

Ε. ΛΙΒΙΕΡΑΤΟΣ

Α. ΦΩΤΙΟΥ

Ελλειψοειδής

# ΓΕΩΔΑΙΣΙΑ

& Γεωδαιτικά

Δίκτυα



2<sup>η</sup> Έκδοση

Εκδόσεις Ζήτη

Ελλειψοειδές  
Αναγωγές παρατηρήσεων  
Συστήματα αναφοράς  
Γεωδαιτικό Datum  
Προβολές  
Μετασχηματισμοί  
Γεωδαιτικά δίκτυα  
Βελτιστοποιήσεις

GPS

## *Πρόλογος στην πρώτη έκδοση*

Το βιβλίο αυτό γράφτηκε με οδηγό: Την τελευταία 7χρονη εμπειρία διδασκαλίας του βασικού αυτού γεωδαιτικού μαθήματος στο Τμήμα Αγρονόμων και Τοπογράφων Μηχανικών του ΑΠΘ· το γεγονός ότι από το 1981-1982 που εμφανίστηκαν για πρώτη φορά στην Ελληνική Βιβλιογραφία δύο βιβλία σχετικού περιεχομένου, από τον ένα των συγγραφέων (ΕΛ), κανένα άλλο βιβλίο στην περιοχή δεν έχει κυκλοφορήσει· την πρόσφατη (1984) αναβάθμιση των επιστημονικών απαιτήσεων που επέβαλε στην «τοπογραφική πρακτική» της χώρας μας, η Επιχείρηση Πολεοδομικής Ανασυγκρότησης (ΕΠΑ)· την σύντομα επερχόμενη θεσμοθέτηση του Εθνικού Κτηματολογίου της χώρας, στο οποίο η γεωδαιτική υποδομή παίζει, όπως είναι γνωστό, βασικό ρόλο και τέλος την προβλεπόμενη έναρξη των αναγκαίων οργανωμένων μεταπτυχιακών σπουδών στα ΑΕΙ της χώρας.

Η ύλη αναφέρεται στο κλασικό, «γεωμετρικό» θα λέγαμε, μέρος της γεωδαισίας το οποίο ασχολείται με τον προσδιορισμό θέσεων σημείων της γήινης επιφάνειας περιγράφοντάς τες ή με ορθογώνιες ελλειψοειδείς συντεταγμένες ως προς κάποιο ελλειψοειδές εκ περιστροφής που ορίζεται κατάλληλα, για τον σκοπό αυτό, ή με αντίστοιχες προβολικές συντεταγμένες μέσω κάποιας κατάλληλης προβολής του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής σε προβολικά επίπεδα. Επειδή η διαδικασία αυτή γίνεται μέσω παρατηρήσεων γωνιών, διευθύνσεων, αξιμούθιων, κατακόρυφων γωνιών, μηκών, υψομετρικών διαφορών κ.λπ., που κάνουμε στην γήινη φυσική επιφάνεια, είναι απαραίτητο αφ' ενός ν' αναχθούν οι παρατηρήσεις στο ελλειψοειδές και από εκεί, αν επιθυμούμε, στο προβολικό επίπεδο και αφ' ετέρου να επιλυθούν τα αντίστοιχα δίκτυα από τα οποία προκύπτουν οι συντεταγμένες είτε στο ελλειψοειδές είτε στο προβολικό επίπεδο απεικόνισης.

Η ύλη υποδιαιρείται σε 10 κεφάλαια· από αυτά το δέκατο περιέχει αποδείξεις σχέσεων που αναφέρονται στα υπόλοιπα κεφάλαια, από τα οποία γίνονται και οι αντίστοιχες παραπομπές στο Κεφ. 10.

Στο Κεφ. 1 αναλύεται το αντικείμενο της Γεωδαισίας και δίνεται μια ιστορική αναδρομή της εξέλιξής της. Εισάγεται το ελλειψοειδές εκ περιστροφής (ΕΕΠ), ως το χρησιμοποιούμενο μοντέλο για τον προσδιορισμό των συντεταγμένων και δίνονται βασικές έννοιες που χρησιμοποιούνται στα επόμενα. Στο Κεφ. 2 δίνεται η βασική γεωμετρία του ΕΕΠ με έμφαση στον ορισμό των ακτίνων καμπυλότητάς του που υπεισέρχονται ευρύτατα στους

υπολογισμούς. Στο Κεφ. 3, που είναι από τα κυριότερα του βιβλίου, αναλύονται με ιδιαίτερη προσοχή τα χρησιμοποιούμενα στην κλασσική Γεωδαισία συστήματα αναφοράς των θέσεων σημείων μέσω των αντίστοιχων συντεταγμένων και δίνονται οι σχέσεις μετασχηματισμού συντεταγμένων των γεωκεντρικών τρισσορθογώνιων καρτεσιανών, των γεωδαιτικών, σχεδόν-γεωκεντρικών, τρισσορθογώνιων καρτεσιανών, των αντίστοιχων ελλειψοειδών, των τοποκεντρικών τρισσορθογώνιων καρτεσιανών. Στο Κεφ. 4 αντιμετωπίζεται η γεωμετρία του ΕΕΠ που σχετίζεται με τις γραμμές, τα σχήματα, τα μήκη γραμμών και τα εμβαδά που δημιουργούμε πάνω στην επιφάνειά του καθώς και τα αντίστοιχα με τα θεμελιώδη προβλήματα της τοπογραφίας που εδώ ονομάζονται προβλήματα γεωδαιτικής μεταφοράς ελλειψοειδών συντεταγμένων και αξιμουθίου πάνω στο ΕΕΠ. Το Κεφ. 5 καλύπτει τις απαιτούμενες αναγωγές των παρατηρήσεων από την γήινη επιφάνεια στο ΕΕΠ, μέσω πληροφορίας από το γήινο πεδίο βαρύτητας (π.χ., αποκλίσεις κατακορύφου, υψόμετρα του γεωειδούς), ενώ στο Κεφ. 6 αναπτύσσεται η θεωρία των προβολών, που χρησιμοποιούνται στη γεωδαισία και ιδιαίτερα στη χώρα, δηλαδή η απεικόνιση του ΕΕΠ σε αναπτυκτική επιφάνεια με τις απαραίτητες αναγωγές των ήδη ανηγμένων στο ΕΕΠ παρατηρήσεων από αυτό στο προβολικό επίπεδο. Από το Κεφ. 7 αρχίζει ουσιαστικά το δεύτερο μέρος του βιβλίου όπου αναπτύσσονται ζητήματα σχετικά με τα γεωδαιτικά δίκτυα, όπως η διατύπωση των «εξισώσεων παρατήρησης» στο ΕΕΠ και στο προβολικό επίπεδο, τα προβλήματα στην επίλυση των μεγάλων δικτύων κ.λπ. Στο Κεφ. 8 καλύπτονται γενικά ζητήματα βελτιστοποίησης δικτύων και αναφέρονται οι ομοιότητες και διαφορές στην αντιμετώπιση της βελτιστοποίησης των γεωδαιτικών δικτύων σε σχέση με τη βελτιστοποίηση τοπογραφικών δικτύων. Στο κεφάλαιο αυτό αναλύεται και η έννοια της βελτιστοποίησης Datum που συνδέεται με τα γεωδαιτικά δίκτυα. Τέλος, στο Κεφ. 9 αντιμετωπίζονται μερικά επιμέρους προβλήματα που εμφανίζονται κατά την επεξεργασία γεωδαιτικών δικτύων, όπως, π.χ., οι συνδέσεις δικτύων, οι εντάξεις δικτύων σε δίκτυα - πλαίσια καθώς και η τεχνική της συνόρθωσης του τριγωνισμού κατά-μέρη, που εφαρμόζεται σε περιπτώσεις πολύ μεγάλων δικτύων.

Το κείμενο του βιβλίου συνοδεύουν προγράμματα για HY γραμμένα σχεδόν όλα ως υπορουτίνες σε διπλή ακρίβεια και γλώσσα FORTRAN 77 (εκτός από ένα πρόγραμμα σε BASIC), η οποία πολύ εύκολα προσαρμόζεται σε οποιαδήποτε άλλη έκδοση της FORTRAN ή και σε BASIC για HY που έχει δυνατότητα διπλής ακρίβειας σε BASIC). Κάθε υπορουτίνα και πρόγραμμα συνοδεύεται από σχόλια χρήσης του σχετικά με τις παραμέτρους εισόδου και εξόδου και τις μονάδες και έχουν δοκιμαστεί σε micro HY και PC του Τομέα Γεωδαισίας και Τοπογραφίας του ΤΑΤ-ΑΠΘ (π.χ., TRS-80, Cromemco S-300 για FORTRAN 77, Amstrad 6128 για FORTRAN 80 και

BASIC). Τα προγράμματα αυτά βασίζονται ολοκληρωτικά στους αντίστοιχους τύπους και αλγόριθμους που αναπτύσσονται στο κείμενο και που *θεμελιώνονται αποδεικτικά* είτε στα αντίστοιχα επιμέρους Κεφάλαια, είτε στο Κεφάλαιο 10 (Αποδείξεις).

Για την ευκολότερη ανάγνωση του βιβλίου αυτού, θεωρούνται γνωστές γνώσεις κυρίως από την Τοπογραφία, τις Συνορθώσεις, τους Αστρονομικούς προσδιορισμούς θέσης, την Γραμμική Άλγεβρα και την Θεωρία Πινάκων.

Πιστεύουμε ότι το βιβλίο αυτό εκτός της διδακτέας ύλης που καλύπτει, θα παραμείνει ένα χρήσιμο βοήθημα-αναφορά και «μετά το δίπλωμα» και θα αποτελέσει τον προθάλαμο για την είσοδο και σε άλλες περιοχές της γεωδαιτικής επιστήμης, όπως, π.χ., η Φυσική Γεωδαισία, η Διαστημική Γεωδαισία, κ.λπ.

Πρέπει επίσης να τονίσουμε εδώ, ότι οι μέθοδοι που αναπτύσσονται στο βιβλίο αυτό βρίσκουν ευρύτερες εφαρμογές, πέρα από τις κλασικές γεωδαιτικές και τοπογραφικές και σε τεχνικές εργασίες αποτυπώσεων κατασκευών, των οποίων το κυρίαρχο σχήμα τους είναι μη αναπτυσσόμενες επιφάνειες, όπως π.χ., σφαιρικές, ελλειψοειδείς κ.ά.

Θεσσαλονίκη, Άνοιξη 1986

Ε. Λιβιεράτος/ Α. Φωτίου

## *Πρόλογος στη δεύτερη έκδοση*

Η δεύτερη έκδοση του βιβλίου αυτού παρουσιάζεται 6 χρόνια μετά από την πρώτη έκδοση συνεχίζοντας να παραμένει το μοναδικό σχετικό βιβλίο στην Ελληνική βιβλιογραφία. Με βάση την πείρα χρήσης του στη διδασκαλία του ομώνυμου μαθήματος, στο έκτο εξάμηνο του Τμήματος Αγρονόμων και Τοπογράφων Μηχανικών του ΑΠΘ, αλλά και με βάση τις νέες εξελίξεις σε γεωδαιτικά συστήματα, όπως το GPS, και τις πρόσφατες "Ελληνικές γεωδαιτικές εφαρμογές" (π.χ., το σύστημα ΕΓΣΑ '87), η νέα έκδοση του βιβλίου είναι σημαντικά αναθεωρημένη και βελτιωμένη με πολλές προσθήκες, αναδιατυπώσεις, διερευνήσεις, σχόλια και λεπτομερέστερες επεξεργασίες σε κείμενα και σχέσεις.

Η κυριώτερη προσθήκη είναι ένα **νέο κεφάλαιο** (Κεφ. 10), σχετικό με το παγκόσμιο σύστημα προσδιορισμού θέσης με δορυφόρους, το **GPS**, και με τις εφαρμογές του στα γεωδαιτικά δίκτυα. Επίσης τα άλλα επιμέρους κεφάλαια διαφέρουν από τα αντίστοιχα της πρώτης έκδοσης στα εξής:

**Κεφ. 1:** Γίνεται λεπτομερέστερη περιγραφή των γεωδαιτικών εργασιών

που έχουν γίνει μέχρι σήμερα στην Ελλάδα. **Κεφ. 2:** Έχουν προστεθεί επιπλέον σχέσεις μεταξύ των βασικών παραμέτρων και ποσοτήτων του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής. **Κεφ 3.:** Γίνεται αναλυτικότερη τεκμηρίωση προσδιορισμού του γεωδαιτικού Datum και δίνονται στοιχεία σχετικά με το ΕΓΣΑ '87. **Κεφ. 4:** Εισάγονται κριτήρια για την επιλογή μεγέθους γήινων σφαιρών. **Κεφ. 5:** Παρατίθενται πληρέστερες σχέσεις για τις αναγωγές γεωδαιτικών παρατηρήσεων. **Κεφ. 6:** Η περιγραφή της εγκάρσιας Μερατορικής προβολής είναι αναλυτικότερη. Οι εξισώσεις απεικόνισης και αναγωγών δίνονται με νέο συμβολισμό και με περισσότερους όρους, για μεγαλύτερη υπολογιστική προσέγγιση. Επιπλέον δίνονται οι τρόποι μετασχηματισμού προβολικών συστημάτων και γεωδαιτικών Datum. **Κεφ 8:** Υπάρχουν πολλές προσθήκες στο θέμα των υπολογισμών και του ελέγχου αξιοπιστίας δικτύων. **Κεφ. 9:** Έχει επαναδιατυπωθεί η σύνδεση και ένταξη δικτύων με την προσθήκη του μετασχηματισμού ομοιότητας στις τρεις διαστάσεις. **Κεφ. 10:** Είναι νέο κεφάλαιο σχετικά με το σύστημα GPS και τις εφαρμογές του.

# Περιεχόμενα

<b>1. Αντικείμενο της γεωδαισίας και το ελλειψοειδές μοντέλο της γης</b> .....	1
1.1. Ορισμός της Γεωδαισίας .....	3
1.2. Ιστορικές αναφορές .....	5
1.2.1 Οι γεωδαιτικές εργασίες στην Ελλάδα.....	11
1.3. Τοπογραφικό και γεωδαιτικό πεδίο.....	19
1.4. Προσδιορισμός θέσης σημείων.....	21
1.5. Το ελλειψοειδές μοντέλο της γης.....	28
1.5.1. Γήινο ΕΕΠ (ΓΕΕΠ).....	33
1.5.2. Γεωδαιτικό ΕΕΠ (γΕΕΠ).....	33
1.5.3. Προσαρμογή του ΓΕΕΠ και των γΕΕΠ στο γεωειδές.....	34
1.6. Διαστάσεις του ελλειψοειδούς μοντέλου .....	36
1.7. Κλασσικές μέθοδοι υπολογισμού παραμέτρων ΕΕΠ.....	38
Αναφορές.....	41
<b>2. Ακτίνες καμπυλότητας του ΕΕΠ</b> .....	43
2.2. Εξισώσεις του ΕΕΠ και μεσημβρινή έλλειψη.....	46
2.3. Πρώτη κάθετος τομή. Θεώρημα του Meusnier .....	52
2.4. Τυχούσα κάθετος τομή. Θεώρημα του Euler.....	54
2.5. Μεσημβρινή τομή και ακτίνα του Gauss .....	56
2.6. Ερμηνεία των ακτίνων καμπυλότητας.....	58
Αναφορές.....	61
<b>3. Συστήματα αναφοράς και συντεταγμένες</b> .....	63
3.1. Γεωκεντρικά συστήματα.....	66
3.2. Τοποκεντρικά συστήματα.....	73
3.2.1. Αστρονομικό σύστημα.....	73
3.2.2. Ο πίνακας $\Omega$ .....	75
3.2.3. Γεωδαιτικό σύστημα.....	76
3.3. Μετασχηματισμός τοποκεντρικών συστημάτων.....	78
3.3.1. Σχέσεις διευθυνόντων συνημιτόνων. Εξισώσεις Laplace.....	79
3.3.2. Γενικευμένες αποκλίσεις της κατακορύφου.....	82
3.4. Υψομετρικός προσδιορισμός .....	84
3.4.1. Η μη παραλληλία των χωροσταθμικών επιφανειών.....	85
3.4.2. Μέση στάθμη θάλασσας.....	89

3.5. Διαφορικές σχέσεις συντεταγμένων.....	93
3.5.1. Σχέση των $x^s$ και $q$ .....	93
3.5.2. Σχέση των $x^*$ και $q$ .....	95
3.5.3. Σχέση των $x^*$ , $x$ και $q$ .....	95
3.5.4. Σχέση των $q_1$ και $q_2$ .....	101
3.6. Γεωδαιτικό Datum.....	105
3.6.1. Ελληνικό και Ευρωπαϊκό Datum.....	113
3.6.2. Στοιχεία για το Ελληνικό Γεωδαιτικό Σύστημα Αναφοράς του 1987.....	117
Αναφορές.....	118
<b>4. Γραμμές, σχήματα, μήκη, εμβαδά και μεταφορά συντεταγμένων και αζιμουθίων στο ΕΕΠ.....</b>	<b>121</b>
4.1. Μήκος τόξου μεσημβρινού.....	123
4.1.1. Προσεγγίσεις των αναπτύξεων σε σειρά.....	124
4.2. Μήκος τόξου παραλλήλου.....	130
4.3. Εμβαδόν επιφανειών που ορίζονται από μεσημβριούς και παραλλήλους.....	132
4.4. Γραμμές του ΕΕΠ.....	135
4.4.1. Κάθετη τομή (κτ.).....	135
Προσανατολισμός ή αζιμουθίο της κτ.....	137
Γωνία μεταξύ δύο αντιθέτων καθέτων επιπέδων.....	140
Γωνία μεταξύ δύο αντιστρόφων κτ.....	141
4.4.2. Γεωδαισιακή γραμμή (γγ).....	143
Γεωδαισιακή γραμμή ΕΕΠ, θεώρημα του Clairaut.....	144
Εξίσωση της γγ. Μήκος γγ.....	148
Διερεύνηση του θεωρήματος του Clairaut.....	148
Καμπυλότητα της γγ. Θεώρημα του Gudermann.....	150
Αναπτύξεις Puiseux-Weingarten.....	150
Διαφορά αζιμουθίου κτ και γγ.....	152
Διαφορά μήκους κτ και γγ.....	155
Βέλος γγ.....	155
4.5. Μεταφορά συντεταγμένων και αζιμουθίων	
Γεωδαιτική μεταφορά.....	157
4.5.1. Το ευθύ πρόβλημα (γγ. μικρού μήκους).....	157
4.5.2. Το αντίστροφο πρόβλημα (γγ. μικρού μήκους).....	159
4.5.3. Μέθοδος γεωδαιτικής μεταφοράς για μεγάλες πλευρές.....	163
4.6. Το γεωδαισιακό τρίγωνο.....	165
4.6.1. Αναγωγή του γτ. Θεώρημα του Legendre.....	166
Αναφορές.....	170
<b>5. Αναγωγές των παρατηρήσεων στο ΕΕΠ.....</b>	<b>171</b>
5.1. Κάθετος και κατακόρυφος.....	173

5.2. Γωνιακές αναγωγές.....	180
5.2.1. Αναγωγή αξιμουθίου από τη γήινη επιφάνεια στο ΕΕΠ.....	180
5.2.2. Αναγωγή διεύθυνσης από τη γήινη επιφάνεια στο ΕΕΠ.....	184
5.2.3. Αναγωγή γωνίας από τη γήινη επιφάνεια στο ΕΕΠ.....	185
5.2.4. Αναγωγή λόγω υψομέτρου του σημείου στάσης.....	186
5.3. Αναγωγή αποστάσεων στο ΕΕΠ.....	187
5.4. Τάξη μεγέθους αναγωγών. Επίδραση στις ανηγμένες παρατηρήσεις .....	191
5.4.1. Αναγωγή αξιμουθίου.....	192
Αναγωγή στην κάθετο (δΑ) .....	192
Αναγωγή στην κάθετη τομή (δΑ <sup>z</sup> ).....	192
Αναγωγή στη γεωδαισιακή γραμμή (δα).....	192
5.4.2. Αναγωγή διεύθυνσης (δβ).....	193
5.4.3. Αναγωγή γωνίας (δγ).....	193
5.4.4. Αναγωγή απόστασης.....	194
5.5. Αναγωγές γεωδαιτικών ποσοτήτων από το ΕΕΠ στη γήινη επιφάνεια.....	196
Αναφορές.....	197

## **6. Προσδιορισμός θέσεων στο επίπεδο απεικόνισης -**

<b>Προβολικά συστήματα .....</b>	<b>199</b>
6.1. Απεικόνιση και χάρτης.....	201
6.2. Παραμορφώσεις .....	207
6.2.1. Γραμμική αλλοίωση .....	208
6.2.2. Γωνίες του χαρτογραφικού καννάβου.....	211
6.2.3. Η δείκτρια του Tissot.....	213
6.2.4. Αλλοίωση προσανατολισμού.....	215
6.2.5. Αλλοίωση εμβαδού.....	217
6.3. Συμμορφία.....	218
6.4. Απεικονίσεις και προβολικά συστήματα στην Ελλάδα .....	219
6.4.1. Απεικόνιση Hatt.....	221
Παραμορφώσεις πλευρών και γωνιών στην απεικόνιση Hatt.....	229
Αλλαγή κέντρου Hatt ή αλλαγή συστήματος συντεταγμένων.....	233
6.4.2. Η Εγκάρσια Μερατορική απεικόνιση και οι παραλλα- γές της .....	235
Οι εξισώσεις απεικόνισης της Εγκάρσιας Μερατορικής προβο- λής.....	239
Το πρόβλημα της αλλαγής ζώνης.....	243
Το πρόβλημα της αλλαγής του προβολικού συστήματος.....	244
Αναγωγές από το ΕΕΠ στο προβολικό επίπεδο της Εγκάρσιας Μερατορικής απεικόνισης.....	246
Σύγκλιση των μεσημβρινών.....	249
Μέτρο γραμμικής παραμόρφωσης.....	251
Γωνιακή διόρθωση τόξου - χορδής.....	252



Συντελεστής αναγωγής απόστασης.....	253
Αναγωγή αξιμουθίου στο επίπεδο της ΤΜ.....	255
Αναγωγή διεύθυνσης στο επίπεδο της ΤΜ.....	255
Αναγωγή γωνίας στο επίπεδο της ΤΜ.....	255
Αναγωγή απόστασης στο επίπεδο της ΤΜ.....	255
Η απεικόνιση UTM και η εφαρμογή της στην Ελλάδα.....	255
Η απεικόνιση ΤΜ 3° στην Ελλάδα.....	257
Η απεικόνιση ΤΜ μιας ζώνης (ΤΜ' 87) όπως εφαρμόζεται στην Ελλάδα.....	258
Αναφορές.....	259
<b>7. Γεωδαιτικά δίκτυα.....</b>	<b>261</b>
7.1. Η έννοια του δικτύου.....	263
7.2. Τα γεωδαιτικά δίκτυα.....	264
7.2.1. Διάσταση δικτύων.....	265
7.2.2. Είδη δικτύων.....	265
7.2.3. Τάξεις δικτύων.....	266
7.2.4. Οι παρατηρήσεις.....	269
7.3. Εξισώσεις παρατηρήσεων στο ΕΕΠ.....	273
7.3.1. Εξίσωση απόστασης στο ΕΕΠ.....	278
7.3.2. Εξίσωση διεύθυνσης στο ΕΕΠ.....	278
7.3.3. Εξίσωση γωνίας στο ΕΕΠ.....	279
7.3.4. Εξίσωση αξιμουθίου στο ΕΕΠ.....	279
7.3.5. Το μετασχηματισμένο μήκος.....	279
7.4. Εξισώσεις παρατηρήσεων στο επίπεδο.....	280
7.5. Ανασκόπηση από τη θεωρία των συνορθώσεων.....	283
7.6. Εξισώσεις δεσμεύσεων.....	290
7.7. Οι πίνακες $\mathbf{N}$ και $\mathbf{N}^{-1}$ .....	291
Αναφορές.....	296
<b>8. Βελτιστοποιήσεις δικτύων και Datum.....</b>	<b>299</b>
8.1. Έννοια και χρησιμότητα της βελτιστοποίησης.....	301
8.2. Ακρίβεια και αξιοπιστία.....	303
8.3. Κριτήρια και έλεγχος ακρίβειας.....	306
8.4. Έλλειψη σφάλματος και ποδική καμπύλη.....	309
8.4.1. Σχετική έλλειψη σφάλματος.....	313
8.5. Κριτήρια και έλεγχος αξιοπιστίας.....	318
8.5.1. Ο έλεγχος της μεταβλητότητας αναφοράς.....	319
8.5.2. Σάφωση δεδομένων.....	322
8.5.3. Έλεγχος δεσμεύσεων συντεταγμένων.....	324
8.5.4. Μέτρα αξιοπιστίας δικτύου.....	325
8.6. Προβλήματα βελτιστοποίησης.....	331
8.7. Βελτιστοποίηση κριτηρίων.....	333

8.8. Βελτιστοποίηση του γεωδαιτικού Datum.....	336
Αναφορές.....	343
<b>9. Σύνδεση και ένταξη δικτύων.</b>	
<b>Συνόρθωση τριγωνισμού κατά μέρη.....</b>	<b>347</b>
9.1. Σύνδεση δικτύων.....	349
9.2. Μετασχηματισμός ομοιότητας.....	351
9.2.1. Εφαρμογή στις δύο διαστάσεις.....	351
9.2.2. Εφαρμογή στις τρεις διαστάσεις.....	356
9.3. Συνόρθωση τριγωνισμού κατά μέρη.....	359
Αναφορές.....	364
<b>10. Το δορυφορικό σύστημα GPS και οι εφαρμογές του</b>	
<b>στα δίκτυα.....</b>	<b>367</b>
10.1. Γενικά.....	369
10.2. Σύγκριση του GPS με άλλα δορυφορικά και επίγεια	
συστήματα.....	374
10.2.1. Το δορυφορικό σύστημα TRANSIT ή DOPPLER.....	374
10.2.2. Το δορυφορικό σύστημα τηλεμετρίας LASER.....	375
10.2.3. Τα Συμβολόμετρα πολύ μεγάλης βάσης (VLBI).....	375
10.2.4. Τα αδρανειακά συστήματα.....	376
10.3. Τα μέρη του GPS και τα εκπεμπόμενα σήματα.....	376
10.4. Μετρήσεις GPS και εξισώσεις παρατηρήσεων.....	385
10.4.1. Η εξίσωση παρατήρησης της ψευδοαπόστασης	
με τη χρήση κωδίκων.....	385
10.4.2. Μετρήσεις φάσης φέροντος κύματος.....	389
10.4.3. Η εξίσωση παρατήρησης φάσης.....	391
10.4.4. Η τεχνική των διαφορών.....	394
Απλές, διπλές και τριπλές διαφορές.....	395
10.1. Συνόρθωση δικτύων GPS.....	398
Αναφορές.....	404
<b>11. Αποδείξεις τύπων.....</b>	<b>407</b>
<i>Ευρετήριο.....</i>	<i>431</i>

# **1. Αντικείμενο της γεωδαισίας και το ελλειψοειδές μοντέλο της γης**

*Ορισμός της Γεωδαισίας.*

*Ιστορικές αναφορές.*

*Οι γεωδαιτικές εργασίες στην Ελλάδα.*

*Τοπογραφικό και Γεωδαιτικό πεδίο.*

*Προσδιορισμός θέσης σημείων.*

*Το ελλειψοειδές μοντέλο της γης.*

*(Γήινο ΕΕΠ, γεωδαιτικό ΕΕΠ, προσαρμογή του ΓΕΕΠ και των γΕΕΠ στο Γεωειδές).*

*Διαστάσεις του ελλειψοειδούς μοντέλου.*

*Κλασσικές μέθοδοι υπολογισμού παραμέτρων ΕΕΠ.*

## Συμβολισμοί

$\varphi, \lambda$	γεωδαιτικές ή ελλειψοειδείς συντεταγμένες
$\varphi$	γεωδαιτικό πλάτος σημείου
$\lambda$	γεωδαιτικό μήκος σημείου
$h$	γεωμετρικό υψόμετρο σημείου
$H$	ορθομετρικό υψόμετρο σημείου
$N$	υψόμετρο του γεωειδούς (ή αποχή ή απόκλιση ή διακύμανση) σε σημείο
$a$	μεγάλος ημιάξονας ΕΕΠ (Ελλειψοειδές Εκ Περιστροφής)
$b$	μικρός ημιάξονας ΕΕΠ
$r$	ακτίνα παραλλήλου κύκλου ΕΕΠ
$f$	επιπλάτυνση ΕΕΠ
$e$	πρώτη εκκεντρότητα (εκκεντρότητα) ΕΕΠ
$S_\varphi$	μήκος τόξου μεσημβρινού στο ΕΕΠ
$\Phi, \Lambda$	αστρονομικές (ή γεωγραφικές) συντεταγμένες σημείου
$\Phi$	αστρονομικό (ή γεωγραφικό) πλάτος σημείου
$\Lambda$	αστρονομικό (ή γεωγραφικό) μήκος σημείου
$\langle \rangle$	επίπεδο

## 1.1. Ορισμός της Γεωδαισίας

Η Γεωδαισία, μία από τις αρχαιότερες επιστήμες, αποτελεί κλάδο των Επιστημών της Γης (Γεωεπιστημών) όπως είναι η Γεωφυσική, η Γεωλογία, η Γεωδυναμική κλπ., έχοντας με αυτές μια αμφίδρομη σχέση.

*Αντικείμενο της επιστήμης της Γεωδαισίας είναι:*

- α) *ο προσδιορισμός της μορφής (σχήματος) και των διαστάσεων (μεγέθους) της Γης.*
- β) *ο προσδιορισμός συντεταγμένων σημείων αναφοράς στη φυσική της επιφάνεια.*
- γ) *η μελέτη του γήινου πεδίου βαρύτητας.*
- δ) *η συναρτήση του χρόνου μεταβολή όλων των παραπάνω.*
- ε) *η προβολική απεικόνιση της γήινης επιφάνειας σε χάρτες.*

Παλαιότερα η Γεωδαισία ονομάζονταν Ανωτέρα Γεωδαισία ενώ Κατώτερα Γεωδαισία λέγονταν η Τοπογραφία. Η Γεωδαισία ασχολείται εκτός από θεωρητικά και με πρακτικά προβλήματα. Η Τοπογραφία βρiσκει τη θεωρητική της θεμελίωση στη Γεωδαισία. Άλλες συγγενείς επιστήμες ή και επιστημονικές περιοχές είναι η Χαρτογραφία, η Φωτογραμμετρία, η Αστρονομία, η Τηλεπισκόπηση, η Μετεωρολογία, η Υδρογραφία, η Γεωγραφία, κ.α. Η θεωρητική θεμελίωση της Γεωδαισίας ανάγεται στις επιστήμες των Μαθηματικών και της Φυσικής, αξιοποιώντας παράλληλα και τις τεράστιες δυνατότητες των Ηλεκτρονικών Υπολογιστών.

Από την περιγραφή του αντικειμένου της Γεωδαισίας φαίνεται η πολυπλοκότητα και πολυμορφία του κλάδου αυτού των γεωεπιστημών, που κινείται σε ένα ευρύτατο φάσμα θεμάτων εκτεινόμενο από καθαρά επιστημονικές-θεωρητικές περιοχές μέχρι την αντιμετώπιση εφαρμοσμένων προβλημάτων. Κύριο χαρακτηριστικό των θεμάτων που συνθέτουν την έννοια της Γεωδαισίας είναι η στενή διασύνδεσή τους. Θα ήταν σχεδόν αδύνατο να απομονώσει κανείς ένα κάποιο μέρος της θεματικής της και να το επεξεργαστεί χωρίς αναφορές σε άλλες γεωδαιτικές περιοχές. Το πρόβλημα, π.χ. του προσδιορισμού σημείων αναφοράς ή θέσεων στην επιφάνεια της Γης (προσδιορισμός συντεταγμένων) συνεπάγεται τη γνώση του σχήματος και του μεγέθους της και αντίστροφα· η μελέτη του γήινου πεδίου βαρύτητας συνεπάγεται τη γνώση του σχήματος και των διαστάσεων της και αντίστροφα, κοκ.

Μια κύρια δυσκολία στην αντιμετώπιση εννοιών και μεγεθών της Γεωδαισίας, ιδίως σε εκπαιδευτικό επίπεδο, είναι οι *τάξεις μεγέθους*, των ποσοτήτων που εμπλέκονται στα επιμέρους προβλήματα καθώς και η παγκοσμιότητα της κλίμακας στην οποία "διακινούνται" οι γεωδαιτικές έννοιες

και διαδικασίες. Αν σκεφθεί κανείς πως οι διαστάσεις του "Σώματος" που μας απασχολεί, της Γης, είναι της τάξης των εκατομμυρίων μέτρων, το σχήμα του είναι πολύπλοκο και όχι ένα απλό επίπεδο και η έκταση των εργασιών που χρειάζεται να γίνουν πάνω σ' αυτό το δύσκολα υλοποιήσιμο απ' την άμεση εποπτεία μας "Σώμα" είναι πολύ μεγάλη, τότε είναι εύλογο να απαιτείται, πέρα απ' τις απαραίτητες γνώσεις Μαθηματικών και Φυσικής, αρκετή φαντασία για την κατανόηση αρχών και υπολογιστικών διαδικασιών. Για μια ενδεικτική εικονογράφηση των διαστάσεων της Γης δίνονται ορισμένα συγκριτικά μεγέθη χρησιμοποιώντας σαν μέτρο "Ελληνικές διαστάσεις" προσιτές στη γεωγραφική μας εποπτεία. Για την αντίληψη π.χ. του μήκους της ακτίνας της Γης ( $\sim 6.4 \cdot 10^3$  km) θεωρούμε το μήκος του Ελληνικού χώρου από Βορρά προς Νότο ( $\sim 0,8 \cdot 10^3$  km): Είναι  $\sim 8$ – $8.5$  φορές μικρότερο της ακτίνας της Γης. Η επιφάνεια του Ελληνικού χώρου μεταξύ οριακών μεσημβρινών και παραλλήλων ( $\sim 0.62 \cdot 10^6$  km<sup>2</sup>) «χωράει» περίπου 820 φορές στη γήινη επιφάνεια ( $\sim 510 \cdot 10^6$  km<sup>2</sup>). Επίσης ο όγκος του κώνου με βάση κύκλο εμβαδού όσο εκείνου του Ελληνικού χώρου και κορυφή το κέντρο της Γης χωράει περίπου 820 φορές στον όγκο της Γης.

Ο τίτλος *Ελλειψοειδής Γεωδαισία* χρησιμοποιείται μάλλον σαν «τίτλος εργασίας» παρά σαν στεγανός όρος. Χαρακτηρίζει την προσπάθεια εντοπισμού της ύλης που περιέχεται εδώ και που αποσκοπεί στο να δώσει κυρίως τις κλασσικές μεθόδους και τα απαιτούμενα υπολογιστικά εφόδια για την, ανάμεσα στα άλλα, δυνατότητα προδιορισμού και επεξεργασίας ενός κύριου γεωδαιτικού υποβάθρου, έκτασης π.χ. μιας χώρας (εθνικός ή κρατικός γεωδαιτικός σκελετός), που θα λέγεται *γεωδαιτικός σκελετός Α' τάξης*. Ο σκελετός αυτός είναι αναγκαίος για την ένταξη των βασικών χαρτογραφικών εργασιών σ' ένα ενιαίο σύστημα αναφοράς καθώς και για την εξάρτηση επί μέρους τοπικών εργασιών (τοπογραφικών, τοπομετρικών, κτηματογραφικών κλπ.) σ' ένα ομοιογενές και συμβιβαστό σύστημα όπως, π.χ. πρέπει να είναι ένα εθνικό γεωδαιτικό δίκτυο. Γι' αυτό, ο παραπάνω τίτλος συμπληρώνεται και από τον τίτλο *Γεωδαιτικά Δίκτυα*, όπου δίνονται οι βασικές αρχές μέτρησης, επεξεργασίας, συνόρθωσης, βελτιστοποίησης και αξιολόγησης των αποτελεσμάτων των γεωδαιτικών δικτύων. Η επίλυση τέτοιων δικτύων γίνεται είτε στο ελλειψοειδές αναφοράς είτε σε κάποιο προβολικό επίπεδο. Έτσι ένα τμήμα της ύλης σχετίζεται με τα προβλήματα που επιλύονται στο προβολικό επίπεδο (επίπεδο απεικόνισης).

Κύριο πρόβλημα αποτελεί η επιλογή του συστήματος αναφοράς για τον προδιορισμό συντεταγμένων σημείων ελέγχου που θα συνθέσουν το σκελετό που αναφέρθηκε πιο πάνω. Το πρόβλημα αυτό αντιμετωπίζεται στην κλασσική γεωδαισία με την εισαγωγή ως επιφάνειας αναφοράς των θέσεων, εκείνης ενός *ελλειψοειδούς εκ περιστροφής* (ΕΕΠ) διαστάσεων, τέτοιων ώστε να τείνει να προσαρμόζεται ικανοποιητικά ή όσο το δυνατόν καλύτερα

στην περιοχή της Γης που γίνεται ο προσδιορισμός των θέσεων των σημείων ελέγχου. Έτσι η όλη διαδικασία που θα ακολουθηθεί, γεωμετρική κατά κανόνα, συνδέεται άμεσα με την επιφάνεια αναφοράς, απ' όπου και η ονομασία "Ελλειψοειδής Γεωδαισία".

## 1.2. Ιστορικές αναφορές

Η αντίληψη περί *σφαιρικότητας* της Γης συναντάται στους αρχαίους Έλληνες, όπως στον Πυθαγόρα (6ος αιώνας π.Χ.) ενώ στο «Περί Ουρανού» έργο του Αριστοτέλη (384-322 π.Χ.) αναλύονται τα υπέρ και τα κατά της περί σφαιρικότητας αντίληψης για να υπερισχύσει η άποψη της σφαιρικής Γης. Σχετικά με τις διαστάσεις της σφαιρικής Γης υπάρχουν ενδείξεις ότι οι Αιγύπτιοι γνώριζαν αρκετά, όπως φαίνεται από το εξηκονταδικό σύστημα που χρησιμοποιούσαν με βάση τις διαστάσεις της Γης καθώς και από τις διαστάσεις διαφόρων μνημείων τους σε άμεση σχέση με μήκη τόξων μεσημβρινού της περιοχής (π.χ η πυραμίδα του Χέοπα έχει περίμετρο 1/120 μίρας μεσημβρινού).

Η πρώτη όμως μέτρηση για τον υπολογισμό των διαστάσεων της γήινης σφαίρας αποδίδεται στον Ερατοσθένη (276-195 π.Χ.), ο οποίος υπολόγισε (Σχ. 1.1) τη γήινη περίμετρο ίση με 46 620 000 m. Αργότερα ο Ποσειδώνιος (135-51 π.Χ.) υπολόγισε το σφαιρικό τόμο Αλεξάνδρεια - Ρόδος, δίνοντας απ' αυτό την τιμή των 33 300 000 m στην περίμετρο της Γης. Μετά τον Ερατοσθένη και Ποσειδώνιο φθάνουμε στο 827 μ.Χ. όπου οι Άραβες (Χαλίφης Αλ Μα'μουν) υπολογίζουν σφαιρικό τόξο μίρας σε πλάτος 36° 20' για να καταλήξουν σε μήκος γήινης περιμέτρου 39 780 000 m, ενώ μετά από μετρήσεις του Γάλλου γιατρού Fernel το 1525 μεταξύ Παρισιού και Αμιένης, ο Lalande υπολογίζει την περίμετρο σε 39 816 720 m.

Η *νέα εποχή* που άνοιξε η επινόηση της μεθόδου του τριγωνισμού από τον Ολλανδό Snellius (1591-1626) επέτρεψε ακριβέστερους υπολογισμούς των διαστάσεων του σφαιρικού μοντέλου της Γης, δίνοντας μια νέα τιμή της περιμέτρου ίση με 40 037 040 m. Η πεποίθηση περί σφαιρικότητας της Γης διατηρείται μέχρι τον 17<sup>ο</sup> αιώνα για να φθάσουμε στη διατύπωση των αρχών της φυγόκεντρης δύναμης από τον Huygens (1629-1695) και της Παγκόσμιας Έλξης από τον Newton και τέλος στην αναγνώριση ότι το σχήμα της Γης προσεγγίζει ένα ελλειψοειδές πεπλατυσμένο στους πόλους. Ο Newton υπολογίζει τη *γεωμετρική επιπλάτνση* του γήινου ελλειψοειδούς

$$\text{επιπλάτνση} = \frac{\text{μεγάλος ημιάξονας} - \text{μικρός ημιάξονας}}{\text{μεγάλος ημιάξονας}}$$

**Σχ. 1.1.** 3ος π.Χ. αιώνας. Η μέτρηση του Ερατοσθένη. Η πρώτη γεωδαιτική μέτρηση από τον Ερατοσθένη είχε σαν αποτέλεσμα και τον πρώτο υπολογισμό της ακτίνας της γήινης σφαίρας και της περιφέρειάς της. Ένας πύργος στην Αλεξάνδρεια, ένα πηγάδι στο σημερινό Ασσουάν και ένα καραβάνι από καμήλες ήταν τα στοιχεία που χρησιμοποίησε ο Ερατοσθένης για τις μετρήσεις του. Όταν ο Ήλιος έρχοι κατακόρυφα τις ακτίνες του στο πηγάδι στη Σιήνη, η γωνία που σχημάτιζε η κατακόρυφη διεύθυνση του πύργου στην Αλεξάνδρεια με τη διεύθυνση των ηλιακών ακτίνων εκεί, υπολογίστηκε σε  $7^{\circ}.2$  με τη βοήθεια της σκιάς του πύργου. Η γωνία αυτή ισούται με τη γεωκεντρική γωνία, όπως φαίνεται στο σχήμα. Υπολογίζοντας με τις καμήλες την απόσταση μεταξύ των δύο πόλεων βρήκε ότι ήταν 5000 στάδια, περίπου 927 χιλιόμετρα. Επιλύοντας κατόπιν το γεωκεντρικό τρίγωνο υπολόγισε την ακτίνα της Γης σε 7400 χιλιόμετρα, δηλαδή με λάθος περίπου 16% απ' την σημερινή τιμή.

υποθέτοντας ομοιόμορφη κατανομή πυκνότητας στο εσωτερικό της Γης, ενώ το 1738 ο Clairaut παρακάμπτοντας τη γήινη πυκνότητα μέσω του γνωστού θεωρήματός του

$$\text{μάζα της Γης} = \frac{\text{φυγόκεντρος δύναμη στον Ισημερινό}}{\text{βαρύτητα στον Ισημερινό}}$$

υπολογίζει τη γεωμετρική επιπλάτυνση από τη σχέση



επιπλάτυνση  $\frac{5}{2}$  μάζα της Γης -  $\frac{\text{βαρύτητα στον πόλο} - \text{βαρύτητα στον Ισημερινό}}{\text{βαρύτητα στον Ισημερινό}}$

Και οι δύο υπολογισμοί της επιπλάτυνσης έδωσαν αποτελέσματα της τάξης του  $\sim 4 \cdot 10^{-3}$  (σήμερα γνωρίζουμε ότι είναι  $\sim 3 \times 10^{-3}$ ).

το από Β προς Ν μήκος του Ελλαδικού χώρου  
8 φορές μικρότερο της γήινης ακτίνας

η επιφάνεια του Ελλαδικού χώρου 0.12% της  
γήινης επιφάνειας

ο όγκος του κώνου, επίσης, το 0.12% του γήι-  
νου όγκου

### Σχ. 1.2.

Αποδείξεις της ελλειψοειδούς μορφής της Γης αποτελούν επίσης οι πειραματικές εργασίες του Γάλλου αστρονόμου Richer το 1672 κατά τις οποίες χρησιμοποιώντας εκκρεμές διαπίστωσε ελάττωση της τιμής της βαρύτητας οδεύοντας απ' το Παρίσι προς Νότο. Το φαινόμενο επίσης της μετάπτωσης των ισημερινών απεδείχθη από τον Newton σαν οφειλόμενο στο γεγονός της γήινης επιπλάτυνσης. Από την εποχή αυτή οι γεωδαιτικές εργασίες αποσκο-

πούσαν στο να μετρηθούν όχι πια μήκη σφαιρικών τόξων αλλά μήκη ελλειπτικών τόξων από τα οποία θα υπολογίζονταν οι διαστάσεις της Γης αλλά και θα επιβεβαιώναν το ελλειψοειδές σχήμα της. Το ελλειψοειδές αυτό σχήμα απέδειξε θεωρητικά ο Newton χωρίς να χρειαστεί να βγει απ' το δωμάτιό του, όπως χαρακτηριστικά είχε πει ο Βολταίρος ειρωνευόμενος τις αποδειγμένα αργότερα λανθασμένες αντιρρήσεις του Γάλλου γεωδαίτη Cassini ο οποίος, αμφισβητώντας τις θεωρητικές αποδείξεις του Newton, υποστήριζε ότι η Γη ήταν πεπλατυσμένη στον Ισημερινό!

Η άποψη αυτή του Cassini στηριζόταν σε προφανώς λανθασμένα αποτελέσματα τριγωνισμών που είχαν αρχίσει να γίνονται στη Γαλλία το 1670 απ' τον αστρονόμο Picard για λογαριασμό της Παρισινής Ακαδημίας, που ιδρύθηκε το 1666, και συνεχίστηκαν καλύπτοντας όλη τη Γαλλία κυρίως απ' τους πατέρα και γιό Cassini (1693-1718). Η διαφορά μεταξύ Cassini και Newton ήταν αφορμή να γραφούν απ' τις ωραιότερες ιστορίες της Γεωδαισίας που συνέβαλαν και στην παραπέρα εξέλιξή της: Οι Ακαδημίες του Παρισιού και του Λονδίνου αποφάσισαν να λύσουν τη διαφορά οργανώνοντας δύο μεγάλες γεωδαιτικές αποστολές, μία στο Περού (1735-1741) υπό τον La Condamine και μία στη Λαπωνία - Βόρειο Σουηδία (1736-1737) υπό τον Maupertuis, με σκοπό να μετρηθούν μήκη τόξων μεσημβρινού. Το αποτέλεσμα των αποστολών αυτών δικαίωσε τον Newton, ο οποίος ομολογουμένως δε χρειάστηκε να βγει από το δωμάτιό του για να αποδείξει αυτό που επιβεβαίωσαν πολυέξοδες και πολύχρονες εργασίες υπαίθρου στους σχεδόν αντιποδες της Γης. Το ιστορικό αυτό γεγονός αποτελεί ίσως το πιο κομψό παράδειγμα ενίσχυσης της άποψης ότι *στις Επιστήμες δεν υπάρχει καλύτερη Πρακτική από μια καλή Θεωρία*.

Το 1740 οι Lacaille και Cassini de Thury επαναλαμβάνουν τις μετρήσεις τριγωνισμού στη Γαλλία που αποτελούν και τον πρώτο ακριβή τριγωνισμό με σκοπό τη χαρτογράφηση της επικράτειας (Σχ. 1.3).

Ακολουθώντας χρονολογικά τις διάφορες σπουδαίες γεωδαιτικές εργασίες του 18ου και 19ου αιώνα μπορούν να σημειωθούν τα εξής: Στο τέλος του 18ου αιώνα (1792-1799) οι Delambre και Mechain βοηθούμενοι από τους Borda και Laplace επαναπροσδιορίζουν το μήκος τόξου του κεντρικού Γαλλικού μεσημβρινού με σκοπό την εισαγωγή του μέτρου σαν γραμμικού μεγέθους μέτρησης ίσου με το  $1 \cdot 10^{-7}$  του τεταρτημορίου του μεσημβρινού. Το 1783 αρχίζει ο τριγωνισμός στην Αγγλία από τον στρατηγό Roy που συνεχιζόμενος από τους Mudge και Airy καλύπτει τη χώρα μέχρι τα βόρεια νησιά Shetland. Ο τριγωνισμός αυτός συνδέεται με τον Γαλλικό και έτσι μετά και από μια παρόμοια σύνδεση μεταξύ Ισπανίας και Αλγερίας έχουμε το 1879 το πρώτο διακρατικό δίκτυο που καλύπτει 34° από τη Σαχάρα μέχρι τα βόρεια Βρετανικά νησιά. Στο δίκτυο αυτό έρχεται να προστεθεί το Σκανδιναβικό δίκτυο εκτεινόμενο από το Βόρειο Ακρωτήριο μέχρι τις εκβολές του

**Σχ. 1.3.** Ο πρώτος ακριβής τριγωνισμός στη Γαλλία. Η σπουδαιότητα του σωστού τριγωνισμού όπως φαίνεται από το σχήμα: Ο πρώτος ακριβής τριγωνισμός που συμπληρώθηκε το 1740 έδωσε την εικόνα που παρουσιάζει η εσωτερική οριακή γραμμή, δηλαδή μικρότερη έκταση της χώρας!

Δούναβη στη Μαύρη Θάλασσα, που μετρήθηκε από το 1817 μέχρι το 1850 από τους von Turner και Struve. Σταθμό στην ιστορία της γεωδαισίας εκείνης της περιόδου αποτελούν οι τριγωνισμοί του Gauss (1777-1855) στο κρατίδιο του Αννοβέρου το 1821-1823 και εκείνοι των Beyer και Bessel (1784-1846) στην ανατολική Πρωσσία το 1831-1834, όπου για πρώτη φορά χρησιμοποιήθηκαν στους υπολογισμούς μέθοδοι *συνόρθωσης* των παρατηρήσεων στα δίκτυα (μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων).

Οι μεγάλες γεωδαιτικές εργασίες του 18ου και 19ου αιώνα που αποσκοπούσαν στη χαρτογράφηση των κρατών της Ευρώπης και στην εξασφάλιση των συνόρων τους, οδήγησαν στην ανάγκη έκφρασης των αποτελεσμάτων σε

**Σχ. 1.4.** Τα κυριότερα τόξα μεσημβρινών και παραλλήλων που μετρήθηκαν για τον προσδιορισμό του σχήματος και των διαστάσεων της Γης μέχρι το τέλος του 19ου αιώνα.

μια ομοιόμορφη και ομοιογενή γλώσσα. Αποτέλεσμα ήταν η ίδρυση το 1861, από τον στρατηγό Beyer, της διεθνούς Γεωδαιτικής Ένωσης (ΔΓΕ) που επέζησε μέχρι τον Α Παγκόσμιο Πόλεμο και περιελάμβανε όλα τα τότε κράτη της Ευρώπης. Από το 1861 μέχρι το 1912, χρόνος της τελευταίας συνεδρίασής της στο Αμβούργο, η ΔΓΕ που το 1886 πήρε το όνομα Internationale Gradmessung (Διεθνής Βαθμομέτρηση), συντόνισε πολλές γεωδαιτικές εργασίες στην Ευρώπη, όπως π.χ. τη μέτρηση ενός τόξου από τη Νορβηγία μέχρι τη Σικελία, αστρονομικές παρατηρήσεις χωροσταθμίσεις, προσδιορισμούς μέσης στάθμης θάλασσας (ΜΣΘ), μελέτες ατμοσφαιρικής διάθλασης, απόλυτες και σχετικές μετρήσεις βαρύτητας κλπ.

Μετά το τέλος του Α Παγκοσμίου Πολέμου ιδρύθηκε η *Διεθνής Ένωση Γεωδαισίας και Γεωφυσικής* (IUGG) με πρώτη της γενική συνέλευση στη Ρώμη το 1922. Στη δεύτερη γενική συνέλευση στη Μαδρίτη το 1924 ιδρύθηκαν Επιτροπές Διεθνούς Γεωδαιτικής Συνεργασίας και έγινε αποδεκτό από τα κράτη μέλη της IUGG, σαν μαθηματική προσέγγιση της Γης, το ελλειψοειδές εκ περιστροφής που υπολόγισε ο Hayford από τις ΗΠΑ και το οποίο ονομάστηκε *Διεθνές Ελλειψοειδές*. Οι επίσημες διαστάσεις του Διεθνούς Ελλειψοειδούς και οι αβεβαιότητές του, που υπολογίστηκαν από τον Helmert, καθορίστηκαν σε

$$a = 6\,378\,388 \text{ m} \pm 35 \quad \text{μεγάλος ημιάξονας}$$

$$f = \frac{1}{297.0 \pm 0.8} \quad \text{επιπλάτυνση}$$

### 1.2.1. Οι γεωδαιτικές εργασίες στην Ελλάδα

Οι πρώτες γεωδαιτικές εργασίες Α τάξης στην Ελλάδα χρονολογούνται από το 1889, οπότε πραγματοποιείται σταδιακά ο πρώτος Τριγωνισμός της χώρας (1889-1925), ο οποίος εκάλυπτε την τότε ελεύθερη Ελλάδα (Πελοπόννησος, Στερεά, Θεσσαλία μέχρι την οριοθετική γραμμή βόρεια της Λάρισας, Ιόνια, Εύβοια και Αρχιπέλαγος του Αιγαίου). Οι εργασίες αυτές εκτελούνται από τη ΓΥΣ (Γεωγραφική Υπηρεσία Στρατού) υπό τη διεύθυνση μιας αποστολής της στρατιωτικής Γεωγραφικής Υπηρεσίας της Βιέννης διοικούμενης από τον αντισυνταγματάρχη Hartl. Η έναρξη των εργασιών αυτών συμπίπτει με την ίδρυση του αρχικού πυρήνα της ΓΥΣ ως «Γεωδαιτική Αποστολή» (1889), αργότερα (1891) ως «Γεωδαιτικό Απόσπασμα» και ως Χαρτογραφική Υπηρεσία Στρατού το 1895, για να μετονομαστεί σε ΓΥΣ (1926), όπως παραμένει μέχρι σήμερα. Η Αυστριακή στρατιωτική αποστολή ολοκλήρωσε το έργο της και αποχώρησε το 1896. Στις γεωδαιτικές εργασίες της πρώτης εκείνης περιόδου εντάσσεται και ο προσδιορισμός του αστρονομικού πλάτους και μήκους σε ένα βάθρο του Αστεροσκοπίου Αθηνών (βασικό σημείο ή αφετηρία του Ελληνικού γεωδαιτικού Datum με ελλειψοειδές αναφοράς του Bessel), από τον Hartl (1890), καθώς και του αστρονομικού αξιμουθίου προς το τριγωνομετρικό Πάργηθα. Οι τιμές που προσδιορίστηκαν από αστρονομικές μετρήσεις, μεταξύ άλλων και 252 μετρήσεις του Πολικού από τον Hartl, ήταν:

$$\Phi = 37^\circ 58' 20.10, \quad \Lambda = 23^\circ 42' 58.82, \quad A = 359^\circ 46' 13.10.$$

Μέχρι το 1918 αναπτύχθηκε το πρώτο Ελληνικό τριγωνομετρικό δίκτυο Α

τάξης το οποίο, μετά τους νικηφόρους Βαλκανικούς πολέμους, επεκτάθηκε ως τη νέα οριοθετική γραμμή (δεν συμπεριλαμβάνονται ακόμα τα Δωδεκάνησα και η Κρήτη) και είναι γνωστό ως παλαιό τριγωνομετρικό δίκτυο. Συγχρόνως, την εποχή αυτή εγίνοντο τριγωνισμοί κατωτέρων τάξεων παράλληλα με άλλες τοπογραφικές και χαρτογραφικές εργασίες. Οι συνορθώσεις των δικτύων έγιναν για μερικά τμήματα εμπειρικά και για άλλα τμήματα με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων (εξισώσεις συνθηκών). Το δίκτυο Α τάξης έχει αυτή την περίοδο μία μόνο βάση, αυτή της Ελευσίνας, με σύνολο 2130 τριγωνομετρικών σημείων όλων των τάξεων.

Το δίκτυο αυτό συνδέθηκε το 1922 με το Ιταλικό δίκτυο μέσω Κέρκυρας (Οθωνοί-Παντοκράτωρ) ενώ αργότερα η Γεωγραφική Υπηρεσία της Βιέννης το συνδέσε επίσης με το Αλβανικό, μέσω της ίδιας πλευράς. Το 1924 η δεύτερη γενική συνέλευση της IUGG στη Μαδρίτη, βρίσκει την Ελλάδα να συμμετέχει στην Επιτροπή 15 για την μέτρηση τόξου μεσημβρινού από τον Αρκτικό Ωκεανό μέχρι τη Μεσόγειο. Στα πλαίσια του διεθνούς αυτού προγράμματος εκτελούνται νέες γεωδαιτικές εργασίες στον Ελληνικό χώρο ανάμεσα στις οποίες και η σύνδεση (1928) των δικτύων Ελλάδας και Γιουγκοσλαβίας (τότε Βασίλειο των Σέρβων, Κροατών και Σλοβένων). Την ίδια περίοδο (1928-1929) και στα πλαίσια των εργασιών της επιτροπής 15 προτείνεται, από τον Καθηγητή της Γεωδαισίας στο ΕΜΠ Δ. Λαμπαδάριο, η σύνδεση του Ελληνικού δικτύου με τις βόρειες ακτές της Αφρικής μέσω ενός φωτογραμμετρικού-γεωδαιτικού συστήματος, πρόταση η οποία λόγω τεχνικών δυσχερειών έμεινε απραγματοποίητη. Από το 1925 αρχίζει η επαναμέτρηση του εθνικού δικτύου με νέες τιμές στο βάθρο του Αστεροσκοπείου Αθηνών:

$$\Phi = 37^{\circ} 58' 18''.680, \quad \Lambda = 23^{\circ} 42' 58''.815, \quad A = 359^{\circ} 46' 09''.773$$

με το αξιμούθιο προς Πάργηθα. Η προπολεμική περίοδος συμπληρώνεται με τη σύνδεση του Ελληνικού δικτύου με το δίκτυο της Δωδεκανήσου (1934) που βρίσκεται ακόμα υπό Ιταλική κατοχή, ενώ παράλληλα πραγματοποιείται και η σύνδεση με την Κρήτη (1930). Με τις νέες μετρήσεις γωνιών, βάσεων-πλευρών (3 βάσεις) και σημείων Laplace (3 σημεία), έγινε νέα συνόρθωση. Αυτή την εποχή (1939), το δίκτυο Α τάξης αριθμεί περί τα 160 σημεία, το δίκτυο Β τάξης 320 σημεία ενώ το σύνολο των προσδιορισθέντων σημείων ανέρχεται σε 4500.

Η περίοδος του δεύτερου Παγκοσμίου πολέμου είναι μία νεκρή περίοδος και για τις γεωδαιτικές εργασίες στη χώρα μας. Πολλά βάθρα καταστράφηκαν (30%), ενώ αρχεία μετρήσεων και υπολογισμών μαζί με όργανα μετρήσεων, πάθθησαν από τους Γερμανούς. Έτσι στην ουσία, αρχίζει μεταπολεμικά, κυρίως μετά το 1949, η εξ' αρχής επανίδρυση, μέτρηση και επίλυση

των βασικών γεωδαιτικών δικτύων της χώρας. Τα 47 κατεστραμμένα βάρθρα του δικτύου Α τάξης ιδρύθηκαν σε νέες θέσεις. Τα υπόλοιπα 90, μερικά από τα οποία επισκευάστηκαν, αποτέλεσαν μαζί με τα νέα, το νέο δίκτυο των 137 σημείων. Μέχρι και το 1962 εγίνοντο συνεχείς μετρήσεις και συνορθώσεις για τις ανάγκες κυρίως του στρατού, χωρίς να πληρούνται ικανοποιητικές ακρίβειες. Το δίκτυο Β τάξης αριθμεί τώρα 476 σημεία. Την περίοδο αυτή γίνεται και η σύνδεση με την Τουρκία. Τα γωνιομετρικά όργανα που χρησιμοποιήθηκαν μέχρι το 1955 ήταν θεοδόλιχα Wild T2 (2 ) ενώ οι γωνίες παρατηρούνταν ως μεμονωμένες. Από το 1961 και μετά χρησιμοποιούνται θεοδόλιχα Wild T3 (1 ), μετριέται το δίκτυο της Μακεδονίας-Θράκης και χρησιμοποιείται η μέθοδος των διευθύνσεων. Απομένει η μέτρηση του δικτύου του Αιγαίου και η σύνδεσή του με την ηπειρωτική Ελλάδα.

Μια *συστηματική μελέτη* και αναθεώρηση των εθνικών δικτύων αρχίζει το 1962, όταν η ΓΥΣ αναλαμβάνει τη Χαρτογράφηση της Ελλάδας σε κλίμακα 1:5000. Το 1979, ύστερα από 15 χρόνια, ολοκληρώνεται η μέτρηση του τριγωνομετρικού δικτύου Α τάξης και αρχίζουν οι υπολογιστικές φάσεις των συνορθώσεων. Μέχρι το 1980, οι συνορθώσεις των δικτύων, όλων των τάξεων, εγίνοντο τμηματικά. Στα πλαίσια του προγράμματος EDOC II, αρχίζουν το 1977 δορυφορικές μετρήσεις με το σύστημα Doppler, από τη ΓΥΣ ή και σε συνεργασία με τη Γεωδαιτική και Γεωφυσική Επιτροπή του Κράτους (ΓΓΕΚ). Έτσι το 1985 υπήρχαν 44 σταθμοί Doppler σε σημεία Α και Β τάξης. Οι πλευρές που υπολογίστηκαν από τις μετρήσεις αυτές χρησιμοποιήθηκαν κυρίως για έλεγχο της κλίμακας του δικτύου (ακρίβεια πλευρών  $\pm 2-3$  ppm με τη μέθοδο διεντοπισμού). Επίσης προσδιορίστηκαν παράμετροι μετασχηματισμού για συνδέσεις γεωδαιτικών datum. Από το 1973 έως το 1986 μετρήθηκαν 23 σταθμοί Laplace Α τάξης με μεγάλη ακρίβεια: οι αστρονομικές συντεταγμένες Φ (μέθοδος Sterneck, 8 τουλάχιστον σύνολα των 8 αστέρων με ακρίβεια  $\pm 0.1$ ), Λ (μέθοδος μεσημβρινών διαβάσεων, 6 τουλάχιστον σύνολα των 6 αστέρων με ακρίβεια  $\pm 0.1$ ) και αστρονομικά αζιμούθια (μέθοδος ωριαίας γωνίας του πολικού σε 2 νύχτες με ακρίβεια  $\pm 0.30$ ). Από το 1933 μέχρι και το 1986, μετρήθηκαν συνολικά 89 σταθμοί απόκλισης της κατακορύφου, με τον προσδιορισμό των Φ, Λ και με παρόμοιες με τα σημεία Laplace μεθόδους αλλά μικρότερης ακρίβειας ( $\pm 1$ ). Τα στοιχεία αυτά χρησιμοποιήθηκαν για τις αναγωγές των μετρήσεων και για τον αστρογεωδαιτικό προσδιορισμό του γεωειδούς.

Το 1980 αρχίζει η *πρώτη ενιαία συνόρθωση* του δικτύου Α τάξης με μία μόνο πλευρά (Κτυπάς -Πάργηθα), ενώ το 1984 ολοκληρώνονται οι *υπολογισμοί της πρώτης φάσης* χρησιμοποιώντας, εκτός από τις 720 διευθύνσεις, και περισσότερες πλευρές-βάσεις καθώς και αζιμούθια Laplace (17 πλευρές-βάσεις και 14 αζιμούθια). Η ενιαία συνόρθωση του δικτύου Α τά-

ξης έγινε με τη μέθοδο των εξισώσεων συνθηκών, όπου οι εξισώσεις των πλευρών και των αζιμουθίων χρησιμοποιήθηκαν ως δεσμεύσεις, ενώ η συνόρθωση του δικτύου Β τάξης (475 σημεία) έγινε τμηματικά με σταθερά τα σημεία Α τάξης. Αφετηρία του δικτύου Α τάξης (σημείο με συμβατικά γνωστές συντεταγμένες) θεωρείται το τριγωνομετρικό ΚΤΥΠΑΣ. Για το σημείο αυτό θεωρήθηκαν ως απόλυτα σταθερές οι παλιές του γεωδαιτικές συντεταγμένες

$$\varphi = 38^{\circ} 27' 50'' .7155, \quad \lambda = -0^{\circ} 13' 54'' .1193,$$

$\alpha = 147^{\circ} 52' 01'' .6440$  ανηγμένο αζιμούθιο προς Πάρονθα, υψόμετρο γεωειδούς  $N = -0.30$  m και συνιστώσες απόκλισης της κατακορύφου  $\xi = +8$ ,  $\eta = +1$ .

Παράλληλα επαναμετρούνται τα δίκτυα κατωτέρων τάξεων (Γ και Δ τάξης). Απέμενε η συνόρθωση των δικτύων κατώτερης τάξης η οποία δεν ολοκληρώθηκε επειδή το 1982 αρχίζει η επαναμέτρηση του δικτύου Β τάξης.

Η προηγούμενη λύση του δικτύου Α τάξης (137 σημεία) αναθεωρείται το 1986 με νέα συνόρθωση (τροποποίηση αλγορίθμων συνόρθωσης, καλύτερα μοντέλα). Έτσι αρχίζει νέα φάση (2η φάση) επίλυσης και για το δίκτυο Β τάξης με σταθερά τα σημεία του Α τάξης. Η νέα συνόρθωση δεν διέφερε σημαντικά από την προηγούμενη. Στη νέα αυτή συνόρθωση οι πλευρές και τα αζιμούθια Laplace θεωρήθηκαν ως μετρήσεις. Από τα στοιχεία της πρώτης φάσης έγινε βελτιστοποίηση του γεωειδούς (για καλύτερη προσαρμογή) και προσδιορίστηκαν νέες τιμές απόκλισης της κατακορύφου και των υψόμετρων του γεωειδούς.

Στο βάθος του Αστεροσκοπείου Αθηνών έχουμε τώρα  $\xi = -4'' .8$ ,  $\eta = 3'' .13$  και  $N = +5.3$  m. Με τα νέα αστρογεωδαιτικά δεδομένα στη νέα συνόρθωση, έγιναν νέες αναγωγές των παρατηρήσεων που όμως δεν διέφεραν σημαντικά. Χρησιμοποιείται τόσο η μέθοδος των εξισώσεων συνθηκών όσο και η μέθοδος των εξισώσεων παρατηρήσεων, με σχεδόν ίδια αποτελέσματα. Η μέγιστη τυπική απόκλιση για τα απομακρυσμένα σημεία του δικτύου δεν υπερβαίνει τα 80 cm. Τα αποτελέσματα χαρακτηρίζονται από υψηλή ακρίβεια και αξιοπιστία. Το δίκτυο Β τάξης συνορθώνεται σε 80 τμήματα με σταθερά τα σημεία του Α τάξης (τυπική απόκλιση συντεταγμένων  $\leq 10$  cm). Το 1988 αρχίζει η επίλυση και των δικτύων κατώτερης τάξης: για το δίκτυο Γ τάξης τμηματικά κατά 25 μεγάλα πολύγωνα και για το δίκτυο Δ τάξης τμηματικά ανά φύλλο χάρτη 1:50000, με σταθερά τα ήδη γνωστά σημεία όλων των τάξεων. Η επίλυση ολοκληρώνεται το 1989. Η τυπική απόκλιση των συντεταγμένων για μεν τα σημεία Γ τάξης δεν υπερβαίνει τα 3cm, για δε τα σημεία Δ το 1.5 cm. Την ίδια χρονιά ολοκληρώνεται και ο



υψομετρικός υπολογισμός των τριγωνομετρικών σημείων των δικτύων της χώρας. Το δίκτυο Γ τάξης αριθμεί 3909 τριγωνομετρικά σημεία ενώ το Δ τάξης 21181 σημεία. Το σύνολο των τριγωνομετρικών σημείων όλων των τάξεων είναι 25702 με πυκνότητα 1 σημείο ανά 5 km<sup>2</sup>.

Εκτός από τις προηγούμενες συνορθώσεις των τριγωνομετρικών δικτύων, που έγιναν με αναφορά το ελλειψοειδές του Bessel, βασικό σημείο του γεωδαιτικού συστήματος το βάθρο του Αστεροσκοπείου Αθηνών (Ελληνικό γεωδαιτικό Datum) και βασικό σημείο του δικτύου Α τάξης το τριγωνομετρικό Κτυπάς, η ΓΥΣ έχει επιλύσει παράλληλα τα δίκτυα Α τάξης και Β τάξης και ως προς το Ευρωπαϊκό Datum (ED50), για στρατιωτική κυρίως χρήση, ενώ τα σημεία των δικτύων κατώτερης τάξης προσδιορίστηκαν στο ED50 με συντελεστές μετατροπής (μετασχηματισμοί με βάση κοινά σημεία). Με αναφορά το ED50, δόθηκαν οι εξής τιμές για το τριγωνομετρικό Κτυπάς:

$$\varphi=38^{\circ} 27' 57'' .8716, \quad \lambda=23^{\circ} 29' 13'' .3888,$$

ανηγμένο αζιμούθιο προς Πάργηθα  $\alpha = 147^{\circ} 52' 37'' .1237$ , υψόμετρο γεωειδούς  $N = -6.50$  m και συνιστώσες απόκλισης της κατακορύφου  $\xi = +0'' .8$ ,  $\eta = -5'' .8$ . Οι τιμές αυτές βασίστηκαν στις τιμές του τριγωνομετρικού του Αστεροσκοπείου Αθηνών  $\xi = -8'' .7$ ,  $\eta = -6'' .7$ ,  $N = 8.20$  m ως προς το ED50.

Μετά την αποδοχή από τον Οργανισμό Κτηματολογίου και Χαρτογραφίσεων Ελλάδας (ΟΚΧΕ), του νέου Ελληνικού Γεωδαιτικού Συστήματος Αναφοράς του 1987 (ΕΓΣΑ'87), έγινε η συνόρθωση των δικτύων, προσαρμόζοντας τις επίγειες μετρήσεις σε ένα σύνολο σημείων, που προσδιορίστηκαν με τη βοήθεια δορυφορικών μετρήσεων (μετρήσεις Doppler, μετρήσεις Laser και GPS) την τελευταία δεκαετία στα πλαίσια προγραμματάτων συνεργασίας Ελληνικών (π.χ. ΕΜΠ, ΓΥΣ) και ξένων Πανεπιστημίων και φορέων. Σχετικά με το ΕΓΣΑ'87 θα αναφερθούμε στο κεφάλαιο 3.6.

Οι Πολιτικές Υπηρεσίες στην Ελλάδα χρησιμοποιούν ακόμα και σήμερα το γεωδαιτικό σύστημα αναφοράς με αφετηρία το βάθρο του Αστεροσκοπείου Αθηνών και με την παραδοχή της ταύτισης του γεωειδούς με το ΕΕΠ του Bessel στο αντίστοιχο σημείο. Επιπλέον, σημείο αφετηρίας του τριγωνισμού είναι το τριγωνομετρικό ΚΤΥΠΑΣ στο οποίο δόθηκαν τέτοιες γεωδαιτικές συντεταγμένες ( $\lambda$ ,  $\varphi$ ) και υψόμετρο του γεωειδούς  $N$  ώστε να ισχύει στο βάθρο του Αστεροσκοπείου Αθηνών η ταύτιση που αναφέρθηκε. Επίσης χρησιμοποιείται εν μέρει και το νέο Ελληνικό γεωδαιτικό σύστημα αναφοράς (ΕΓΣΑ 87) με το ΕΕΠ του GRS 80 και σημείο αφετηρίας το Κεντρικό βάθρο στο κέντρο Διονύσου Αττικής.

Αν λάβουμε υπ' όψη το γεγονός των συνεχών διαχρονικών αναθεωρήσεων των δικτύων και κατά συνέπεια των γεωδαιτικών Datum στον Ελλη-

νικό χώρο, αντιλαμβάνεται κανείς τις πρακτικές δυσκολίες στις τρέχουσες εφαρμογές που σχετίζονται με χρήση “πληροφοριών” από διαφορετικά συστήματα.

Ένα πρόβλημα που τέθηκε για το Ελληνικό δίκτυο, είναι η *σύνδεσή* του με τα δίκτυα Ευρωπαϊκών χωρών στα πλαίσια της υλοποίησης προγράμματος για την *ενιαία συνόρθωση του Ευρωπαϊκού δικτύου* σε ένα Ευρωπαϊκό σύστημα (ED) με κεντρικό σημείο στο Potsdam και σε ένα ΕΕΠ αναφοράς (π.χ. Διεθνές του Hayford). Ο πρώτος Ευρωπαϊκός Τριγωνισμός που προσδιόρισε το ED 50, πραγματοποιήθηκε περί το 1950 με τη συνεργασία της Στρατιωτικής Χαρτογραφικής Υπηρεσίας των ΗΠΑ και της αντίστοιχης

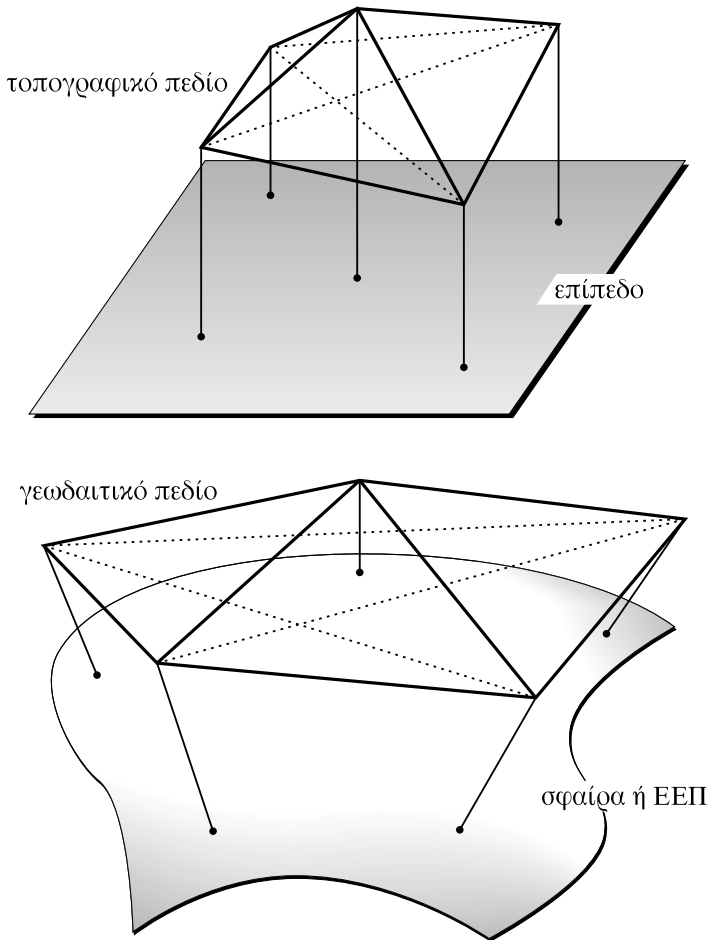
Πολιτικής στα πλαίσια της IUGG. Η προσπάθεια αυτή αποσκοπούσε όχι τόσο στον ακριβή προσδιορισμό συντεταγμένων, όσο στον προσδιορισμό σημείων με μια ακρίβεια κατάλληλη για χαρτογραφικούς και στρατιωτικούς σκοπούς (π.χ. κλίμακας 1:50000) σε όλη την Ευρώπη.

Το 1954 αποφασίστηκε στη Γενική Συνέλευση της Ρώμης ένα νέο πρόγραμμα επανατριγωνισμού της Ευρώπης (RETRIG) με τη συμμετοχή Δυτικοευρωπαϊκών χωρών και με σκοπό καθαρά επιστημονικό, για τον ακριβή προσδιορισμό συντεταγμένων σ' ένα ενιαίο σύστημα αναφοράς και με τη χρήση ενιαίων μεθόδων επανασυνόρθωσης των επί μέρους κρατικών δικτύων. Η πρώτη φάση του RETRIG περιελάμβανε κυρίως τη βελτίωση των υπάρχοντων κρατικών δικτύων. Το 1975 παρουσιάστηκαν στη Συνέλευση της Γκρενόμπλ τα πρώτα ικανοποιητικά αποτελέσματα του RETRIG από το γεωδαιτικό υπολογιστικό κέντρο του Μονάχου, περιλαμβάνοντας μόνο παρατηρήσεις διευθύνσεων και λόγους αποστάσεων. Η δεύτερη φάση περιελάμβανε την επανασυνόρθωση του Ευρωπαϊκού δικτύου με την εισαγωγή αξιμουθίων Laplace και αποστάσεων. Τα πρώτα αποτελέσματα του 1977, προσδιόρισαν το νέο Ευρωπαϊκό Datum ED 77. Στη συνέχεια, το 1979, παρουσιάστηκε το ED 79 σύμφωνα με τις μέχρι τότε καλύτερες δυνατές εκτιμήσεις. Ο τρόπος συνόρθωσης που ακολουθήθηκε στο πρόγραμμα RETRIG είναι η μέθοδος Helmert (συνόρθωση κατά μέρη, βλ. κεφ. 9) ενώ η επεξεργασία γίνεται πάντα στο υπολογιστικό κέντρο του Μονάχου. Τέλος, η τρίτη φάση, περιλαμβάνει νέα δεδομένα, π.χ. μετρήσεις συντεταγμένων με το σύστημα Doppler, άλλες δορυφορικές μετρήσεις κλπ. Η Ελλάδα, αν και συμμετείχε στο πρόγραμμα RETRIG, δεν ολοκλήρωσε έγκαιρα την πρώτη φάση και δεν πήρε μέρος στα αποτελέσματα του ED 77, ED 79 και ED 87.

Σήμερα στην IUGG, που αποτελείται από πέντε επιμέρους ενώσεις Γεωεπιστημών (η IAG για τη Γεωδαισία), συμμετέχουν σχεδόν όλα τα κράτη μέλη του ΟΗΕ, οι δε Συνελεύσεις της τελευταίας εικοσαετίας έγιναν: το 1971 στη Μόσχα, το 1975 στη Γκρενόμπλ, το 1979 στην Κάμπερα, το 1983 στο Αμβούργο, το 1987 στο Βανκούβερ του Καναδά και το 1991 στη Βιέννη ενώ για το 1995 επιλέχθηκε το Μπούλντεν του Κολοράντο των ΗΠΑ. Η Ελλάδα συμμετέχει στην IUGG από την ίδρυσή της μέσω της Γεωδαιτικής και Γεωφυσικής Επιτροπής του Κράτους (ΓΓΕΚ), που ιδρύθηκε αρχικά σαν Γεωδαιτική Επιτροπή του Κράτους στις 8 Φεβρουαρίου 1923, με πρώτο Πρόεδρο τον Διευθυντή της ΓΥΣ Στρατηγό Π. Φωτιάδη και Γεν. Γραμματέα τον Καθηγητή Δ. Λαμπαδάριο.

### 1.3. Τοπογραφικό και γεωδαιτικό πεδίο

Είναι ήδη γνωστό από την Τοπογραφία, ότι η διαδικασία προσδιορισμού θέσεων ή, ακριβέστερα, η διαδικασία *προσδιορισμού συντεταγμένων* σημείων της επιφάνειας του εδάφους, προϋποθέτει την εισαγωγή μιας επιφάνειας αναφοράς και μιας μεθόδου προβολής των σημείων και των μετρήσεων από την επιφάνεια του εδάφους (πραγματικότητα) στην επιφάνεια αναφοράς (μοντέλο) προκειμένου να γίνει εκεί η κατάλληλη μαθηματική επεξεργασία που θα «προσδιορίσει» τα σημεία του εδάφους με τις συντεταγμένες τους.



Σχ. 1.7. Το τοπογραφικό και το γεωδαιτικό πεδίο

Στην Τοπογραφία, οι διαστάσεις των επιφανειών της Γης που εμπλέκονται στο πρόβλημα, είναι περιορισμένες τόσο (της τάξης των μερικών χιλιομέτρων), ώστε να αγνοείται η καμπυλότητα της Γης καθώς και προβλήματα που οφείλονται στο πεδίο βαρύτητάς της. Έτσι, είναι δυνατόν να θεωρηθεί ότι η επιφάνεια αναφοράς που προσεγγίζει καλύτερα την περιορισμένη περιοχή των τοπογραφικών εργασιών (Τοπογραφική περιοχή) είναι ένα *οριζόντιο επίπεδο* στο οποίο τα διάφορα σημεία της γήινης επιφάνειας, που περιέχονται στην περιορισμένη περιοχή, προβάλλονται *κατά την κατακόρυφο* η οποία θεωρείται παράλληλη από σημείο σε σημείο. Εάν όμως η περιοχή των εργασιών είναι τόσο εκτεταμένη ώστε να μην ισχύει πια ως ικανοποιητική προσέγγιση εκείνη του επιπέδου, εισέρχεται η έννοια της «περιοχής των γεωδαιτικών εργασιών» με καλύτερη δυνατή προσέγγιση της γήινης επιφάνειας, την επιφάνεια αναφοράς μιας σφαίρας σε πρώτη προσέγγιση ή καλύτερα ενός ΕΕΠ. Τότε τα σημεία της γήινης επιφάνειας προβάλλονται στις καμπύλες επιφάνειες της σφαίρας ή του ΕΕΠ *όχι* πια *κατά την κατακόρυφο* αλλά *κατά την ημιευθεία* που περνάει απ' το σημείο και είναι *κάθετη* στην επιφάνεια της σφαίρας ή του ΕΕΠ.

Η γνώση των διαστάσεων της Γης είναι απαραίτητη για τον προσδιορισμό των θέσεων των τριγωνομετρικών σημείων, την επίλυση τριγωνισμών ανώτερης τάξης (γεωδαιτικών τριγωνισμών) καθώς και για τη μαθηματική επεξεργασία των παρατηρηθεισών ποσοτήτων που χρησιμοποιούνται για τον σκοπό αυτό. Επιπλέον, ο προσδιορισμός του σχήματος και των διαστάσεων της Γης, είναι ένα βασικό στοιχείο για όλες σχεδόν τις γεωεπιστήμες.

Σαν μια αντιπροσωπευτική επιφάνεια της Γης θεωρείται η ισοδυναμική (ή χωροσταθμική) επιφάνεια των ισορροπούντων ωκεανών της Υδρογείου, λαμβανομένης της μέσης στάθμης τους να εκτείνεται και κάτω απ' τις Ηπείρους, έτσι ώστε σε κάθε σημείο αυτής της χωροσταθμικής μέσης επιφάνειας, η διεύθυνση της κατακόρυφου να είναι κάθετος σ' αυτήν. Η επιφάνεια αυτή των ισορροπούντων ωκεανών είναι το *γεωειδές* που πολλές φορές λέμε ότι παριστά τη *φυσική μορφή της Γης*. Όλες οι γεωδαιτικές εργασίες ανώτερης τάξης θα μπορούσαν να αναχθούν στο γεωειδές έτσι ώστε τα παρατηρούμενα μεγέθη (γεωμετρικά ή/και φυσικά), που συλλέγονται στην πραγματική επιφάνεια της Γης (πραγματική μορφή της Γης) να αναφέρονται στη φυσική επιφάνειά της.

Όμως το γεωειδές, και από αυτόν ακόμα τον ορισμό του έχει μια πολύ περιπλεγμένη μορφή και δεν είναι δυνατόν να εκφραστεί από απλές εξισώσεις που θα επέτρεπαν σχετικά απλούς μαθηματικούς υπολογισμούς. Από την άλλη μεριά, η γεωδαιτική εμπειρία μας δίδαξε ότι το γεωειδές προσεγγίζει πολύ ικανοποιητικά τη μορφή και τις διαστάσεις ενός ΕΕΠ. Έτσι, δεδομένου ότι το ΕΕΠ εκφράζεται από απλές σχέσεις, που επιτρέπουν ευχερείς μαθηματικούς υπολογισμούς, το γεωειδές προσεγγίζεται από ένα ΕΕΠ. Η επιφάνεια του ΕΕΠ παριστάνει τη λεγόμενη *μαθηματική μορφή* της Γης στην οποία αναφέρονται οι θέσεις των τριγωνομετρικών σημείων είτε ως προς το σύστημα των *ορθογωνίων ελλειψοειδών ή γεωδαιτικών συντεταγμένων* του ΕΕΠ (δύο διαστάσεις) είτε ως προς το σύστημα των *ορθογωνίων καρτεσιανών του συντεταγμένων* (τρεις διαστάσεις). Τα δύο αυτά συστήματα συνδέονται μεταξύ τους όπως θα δούμε στο μεθεπόμενο κεφάλαιο.

## 1.4. Προσδιορισμός θέσης σημείων

Η θέση των σημείων πάνω στις επιφάνειες αναφοράς της σφαιράς ή του ΕΕΠ εκφράζεται από τις αντίστοιχες καμπυλόγραμμες επιφανειακές (σφαιρικές ή ελλειψοειδείς/γεωδαιτικές) συντεταγμένες, οι οποίες εξ ορισμού λαμβάνονται ορθογωνίες. Η τρίτη συντεταγμένη, δηλαδή η αποχή του σημείου από την επιφάνεια αναφοράς, ενώ στην τοπογραφία είναι το *ορθο-*

*μετρικό υψόμετρο*  $H$ , δηλαδή η κάθετη απόσταση του σημείου από την ΜΣΘ (που κείται στην κατακόρυφο του σημείου), στην ελλειψοειδή γεωδαισία είναι η κάθετη απόσταση του σημείου του εδάφους από τη σφαιρική ή ελλειψοειδή επιφάνεια αναφοράς, που ονομάζεται *γεωμετρικό υψόμετρο*  $h$  και το οποίο προφανώς δεν είναι άμεσα μετρήσιμο. Το γεγονός αυτό σε συνδυασμό με το ότι ούτε η κάθετος από ένα σημείο της γήινης επιφάνειας στο ελλειδοειδές είναι φυσικά υλοποιήσιμη, εφ' όσον τα όργανα της γεωδαισίας, π.χ. το Θεοδόλιχο, υλοποιούν μόνον την κατακόρυφο, οδηγεί στην ανάγκη εισαγωγής βοηθητικών παραμέτρων και εννοιών που συνδέονται με το *πεδίο βαρύτητας της Γης*.

Τα ορθομετρικά υψόμετρα αναφέρονται σε μια χωροσταθμική επιφάνεια του γήινου πεδίου βαρύτητας η οποία προσεγγίζεται από την ισορροπούσα

**Σχ. 1.10.** Μέσες ετήσιες τιμές της ΜΣΘ για τη χρονική περίοδο 1860-1960. Φαίνεται η παγκόσμια αύξηση της στάθμης τα τελευταία χρόνια.

**Σχ. 1.11.** Χάρτης των υψομέτρων του γεωειδούς ανά 10 m που συντάχθηκε με τη βοήθεια δορυφορικών γεωδαιτικών μεθόδων και αναφέρεται στο GRS'80.