Αλέξανδρος Λαζαρίδης

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ







- πλήρης θεωρία
- 350 λυμένα προβλήματα
- 100 προβλήματα για λύση

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ

Οι **πιθανότητες** μπορεί να προβλέπουν τα μελλούμενα!
Το μέλλον όμως είναι συνδυασμός παιδείας,
στοχεύσεων, ευκαιριών και δράσεων.

Α. Λ.

Πρόλογος

Το βασικό χαρακτηριστικό του, πέρα από την ενδελεχή ανάπτυξη του θεωρητικού υπόβαθρου, είναι η πληθώρα των λυμένων προβλημάτων (πλέον των 450 από τα οποία περισσότερα από 350 είναι λυμένα) και ο εμπλουτισμός της θεωρίας με αντιπροσωπευτικά παραδείγματα.

Τα πέντε πρώτα κεφάλαια μαζί με την εισαγωγή απευθύνονται στους φοιτητές των Φυσικομαθηματικών Σχολών που υποχρεούνται να παρακολουθήσουν το μάθημα Πιθανότητες Ι. Το έκτο κεφάλαιο είναι ένα απαραίτητο συμπλήρωμα για τους φοιτητές αυτούς και μια εισαγωγή στο μάθημα Πιθανότητες ΙΙ. Το πρώτο κεφάλαιο μπορεί να τους βοηθήσει να αντιμετωπίσουν και το μάθημα "θεωρία μέτρου και ολοκλήρωση"”

Τα κεφάλαια 0 (εισαγωγή), 2, 3 και 4 αντιμετωπίζουν την εξεταζόμενη ύλη των Πολυτεχνικών, των γεωπονοδασολογικών, των Οικονομικών Σχολών και των Παραγωγικών Σχολών των Ενόπλων Δυνάμεων. Για τους φοιτητές αυτούς συνιστάται η απλή μελέτη της περίληψης του πρώτου κεφαλαίου.

Τα κεφάλαια 0, 2 και 3 είναι ένα σημαντικό βοήθημα για τους εκπαιδευτικούς της Μέσης εκπαίδευσης.

Στο τέλος κάθε κεφαλαίου, εκτός από το 6ο, δίνεται μια σύντομη περίληψη του αντίστοιχου κεφαλαίου, κάτι που μπορεί να ευκολύνει τους φοιτητές που αρχίζουν τη μελέτη της λύσης των ασκήσεων.

Σ’ όλο το βιβλίο γίνεται χρήση της δείκτριας συνάρτησης (σελ. 35, 51 κοκ) με την οποία απλοποιείται η περιγραφή των συναρτήσεων.

Τα προτεινόμενα προβλήματα συνοδεύονται είτε από αναλυτικές λύσεις τους είτε από περιεκτικές υποδείξεις, όταν κρίνεται σκόπιμο, είτε ακόμα με απαντήσεις. Το αν συνοδεύονται με λύσεις ή υποδείξεις ή απλώς απαντήσεις δεν σημαίνει ότι η διάκριση αυτή έγινε ανάλογα με τον βαθμό δυσκολίας των ασκήσεων. Άλλωστε η κατανομή των ασκήσεων δεν έγινε κατά σειρά δυσκολίας τους. Είναι μια άποψη που πρεσβεύουμε για δυο λόγους:

α. Με τα προβλήματα αυτά θέλουμε να διδάξουμε σε βάθος τις πιθανότητες.

β. Για όσους φοιτητές επιχειρούν να λύσουν τα προτεινόμενα προβλήματα χωρίς να συμβουλευθούν την παρεχόμενη λύση (που ας σημειωθεί γενικά δεν είναι και η μοναδική) δεν υπάρχει κίνδυνος να δημιουργηθούν . . . ψυχολογικά προβλήματα σε τυχόν αδυναμία λύσεως μιας άσκησης που θα είχε χαρακτηρισθεί εύκολη. Άλλωστε πολύ συχνά η έννοια του “εύκολου” και “δύσκολου” μπορεί να έχει και προσωπική ανταπόκριση.

Θα μπορούσαμε να προσθέσουμε και ένα πρόσθετο λόγο που έχει σχέση με τη μορφή και τον τρόπο της παρεχόμενης προφορικής εκπαίδευσης.

Οι λύσεις ή υποδείξεις δίνονται αμέσως μετά τις εκφωνήσεις και αυτό πέρα από τον πρώτο λόγο που μνημονεύεται παρά πάνω και για το λόγο ότι το βιβλίο απευθύνεται σε ώριμους φοιτητές και επομένως δεν μπορούμε να καταλάβουμε ποιο ρόλο μπορούσε να παίξει το “κρυφτούλι”.

Στο βιβλίο αυτό δεν μνημονεύουμε τα διάφορα ιστορικά προβλήματα πιθανοτήτων, τα περισσότερα των οποίων λύνονται με ιδαζουσες διαδικασίες, κάτι που δεν είναι στους στόχους των φοιτητών. Άλλωστε δεν θέλουμε να χαρακτηρισθεί ως μια εγκυκλοπαιδική αντιμετώπιση του μαθήματος των Πιθανοτήτων. Σκοπός του είναι να αποτελέσει ένα πρακτικό εργαλείο στα χέρια του φοιτητή που επιθυμεί να μάθει και να ανταποκριθεί στις εξετάσεις του.

Θα μπορούσαμε άραγε να θεωρήσουμε πιθανό ότι θα βοηθήσει το βιβλίο αυτό τους φοιτητες προς τους οποίους απυθύνεται;

Λάρισα, Ιανουάριος 2004
Α. Λ.

Πίνακας περιεχομένων

Εισαγωγή

Συνδυαστική Ανάλυση

Κεφάλαιο πρώτο

Άλγεβρα συνόλων και θεωρία μέτρου

Κεφάλαιο δεύτερο

Λογισμός πιθανοτήτων

Κεφάλαιο τρίτο

Διακριτές τυχαίες μεταβλητές (τ. μ.)

Κεφάλαιο τέταρτο

Συνεχείς τυχαίες μεταβλητές

Κεφάλαιο πέμπτο

Τυχαία διανύσματα

Κεφάλαιο έκτο

Σύγκλιση τυχαίων μεταβλητών

Εισαγωγή

Συνδυαστική Ανάλυση

Το κεφάλαιο αυτό, αν και δεν αποτελεί μέρος της καθαυτό θεωρίας πιθανοτήτων, κρίθηκε αναγκαίο, διότι αντιμετωπίζει τα τρέχοντα προβλήματα πιθανοτήτων σε πεπερασμένους δειγματικούς χώρους, όπου στις πιο πολλές περιπτώσεις η εύρεση της ζητούμενης πιθανότητας είναι ένα απλό θέμα απαρίθμησης.

0. 1. Δάτάξεις

0. 1. 1 Καλούμε **διάταξη** των n στοιχείων ενός συνόλου E, λαμβανόμενων ανά m, κάθε διατεταγμένη ακολουθία m στοιχείων που λαμβάνεται από τα n στοιχεία του συνόλου E. Αν ορισμένα από τα m στοιχεία συμπίπτουν, τότε μιλούμε για διατάξεις με **επανάληψη**. Με τη γλώσσα των συνόλων καλούμε διατάξεις των n στοιχείων ανά m κάθε απεικόνιση “1-1” του {1, 2, . . . , m} εντός του E. Δυο διατάξεις των m στοιχείων από τα n μπορεί να διαφέρουν τόσο ως προς τη φύση των στοιχείων, όσο και ως προς τη θέση των στοιχείων τους στην περίπτωση που απαρτίζονται από τα ίδια στοιχεία.

0. 1. 2 Παράδειγμα

΄Εστω το σύνολο Α={α, β, γ, δ}. Οι δυνατές διατάξεις των στοιχείων του συνόλου αυτού ανά δύο είναι

α, β	α, γ	α, δ	β, γ	β, δ	γ, δ
β, α	γ, α	δ, α	γ, β	δ, β	δ, γ

0. 1. 3 Βασική αρχή της απαρίθμησης

Δίνουμε στη συνέχεια τη βασική αρχή της απαρίθμησης στην απλούστερη μορφή της:

Αν ένα ενδεχόμενο, ένα γεγονός, μπορεί να λάβει χώραν σε δύο ή περισσότερες φάσεις και $k_1, k_2, \ldots, k_n$ είναι οι τρόποι που πραγματοποιούνται οι σχετικές φάσεις, τότε το ενδεχόμενο λαμβάνει χώραν κατά $k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_n$ τρόπους.

0. 1. 4 Είδαμε ότι είναι δυνατό να έχουμε περισσότερες από μία διατάξεις των n ανά m πραγμάτων. Θα υπολογίσουμε το πλήθος $\mathcal{A}_m^n$ των διατάξεων αυτών. Ξεκινούμε και εξετάζουμε την περίπτωση των διατάξεων χωρίς επανάληψη.

Ως πρώτο στοιχείο, στην πρώτη φάση, μπορούμε να επιλέξουμε ένα από τα n στοιχεία κατά n τρόπους. Ως δεύτερο στοιχείο, κατά τη δεύτερη φάση, μπορούμε να εκλέξουμε κατά n-1 τρόπους ένα από τα υπόλοιπα n-1 στοιχεία. Ως τρίτο στοιχείο, στην τρίτη φάση, μπορούμε να εκλέξουμε κατά n-2 τρόπους ένα από τα n-2 στοιχεία, ... Ώς m-ιοστό στοιχείο μπορούμε να εκλέξουμε κατά n-(m-1)=n-m+1 τρόπους ένα από τα n-m+1 στοιχεία. Ώστε η επιλογή των m από τα n στοιχεία μπορεί να γίνει, σύμφωνα με τη βασική αρχή απαρίθμησης κατά

$$\mathcal{A}_m^n = n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1) \tag{1}$$

τρόπους. Η σχέση (1) δίνει τον αριθμό των δυνατών διατάξεων των n στοιχείων ανά m. Ορίζουμε το παραγοντικό n! από τις σχέσεις

$$n! = n\cdot(n-1)!\,,\, n\in\mathbb{N}, \quad 1!=1, \quad 0!=1.$$

Στο σημείο αυτό είναι σκόπιμο να μνημονεύσουμε τη συνάρτηση Γ που έχει σχέση με το παραγοντικό. Συγκεκριμένα η συνάρτηση

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty u^{x-1}e^{-u}\,du$$

έχει την ιδιότητα

$$\Gamma(x+1) = \begin{cases} x! \quad , & \alpha\nu\ x\in\mathbb{N} \\ x\cdot\Gamma(x), & \alpha\nu\ x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{N} \end{cases}$$

Αν κάνουμε χρήση της έννοιας του παραγοντικού, ο τύπος (1) παίρνει τη μορφή

$$\mathcal{A}_m^n = \frac{n!}{(n-m)!}. \tag{1α}$$

Ο υπολογισμός του παραγοντικού n! μπορεί, για πολύ μεγάλες τιμές, να υπολογίζετε από τον τύπο του Stirling

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\left(1+\frac{1}{12n}+\frac{1}{288n^2}+\ldots\right) \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}. \tag{2}$$

0. 1. 5 Υπολογίζουμε στη συνέχεια τις διατάξεις με επανάληψη των n στοιχείων ανά m. Και στην περίπτωση αυτή εργαζόμαστε όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, με μόνη διαφορά ότι σε κάθε μια από τις m φάσεις έχουμε n δυνατότητες. Ώστε το πλήθος των δυνατών διατάξεων με επανάληψη των n στοιχείων ανά m είναι

$$\mathfrak{A}_m^n = n^m\ . \tag{3}$$

Διατάξεις με επανάληψη έχουμε συνήθως στα προβλήματα όπου η τυχαία εκλογή αντικειμένων γίνεται με επανατοποθέτηση.

0. 1. 6 **Παράδειγμα**

Ζητούμε να βρούμε πόσους αριθμούς αυτοκινήτων μπορούμε να έχουμε, αν κάθε τετραψήφιος αριθμός έχει προ αυτού τρία γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου που υπάρχουν και στο λατινικό αλφάβητο .

Λύση

Είναι γνωστό ότι τα γράμματα αυτά είναι 16. Έχουμε συνεπώς 16 γράμματα ανά τρία με επανάληψη, δηλ. μπορεί να έχουμε συνολικά $16^3=4096$ διατάξεις . Αν δε λάβουμε υπόψη μας ότι κάθε διάταξη μπορεί να συνδυασθεί με 9000 αριθμούς, αντιλαμβανόμαστε ότι μπορούμε να έχουμε 36864000 πινακίδες αυτοκινήτων.

0. 1. 7 **Παράδειγμα**

Οι διαφορετικές στήλες που μπορούμε να συμπληρώσουμε σε ένα δελτίο ΠΡΟ-ΠΟ είναι όσες οι διατάξεις με επανάληψη των τριων στοιχείων (1, 2, X) ανά 13, δηλ. $3^{13}=1594323$.

0. 1. 8 **Παράδειγμα**

Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το 20!.

Εφαρμόζουμε τον τύπο του Stirling στην προσεγγιστική του μορφή

$$n! \approx \frac{n^n}{e^n}\sqrt{2\pi n}$$

για n=20.

Για τον υπολογισμό του κάνουμε χρήση των δεκαδικών λογαρίθμων. Υπολογίζουμε συγκεκριμένα τον log(20!). Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned}\log(20!) &\approx 20\log 20 - 20\log e + \frac{1}{2}\log 20\pi + \log\sqrt{2} \approx \\ &\approx 100\log 20 - 20\log e + 0{,}39908 \approx 18{,}38439\ .\end{aligned}$$

Από την τελευταία σχέση βρίσκουμε $20!\approx 2{,}423\cdot 10^{18}$.

Σημείωση

Οι συνηθισμένες ηλεκτρονικές υπολογιστικές μηχανές υπολογίζουν αμέσως μέχρι το 69!. Με τα διάφορα υπολογιστικά προγράμματα μπορούμε να πάμε σε μεγαλύτερους αριθμούς. Έτσι με το derive βρήκαμε

170!=Γ(170)=4269068009004705274939251888899566538068818636056736103849163411117977554942180092854323970142716152653818230139905012221568248567907501779605235748945594648470841341210762119980360352740151237881504878975040568419670360154453585262827477179746400268937258948624384000000000000000000000000000000000000000000

0. 2 Μεταθέσεις

0. 2. 1 Έστω Ε ένα σύνολο με n στοιχεία. Μια διάταξη των n στοιχείων του Ε ανά n λέγεται **μετάθεση**. Δηλ. μετάθεση είναι μια ακολουθία των n στοιχείων του Ε, ή απλούστερα μια διατεταγμένη n-ιάδα. Με τη γλώσσα των συνόλων μπορούμε να πούμε ότι μετάθεση είναι μια απεικόνιση “1-1” του Ε επί του Ε. Δυο μεταθέσεις που παίρνουμε από το ίδιο σύνολο έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία. Εκείνο στο οποίο διαφέρουν είναι η σειρά με την οποία είναι τοποθετημένα τα στοιχεία αυτά. Το πλήθος των δυνατών μεταθέσεων βρίσκουμε, εφαρμόζοντας τους γνωστούς τύπους των διατάξεων, ότι είναι

(4) $$P_n = n!$$

0. 2. 2 Ο τύπος (4) αφορά στις μεταθέσεις των στοιχείων ενός συνόλου χωρίς επανάληψη. Αν συμβεί και k από τα n στοιχεία να είναι ίσα μεταξύ τους, τότε μεταξύ των P_n μεταθέσων που δίνονται από τον τύπο (4) οι k!, που αντιστοιχούν στις k μεταθέσεις του αυτού στοιχείου, συμπεριφέρονται ουσιαστικά ως μια μεταθεση.

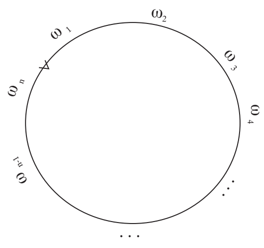
Συνεπώς οι διακεκριμένες μεταθέσεις στην περίπτωση αυτή είναι $\frac{n!}{k!}$. Γενικά, αν από τα n στοιχεία του Ε τα k_i (i=1, 2, . . . , p } συμπιπτουν μεταξύ τους, τότε οι δυνατές μεταθέσεις είναι

(5) $$\mathfrak{P}^n_{k_i} = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_p!}, \quad k_1 + k_2 + \ldots + k_p = n.$$

0. 2. 3 **Κυκλικές μεταθέσεις**

Έστω ότι τα n στοιχεία $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ τοποθετούνται κυκλικά. Σε μια κυκλική μετάθεση των στοιχείων, έστω στην $(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_n)$ αντιστοιχούν n μεταθέσεις

$$(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_n), (\omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_n, \omega_1), \ldots, (\omega_n, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_{n-1}).$$



Αν K_n είναι το πλήθος των κυκλικών μεταθέσεων των n στοιχείων, τότε από την $n \cdot K_n = n!$, παίρνουμε

$$\mathcal{K} = (n-1)!$$

0. 2. 4 **Παράδειγμα**

Ένας πλασιέ βιβλίων έχει 21 βιβλία, από τα οποία 3 έχουν τον ίδιο τίτλο, άλλα 5 τον ίδιο τίτλο και άλλα 2 που επίσης έχουν τον ίδιο τίτλο. Τα βιβλία αυτά μπορούν να τοποθετηθούν σε σειρά κατά

$$\frac{21!}{3!\cdot 5!\cdot 2!} \approx 3{,}5479861 \cdot 10^{16}$$

τρόπους.

0. 2. 5 **Παράδειγμα**

Σε μια έκθεση αυτοκινήτων ένας αντιπρόσωπος έχει να εκθέσει 12 αυτοκίνητα, τα οποία ανά 3 είναι ίδια. Τα αυτοκίνητα αυτά μπορεί να τοποθετηθούν σε σειρά το ένα δίπλα στο άλλο κατά $\frac{12!}{3!\cdot 3!\cdot 3!\cdot 3!} = 369600$ τρόπους.

0. 3 Συνδυασμοί

0. 3. 1 Έστω Ε ένα σύνολο με n στοιχεία. Καλούμε **συνδυασμό** των n στοιχείων ανά m κάθε υποσύνολο του Ε που έχει m στοιχεία. Δυο συνδυασμοί που έχουν τον ίδιο αριθμό στοιχείων μπορεί να διαφέρουν μόνο ως προς τα στοιχεία αυτά καθ' εαυτά και όχι λόγω της θέσεώς τους. Βλέπουμε δηλ. ότι στους συνδυασμούς ο όρος διάταξη δεν είναι καθοριστικός.

0. 3. 2 Θα υπολογίσουμε στη συνέχεια το πλήθος $\binom{n}{m}$ των συνδυασμών των n στοιχείων ανά m.

Έστω s={$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$} ένας τέτοιος συνδυασμός. Μεταθέτοντας τα στοιχεία του s παίρνουμε m! μεταθέσεις. Όλες αυτές οι μεταθέσεις συνιστούν ένα συνδυασμό, αλλά είναι m! διατάξεις των n στοιχείων ανά m.

Κατά συνέπεια παίρνουμε $\binom{n}{m} \cdot m! = A_m^n$, από την οποία προκύπτει

(6) $$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}.$$

0. 3. 3 Ο τρόπος με τον οποίο ορίσαμε τους συνδυασμούς των n στοιχείων ανά m, δηλ. ως υποσύνολα του Ε με m στοιχεία, δεν συνηγορεί στην ύπαρξη συνδυασμών με συμπίπτοντα στοιχεία. Αν όμως ως συνδυασμούς των n στοιχείων ανά m θεωρήσουμε ακολουθίες, χωρίς εσωτερική διάταξη, αποτελούμενες από m στοιχεία, τότε μπορούμε να δεχθούμε ότι μερικά από τα m στοιχεία ή και όλα συμπίπτουν μεταξύ τους. Το πλήθος των συνδυασμών των n στοιχείων ανά m με επανάληψη είναι

(7) $$\mathfrak{S}_m^n = \binom{n+m-1}{m} = \frac{(n+m-1)!}{m! \cdot (n-1)!}$$

0. 3. 4 **Παράδειγμα**

Σε ένα κουτί υπάρχουν 6 ασφάλειες, 3 από τις οποίες είναι καμένες. Κατά πόσους τρόπους μπορούμε να εκλέξουμε τυχαία 3 ασφάλειες.

Προφανώς μπορούμε κατά $\binom{6}{3} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$ τρόπους να "διαλέξουμε" τις 3 ασφάλειες. Στην πράξη εκείνο που μας ενδιαφέρει είναι να διαλέξουμε τις μη καμένες ασφάλειες. Αντιλαμβανόμαστε ότι μόνο κατά $\binom{3}{3} = \frac{3!}{3! \cdot 0!} = 1$ τρόπο μπορούμε να διαλέξουμε τις 3 μη καμένες ασφάλειες.

Έστω ότι ενδιαφερόμαστε μια τουλάχιστο από τις 3 ασφάλειες να μην είναι καμένη.

Εύκολα (εφαρμόζοντας τη βασική αρχή της απαρίθμησης) βρίσκουμε $\binom{3}{3} = 1$ τρόπο για να μην είναι καμένες και οι τρεις ασφάλειες.

$\binom{3}{2} \cdot \binom{3}{1} = \frac{3!}{2! \cdot 1!} \cdot \frac{3!}{2! \cdot 1!} = 9$ τρόπους για να μην είναι καμένες οι δυο ασφάλειες.

$\binom{3}{1} \cdot \binom{3}{2} = 9$ τρόπους για να μην είναι καμένη μια μόνο ασφάλεια.

Ώστε για να μην είναι καμένη μια τουλάχιστον ασφάλεια μπορούμε να διαλέξουμε τις 3 από τις 6 ασφάλειες κατά 1+9+9=19 τρόπους.

0. 3. 5 **Παράδειγμα**

Το ΤΕΙ/Λ αγόρασε 6 ΗΥ διαφορετικού τύπου. Ζητείται να βρεθεί πως θα κατανεμηθούν οι υπολογιστές, αν

α. σε κάθε εργαστήριο διατεθεί από ένας υπολογιστής,

β. σε ένα εργαστήριο διατεθούν 3 υπολογιστές, σε ένα δεύτερο 2 υπολογιστές και σε ένα τρίτο ένας υπολογιστής.

Λύση

α. Οι δυνατές περιπτώσεις κατανομής των 6 υπολογιστών σε 6 εργαστήρια, ένα σε κάθε εργαστήριο, είναι όσες οι μεταθέσεις των 6 πραγμάτων, δηλ. $P_6 = 6! = 720$.

β. Εφόσον το πρώτο εργαστήριο πρόκειται να πάρει 3 υπολογιστές, το δεύτερο 2 και το τρίτο 1, οι δυνατοί τρόποι διάθεσης είναι όσες οι μεταθέσεις με επανάληψη 6 αντικειμένων εκ των οποίων τα τρία “συμπίπτουν” μεταξύ τους και τα άλλα δύο επίσης συμπίπτουν μεταξύ τους.

0. 3. 6 **Παράδειγμα**

Στον ιππόδρομο τρέχουν 15 άλογα. Από τούς παίκτες του ιπποδρόμου κερδίζει εκείνος που έχει πετύχει τα τρία άλογα που έρχονται στις τρεις πρώτες θέσεις με τη σειρά τους (μεγάλο κέρδος tiercè), ή με διαφορετική σειρά (μικρότερο κέρδος). Ένας παίκτης κατά πόσους τρόπους μπορεί να διαλέξει την τριάδα στην οποία θα στοιχηματίσει;

Λύση

Επειδή τα τρία άλογα στα οποία στοιχηματίζει ο παίκτης πρέπει να διαταχθούν σε μια σειρά, αντιλαμβανόμαστε ότι η επιλογή της νικήτριας τριάδας (με την ακριβή σειρά των αλόγων) μπορεί να γίνει κατά $\mathcal{A}_3^{15} = \frac{15!}{12!} = 2730$ τρόπους.

0. 4 Εφαρμογές

0. 4. 1 Θα δείξουμε τους επόμενους τύπους

(8) $$\binom{n}{m}=\binom{n}{n-m}$$

(9) $$\binom{n}{m}=\binom{n-1}{m}+\binom{n-1}{m-1},$$

(10) $$\binom{n}{m}=\binom{n-1}{m-1}+\binom{n-2}{m-1}+\cdots+\binom{m-1}{m-1}, \quad m\le n,$$

(11) $$\binom{-n}{m}=(-1)^m\binom{n+m-1}{m},$$

(12) $$\binom{n+m}{m}=(-1)^m\binom{-n-1}{m}.$$

Η απόδειξη του τύπου (8) είναι άμεση. Δεν έχουμε παρά να αναπτύξουμε τα δυο μέλη της σύμφωνα με τον τύπο (6).

Δίνουμε την απόδειξη του τύπου (9) εφαρμόζοντας τον τύπο (6) και εκτελώντας τις πράξεις:

$$\binom{n-1}{m}+\binom{n-1}{m-1}=\frac{(n-1)!}{(n-m-1)!m!}+\frac{(n-1)!}{(n-1-m+1)!(m-1)!}$$
$$=\frac{(n-1)(n-2)\dots(n-m)}{m!}+\frac{(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{(m-1)!}$$
$$=\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m)}{m!}=\binom{n}{m}.$$

Ο τύπος (10) αποδεικνύεται αν εφαρμόσουμε τον τύπο (9) διαδοχικά.

Οι τύποι (11) και (12) αποδεικνύονται αν κάνουμε τις πράξεις.

0. 4. 2 **Διώνυμο του Νεύτωνα**

Θα βρούμε τον τύπο που δίνει το ανάπτυγμα του $(x+y)^n$, $n\in\mathbb{N}$.

Για να βρούμε το ανάπτυγμα πρέπει να πολλαπλασιάσουμε n φορές το διώνυμο x+y. Το αποτέλεσμα των πολλαπλασιασμών αυτών είναι ένα άθροισμα μονωνύμων της μορφής $x^{n-k}y^k$, $0\le k\le n$. Κάθε τέτοιος όρος εμφανίζεται τόσες φορές τόσες φορές όσοι είναι οι τρόποι να διαλέξουμε τους k παράγοντες x, δηλ. να διαλέξουμε k διώνυμα από τα n. Δηλ. υπάρχουν $\binom{n}{k}$ τρόποι. Συνεπώς υπάρχουν $\binom{n}{k}$ όροι της μορφής $x^{n-k}y^k$, οι οποίοι αθροιζόμενοι δίνουν $\binom{n}{k}\cdot x^{n-k}y^k$. Παίρνουμε έτσι τον τύπο

$$(10) \qquad (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{m} \cdot x^{n-k} y^k .$$

Λόγω της σχέσεως (6) διαπιστώνουμε ότι ο τύπος αυτός είναι συμμετρικός ως προς x και y.

0. 4. 3 **Τρίγωνο Pascal**

Θεωρούμε τα επόμενα αναπτύγματα

$$(x+y)^{n-1} = \underbrace{\binom{n-1}{0} x^{n-1} + \binom{n-1}{1} x^{n-2} y}_{} + \ldots \underbrace{\binom{n-1}{k-1} x^{k-1} y^{n-k} + \binom{n-1}{k} x^k y^{n-k-1}}_{} + \ldots$$

$$(x+y)^n = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \binom{n}{k} x^k y^{n-k} + \ldots$$

Από τις ισότητες αυτές διαπιστώνουμε ότι ο συντελεστής $\binom{n}{k}$ παίρνεται, σύμφωνα με τον τύπο (9) ως άθροισμα των συντελεστών $\binom{n-1}{k}$ και $\binom{n-1}{k-1}$. Χάρη στην παρατήρηση αυτή παίρνουμε αναδρομικά το περίφημο τρίγωνο Pascal.

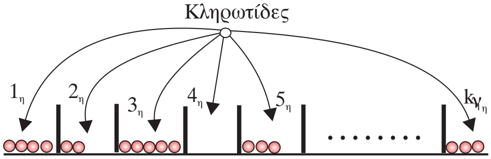
Δυνάμεις	*Συντελεστές*
$(x+y)^0$	1
$(x+y)^1$	1 1
$(x+y)^2$	1 2 1
$(x+y)^3$	1 $\boxed{3+3}$ 1
	$\Vert$
$(x+y)^4$	1 4 $\boxed{6}$ 4 1
$(x+y)^5$	1 5 10 5 1
…………	…………………

0. 4. 4 **Κατανομή n βόλων σε k κληρωτίδες**

΄Εστω ότι θέλουμε n βόλους να τους κατανείμουμε καθ’οιονδήποτε τρόπο σε k κληρωτίδες.

Για να γίνει αντιληπτό χρησιμοποιούμε το επόμενο διάγραμμα στο οποίο οι κληρωτίδες παριστάνονται με ευθύγραμμα τμήματα χωριζόμενα με κατακόρυφα τμήματα.

Το πρόβλημα συνίσταται στο να βρούμε κατά πόσους τρόπους τα k-1 ευθ. τμήματα μπορεί να τοποθετηθούν στις n+k-1 θέσεις. Βρίσκουμε δηλ. ότι αυτό είναι δυνατό



κατά $\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k-1}{n}$ τρόπους.

Εισαγωγή

Διατάξεις των n στοιχείων ανά m

α. χωρίς επανάληψη

$$\mathcal{A}_m^n = \frac{n!}{(n-m)!},$$

β. με επανάληψη

$$\mathfrak{A}_m^n = n^m.$$

Μεταθέσεις n στοιχείων

α. διαφορετικών

$$P_n = n!$$

β. επαναλαμβανομένων

$$\mathfrak{P}_{\substack{n \\ k_i}} = \frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_p!}, \quad k_1 + k_2 + \dots + k_p = n$$

Συνδυασμοί n στοιχείων ανά m

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!\cdot(n-m)!}$$