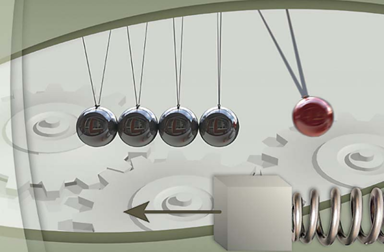
Αλέξανδρος Λαζαρίδης

ΑΣΚΗΣΕΙΣ & ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Γενικής Μηχανικής

Για φοιτητές Πολυτεχνικών, Θετικών και σχολών Τεχνολογικής Εκπαίδευσης

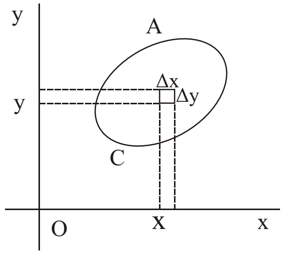


- *Σύντομη ανάπτυξη θεωρίας*
- *300 παραδείγματα και ασκήσεις με τις λύσεις τους*
- *Σύνθετα προβλήματα επανάληψης*

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

Κεφάλαιο 1ο

Βαρύκεντρα υλικών σωμάτων



Σχήμα 1

1. 1 Βαρύκεντρο μιας επιφανείας

Έστω Α μια υλική επιφάνεια επιφανειακής πυκνότητας δ που περιβάλλεται από μια καμπύλη C με εξίσωση φ(x,y)=0 (σχ.1). Οι ροπές επιφάνειας (μάζης) της Α ως προς τους άξονες Ox και Oy αντίστοιχα είναι

$$\mathcal{M}_x = \iint_A \delta y dxdy, \quad \mathcal{M}_y = \iint_A \delta x dxdy$$

Δεδομένου ότι η μάζα της επιφάνειας είναι

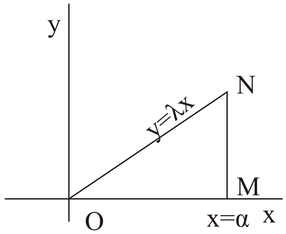
$$\mathcal{E} = \iint_A \delta dxdy$$

το βαρύκεντρο της Α έχει συντεταγμένες

$$x_G = \frac{\iint_A \delta x dxdy}{\iint_A \delta dxdy}, \quad y_G = \frac{\iint_A \delta y dxdy}{\iint_A \delta dxdy}$$

Παράδειγμα 1

Ζητούμε το βαρύκεντρο του τριγώνου OMN (σχ.2) επιφανειακής πυκνότητας $\delta=1$, που περιορίζεται από τον ημιάξονα Ox, την ευθεία ON:y=λx και την ευθεία MN:x=α.



Σχήμα 2

Το εμβαδό του τριγώνου αυτού προφανώς είναι $\mathcal{E} = \frac{1}{2}\lambda\alpha^2$.

Οι ροπές επιφανείας (μάζας) του τριγώνου OMN ως προς τους άξονες Ox και Oy είναι

$$\mathcal{M}_x = \iint_A y dxdy = \int_0^{\alpha} dx \int_0^{\lambda x} y dy = \frac{\lambda^2\alpha^3}{6}$$

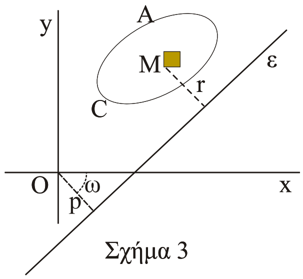
$$\mathcal{M}_y = \iint_A x dxdy = \int_0^{\alpha} x dx \int_0^{\lambda x} dy = \frac{\lambda\alpha^3}{3}$$

Στα επόμενα θα υποθέτουμε ότι η πυκνότητα (γραμμική, επιφανειακή κλπ) των σωμάτων είναι ίση με $\delta=1$

Κατά συνέπεια οι συντεταγμένες του βαρύκεντρου του τριγώνου OMN είναι

$$x_G = \frac{\lambda\alpha}{3}, \; y_G = \frac{2\alpha}{3}.$$

1. 2 Ροπή επιφανείας ως προς τυχαία ευθεία



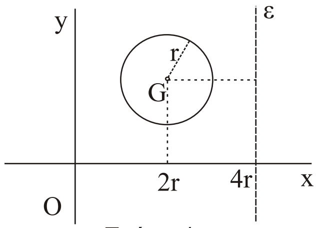
Σχήμα 3

Έστω Α μια επιφάνεια εμβαδού $\mathcal{E}$ και (ε) μια ευθεία (σχ.3) με εξίσωση

$$x \,\sigma\upsilon\nu\omega + y \,\eta\mu\omega - p = 0$$

Για το απλούστερο υποθέτουμε ότι η επιφανειακή πυκνότητα είναι ίση με 1. Στην αντίθετη περίπτωση δ 1, θα είχαμε

$$\mathcal{M} \qquad {}_{A} \delta r dxdy$$



Σχήμα 4

Αν Δm=ΔxΔy είναι ένα στοιχειώδες εμβαδό της επιφάνειας Α, η ροπή του ως προς την ευθεία (ε) είναι $r \;\; m \quad r \;\; x \;\; y$, οπότε η ροπή ολόκληρης της επιφάνειας Α ως προς την (ε) είναι

$$\mathcal{M} \qquad {}_{A} rdxdy$$

Η απόσταση του τυχαίου σημείου Μ(x,y) από την ευθεία (ε) είναι ως γνωστό

$$r \quad x\sigma\upsilon\nu\omega \quad y\eta\mu\omega \quad p$$

οπότε η προηγούμενη σχέση γίνεται

$$\mathcal{M} \quad \mathcal{M}_x \sigma\upsilon\nu\omega \;\; \mathcal{M}_y \eta\mu\omega \quad p\mathcal{E}=$$

$$(x_G \eta\mu\omega \quad y_G \eta\mu\omega \quad p)\mathcal{E} \quad r_G \mathcal{E}.$$

Δηλ. *η ροπή μιας επιφάνειας Α, εμβαδού $\mathcal{E}$, ως προς μια ευθεία (ε), είναι ίση με το γινόμενο του εμβαδού της $\mathcal{E}$ επί την απόσταση* $\boldsymbol{r_G}$ *του βαρύκεντρού της από την ευθεία (ε).*

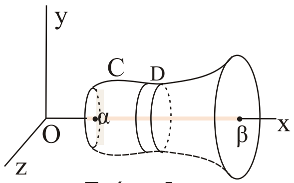
Παράδειγμα 2

Έστω ο κύκλος G(2r,2r) ακτίνος r και η ευθεία (ε): $x=4r$ (σχ.4).Το εμβαδό του κύκλου είναι πr^2 και η απόσταση του κέντρου του από την ευθεία είναι $2r$. Κατά συνέπεια η ροπή του κύκλου ως προς την ευθεία αυτή είναι

$$\mathcal{M} \quad 2r \quad r^2 \;\; 2 \quad r^3$$

1. 3 Ροπή στερεού ως προς ένα επίπεδο

Α. Στερεό εκ περιστροφής



Σχήμα 5

Έστω C μια καμπύλη που ορίζεται από την $y \quad \varphi(x)$. Περιστρέφοντας την C περί τον άξονα Ox παίρνουμε το στερεό εκ περιστροφής περί τον άξονα αυτό. Η ροπή του δίσκου D πάχους Δx ως προς το επίπεδο yOz είναι $x\pi y^2 \quad x$, οπότε η ροπή ολόκληρου του στερεού ως προς το επίπεδο αυτό είναι

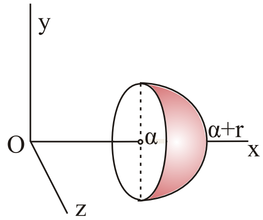
$$\mathcal{M}_{yOz} \quad \pi \qquad xy^2 dx$$

Όπως γνωρίζουμε, ο όγκος του στερεού αυτού είναι

$$\mathcal{V} \quad \pi \qquad y^2 dx$$

Κατά συνέπεια η τετμημένη του βαρύκεντρου του στερεού αυτού είναι

$$x_G \quad \frac{xy^2dx}{y^2dx}, \text{ ή } x_G \quad \frac{\delta xy^2dx}{\delta y^2dx}, \text{ αν } \delta \quad 1$$



Σχήμα 6

Δηλ. το βαρύκεντρο του εκ περιστροφής περί τον Οx στερεού είναι το σημείο G (x_G, 0, 0).

Παράδειγμα 3

Έστω ότι ζητούμε το βαρύκεντρο του ημισφαιρίου που προκύπτει εκ περιστροφής περί τον άξονα Οx του τεταρτοκυκλίου

$$(x \quad \alpha)^2 \quad y^2 \quad r^2, x \quad \alpha$$

(σχ. 6).

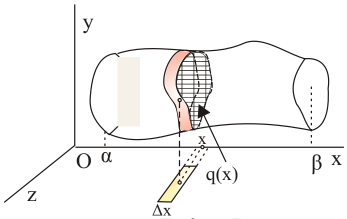
Η ροπή του ημισφαίριου ως προς το επίπεδο Oyz είναι

$$\mathscr{M}_{Oyz} \quad \pi \quad {}^{r} xy^2dx \quad \pi \quad {}^{r} x(r^2 \quad (x \quad \alpha)^2)dx \quad \frac{\pi r^3}{12}(8\alpha \quad 3r)$$

Δεδομένου ότι ο όγκος του ημισφαιρίου είναι $\frac{2}{3} \quad r^3$ διαπιστώνουμε ότι η τετμημένη του βαρύκεντρου είναι

$$x_G \quad \frac{8\alpha \quad 3r}{8} \quad \alpha \quad \frac{3}{8}r$$

Βλέπουμε δηλ. ότι το βαρύκεντρο του ημισφαιρίου βρίσκεται στον άξονα περιστροφής και σε απόσταση από τη βάση ίση με τα 3/8 της ακτίνας του.



Σχήμα 7

Β Ειδική περίπτωση

Έστω ένα στερεό τέτοιο, ώστε το εμβαδό επίπεδης τομής του παράλληλης προς το επίπεδο Oyz είναι συνάρτηση q(x) της τετμημένης x της τομής αυτής (σχ. 7), τότε

η ροπή της μάζης ως προς το επίπεδο Oyz είναι

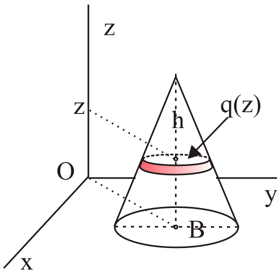
$$\mathscr{M}_{Oyz} \quad xq(x)dx$$

ο όγκος του είναι

$$\mathscr{V} \quad q(x)dx$$

Η εύρεση της τετμημένης του βαρυκέντρου είναι άμεση. Όταν βρεθεί η x_G η αναζήτηση των άλλων συντεταγμένων πραγματοποιείται με τη διαδικασία εύρεσης του βαρύκεντρου μιας επίπεδης επιφάνειας, συγκεκριμένα της επίπεδης τομής x=x_G.

Παράδειγμα 4



Σχήμα 8

Ζητούμε το βαρύκεντρο ενός κώνου βάσης B και ύψους h (σχ.8).

Θεωρούμε ότι η βάση του κώνου είναι στο επίπεδο Oxy.

Η παράλληλη προς τη βάση τομή με τεταμημένη z έχει εμβαδό *q(z)* τέτοιο, ώστε

$$\frac{q(z)}{B} \quad \frac{(h \quad z)^2}{h^2}$$

$$q(z) \quad \frac{B}{h^2}(h \quad z)^2$$

Κατά συνέπεια η ροπή μάζας ως προς το Oxy είναι

$$\mathscr{M}_{Oxy} \quad {}_0^h \frac{B}{h^2} z(h \quad z)^2 dz \quad \frac{1}{12} Bh^2$$

ενώ ο όγκος (μάζα) του είναι

$$\mathscr{V} \quad {}_0^h \frac{B}{h^2}(h \quad z)^2 dz \quad \frac{1}{3} Bh$$

Με τα στοιχεία αυτά βρίσκουμε ότι η κατηγμένη του κέντρου βάρους του ομογενούς κώνου είναι $z_G \quad \frac{1}{4} h$.

Γ Περίπτωση τυχαίου στερεού

Έστω A ένα στερεό όγκου V. Οι ροπές μάζης (όγκου) ως προς τα επίπεδα Oxy, Oyz, Ozx είναι

$$\mathscr{M}_{Oxy} \quad {}_A zdxdydz$$

$$\mathscr{M}_{Oyz} \quad {}_A xdxdydz$$

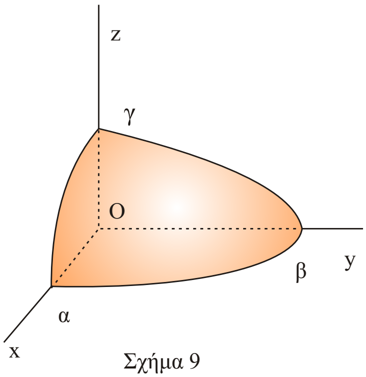
$$\mathscr{M}_{Ozx} \quad {}_A ydxdydz$$

ενώ ο όγκος του είναι

$$\mathscr{V} \quad {}_A dxdydz$$

Με τα στοιχεία αυτά είναι δυνατό να βρούμε τις συντεταγμένες του βαρύκεντρου του στερεού.

Παράδειγμα 5



Σχήμα 9

Ζητούμε τις συντεταγμένες του βαρύκεντρου του τμήματος του ελλειψοειδούς (σχ. 9), που ορίζεται από τις

$$\frac{x^2}{\alpha^2} \quad \frac{y^2}{\beta^2} \quad \frac{z^2}{\gamma^2} \quad 1,\ x, y, z \quad 0$$

Ο όγκος του τμήματος αυτού είναι

$$\mathcal{V} \quad {}_{A} dxdydz \quad {}_{0} dx \; {}_{0}^{\sqrt{1 \;\; \frac{x^2}{\;\;2}}} dy \; {}_{0}^{\sqrt{1 \;\; \frac{x^2}{\;\;2} \;\; \frac{y^2}{\;\;2}}} dz$$

$$\frac{\pi\alpha\beta\gamma}{6}$$

Η ροπή της μάζας (όγκου) Α ως προς το επίπεδο Oyz είναι

$$\mathcal{M}_{Oyz} \quad {}_{A} xdxdydz \quad {}_{0} xdx \; {}_{0}^{\sqrt{1 \;\; \frac{x^2}{\;\;2}}} dy \; {}_{0}^{\sqrt{1 \;\; \frac{x^2}{\;\;2} \;\; \frac{y^2}{\;\;2}}} dz$$

$$\frac{\pi\alpha^{2}\beta\gamma}{16}$$

Κατά συνέπεια η τετμημένη του βαρύκεντρου του τμήματος αυτού είναι

$$x_G \quad \frac{3}{8}\alpha$$

Αν εργασθούμε κατά τον ίδιο τρόπο (ή εφαρμόζοντας τη διαδικασία της συμμετρίας) βρίσκουμε

$$y_G \quad \frac{3}{8}\beta, \; z_G \quad \frac{3}{8}\gamma$$

Παρατήρηση 1

Σε όλες σχεδόν τις περιπτώσεις θεωρήσαμε ότι η πυκνότητα του υλικού, του οποίου ζητήθηκε το βαρύκεντρο, ήταν ίση με 1. Στην περίπτωση που είναι σταθερή και μάλιστα ρ, δηλ. έχουμε να κάνουμε με ένα ομογενές υλικό, τότε δεν έχουμε παρά να πολλαπλασιάσουμε τους σχετικούς τύπους με ρ. Στην περίπτωση αυτή το ρ βγαίνει εκτός του συμβόλου ολοκλήρωσης. Στην περίπτωση που η πυκνότηα ρ είναι συνάρτηση της θέσης του κάθε σημείου του υλικού σώματος, δηλ. ρ=ρ(x, y, z), τότε προφανώς το ρ δεν μπορεί να βγεί εκτός του συμβόλου ολοκλήρωσης. Για το λόγο αυτό πολλοί συγγραφείς αντί να χρησιμοποιούν στους προηγούμενους τύπους τις εκφράσεις *dxdydz* χρησιμοποιούν την έκφραση *dm* και εννοούν $dm=\rho(x, y, z)dxdydz$.

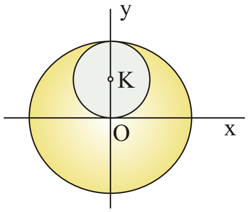
Παρατήρηση 2

Αν το χωρίο Α (επίπεδο ή στερεό) χωρίζεται ή αποτελείται από περισσότερα χωρία A_i , i=1, 2, . . ., n, το βαρύκεντρο του Α παίρνεται ως γραμμικός συνδυασμός των βαρύκεντρων των A_i, δηλ

$$x_G \quad \frac{\displaystyle\sum_{i\;1}^{n} x_{iG} \quad A_i}{\displaystyle\sum_{i\;1}^{n} A_i}, \; y_G \quad \frac{\displaystyle\sum_{i\;1}^{n} y_{iG} \quad A_i}{\displaystyle\sum_{i\;1}^{n} A_i}, \; z_G \quad \frac{\displaystyle\sum_{i\;1}^{n} z_{iG} \quad A_i}{\displaystyle\sum_{i\;1}^{n} A_i}$$

Παράδειγμα 6

Ζητούμε το βαρύκεντρο της επιφάνειας του σχήματος που προκύπτει αν, από δίσκο ακτίνας r, αφαιρεθεί δίσκος διαμέτρου r, που εφάπτεται στον αρχικό δίσκο (σχ.10).



Σχήμα 10

Προφανώς λόγω συμμετρίας το βαρύκεντρο του συστήματος αυτού έχει τετμημένη $x_G = 0$.

Η επιφάνεια είναι "άθροισμα" ενός δίσκου $A_1 = \pi r^2$ και του δίσκου $A_2 \quad \frac{r^2}{4}$ εις τρόπον, ώστε

$$y_G \quad \frac{r^2 \; 0 \quad \frac{r^2}{4} \; \frac{r}{2}}{r^2 \quad \frac{r^2}{4}} \quad \frac{r}{6}$$

Παράδειγμα 7

Βαρύκεντρο του συστήματος Ηλίου-Γης.

Είναι γνωστό ότι η μάζα του Ήλιου είναι $M_{\odot}=1{,}99 x 10^{30}$kg, η μάζα της Γης M $=5{,}97 x 10^{24}$kg και η απόσταση του κέντρου του Ηλίου από το κέντρο της Γης 1UA$=1{,}496 x 10^{8}$km. Η ακτίνα της ηλιακής σφαίρας είναι $R_{\odot}=6{,}96 x 10^{8}$m και η ακτίνα της Γης νοούμενης ως σφαιρικής R $=6{,}38 x 10^{6}$m.

Το βαρύκεντρο του συστήματος Ήλιος-Γη, αναφερόμενο σε ένα σύστημα αξόνων με κέντρο το κέντρο της Γης και άξονα Ox την ευθεία που συνδέει το κέντρο της Γης με αυτό ης ηλιακής σφαίρας, είναι

$$x_G \quad \frac{1{,}9910^{30}\; 1{,}49610^{8} \quad 5{,}9710^{24}\; 0}{1{,}9910^{30} \quad 5{,}9710^{24}} \quad 149599551 km$$

Βλέπουμε δηλ. ότι το κέντρο βαρύτητας του συστήματος Ήλιος-Γη βρίσκεται μέσα στον ηλιακό δίσκο και μάλιστα πολύ κοντά στο κέντρο του Ηλίου.

1. 4 Κέντρο βάρους ενός τόξου

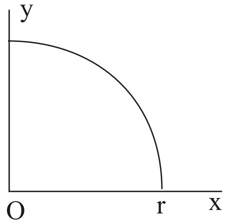
Έστω ένα τόξο C μιας επίπεδης καμπύλης που ορίζεται από τη συνάρτηση $y=f(x)$ για την οποία δεχόμαστε ότι είναι παραγωγίσιμη. Αν s_1, s_2 είναι τα άκρα του τόξου C, τότε οι συντεταγμένες του βαρύκεντρου του τόξου αυτού είναι

$$x_G \quad \frac{\int_{s_1}^{s_2} x\sqrt{1 \quad y'^2}\,dx}{\int_{s_1}^{s_2} \sqrt{1 \quad y'^2}\,dx}, \quad y_G \quad \frac{\int_{s_1}^{s_2} y\sqrt{1 \quad (\frac{dx}{dy})^2}\,dy}{\int_{s_1}^{s_2} \sqrt{1 \quad y'^2}\,dx}$$

Παράδειγμα 8

Ζητούμε το βαρύκεντρο ενός τεταρτοκυκλίου ακτίνας r (σχ. 11).

Έστω $x^2 \quad y^2 \quad r^2$, $x, y \quad 0$ η εξίσωση του τόξου αυτού. Το μήκος του τόξου αυτού είναι $\frac{r}{2}$.



Σχήμα 11

Η ροπή του μήκους (μάζης) είναι

$$\mathcal{M}_y \quad {}_0^r x\sqrt{1 \quad \frac{x^2}{r^2 \quad x^2}}dx \quad r \; {}_0^r \frac{x}{\sqrt{r^2 \quad x^2}}dx \quad r^2$$

Επομένως η τεταγμένη του βαρύκεντρου είναι

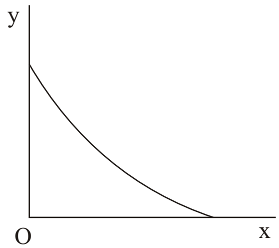
$$y_G \quad \frac{r^2}{\frac{r}{2}} \quad \frac{2r}{\ }$$

Προφανώς και η τετμημένη y_G του βαρύκεντρου του τόξου αυτού είναι $x_G \quad \frac{2r}{\ }$

Παράδειγμα 9

Έστω (σχ.12) το τόξο της υποκυκλοειδούς

$$x^{\frac{2}{3}} \quad y^{\frac{2}{3}} \quad {}^{\frac{2}{3}}, x, y \quad 0$$



Σχήμα 12

Παραγωγίζοντας την $x^{\frac{2}{3}} \quad y^{\frac{2}{3}} \quad {}^{\frac{2}{3}}$ ως προς x παίρνουμε

$$\frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}} \quad \frac{2}{3}y^{\frac{1}{3}} \quad y \quad 0 \quad y \quad \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$$

οπότε $\sqrt{1 \quad y'^2} \quad \sqrt{1 \quad \frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}} \quad x^{\frac{1}{3}}$ και κατά συνέπεια το μήκος του τόξου είναι

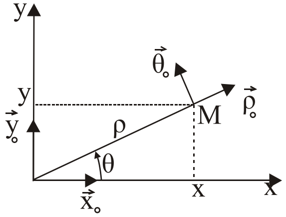
$$s \quad {}_0 \, x^{\frac{1}{3}}dx \quad \frac{3}{2}$$

Η ροπή μάζας (μήκους) ως προς τον Oy είναι

$${}_0 \, x\sqrt{1 \quad y'^2}dx \quad {}_0 \, x\,x^{\frac{1}{3}}dx \quad \frac{3}{5} \quad {}^2$$

Λόγω συμμετρίας βρίσκουμε ότι οι συντεταγμένες του βαρύκεντρου του τόξου αυτού είναι ίσες και μάλιστα

$$x_G \quad y_G \quad \frac{2}{5}$$



Σχήμα 13

Χρήση πολικών συντεταγμένων

Αν, αντί για το σύστημα Oxy των καρτεσιανών συντεταγμένων, χρησιμοποιήσουμε το σύστημα ($\vec{\rho}_o, \vec{\theta}_o$) των πολικών συντεταγμένων (σχ. 13), οπότε

$$x=\rho\sigma\upsilon\nu\theta,\ y=\rho\eta\mu\theta,$$

τότε

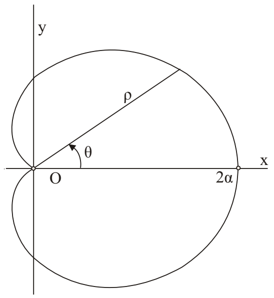
$$dx = -\rho\eta\mu\theta d\theta+\sigma\upsilon\nu\theta d\rho$$
$$dy = \rho\sigma\upsilon\nu\theta d\theta+\eta\mu\theta d\rho$$

και κατά συνέπεια το μεν μήκος είναι

$$s=\int_{s_1}^{s_2}\sqrt{\rho^2\left(\frac{d\theta}{d\rho}\right)^2+1}\,d\rho,\ \text{ή}\ s=\int_{s_1}^{s_2}\sqrt{\rho^2+\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

η δε ροπή του μήκους ως προς τον άξονα Oy είναι

$$\mathscr{M}_y=\int_{s_1}^{s_2}\rho\sigma\upsilon\nu\theta\sqrt{\rho^2+\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$



Σχήμα 14

Παράδειγμα 10

Ζητούμε το βαρύκεντρο της καρδιοειδούς

$$\rho=\alpha(\sigma\upsilon\nu\theta+1)$$

(σχ.14), όπου α είναι ένα σταθερό μήκος.

Λόγω συμμετρίας, το κέντρο της καμπύλης βρίσκεται στον άξονα Ox. Θα βρούμε την τετμημένη του x_G.

Έχουμε $\frac{d\rho}{d\theta}=-\alpha\eta\mu\theta$.

Το μήκος της καρδιοειδούς είναι

$$s=2\int_0^{\pi}\sqrt{\alpha^2(1+\sigma\upsilon\nu\theta)^2+\alpha^2\eta\mu^2\theta}\,d\theta=8\alpha$$

Η ροπή της μάζας (μήκους) της καρδιοειδούς ως προς τον άξονα Oy είναι

$$M_y=2\alpha\int_0^{\pi}\alpha(1+\sigma\upsilon\nu\theta)\sigma\upsilon\nu\theta\sqrt{2(1+\sigma\upsilon\nu\theta)}\,d\theta=\frac{32\alpha^2}{5}$$

Κατά συνέπεια

$$x_G=\frac{32\alpha^2}{5}\Big/8\alpha=\frac{4}{5}\alpha.$$

1. 5 Βαρύκεντρο συστήματος σημείων

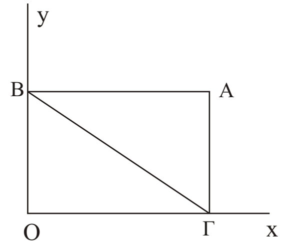
Θεωρούμε τα σημεία M_i (x_i,y_i,z_i) με μάζες m_i. Το βαρύκεντρό τους έχει συντεταγμένες

$$x_G \quad \frac{m_i x_i}{m_i}, \quad y_G \quad \frac{m_i y_i}{m_i}, \quad z_G \quad \frac{m_i z_i}{m_i}$$

ή ακόμα το διάνυσμα θέσεως του βαρύκεντρου είναι

$$\vec{r}_G \quad \frac{m_i \vec{r}_i}{m_i}$$

όπου $\vec{r}_i$ είναι τα διανύσματα θέσεως των υλικών σημείων M_i.



Σχήμα 15

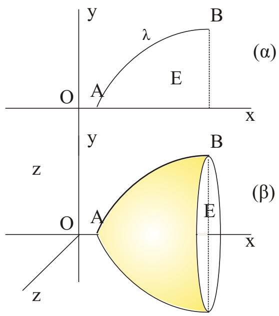
Παράδειγμα 11

Ζητούμε το βαρύκεντρο των τριών υλικών σημείων Α, Β και Γ με ίσες μάζες m αν γνωρίζουμε ότι τα σημεία αυτά είναι κορυφές ενός ορθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ (σχ.15) με κάθετες πλευρές παράλληλες προς τους άξονες συντεταγμένων.

Εφαρμόζοντας τον τελευταίο τύπο βρίσκουμε

$$\vec{r}_G \quad \frac{\vec{r}_i m}{m} \quad \frac{1}{3} \quad \vec{r}_i \quad \frac{1}{3}(OA \quad OB \quad O\Gamma) = \frac{2}{3} OA$$

Διαπιστώνουμε, όπως φαίνεται, ότι το $\vec{r}_G$ είναι το διάνυσμα θέσεως του σημείου τομής των διαμέσων.



Σχήμα 16

1. 6 Θεωρήματα Guldin

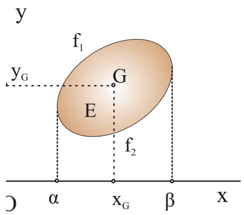
Πρώτο θεώρημα

Έστω ΑΒ ένα τόξο καμπύλης που ορίζεται από την y=f(x) (σχ.16α). Περιστρέφουμε το τόξο αυτό περί τον Ox κατά γωνία 2π και παίρνουμε ένα στερεό εκ περιστροφής (σχ.16β). Αν S είναι το εμβαδό της επιφάνειας εκ περιστροφής, λ το μήκος του τόξου που την παράγει και y_G η τεταγμένη του βαρύκεντρου του τόξου ΑΒ, τότε

$$S = 2\pi\lambda y_G$$

Κατά συνέπεια το βαρύκεντρο του επίπεδου χωρίου Ε (σχ.16α) έχει συντεταγμένες

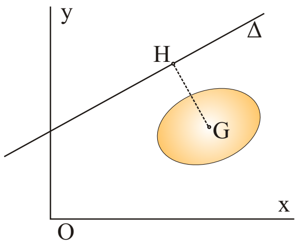
$$\bar{x} \quad \frac{1}{E} \,{}_{\alpha}^{\beta}\, xydx, \quad \bar{y} \quad \frac{1}{E} \,{}_{\alpha}^{\beta}\, y^2 dx$$



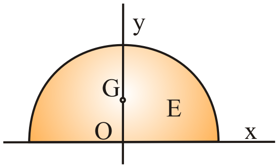
Σχήμα 17

Μια άλλη συνέπεια είναι και η δυνατότητα εύρεσης του βαρύκεντρου μιας επίπεδης επιφάνειας (σχ.17), που περιβάλλεται από τις καμπύλες $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$. Συκεκριμένα το βαρύκεντρο της επιφάνειας αυτής εμβαδού Ε έχει συντεταγμένες

$$x_G \quad \frac{1}{E} \,{}_{\alpha}^{\beta}\, x\left|f_1 \quad f_2\right|dx, \quad y_G \quad \frac{1}{2E} \,{}_{\alpha}^{\beta}\left|f_1^2 \quad f_2^2\right|dx$$



Σχήμα 18



Σχήμα 19

Δεύτερο θεώρημα

Έστω ότι έχουμε μια επιφάνεια εμβαδού Ε της οποίας το βαρύκεντρο είναι $G(x_G, y_G)$. Περιστρέφουμε την Ε περί ένα άξονα Δ που δεν τέμνει την Ε (σχ. 18) και έστω V ο όγκος του παραγόμενου εκ περιστροφής στερεού. Τότε $V \quad 2 \quad E\,HG$

Αν δεχθούμε ότι ο Δ ταυτίζεται με τον Ox, τότε

$$y_G \qquad \frac{V}{2 \; E}$$

Παράδειγμα 12

Έστω ότι ζητούμε το βαρύκεντρο του μισού δίσκου

$$C\!: \; x^2 \quad y^2 \quad r^2, \; y \quad 0$$

(σχ.19).

Θεωρούμε τη σφαίρα που παράγεται εκ περιστροφής περί τον άξονα Ox.

Ο όγκος της σφαίρας είναι $V \quad \frac{4}{3}\pi r^3$.

Το εμβαδό του μισού δίσκου είναι $E \quad \frac{\pi r^2}{2}$.

Η τεταγμένη του βαρύκεντρου του μισού δίσκου C είναι

$$y_G \qquad \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{2\pi \; \frac{1}{2} \; \pi r^2} \qquad \frac{4}{3} \; \frac{r}{\pi}$$

Παράδειγμα 13

Ζητούμε το βαρύκεντρο του ημικυκλίου $x^2 \quad y^2 \quad r^2, \; y \quad 0$.

Η επιφάνεια της σφαίρας που παράγεται εκ περιστροφής περί τον άξονα Ox του ημικυκλίου είναι $4\pi r^2$, ενώ το μήκος του ημικυκλίου είναι πr.

Κατά συνέπεια το βαρύκεντρο του ημικυκλίου έχει τεταγμένη

$$4\pi r^2 = 2\pi^2 r y_G \qquad y_G \quad -r$$

ενώ η τετμημένη είναι προφανώς $x_G=0$.

Ασκήσεις 1ου Κεφαλαίου

1. *Να βρεθεί το βαρύκεντρο του πρώτου τεταρτημορίου της έλλειψης*

$$\frac{x^2}{\ \ ^2} \quad \frac{y^2}{\ \ ^2} \quad 1, x, y \quad 0$$

Υπόδειξη

Ουσιαστικά πρόκειται για μια επιφάνεια "ομογενή" με πυκνότητα ð=1. Υπολογίζουμε τη ροπή μάζης (εμβαδού) ως προς τον άξονα Ox:

$$\mathscr{M}_x \quad {}_A\, ydm \quad {}_0\, dx \quad {}_0^{\ -\sqrt{\ ^2\ x^2}}\, ydy$$

$$\frac{\ ^2}{2\ \ ^2} \quad {}_0\, (\ ^2 \quad x^2)dx \quad \frac{\ ^2}{3}$$

Το εμβαδόν (μάζα) του τεταρτημορίου της έλλειψης είναι

$$A \quad \frac{1}{4}$$

Κατά συνέπεια η τεταγμένη του βαρύκεντρου του χωρίου A είναι

$$y_G \quad \frac{\ ^2}{3} : \frac{}{4} \quad \frac{4}{3}$$

Λόγω συμμετρίας η τετμημένη του βαρύκεντρου είναι

$$y_G \quad \frac{4}{3}$$

2. *Να βρεθεί το βαρύκεντρο του επιπέδου χωρίου (ð=1) που περιορίζεται από τις καμπύλες*

$$x \quad a,\ y^2 \quad 2px$$

Υπόδειξη

Η ροπή της μάζας (επιφάνειας) ως προς τον άξονα Oy είναι

$$\mathscr{M}_y^{\ ð\ 1} \quad {}_A\, xdxdy \quad {}_0\, xdx \quad {}_{\sqrt{2px}}^{\sqrt{2px}}\, dy$$

$$2\sqrt{2p} \quad {}_0\, \sqrt{x^3}dx \quad \frac{4}{5} \quad {}^2\sqrt{2p} \quad \frac{4}{5} \quad {}^2 y_x$$

Η μάζα (εμβαδόν) της επιφάνειας είναι

$$\mathscr{A}_y^{\ ð\ 1} \quad {}_A\, dxdy \quad {}_0\, dx \quad {}_{\sqrt{2px}}^{\sqrt{2px}}\, dy \quad \frac{4}{3} \quad y_x$$

Κατά συνέπεια η τετμημένη του βαρύκεντρου είναι

$$x_G \quad \frac{4}{5} \quad {}^2 y_x : \frac{4}{3} \quad y_x \quad \frac{3}{5}$$

Σημειώνεται ότι η τεταγμένη του βαρύκεντρου είναι 0, δηλ. το βαρύκεντρο βρίσκεται στον άξονα Ox.

3. *Να βρεθεί το βαρύκεντρο ενός κρίκου, δυο κρίκων της καμπύλης*

Βαρύκεντρο επιπέδου επιφάνειας

Χρήση των επόμενων τύπων

$$x_G \quad \frac{{}_A\, xdm}{{}_A\, dm},\ y_G \quad \frac{{}_A\, ydm}{{}_A\, dm}$$

με

$$dm \quad ðdxdy$$

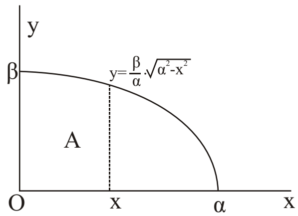
σε καρτεσιανές συντεταγμένες και

$$dm \quad ð\ d\ \ d$$

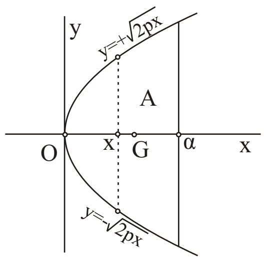
σε πολικές συντεταγμένες, όπου

x ρσυνθ, y=ρημθ

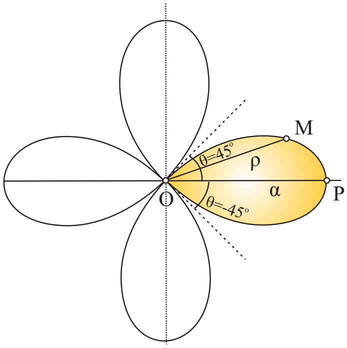
και ð είναι η επιφανειακή πυκνότητα



Άσκηση 1



Άσκηση 2



Άσκηση 3

$$\rho \quad \alpha\sigma\upsilon\nu 2\theta$$

Υπόδειξη

Το εμβαδόν του ενός κρίκου (με άξονα τον θετικό ημιάξονα Ox, δηλ. τον σκιασμένο κρίκο) είναι

$$\mathscr{A} \qquad {}_{A}\rho d\rho d\theta \qquad {}_{-\pi/4}^{\pi/4} d\theta \quad {}_{0}^{\alpha\sigma\upsilon\nu 2\theta} \rho d\rho$$

$$\frac{a^2}{2} \; {}_{-\pi/4}^{\pi/4} \sigma\upsilon\nu^2 2\theta d\theta \qquad \frac{\pi\alpha^2}{8}$$

Η ροπή της μάζας (εμβαδού) ως προς τον άξονα Oy είναι

$$\mathscr{M}_y \qquad {}_{A} y\rho d\rho d\theta \quad {}^{y \quad \rho\eta\mu\theta} \qquad {}_{-\pi/4}^{\pi/4} \sigma\upsilon\nu^2 \theta \quad {}_{0}^{\alpha\sigma\upsilon\nu 2\theta} \rho^2 d\rho$$

$$\frac{1}{3} a^3 \; {}_{-\pi/4}^{\pi/4} \sigma\upsilon\nu\theta\sigma\upsilon\nu^3 2\theta d\theta \qquad \frac{16\alpha^3\sqrt{2}}{105}$$

Κατά συνέπεια η τετμημένη του βαρύκεντρου είναι

$$x_G \qquad \frac{128\alpha\sqrt{2}}{105\pi}$$

Η τεταγμένη του βαρύκεντρου του κρίκου αυτού είναι 0.

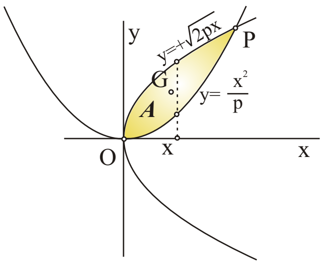
Αν ζητούμε το βαρύκεντρο των δύο κατά κορυφήν κρίκων, το βαρύκεντρό τους ταυτίζεται με την αρχή των αξόνων.

Αν ζητούμε το βαρύκεντρο των δύο διαδοχικών κρίκων, το βαρύκεντρό τους βρίσκεται στη διχοτόμο της ορθής γωνίας των αξόνων και όπως εύκολα βρίσκουμε είναι το σημείο

$$G \quad \frac{128\alpha\ 2}{105\pi}, \frac{128\alpha\ 2}{105\pi} \quad ,\text{ ή } G \qquad \frac{128\alpha\ 2}{105\pi}, \quad \frac{128\alpha\ 2}{105\pi}$$

4. *Να βρεθεί το βαρύκεντρο του χωρίου που περιλαμβάνεται μεταξύ των παραβολών*

$$y^2 \quad px, x^2 \quad py$$



Άσκηση 4

Υπόδειξη

Πρόκειται για το σκιασμένο χωρίο. Το σημείο P έχει συντεταγμένες (p, p).

Το εμβαδόν (μάζα) του χωρίου είναι

$$\mathscr{A} \qquad {}_{A} dxdy \qquad {}_{0}^{p} dx \; {}_{x^2/p}^{\sqrt{px}} dy \qquad {}_{0}^{p} (\sqrt{px} \quad \frac{x^2}{p})dx \qquad \frac{p^2}{3}$$

Η ροπή της μάζας (εμβαδού) ως προς τον άξονα Oy είναι

$$\mathscr{M}_y \qquad {}_{A} xdxdy \qquad {}_{0}^{p} xdx \; {}_{x^2/p}^{\sqrt{px}} dy \quad \frac{3}{20} p^3$$

Κατά συνέπεια η τετμημένη του βαρύκεντρου του χωρίου αυτού είναι

$$x_G \quad \frac{3}{20} p^3 : \frac{p^2}{3} \qquad p$$

Λόγω συμμετρίας την τιμή αυτή έχει και η τεταγμένη του βαρύκεντρου του χωρίου αυτού.

5. *Να βρεθεί το βαρύκεντρο ενός ημισφαιρίου.*

Υπόδειξη

Έστω ότι περιστρέφουμε κατά γωνία 2π το τεταρτημόριο

$$x^2+y^2=R^2,\ x,y\geq 0$$

Η ροπή της μάζης (όγκου) είναι

$$\mathcal{M}_{yz}=\int_{x_1}^{x_2} x\,dm=\pi\int_0^R xy^2\,dx=\pi\int_0^R x(R^2-x^2)\,dx=\frac{\pi R^4}{4}$$

Ο όγκος του είναι $V=\dfrac{2\pi R^3}{3}$ εις τρόπον, ώστε το βαρύκεντρό του έχει τετμημένη

$$x_G=\frac{\pi R^4}{4}:\frac{2\pi R^3}{3}=\frac{3R}{8}$$

Αντιλαμβανόμαστε ότι $y_G=z_G=0$.

Στερεό εκ περιστροφής περί τον Ox

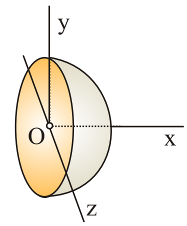
Η ροπή μάζης ως προς το επίπεδο Oyz είναι

$$\mathcal{M}_{yz}=\int_{x_1}^{x_2} x\,dm=\pi\int_{x_1}^{x_2}\delta x y^2\,dx$$

ενώ η μάζα του

$$m=\int_{x_1}^{x_2} dm=\pi\int_{x_1}^{x_2}\delta\, y^2\,dx$$

όπου δ η επιφανειακή πυκνότητα



Άσκηση 5

6. *Να βρεθει το βαρύκεντρο του στερεού που παράγεται κατά την περιστροφή περί τον Oy της παραβολής $y^2=2x$ από το y=0 έως το y=2.*

Υπόδειξη

Η μάζα (όγκος) του παραγόμενου στερεού είναι

$$V=\pi\int_0^2 x^2\,dy=\pi\int_0^2\frac{y^4}{4}\,dy=\frac{\pi}{20}2^5$$

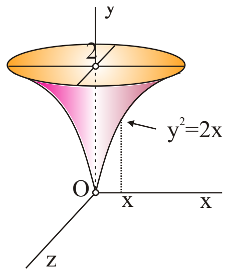
Η ροπή μάζας (όγκου) ως προς το επίπεδο Ozx είναι

$$\mathcal{M}_{Ozx}=\pi\int_0^2 yx^2\,dy=\pi\int_0^2 y\frac{y^4}{4}\,dy=\frac{\pi}{24}2^6$$

οπότε η τεταγμένη του βαρύκεντρου είναι

$$y_G=\frac{2^6\pi}{24}:\frac{2^5\pi}{20}=\frac{5}{3}$$

Αντιλαμβανόμαστε ότι $x_G=z_G=0$.



Άσκηση 6

7. *Να βρεθεί το βαρύκεντρο του πρώτου τεταρτοκυκλίου κυκλικής πλάκας της οποίας η πυκνότητα στο σημείο M(x,y) είναι δ=λxy.*

Υπόδειξη

Έστω $x^2+y^2=R^2,\ x,y\geq 0$ η εξίσωση του τεταρτοκυκλίου.

Η μάζα του τεταρτοκυκλίου είναι

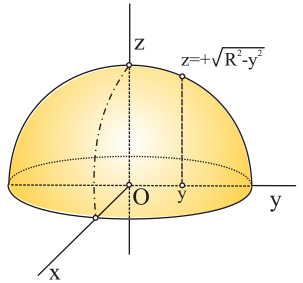
$$m=\iint_A \lambda xy\,dx\,dy=\lambda\int_0^R x\,dx\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} y\,dy=\frac{\lambda}{5}R^4$$

Η ροπή της μάζης ως προς τον άξονα Oy είναι

$$\mathcal{M}_y=\iint_A \lambda xy\,x\,dx\,dy=\lambda\int_0^R x^2\,dx\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} y\,dy=\frac{\lambda}{15}R^5$$

οπότε η τεταγμένη του βαρύκεντρου είναι $y_G=\dfrac{R^5}{15}:\dfrac{R^4}{8}=\dfrac{8}{15}R.$

Αντιλαμβανόμαστε ότι $x_G = z_G = 0$.



Άσκηση 8

8. *Να βρεθεί το βαρύκεντρο ημισφαιρίου που η βάση του εδράζεται στο επίπεδο Oxy και έχει εξίσωση $x^2 \quad y^2 \quad R^2$, ενώ η πυκνότητα στο σημείο M(x,y) είναι $\delta = z^2$.*

Υπόδειξη

Το ημισφαίριο παράγεται από την περιστροφή περί τον άξονα Oz του πρώτου τεταρτημορίου $y^2 \quad z^2 \quad R^2, \ y, z \quad 0$ κατά 2π.

Η ροπή της μάζης ως προς το επίπεδο Oxy είναι

$$\mathcal{M}_{Oxy} \quad {}_0^R \delta z y^2 dz \quad {}_0^R z^3 y^2 dz \quad {}_0^R z^3 (R^2 \quad z^2) dz \quad \frac{R^6}{12}$$

Η μάζα του ημισφαιρίου είναι

$$m \quad {}_0^R z^2 y^2 dz \quad {}_0^R z^2 (R^2 \quad z^2) dz \quad \frac{2 \ R^5}{15}$$

Κατά συνέπεια η κατηγμένη του βαρύκεντρου είναι

$$z_G \quad \frac{R^6}{12} : \frac{2 \ R^5}{15} \quad \frac{5R}{8}$$

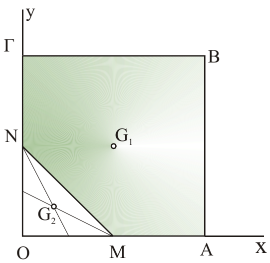
Προφανώς $x_G \quad y_G \quad 0$.

Στην περίπτωση συστήματος σωμάτων με μάζες m_i και βαρύκεντρα $G_i(x_i,y_i)$, το βαρύκεντρο του συστήματος έχει συντεταγμένες

$$x_G \quad \frac{x_{iG} m_i}{m}, \ y_G \quad \ldots, z_G \quad \ldots$$

Στο σύμβολο Σ εννοείται και αφαίρεση.

9. *Δίνεται μια ομογενής τετραγωνική λαμαρίνα ΟΑΒΓ πλευράς α, από την οποία κόβουμε μια γωνία OMN, όπου M, N είναι τα μέσα δύο διαδοχικών πλευρών του τετραγώνου. Ζητείται το βαρύκεντρο του τμήματος που παρέμεινε (σκιασμένο).*



Άσκηση 9

Υπόδειξη

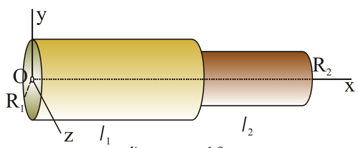
Θεωρούμε ένα σύστημα αξόνων Oxy με άξονες τις δύο διαδοχικές πλευρές τετραγώνου και κορυφή την κορυφή της ορθής γωνίας του τριγώνου που αποκόπηκε (σχήμα)

Το βαρύκεντρο της αρχικής τετραγωνικής λαμαρίνας είναι $G_1(a/2, a/2)$ και το εμβαδόν (μάζα) του είναι a^2.

Το βαρύκεντρο του τριγώνου που αποκόπηκε είναι $G_2(a/6, a/6)$ και το εμβαδό του είναι $\frac{a^2}{8}$, τότε η ζητούμενη τετμημένη είναι

$$x_G \quad \frac{\alpha^2 \ \frac{\alpha}{2} \quad \frac{\alpha^2}{8} \ \frac{\alpha}{6}}{\alpha^2 \quad \frac{\alpha^2}{8}} \quad \frac{23\alpha}{42}$$

Λόγω συμμετρίας και η τεταγμένη του βαρύκεντρου έχει την ίδια τιμή.



Άσκηση 10

10. *Ένας ομογενής συμπαγής κύλινδρος αποτελείται από δυο τμήματα, το πρώτο μήκους l_1 και ακτίνας R_1 και το δεύτερο μήκους l_2 και ακτίνας R_2, των οποίων οι άξονες συμπίπτουν. Ζητείται το βαρύκεντρο του κυλίνδρου.*

Υπόδειξη

Έστω Ox ο κοινός άξονας των δύο κυλίνδρων και O το κέντρο της βάσεως του κυλίνδρου ακτίνα R_1. Εφαρμόζοντας τον τύπο αλλαγής παίρνουμε

$$x_G = \frac{\frac{\ell_1}{2}R_1^2\ell_1 + \left(\ell_1 + \frac{\ell_2}{2}\right)R_2^2\ell_2}{(\ell_1R_1^2 + \ell_2R_2^2)} = \frac{R_1^2\ell_1^2 + R_2^2\ell_2^2 + 2\ell_1\ell_2R_2^2}{2(\ell_1R_1^2 + \ell_2R_2^2)}$$

Προφανώς $y_G = z_G = 0$.

11. *Να βρεθεί το βαρύκεντρο της αλυσίδας* $y = \frac{3}{2}\left(e^{\frac{3}{2}x} + e^{-\frac{3}{2}x}\right)$, *όταν* $0 \le x \le 2$.

Υπόδειξη

Το στοιχειώδες μήκος τόξου της αλυσίδας είναι

$$ds = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right)dx$$

Η μάζα της αλυσίδας είναι

$$m = \int_0^2 \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right)dx = e - \frac{1}{e} = \frac{e^2 - 1}{e}$$

Η ροπή της μάζας ως προς τον άξονα Oy είναι

$$\mathcal{M}_y = \int_0^2 x\,ds = \int_0^2 x\,\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right)dx = 4\left(1 - \frac{1}{e}\right) = \frac{4(e-1)}{e},$$

οπότε η τετμημένη του βαρύκεντρου του τόξου αυτού είναι

$$x_G = \frac{4(e-1)}{e} : \frac{e^2-1}{e} = \frac{4}{e+1}$$

Η ροπή της μάζας ως προς τον άξονα Ox είναι

$$\mathcal{M}_x = \int_0^2 y\,ds = \int_0^2 \frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right)^2 dx = \frac{1}{4}(e^2 - e^{-2} + 4),$$

οπότε εύκολα βρίσκεται και η τεταγμένη του βαρύκεντρου του τόξου αυτού.

12. *Με εφαρμογή του δευτέρου θεωρήματος του Guldin (§1. 6) να βρεθεί το βαρύκεντρο του τεταρτοκυκλίου.*

Υπόδειξη

Έστω $x^2 + y^2 = R^2,\ x, y \ge 0$ η εξίσωση του τεταρτοκυκλίου το (OAB), που περιστρεφόμενο περί τον άξονα Ox κατά γωνία 2π παράγει το ημισφαίριο.

Το εμβαδόν του τεταρτοκυκλίου είναι $\frac{\pi R^2}{4}$, ενώ ο όγκος του ημισφαιρίου είναι $\frac{2}{3}\pi R^3$.

Το μήκος του κύκλου που γράφει το βαρύκεντρο είνα $\ell = \frac{2}{3}\pi R^3 : \frac{\pi R^2}{4} = \frac{8R}{3}$.

Αν y_G είναι η τεταγμένη του βαρύκεντρου, τότε $2\pi y_G = \frac{8R}{3} \Rightarrow y_G = \frac{4R}{3\pi}$

Λόγω συμμετρίας θα είναι $x_G = \frac{4R}{3\pi}$.

Βαρύκεντρο τόξου καμπύλης

$$x_G = \frac{\int_{s_1}^{s_2} \delta x\,ds}{\int_{s_1}^{s_2} \delta\,ds}, \quad y_G = \frac{\int_{s_1}^{s_2} \delta y\,ds}{\int_{s_1}^{s_2} \delta\,ds}$$

όπου

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

αν η καμπύλη εκφράζεται σε καρτεσιανές συντεταγμένες, ή

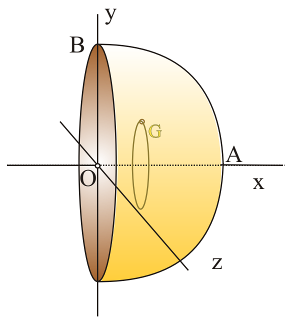
$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{d\theta}{d\rho}\right)^2}\,d\rho$$

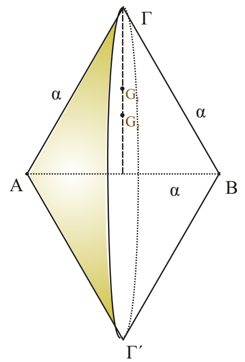
αν εκφράζεται σε πολικές συντεταγμένες

Να σημειωθεί ότι

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} συνθ & -ρημθ \\ ημθ & ρσυνθ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d\rho \\ d\theta \end{pmatrix}$$



Άσκηση 12



Άσκηση 13

13. *Ένα ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς α στρέφεται κατά γωνία 2π περί μια πλευρά του. Ζητείται να βρεθεί το εμβαδόν και ο όγκος του παραγομένου στερεού.*

Υπόδειξη

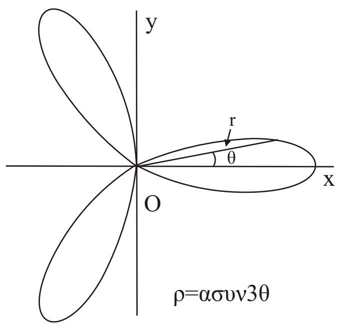
Έστω το τρίγωνο ΑΒΓ το οποίο στρέφουμε περί την ΑΒ κατά γωνία 2π. Έστω Ε η παραγόμενη επιφάνεια (παράγεται από τις πλευρές ΑΓ και ΒΓ). Το βαρύκεντρο των δύο αυτών πλευρών είναι το σημείο G_1 που απέχει από τη βάση του τριγώνου απόσταση $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Το μήκος του κύκλου που παράγει το G_1 είναι $\frac{\sqrt{3}}{2}$, ενώ το μήκος της καμπύλης που παράγει την επιφάνεια είναι 2α. Επομένως κατά το θεώρημα του Guldin θα έχουμε

$$\frac{E}{2\alpha} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad E \quad {}^{2}\sqrt{3}$$

Έστω V ο όγκος που παράγεται κατά την περιστροφή αυτή. Το βαρύκεντρο της επιφάνειας που παράγει το στερεό είναι το G_2 και απέχει από τη βάση $\frac{\sqrt{3}}{6}$ και το μήκος του κύκλου που γράφει το G_2 είναι $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Το εμβαδόν του τριγώνου (που παράγει το στερεό) είναι $\frac{{}^{2}\sqrt{3}}{4}$ και κατά συνέπεια

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \frac{V}{\frac{{}^{2}\sqrt{3}}{4}} \quad V \quad \frac{{}^{3}}{4}$$



Άσκηση 15

14. Να βρεθεί το βαρυκεντρο του πρώτου τεταρτημορίου της έλλειψης

$$\frac{x^2}{{}^2} \quad \frac{y^2}{{}^2} \quad 1, \quad , \quad 0$$

Απάντ. $x_G \quad \frac{4}{3}$, $y_G \quad \frac{4}{3}$

15. Να βρεθεί το βαρύκεντρο της επιφάνεις του πρώτου κρίκου της καμπύλης $r \qquad 3$.

Απάντ. $x_G \quad \frac{81 \quad \sqrt{3}}{80}$

16. Να βρεθεί το βαρύκεντρο του χωρίου που περικλείεται από τον άξονα Ox, τις ευθείες x=0, x=3π και τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y \quad 3\,\eta\mu\frac{x}{3}$.

Απάντ.$x_G \quad \frac{3}{2} \qquad y_G \quad \frac{3}{8}$

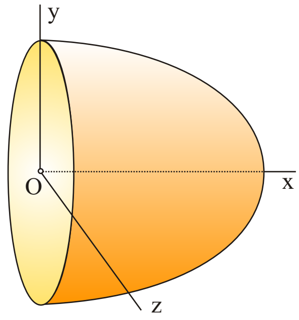
17. Να βρεθεί η απόσταση του βαρύκεντρου κυκλικού τμήματος γωνίας φ από το κέντρο του κύκλου του οποίου η ακτίνα είναι ρ.

Απάντ. $\frac{4}{3} \qquad \frac{}{2}$

18. Να βρεθεί το βαρύκεντρο του στερεού που παράγεται κατά την περιστροφή περί τον άξονα Ox κατά γωνία 2π του τμήματος της έλλειψης

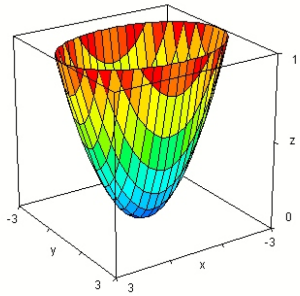
$$^2x^2 \qquad ^2x^2 \qquad ^2\ ^2 \quad 0$$

Απάντ. $x_G \quad \frac{3}{8}$



Άσκηση 18

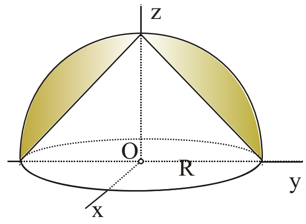
19. Να βρεθεί το βαρύκεντρο του στερεού που περιλαμβάνεται μεταξύ του επιπέδου z=1 και του ελλειπτικού παραβολοειδούς $z \quad \frac{x^2}{2} \quad \frac{y^2}{2}$.



Άσκηση 19

20. Από ένα ημισφαίριο κέντρου O και ακτίνας R αφαιρούμε ένα κώνο με βάση τη βάση του ημισφαιρίου και ύψος R. Ζητείται το βαρύκεντρο του στερεού τμήματος που απομένει.

Απάντ. $z_G \quad \frac{R}{2}$



Άσκηση 20