονότα B_i, $i = 1, 2, \ldots, \kappa$ αποτελούν ένα διαμελισμό του δειγματικού χώρου S, τότε

$$\sum_{i=1}^{\kappa} P(B_i) = 1$$

στ) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ αν A και B είναι δύο γεγονότα ασυμβίβαστα.

ζ) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ αν A και B δύο τυχόντα γεγονότα.

η) $P(A) = 1 - P(\overline{A})$, όπου $\overline{A}$ το συμπληρωματικό γεγονός του A $(A \cup \overline{A} = S)$.

θ) Αν $A \subseteq B$ τότε $P(A) \leq P(B)$.

Όπως η σχετική συχνότητα, έτσι και η πιθανότητα σύνθετων γεγονότων, όταν δεν μπορεί να υπολογισθεί κατευθείαν, υπολογίζεται με τη βοήθεια των απλών γεγονότων που αποτελούν το σύνθετο γεγονός.

Αν φανταζόμασταν το πείραμα της ρίψης ενός μη ελαττωματικού ζαριού να επαναλαμβάνεται απεριόριστες φορές, τότε θα παρατηρούσαμε ότι κάθε ένας απ' τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 5 και 6 θα εμφανιζόταν με την ίδια συχνότητα. Συνεπώς

$$P(A_1) = P(A_2) = \ldots = P(A_6) = \frac{1}{6}$$

$$P(A_7) = P(A_2 \cup A_4 \cup A_6) = P(A_2) + P(A_4) + P(A_6) =$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(A_8) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(A_9) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(A_7 \cup A_8) = P(A_7) + P(A_8) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$P(A_1 \cup A_8) = P(A_1) + P(A_8) - P(A_1 \cap A_8) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

γιατί $\quad P(A_1 \cap A_8) = P(A_1) = \frac{1}{6}$

$$P(\{\text{να μην έλθει άσσος}\}) = P(\overline{A}_1) = 1 - P(A_1) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

5 ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ

Έστω ένα πείραμα E και δύο γεγονότα A και B που αντιστοιχούν σ' αυτό. Συμβολίζουμε με $P\left(\frac{B}{A}\right)$ τη δεσμευμένη πιθανότητα του γεγονότος B, όταν το γεγονός A έχει συμβεί.

Αν $P(A)>0$ τότε η δεσμευμένη πιθανότητα του γεγονότος B δίνεται από τον τύπο

$$P\left(\frac{B}{A}\right)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

Από τον τύπο αυτό προκύπτει το **θεώρημα του πολλαπλασιασμού**

$$P(A\cap B)=P\left(\frac{B}{A}\right)P(A)=P\left(\frac{A}{B}\right)P(B)$$

Είναι φανερό ότι $P\left(\frac{B}{A}\right)=0$ αν A και B είναι ασυμβίβαστα μεταξύ τους γεγονότα.

Στο πείραμα της ρίψης ενός ζαριού οι πιθανότητες των γεγονότων

A_{10} = «έρχεται ζυγός αριθμός, όταν έχει εμφανιστεί άσσος»

A_{11} = «έρχεται μονός αριθμός, όταν έχει εμφανιστεί άσσος»

A_{12} = «έρχεται μονός αριθμός, όταν έχει εμφανιστεί αριθμός μεγαλύτερος του 3»

είναι:

$$P(A_{10})=P\left(\frac{A_7}{A_1}\right)=\frac{P(A_7\cap A_1)}{P(A_1)}=\frac{0}{\frac{1}{6}}=0$$

$$P(A_{11})=P\left(\frac{A_8}{A_1}\right)=\frac{P(A_8\cap A_1)}{P(A_1)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}}=1$$

$$P(A_{12})=P\left(\frac{A_8}{A_9}\right)=\frac{P(A_8\cap A_9)}{P(A_9)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$$

γιατί $A_1\cap A_7=\varnothing$ και $P(\varnothing)=0$

$A_8\cap A_9=\{5\}$ και $P(\{5\})=\frac{1}{6}$

6 ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑ ΓΕΓΟΝΟΤΩΝ

Δύο γεγονότα A και B που συνδέονται με ένα δειγματικό χώρο S σ' ένα πείραμα E λέγονται ανεξάρτητα αν και μόνον αν

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Από τον ορισμό αυτό προκύπτει ότι για δύο ανεξάρτητα γεγονότα A και B

$$P\left(\frac{B}{A}\right) = P(B)$$

και $$P\left(\frac{A}{B}\right) = P(A)$$

Τα γεγονότα A_7 και A_{13} όπου:

A_{13} = «εμφανίζεται αριθμός μικρότερος του 3»

είναι ανεξάρτητα γιατί

$$P\left(\frac{A_7}{A_{13}}\right) = \frac{P(A_7 \cap A_{13})}{P(A_{13})} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{6}} = \frac{1}{2} = P(A_7)$$

αφού $A_{13} = \{1,\ 2\}$ $\qquad P(A_{13}) = \frac{2}{6}$

$A_7 \cap A_{13} = \{2\}$ $\qquad P(A_7 \cap A_{13}) = \frac{1}{6}$

7 ΘΕΩΡΗΜΑ BAYES

Αν $B_1, B_2, \ldots, B_\kappa$ είναι ένας διαμελισμός του δειγματικού χώρου S και αν A είναι ένα γεγονός που συνδέεται με το χώρο S, τότε

$$P\left(\frac{B_i}{A}\right) = \frac{P\left(\frac{A}{B_i}\right)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{\kappa} P\left(\frac{A}{B_j}\right)P(B_j)} \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ \kappa$$

Επειδή τα γεγονότα B_i είναι ένας διαμελισμός του δειγματικού χώρου S, ένα και μόνο ένα από τα γεγονότα B_i συμβαίνει. Συνεπώς ο τύπος του Bayes δίνει την πιθανότητα ενός γεγονότος B_i, όταν το γεγονός A έχει συμβεί.

Για να εφαρμοστεί ο τύπος του Bayes πρέπει να είναι γνωστές οι πιθανότητες $P(B_i)$, $i=1, 2, \ldots, \kappa$ πράγμα που δε συμβαίνει πάντα στην πράξη, περιορίζοντας την εφαρμογή του.

Στο παράδειγμα του πειράματος με το ζάρι τα γεγονότα

B_1 = «εμφανίζεται μονός αριθμός» = {1, 3, 5}

και B_2 = «εμφανίζεται ζυγός αριθμός» = {2, 4, 6}

αποτελούν διαμελισμό του δειγματικού χώρου

$S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ αφού ισχύει

$B_1 \cap B_2 = \varnothing$ και $B_1 \cup B_2 = S$

Έτσι αν υποθέσουμε ότι το γεγονός

A = «έρχεται αριθμός μεγαλύτερος του 3» = {4, 5, 6}

έχει συμβεί τότε οι δεσμευμένες πιθανότητες $P\left(\frac{B_i}{A}\right)$ δίνονται από τους τύπους

$$P\left(\frac{B_1}{A}\right)=\frac{P\left(\frac{A}{B_1}\right)P(B_1)}{P\left(\frac{A}{B_1}\right)P(B_1)+P\left(\frac{A}{B_2}\right)P(B_2)}$$

$$P\left(\frac{B_2}{A}\right)=\frac{P\left(\frac{A}{B_2}\right)P(B_2)}{P\left(\frac{A}{B_1}\right)P(B_1)+P\left(\frac{A}{B_2}\right)P(B_2)}$$

Στην περίπτωσή μας είναι

$$P(B_1)=\frac{1}{2} \qquad P(B_2)=\frac{1}{2}$$

$$P\left(\frac{A}{B_1}\right)=\frac{P(A\cap B_1}{P(B_1)}=\frac{P(\{5\})}{P(B_1)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$$

$$P\left(\frac{A}{B_2}\right)=\frac{P(A\cap B_2)}{P(B_2)}=\frac{P(\{4,6\})}{P(B_1)}=\frac{\frac{2}{6}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$$

Έτσι

$$P\left(\frac{B_1}{A}\right)=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\right)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}}=\frac{1}{3}$$

$$P\left(\frac{B_2}{A}\right)=\frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\right)}=\frac{\frac{2}{6}}{\frac{3}{6}}=\frac{2}{3}$$

8 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Παράδειγμα 1

Έστω το πείραμα τύχης που αποτελείται από τρεις ρίψεις ενός κανονικού νομίσματος. Στην περίπτωση αυτή ο δειγματικός χώρος είναι[1]:

$$S=\{KKK, KK\Gamma, K\Gamma K, K\Gamma\Gamma, \Gamma\Gamma\Gamma, \Gamma KK, \Gamma\Gamma K, \Gamma K\Gamma\}$$

Επειδή το νόμισμα είναι κανονικό θα είναι

$$P(K)=P(\Gamma)=\frac{1}{2}$$

και συνεπώς

$$P(KKK)=P(KK\Gamma)=\ldots=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

θεωρούμε τα γεγονότα

Α = «έρχονται δύο κεφαλές»

Β = «έρχεται μια φορά γράμματα»

Γ = «η πρώτη ρίψη δίνει γράμματα»

Δ = «η τρίτη ρίψη δίνει κεφαλή»

Ε = «η πρώτη ρίψη δίνει γράμματα και η τρίτη κεφαλή»

Ζ = «η πρώτη ρίψη δίνει γράμματα ή η τρίτη κεφαλή»

Η = «η πρώτη ρίψη δε δίνει γράμματα ούτε η τρίτη κεφαλή»

---

[1] Σύμφωνα με τη θεμελιώδη αρχή της απαρίθμησης της Συνδυαστικής ο χώρος θα έχει 8 στοιχεία.

Τότε έχουμε

$$A = \{ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΓΚΚ\} \quad \text{και} \quad P(A) = \frac{3}{8}$$

$$B = \{ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΓΚΚ\} \quad \text{και} \quad P(B) = \frac{3}{8}$$

$$\Gamma = \{ΓΓΓ, ΓΚΚ, ΓΓΚ, ΓΚΓ\} \quad \text{και} \quad P(\Gamma) = \frac{4}{8}$$

$$\Delta = \{ΚΚΚ, ΚΓΚ, ΓΚΚ, ΓΓΚ\} \quad \text{και} \quad P(\Delta) = \frac{4}{8}$$

$$E = \{ΓΚΚ, ΓΓΚ\} \quad \text{και} \quad P(E) = \frac{2}{8}$$

$$Z = \{ΓΓΓ, ΓΚΚ, ΓΓΚ, ΓΚΓ, ΚΓΚ, ΚΚΚ\} \quad \text{και} \quad P(Z) = \frac{6}{8}$$

$$H = \{ΚΚΓ, ΚΓΓ\} \quad \text{και} \quad P(H) = \frac{2}{8}$$

Παρατηρούμε ακόμη ότι τα γεγονότα E και Z μπορούν να υπολογιστούν και ως εξής

$$E = \Gamma \cap \Delta = \{ΓΓΓ, ΓΚΚ, ΓΓΚ, ΓΚΓ\} \cap \{ΚΚΚ, ΚΓΚ, ΓΚΚ, ΓΓΚ\} = \{ΓΚΚ, ΓΓΚ\}$$

$$Z = \Gamma \cup \Delta = \{ΓΓΓ, ΓΚΚ, ΓΓΚ, ΓΚΓ\} \cup \{ΚΚΚ, ΚΓΚ, ΓΚΚ, ΓΓΚ\} =$$
$$= \{ΓΓΓ, ΓΚΚ, ΓΓΚ, ΓΚΓ, ΚΓΚ, ΚΚΚ\}$$

Επίσης παρατηρούμε ότι

$$P(\Gamma \cap \Delta) = \frac{2}{8} \qquad P(\Gamma) = \frac{4}{8} \qquad \Gamma(\Delta) = \frac{4}{8}$$

οπότε

$$P(\Gamma \cap \Delta) = P(\Gamma)P(\Delta)$$

πράγμα που σημαίνει ότι τα γεγονότα Γ και Δ είναι ανεξάρτητα.

Επειδή επίσης $\Gamma \cap \Delta \neq \varnothing$ συνεπάγεται ότι τα γεγονότα Γ και Δ δεν είναι ασυμβίβαστα και έτσι θα πρέπει να ισχύει

$$P(\Gamma \cup \Delta) = P(\Gamma) + P(\Delta) - P(\Gamma \cap \Delta)$$

Πράγματι έχουμε

$$P(\Gamma \cup \Delta) = P(Z) = \frac{6}{8} \qquad P(\Gamma) = \frac{4}{8}$$

$$P(\Delta) = \frac{4}{8} \qquad P(\Gamma \cap \Delta) = \frac{2}{8}$$

και έτσι η σχέση αυτή ισχύει.

Τέλος το γεγονός H είναι συμπληρωματικό του γεγονότος Z, δηλαδή $\mathrm{H} = \overline{\mathrm{Z}}$, αφού

$$\mathrm{H} = \{\mathrm{KK\Gamma}, \mathrm{K\Gamma\Gamma}\} \quad \text{και} \quad \mathrm{H} \cup \mathrm{Z} = \mathrm{S}$$

Συνεπώς θα πρέπει να ισχύει

$$\mathrm{P(H)} = 1 - \mathrm{P(Z)}$$

Πράγματι $\quad \mathrm{P(H)} = \frac{2}{8} \quad$ και $\quad 1 - \mathrm{P(Z)} = 1 - \frac{6}{8} = \frac{2}{8}$

Επίσης επειδή $\mathrm{H} \cap \mathrm{Z} = \varnothing$ συνεπάγεται ότι τα γεγονότα H και Z θα είναι ασυμβίβαστα. Άρα θα πρέπει

$$\mathrm{P(H \cup Z)} = \mathrm{P(H)} + \mathrm{P(Z)}$$

πράγμα που ισχύει αφού

$$\mathrm{P(H \cup Z)} = \mathrm{P(S)} = 1$$

και $\quad \mathrm{P(H)} = \frac{2}{8}\,, \qquad \mathrm{P(Z)} = \frac{6}{8}.$

Παράδειγμα 2

Στο προηγούμενο πείραμα τύχης θεωρείστε ότι το νόμισμα δεν είναι κανονικό και ότι

$$\mathrm{P(K)} = \frac{3}{5} \quad \text{και} \quad \mathrm{P(\Gamma)} = \frac{2}{5}$$

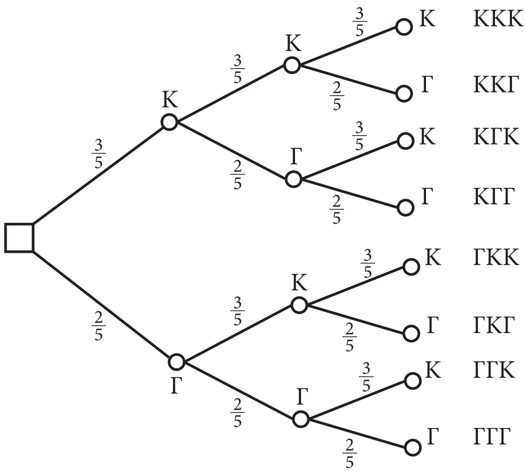
Τότε τα στοιχεία του δειγματικού χώρου S δεν θα είναι ισοπίθανα, αλλά θα έχουν πιθανότητες που προκύπτουν εύκολα από το σχήμα 2.

$$\mathrm{P(KKK)} = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{27}{125}$$

$$\mathrm{P(KK\Gamma)} = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{18}{125}$$

$$\mathrm{P(K\Gamma K)} = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{18}{125}$$

$$\mathrm{P(K\Gamma\Gamma)} = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{12}{125}$$



Σχήμα 2: *Δένδρο αποτελεσμάτων στο πείραμα της ρίψης ενός μη κανονικού νομίσματος τρεις φορές.*

$$P(\Gamma KK)=\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{18}{125}$$

$$P(\Gamma K\Gamma)=\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{12}{125}$$

$$P(\Gamma\Gamma K)=\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{12}{125}$$

$$P(\Gamma\Gamma\Gamma)=\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{8}{125}$$

$$P(KKK)+P(KK\Gamma)+\ldots+P(\Gamma\Gamma\Gamma)=1$$

Αν θέλουμε τώρα να υπολογίσουμε τις πιθανότητες των γεγονότων του προηγούμενου παραδείγματος θα έχουμε

$$P(A)=\frac{18}{125}+\frac{18}{125}+\frac{18}{125}=\frac{54}{125}$$

$$P(B)=\frac{18}{125}+\frac{18}{125}+\frac{18}{125}=\frac{54}{125}$$

$$P(\Gamma)=\frac{8}{125}+\frac{18}{125}+\frac{12}{125}+\frac{12}{125}=\frac{50}{125}$$

$$P(\Delta)=\frac{27}{125}+\frac{18}{125}+\frac{18}{125}+\frac{12}{125}=\frac{75}{125}$$

$$P(E) = \frac{18}{125} + \frac{12}{125} = \frac{30}{125}$$

$$P(Z) = \frac{8}{125} + \frac{18}{125} + \frac{12}{125} + \frac{12}{125} + \frac{18}{125} + \frac{27}{125} = \frac{95}{125}$$

$$P(H) = \frac{18}{125} + \frac{12}{125} = \frac{30}{125}$$

Επίσης παρατηρούμε ότι τα γεγονότα Γ και Δ εξακολουθούν να είναι ενα-ξάρτητα αφού

$$P(\Gamma \cap \Delta) = P(E) = \frac{30}{125}$$

$$P(\Gamma) \cdot P(\Delta) = \frac{50}{125} \cdot \frac{75}{125} \cdot \frac{30}{125}$$

Παράδειγμα 3

Ένας γεωργός από 5 είδη καλλιεργειών Α, Β, Γ, Δ και Ε πρόκειται να διαλέξει 3 είδη που θα καλλιεργήσει στην εκμετάλλευσή του. Στην περίπτωση αυτή ο δειγματικός χώρος περιλαμβάνει 10 στοιχεία – συνδυασμούς.[2]

$S = \{AB\Gamma, AB\Delta, ABE, A\Gamma\Delta, A\Gamma E, A\Delta E, B\Gamma\Delta, B\Gamma E, B\Delta E, \Gamma\Delta E\}$

Αν υποθέσουμε ότι και οι 10 συνδυασμοί έχουν την ίδια πιθανότητα να καλλιεργηθούν από τον αγρότη, τότε η πιθανότητα κάθε συνδυασμού θα είναι ίση με $\frac{1}{10}$.

Θεωρούμε τα γεγονότα

A_1 = «η εκμετάλλευση θα περιλαμβάνει την καλλιέργεια Α»

A_2 = «η εκμετάλλευση θα περιλαμβάνει την καλλιέργεια Β»

A_3 = «η εκμετάλλευση θα περιλαμβάνει τις καλλιέργειες Α και Β»

A_4 = «η εκμετάλλευση θα περιλαμβάνει την καλλιέργεια Α ή την καλλιέργεια Β»

A_5 = «η εκμετάλλευση θα περιλαμβάνει τις καλλιέργειες Α, Β και Δ»

A_6 = «η εκμετάλλευση θα περιλαμβάνει τις καλλιέργειες Γ ή Ε»

A_7 = «η εκμετάλλευση θα περιλαμβάνει την καλλιέργεια Α»

Τότε έχουμε

2 Συνδυασμός των 5 καλλιεργειών ανά 3.

$$A_1 = \{ΑΒΓ, ΑΒΔ, ΑΒΕ, ΑΓΔ, ΑΓΕ, ΑΔΕ\} \quad \text{και} \quad P(A_1) = \frac{6}{10}$$

$$A_2 = \{ΑΒΓ,\ ΑΒΔ,\ ΑΒΕ,\ ΒΓΔ,\ ΒΓΕ,\ ΒΔΕ\} \quad \text{και} \quad P(A_2) = \frac{6}{10}$$

$$A_3 = A_1 \cap A_2 = \{ΑΒΓ,\ ΑΒΔ,\ ΑΒΕ\} \quad \text{και} \quad P(A_3) = \frac{3}{10}$$

$$A_4 = A_1 \cup A_2 = \{ΑΒΓ,\ ΑΒΔ,\ ΑΒΕ,\ ΑΓΔ,\ ΑΓΕ,\ ΑΔΕ,\ ΒΓΔ,\ ΒΓΕ,\ ΒΔΕ\}$$

$$\text{και} \quad P(A_4) = \frac{9}{10}$$

$$A_5 = \{ΑΒΔ\} \quad \text{και} \quad P(A_5) = \frac{1}{10}$$

$$A_6 = \{ΑΒΔ\} \quad \text{και} \quad P(A_6) = \frac{1}{10}$$

$$A_7 = \{ΒΓΔ,\ ΒΓΕ,\ ΒΔΕ,\ ΓΔΕ\} \quad \text{και} \quad P(A_7) = \frac{4}{10}$$

Παρατηρούμε ακόμη

$$P(A_4) = P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) = \frac{6}{10} + \frac{6}{10} - \frac{3}{10} = \frac{9}{10}$$

$$P(A_7) = P(\overline{A}_1) = 1 - P(A_1) = 1 - \frac{6}{10} = \frac{4}{10}$$

Παράδειγμα 4

Σ’ ένα στάβλο υπάρχουν 100 μοσχίδες και αγελάδες. Απ’ αυτές οι 40 είναι μοσχίδες (Μ) και οι 60 αγελάδες (Α). Από τις αγελάδες οι 18 είναι έγγειες (Ε) και οι 42 όχι (Ο), ενώ από τις μοσχίδες οι 12 είναι έγγειες και οι υπόλοιπες 28 όχι. Ένας γεωπόνος μπαίνει στο στάβλο πλησιάζει τυχαία ένα ζώο του στάβλου και βλέπει ότι δεν είναι έγγυο. Ποια είναι η πιθανότητα ότι αυτή είναι αγελάδα;

Τα δεδομένα του προβλήματος μπορούν να παρουσιαστούν σύντομα στον παρακάτω πίνακα

	Α	**Μ**	
0 Ε	42 18	28 12	70 30
	60	40	100

Για τον υπολογισμό της πιθανότητας $P\left(\dfrac{A}{O}\right)$ έχουμε

$$P(A \cap O) = \frac{42}{100} \qquad \text{και} \qquad P(O) = \frac{70}{100}$$

έτσι $$P\left(\frac{A}{O}\right) = \frac{P(A \cap O)}{P(O)} = \frac{42}{70}$$

Επίσης παρατηρούμε ότι επειδή

$$P(A) = \frac{60}{100}, \; P(O) = \frac{70}{100} \quad \text{και} \quad P(A \cap O) = \frac{42}{100}$$

ισχύει $$P(A \cap O) = P(A)P(O)$$

που σημαίνει ότι τα γεγονότα A και O είναι ανεξάρτητα.

Παράδειγμα 5

Ένα προϊόν μπορεί να παραχθεί σε τρία διαφορετικά εργοστάσια. Είναι γνωστό ότι το εργοστάσιο 1 παράγει διπλάσια ποσότητα από το εργοστάσιο 2, ενώ τα εργοστάσια 2 και 3 παράγουν τον ίδιο αριθμό προϊόντων μέσα στην ίδια χρονική περίοδο. Από προηγούμενες μετρήσεις είναι επίσης γνωστό ότι το 2% των προϊόντων που παράγονται στα εργοστάσια 1 και 2 είναι ελαττωματικά, ενώ τα ελαττωματικά προϊόντα στο εργοστάσιο 3 είναι το 4% των παραγομένων. Όλα τα προϊόντα που παράγονται από τα τρία εργοστάσια συγκεντρώνονται στην ίδια αποθήκη όπου γίνεται ποιοτικός έλεγχος στην παραγωγή κάθε μέρας. Ο αρμόδιος για τον έλεγχο εκλέγει τυχαία ένα τεμάχιο και το βρίσκει ελαττωματικό. Ποια είναι η πιθανότητα να έχει κατασκευασθεί αυτό στο εργοστάσιο 1;

Ορίζουμε τα γεγονότα:

A = «το τεμάχιο είναι ελαττωματικό».

B_i = «το τεμάχιο κατασκευάσθηκε στο εργοστάσιο i», $i = 1, 2, 3$.

Η ζητούμενη πιθανότητα είναι η $P\left(\dfrac{B_1}{A}\right)$

Από τον τύπο του Bayes έχουμε

$$P\left(\frac{B_1}{A}\right) = \frac{P\left(\dfrac{A}{B_1}\right)P(B_1)}{P\left(\dfrac{A}{B_1}\right)P(B_1) + P\left(\dfrac{A}{B_2}\right)P(B_2) + P\left(\dfrac{A}{B_3}\right)P(B_3)}$$

Στην περίπτωσή μας είναι

$$P(B_1) = \frac{1}{2} \qquad P(B_2) = \frac{1}{4} \qquad P(B_3) = \frac{1}{4}$$

$$P\left(\frac{A}{B_1}\right) = 0,02 \qquad P\left(\frac{A}{B_2}\right) = 0,02 \qquad P\left(\frac{A}{B_3}\right) = 0,04$$

Οπότε $P\left(\frac{B_1}{A}\right) = 0,40$.