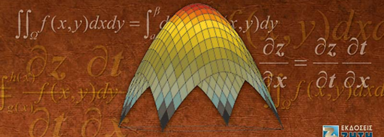
Αλέξανδρος Λαζαρίδης

# Ασκήσεις ΑΝΩΤΕΡΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών
Διπλά - τριπλά ολοκληρώματα
Επικαμπύλια - επιφανειακά ολοκληρώματα
Διαφορικές εξισώσεις & συστήματα




ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

# Πρόλογος

*Το μικρό αυτό βιβλίο, που ο φοιτητής έχει στα χέρια του, αποσκοπεί να του δώσει τη δυνατότητα να αντιμετωπίζει κλασικές ασκήσεις, που αφορούν στις συναρτήσεις πολλών μεταβλητών, όπως μερικές και ολικές παράγωγοι, μερικά και ολικά διαφορικά, αναζήτηση ακροτάτων, κυρίως με δυο μεταβλητές, διπλά και τριπλά ολοκληρώματα συμπεριλαμβανομένων και των γεωμετρικών εφαρμογών τους, επικαμπύλια και επιφανειακά ολοκληρώματα και τέλος διαφορικές εξισώσεις πρώτης και δευτέρας τάξεως καθώς επίσης και συστήματα διαφορικών εξισώσεων.*

*Στα διπλά και τριπλά ολοκληρώματα δεν δόθηκαν ασκήσεις που αποσκοπούν στις ροπές και κέντρα μάζας. Στις συναρτήσεις δεν δόθηκαν ασκήσεις σχετικές με την κλίση* (rot)*, την απόκλιση* (div) *και περιστροφή* (rot, curl).

*Στις διαφορικές εξισώσεις υπήρξαμε σχετικά αναλυτικοί και πέρα από τις κλασικές μεθόδους κάναμε χρήση και του μετασχηματισμού* Laplace. *Τον μετασχηματισμό* Laplace *τον χρησιμοποιήσαμε και στη λύση συστημάτων διαφορικών εξισώσεων και διαφορικών εξισώσεων με συντελεστές πολυώνυμα της ανεξάρτητης μεταβλητής, εξισώσεις που συχνά απαντώνται στις φυσικές και τεχνικές επιστήμες.*

*Στα περιθώρια του βιβλίου παρατίθεται πλούσια εικονογράφιση σχετική με τις μελετούμενες ασκήσεις, καθώς επίσης όλες οι απαραίτητες θεωρητικές γνώσεις που οδηγούν στη λύση των ασκήσεων. Πολλές φορές τόσο τα σχήματα, όσο και οι παρατηρήσεις, που δίνονται στα περιθώρια, επαναλαμβάνονται σε διαφορετικές θέσεις.*

*Σημειώνεται ότι οι παρατιθέμενες λύσεις δίνονται για να γίνει επαλήθευση των αποτελεσμάτων που οι φοιτητές βρίσκουν και μόνο στην πολύ δύσκολη περίπτωση να αποτελούν πηγή εκμάθησης.*

*Σε όλο το βιβλίο μας αποφύγαμε συστηματικά τη διεξοδική επίλυση των απλών ολοκληρωμάτων, αορίστων και ορισμένων, θέματα που υποτίθεται ότι οι ασχολούμενοι γνωρίζουν καλά, γιατί η γνώση τους είναι προαπαιτούμενο.*

*Πιστεύω ότι θα υπάρξουν φοιτητές των θετικών και πολυτεχνικών Σχολών που θα αποκομίσουν σημαντικά οφέλη.*

*Ευχαριστούμε τις εκδόσεις ΖΗΤΗ για την ιδιαίτερη φροντίδα με την οποία περιέβαλε το βιβλίο μας αυτό.*

*Α. Λ..*

## Πίνακας περιεχομένων

## *Ασκήσεις στις συναρτήσεις πολλών μεταβλητών*

1. Να βρεθεί η συνάρτηση $f(x)$, αν είναι γνωστό ότι

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\sqrt{2x^2 + xy + y^2}}{y}, \; y > 0.$$

Λύση:

Επειδή $y > 0$, η προηγούμενη ισότητα γίνεται

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = \sqrt{2\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{x}{y} + 1},$$

οπότε εύκολα διαπιστώνουμε ότι

$$f(x) = \sqrt{2x^2 + x + 1}.$$

2. Να βρεθεί η συνάρτηση $f(x,y)$, όταν

$$f(x - y, x + y) = x^2 - 2xy.$$

Λύση:

Θέτουμε $x - y = u$, $x + y = v$ από τις οποίες παίρνουμε ότι

$$x = \frac{u+v}{2}, \; y = \frac{v-u}{2},$$

οπότε η δοθείσα σχέση γίνεται

$$f(u,v) = \frac{(u+v)^2}{4} + 2\,\frac{u^2 - v^2}{4} = \frac{3u^2 + 2uv}{4}.$$

Δηλ. η ζητούμενη συνάρτηση είναι $f(x,y) = \frac{1}{4}\,(3x^2 + 2xy)$.

3. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Λύση:

Το πεδίο ορισμού της είναι ο δίσκος που ορίζεται από την ανισότητα

$$1 - x^2 - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 1.$$

Βλέπουμε δηλ. ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης αυτής είναι ο δίσκος με κέντρο την αρχή αξόνων και ακτίνα 1.

4. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$z = \sqrt{4 - x^2} + \sqrt{y^2 - 4}$$

Λύση:

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης αυτής ορίζεται από τις ανισότητες

$$4 - x^2 \geq 0, \; y^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow |x| \leq 2, \; |y| \geq 2.$$

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης αυτής εικονίζεται στο σχ. 1.

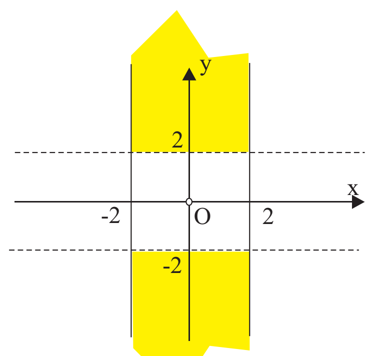
Το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης καθορίζεται στις απλούστερες περιπτώσεις όταν

**α.** οι υπόρριζες παραστάσεις δεν γίνονται αρνητικές,

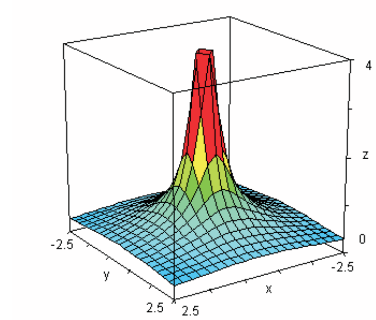
**β.** οι υπό λογαρίθμιση παραστάσεις καθίστανται θετικές,

**γ.** οι βάσεις εκθετικών συναρτήσεων είναι θετικές,

**δ.** οι παρονομαστές ρητών συναρτήσεων δεν μηδενίζονται.




Σχήμα 1




Σχήμα 2

Αν

$$\ell img(u) \quad 0$$
$$_{u \quad 0}$$

και για κάθε ζεύγος $(x,y)$ στην περιοχή του σημείου $O(0,0)$ ισχύει

$$\|f(x,y)\| \quad g(\|(x,y)\|),$$

τότε

$$\ell im_{(x,y) \quad (0,0)} f(x,y) \quad 0.$$

Η συνάρτηση

$$f\colon \mathbb{R}^2 \quad \mathbb{R}$$
$$(x,y) \mapsto f(x,y)$$

είναι συνεχής στο σημείο $M(x_o,y_o)$, αν

α. το σημείο $M(x_o,y_o)$ είναι σημείο του πεδίου ορισμού της $f$,

β. το όριο

$$\lim_{(x,y) \quad (x_o,y_o)} f(x,y)$$

υπάρχει, όταν το $M(x,y)$ τείνει κατά οποιοδήποτε τρόπο προς το $M(x_o,y_o)$, και

γ. ισχύει

$$\ell im_{(x,y) \quad (x_o,y_o)} f(x,y) \quad f(x_o,y_o)$$

Ο ορισμός αυτός σημαίνει ότι

$\varepsilon \quad 0, \eta \quad 0$ τ.ω.

$$\sqrt{(x \quad x_o)^2 \quad (y \quad y_o)^2} \quad h$$

$$|f(x,y)f(x_o,y_o)| \quad \varepsilon$$

5. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$z \quad \frac{1}{\sqrt{x^2 \quad y^2}}$$

Λύση:

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης αυτής ορίζεται από την ανισότητα

$$x^2 \quad y^2 \quad 0.$$

Επομένως το πεδίο ορισμού της είναι το $\mathbb{R}^2 \backslash (0,0)$. Η γραφική της παράσταση εικονίζεται στο σχ.2.

6. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x,y) \quad \frac{x^2 y}{x^2 \quad y^2}.$$

Να βρεθεί το όριο

$$\ell in_{(x,y) \quad (0,0)} f(x) \quad .$$

Λύση:

Το πεδίο ορισμού της είναι το $\mathbb{R}^2$-$\{0,0\}$.

Από τη σχέση

$$x^2 \; |y| \quad (x^2 \quad y^2) \; \sqrt{x^2 \quad y^2}.$$

συμπεραίνουμε ότι ισχύει

$$|f(x,y)| \quad \|(x,y)\|.$$

Κατά συνέπεια

$$\ell im_{(x,y) \quad (0,0)} f(x,y) \; 0.$$

7. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x,y) \quad \frac{x \quad y}{x^2 \quad y^2}.$$

Να βρεθεί, αν υπάρχει, το όριο

$$\ell in_{(x,y) \quad (0,0)} f(x,y).$$

Λύση:

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f$ είναι το $\mathbb{R}^2$-$\{0,0\}$.

Προφανώς παίρνουμε $f(x,0) \quad 0$ και $f(x,x) \quad \frac{1}{2}$.

Αν εκλέξουμε $\varepsilon \quad \frac{1}{4}$, τότε δεν μπορούμε να βρούμε ένα $\ell$ τέτοιο, ώστε να υπάρχει η>0 που να ικανοποιεί τη σχέση

$$\sqrt{x^2 \quad y^2} \quad \eta \qquad |f(x,y) \quad \ell| \quad \frac{1}{4}.$$

Πραγματικά, αν υπήρχε ο $\ell$, τότε θα είχαμε

$$\left|0 \quad \ell\right| \quad \frac{1}{4} \, kai \left|\frac{1}{2} \quad \ell\right| \quad \frac{1}{4},$$

πράγμα που είναι αδύνατο.

8. Να εξετασθεί αν η συνάρτηση

$$f(x,y) \qquad \begin{matrix} \dfrac{xy}{x^2 \quad y^2}, & x,y \quad 0 \\ 0, & x \quad y \quad 0 \end{matrix}$$

είναι συνεχής.

Λύση:

Προφανώς η συνάρτηση είναι συνεχής σε ολόκληρο το επίπεδο εκτός της αρχής αξόνων, όπου όμως θα εξετάσουμε αν είναι συνεχής.

Επειδή $f(x, 0)=0$, $f(0, y)=0$, εύκολα διαπιστώνουμε ότι οι μερικές αυτές συναρτήσεις είναι συνεχείς στην αρχή των αξόνων.

Στην άσκηση 7 είδαμε ότι δεν ορίζεται το όριο

$$\ell im_{(x,y) \quad (0,0)} f(x,y).$$

Κατά συνέπεια η συνάρτηση $f$ δεν είναι συνεχής στο σημείο $(0, 0)$.

9. Δίνεται η συνάρτηση τριών μεταβλητών

$$f: \quad \mathbb{R}^3 \qquad \mathbb{R}$$

$$(x,y,z) \mapsto u \quad f(x,y,z) \quad x \quad y \quad z.$$

Να εξετασθεί αν είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^3$.

Λύση:

Θα δείξουμε ότι η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής σε οποιοδήποτε σημείο $(x_o,y_o,z_o)$ του χώρου $\mathbb{R}^3$.

Αρκεί να δείξουμε ότι η ποσότητα

$$\left|u \quad u_o\right| \quad \left|x \quad y \quad z \quad x_o \quad y_o \quad z_o\right|$$

γίνεται "οσοδήποτε μικρή" όταν η ποσότητα

$$\sqrt{(x \quad x_o)^2 \quad (y \quad y_o)^2 \quad (z \quad z_o)^2}$$

γίνεται "αρκούντως μικρή", ή όταν οι ποσότητες

$$\left|x \quad x_o\right|, \left|y \quad y_o\right|, \left|z \quad z_o\right|$$

γίνονται "αρκούντως μικρές.

Για κάθε ε >0 εκλέγουμε τα $(x, y, z)$ έτσι, ώστε

$$\left|x \quad x_o\right| \quad \frac{}{3}, \left|y \quad y_o\right| \quad \frac{}{3}, \left|z \quad z_o\right| \quad \frac{}{3},$$

οπότε

$$\left|u \quad u_o\right| \quad \left|x \quad y \quad z \quad x_o \quad y_o \quad z_o\right|$$

$$\left|x \quad x_o\right| \quad \left|y \quad y_o\right| \quad \left|z \quad z_o\right| \quad \frac{\varepsilon}{3} \quad \frac{\varepsilon}{3} \quad \frac{\varepsilon}{3} \quad \varepsilon.$$

Δηλ. η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής σε κάθε σημείο $(x_o,y_o,z_o)$ του χώρου $\mathbb{R}^3$.

10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x,y) \quad \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 \quad y^2}, & x,y \quad 0 \\ 0, & x \quad y \quad 0 \end{cases}$.

Να εξετασθεί αν είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^2$.

Λύση:

Όπως και στην περίπτωση της άσκησης 7, η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο επίπεδο εκτός της αρχής των αξόνων, όπου θα πρέπει να εξετασθεί η συνέχεια. Είδαμε (άσκηση 4) ότι

$$\lim_{(x,y) \quad (0,0)} f(x,y) \quad 0.$$

Κατά συνέπεια η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^2$.

Δεχόμαστε χωρίς απόδειξη ότι:

α. κάθε μονωνυμική συνάρτηση δυο μεταβλητών, δηλ της μορφής

$$f(x,y)=\lambda x^{\alpha} y^{\beta}$$

είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^2$,

β. κάθε πολυωνυμική συνάρτηση

$$f(x,y) \quad \sum_{\alpha,\beta} \lambda_{\alpha\beta} x^{\alpha} y^{\beta}$$

είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^2$,

γ. κάθε συνάρτηση που περιγράφεται με απλό τύπο είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

11. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x,y) \quad 2x^2 \quad y^2.$$

Να δειχθεί ότι είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^2$.

Λύση

Θα δείξουμε ότι είναι συνεχης σε κάθε σημείο $(x_o, y_o)$ του $\mathbb{R}^2$.

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης αυτής είναι ολόκληρο το $\mathbb{R}^2$. Η γραφική της παράσταση εικονίζεται στο αντίστοιχο σχήμα.

Η διαφορά $f(x, y)-f(x_o, y_o)$ γίνεται

$$|f(x,y) \quad f(x_0,y_0)| \quad |2x^2 \quad y^2 \quad 2x_0^2 \quad y_0^2|$$
$$2|x \quad x_0| \; |x \quad x_0| \quad |y \quad y_0| \; |y \quad y_0|.$$

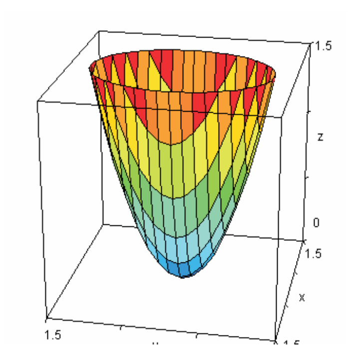
Εκλέγουμε το $x_0$, ώστε να είναι $|x \quad x_0| \quad x_0$, οπότε $|x \quad x_0| \quad 3x_0$.

Ομοίως εκλέγουμε το $y_0$, ώστε να είναι $|y \quad y_0| \quad y_0$, οπότε $|y \quad y_0| \quad 3y_0$.

Καλούμε $\eta \quad min(\dfrac{\varepsilon}{12x_0}, \dfrac{3}{6y_0})$, οπότε

$$|f(x,y) \quad (x_0,y_0)| \quad 2\eta\, 3x_0 \quad \eta\, 3y_0 \quad 6x_0 \frac{\varepsilon}{12x_0} \quad 3y_0 \frac{\varepsilon}{6y_0} \quad \varepsilon.$$

Βλέπουμε δηλ. ότι η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο σημείο $(x_o,y_o)$, άρα είναι συνεχής σε ολόκληρο το $\mathbb{R}^2$.



Σχήμα άσκ.11

12. Να βρεθεί το ευρύτερο χωρίο Ω στο οποίο είναι συνεχής η συνάρτηση

$$f(x,y) \quad \frac{ax}{x \quad y}, a \quad \mathbb{R}.$$

Λύση:

Πρόκειται για μια ρητή συνάρτηση. Οι όροι του κλασματος είναι συναρτήσεις συνεχείς στο $\mathbb{R}$. Για να ορίζεται η $f$ πρέπει να ισχύει $x \quad y$. Επομένως η συνάρτηση είναι συνεχής στο επίπεδο *Oxy* εκτός της διχοτόμου του δεύτερου και τέταρτου τεταρτημορίου.

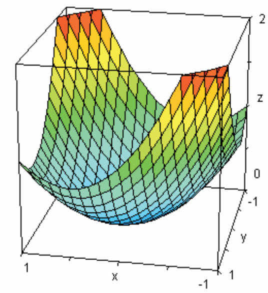
13. Έστω η συνάρτηση

$$z \quad x^2 \quad xy \quad y^2.$$

Ζητούνται οι μερικές παράγωγοι της συνάρτησης αυτής.
Λύση:
Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης αυτής είναι το $\mathbb{R}^2$, ενώ οι τιμές τής $z$ είναι θετικές. Η γραφική της παράσταση εικονίζεται στο σχήμα 3.
Θεωρώντας ότι η μεταβλητή $y$ παραμένει σταθερή, η αντίστοιχη συνάρτηση μιας μεταβλητής είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Επομένως

$$z_x \quad (x^2)_x \quad (xy)_x \quad (y^2)_x \quad 2x \quad y.$$

Ανάλογα βρίσκουμε $z_y \quad 2y \quad x$.




Σχήμα **3**

14. Έστω η συνάρτηση

$$z \quad \frac{x^2 \quad y^2}{xy}.$$

Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι της συνάρτησης.
Λύση:
Το πεδίο ορισμού της είναι το $\mathbb{R}\backslash\{(0,\ 0)\}$. Η συνάρτηση αυτή είναι συμμετρική.
Υπολογίζουμε τη μερική παράγωγο της $f$ στο $\mathbb{R}\backslash\{(0,\ 0)\}$ ως προς $x$:

$$z_x \quad \frac{(x^2 \quad y^2)_x\, xy \quad (x^2 \quad y^2)\,(xy)_x}{x^2 y^2}$$

$$\frac{2x\, xy \quad y(x^2 \quad y^2)}{x^2 y^2} \quad \frac{x^2 \quad y^2}{x^2 y}.$$

Με εναλλαγή των $x, y$ παίρνουμε τη μερική παράγωγο της $f$ στο $\mathbb{R}\backslash\{(0,\ 0)\}$ ως προς $y$:

$$z_y \quad \frac{y^2 \quad x^2}{xy^2}.$$

Από τον ορισμό της μερικής παραγώγου διαπιστώνουμε ότι, αν η $f(x, y)$ είναι συμμετρική, δηλ. $(x, y) \quad ,\ f(x, y) \quad f(y, x)$, τότε

$$f_y(y, x) \quad f_x(x, y).$$

Ο τελευταίος αυτός τύπος σημαίνει ότι
α. βρίσκουμε τη μερική παράγωγο $f_x(x, y) \quad g(x, y)$,
β. στη συνάρτηση αυτή g(x,y) εναλλάσσουμε το ρόλο των x, y, παίρνουμε δηλ. τη συνάρτηση g(y,x).

15. Έστω η συνάρτηση

$$z \quad \frac{x \quad 1}{y} \quad \ell n(xy).$$

Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι της συνάρτησης αυτής.
Λύση:
Το πεδίο ορισμού της είναι το πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο του επιπέδου *Oxy*, χωρίς τους άξονες συντεταγμένων.
Η μερική παράγωγός της ως προς $x$ είναι

$$z_x \quad \frac{1}{y}\,(x \quad 1)_x \quad (\ell n(x\,y))_x \quad \frac{1}{y}\,\frac{(x\,y)_x}{xy} \quad \frac{1}{y}\,\frac{1}{x} \quad \frac{x \quad y}{xy}.$$

Όπως βλέπουμε η συνάρτηση αυτή δεν είναι συμμετρική, αλλά αποτελείται από ένα τμήμα, το $\ell n(xy)$, που είναι συμμετρικό ως προς $x$ και $y$. Αρκεί συνεπώς να βρουμε τη μερική παράγωγο της συνάρτησης αυτής με νέα παραγώγιση. Έτσι παίρνουμε

$$z_y \quad \frac{(x \quad 1)}{y^2} \quad (\ell n(x\,y))_y \quad \frac{x \quad 1}{y^2} \quad \frac{1}{y} \quad \frac{y \quad x \quad 1}{y^2}.$$

Αν $z \quad f(x, y)$ μια συνάρτηση δυο μεταβλητών. Τότε

$$z_{x_o} \quad \ell im_{x \quad x_o} \frac{f(x,y) \quad f(x_o, y)}{x \quad x_o}$$

$$z_{y_o} \quad \ell im_{y \quad y_o} \frac{f(x,y) \quad f(x, y_o)}{y \quad y_o}$$

16. Έστω η συνάρτηση

$$z \quad e^{x/y} \quad x\sqrt{\frac{y \quad 1}{x}}.$$

Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι της συνάρτησης.

Λύση:

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι

$y \quad 1 \quad 0, x < 0,$ ή

$y \quad 1 \quad 0, x > 0, y \quad 0.$

Οι μερικές παράγωγοι της συνάρτησης αυτής είναι

$$z_x \quad e^{x/y}\,(x/y)_x \quad \sqrt{\frac{y \quad 1}{x}} \quad x \quad \frac{}{x} \quad \sqrt{\frac{y \quad 1}{x}}$$

$$z_x \quad \frac{1}{y}\,e^{x/y} \quad \frac{1}{2}\,\sqrt{\frac{y \quad 1}{x}}.$$

Ομοίως εργαζόμενοι βρίσκουμε

$$z_y \quad \frac{x}{y^2}\,e^{x/y} \quad \frac{x}{2(y \quad 1)}\,\sqrt{\frac{y \quad 1}{x}}.$$

17. Αν η $f$ είναι συνάρτηση της παράστασης $x^2 \quad y^2$, δηλ. $z \quad f(x^2 \quad y^2)$, να υπολογισθεί η ποσότητα $A \quad y z_x \quad x z_y$.

Λύση:

Θέτουμε $x^2 \quad y^2 \quad u$, οπότε $z_x \quad f_u u_x \quad 2x f_u$, $z_y \quad f_u u_y \quad 2y f_u$.

Κατά συνέπεια η ποσότητα Α παίρνει την τιμή

$A \quad y z_x \quad x z_y \quad 2yx f_u \quad 2x y f_u \quad 0.$

18. Δίνεται η συνάρτηση $z \quad f(at \quad x, bt \quad y)$. Να υπολογισθεί η ποσότητα $z_t$.

Λύση:

Θέτουμε $u{=}at \quad x$, $v{=}bt \quad y$, οπότε

$z_t \quad f_u u_t \quad f_v v_t \quad a f_u \quad b f_v.$

19. Να δειχθεί ότι η εξίσωση

$$\frac{1}{x}\,z_x \quad \frac{1}{y}\,z_y \quad \frac{z}{y^2}$$

αληθεύει από τη συνάρτηση $z \quad y\,f(y^2 \quad x^2\,)$.

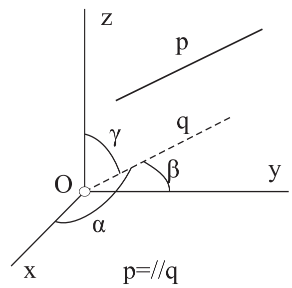
Λύση:

Θέτουμε $y^2 \quad x^2 \quad u$, οπότε

$$z_x \quad 2xy\,f_u\,,\; z_y \quad f \quad 2y^2\,f_u\,.$$

Κατά συνέπεια

$$\frac{1}{x}\,z_x \quad \frac{1}{y}\,z_y \quad 2y\,f_u \quad 2y\,f_u \quad \frac{f}{y} \quad \frac{yf}{y^2} \quad \frac{z}{y^2}.$$




Αν $u \quad f(x,y,z)$ είναι μια συνάρτηση, η παράγωγός της ως προς τη διεύθυνση $p \quad q$ είναι

$$\frac{u}{p} \quad cos\alpha\frac{u}{x} \quad cos\beta\frac{u}{y} \quad cos\gamma\frac{u}{z}$$

Αν η διεύθυνση ορίζεται από το μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{v}(\xi,\eta,\zeta)$, τότε η παράγωγος της $f$ ως προς τη διεύθυνση του διανύσματος αυτού είναι

$$\frac{u}{p} \quad \xi\,\frac{u}{x} \quad \eta\,\frac{u}{y} \quad \zeta\,\frac{u}{z}$$

20. Αν $z \quad xy \quad x\,f\,(\,y/x)$, να δειχθεί η σχέση

$$x(\,z_x \quad y\,) \;\; y(\,z_y \quad x\,) \quad z \quad xy.$$

Λύση:

Θέτουμε $\frac{y}{x} \quad u$, οπότε $z \quad xy \quad f\,(u)$.

Οι μερικές παράγωγοι της συνάρτησης $z$ είναι

$$z_x \;\; y \;\; f \;\; f_u u_x \;\; y \;\; f \;\; \frac{y}{x^2}f_u, \quad z_y \;\; x \;\; \frac{1}{x}f_u\,.$$

Το πρώτο μέλος της ισότητας, που πρέπει να αποδεχθεί, παίρνει τη μορφή

$$x(z_x \;\; y) \;\; y(z_y \;\; x) \;\; x\,(f \;\; \frac{y}{x^2}\;f_u) \;\; y \;\; \frac{1}{x}\;f_u \;\; x\,f(u) \;\; z \;\; xy.$$

21. Να βρεθεί η παράγωγος της συναρτήσης $f\,(x\,,y) \quad \frac{y^2}{x}$ κατά τη διεύθυνση της καθέτου της ελλείψεως $x^2 \quad \frac{y^2}{2} \quad 1$ στο τυχαίο σημείο της.

Λύση:

Οι μερικές παράγωγοι της συνάρτησης $f$ είναι

$$f_x \quad \frac{y^2}{x^2},\, f_y \quad \frac{2y}{x}.$$

Έστω $M(x_1,\,`y_1)$ τυχαίο σημείο της ελλείψεως. Ένα μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα $\vec{n}$ της ελλείψεως αυτής στο σημείο Μ έχει συντεταγμένες

$$\frac{2x_1}{\sqrt{4x_1^2 \quad y_1^2}},\; \frac{y_1}{\sqrt{4x_1^2 \quad y_1^2}} \;.$$

Κατά συνέπεια η παράγωγος της $f$ κατά τη διεύθυνση της καθέτου αυτής είναι

$$\frac{f}{n} \quad \frac{1}{\sqrt{4x_1^2 \quad y_1^2}} \qquad \frac{y_1^2}{x_1^2}\;2x_1 \quad \frac{2y_1}{x_1}\;y_1 \qquad 0.$$

Αν η $z = f(x,y)$ είναι συνεχής και έχει συνεχείς μερικές παραγώγους, τότε η σειρά παραγωγίσεως δεν έχει σημασία, δηλ.

$$z_{xy} = z_{yx}.$$

Έστω $u = f(x,y,z)$ είναι μια συνάρτηση δυο φορές παραγωγίσιμη ως προς τις μεταβλητές. Αν $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$, τότε λέμε ότι η f ικανοποιεί την εξίσωση Laplace.

Στην περίπτωση $u = f(x,y)$ η εξίσωση Laplace παίρνει τη μορφή

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

22. Δίνεται η συνάρτηση $z = \frac{1}{2}\ell n(x^2 + y^2)$. Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης αυτής στο σημείο της $M(1, 1)$ κατά την ευθεία $y = x$.

Λύση:

Οι μερικές παράγωγοι της συνάρτησης αυτής στο τυχαίο σημείο της $P(x,y)$ είναι

$$z_x = \frac{x}{x^2 + y^2},\ z_y = \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Συνεπώς στο σημείο $M(1,1)$ είναι $z_x = \frac{1}{2},\ z_y = \frac{1}{2}$.

Το μοναδιαίο της διχοτόμου $y = x$ έχει συντεταγμένες $\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Η παράγωγος της συνάρτησης στο σημείο $M$ κατά τη διεύθυνση της διχοτόμου είναι

$$\frac{\partial z}{\partial p} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

23. Να εξετασθεί αν η συνάρτηση $z = arctan\frac{y}{x}$ ικανοποιεί την εξίσωση Laplace.

Λύση:

Εύκολα βρίσκουμε

$$z_{x^2} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2},\ z_{y^2} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2},$$

οπότε αμέσως παίρνουμε $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

24. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ ικανοποιεί την εξίσωση Laplace (δυναμικό πεδίου).

Λύση:

Εύκολα βρίσκουμε

$$u_{x^2} = \frac{2x^2 - y^2 - z^2}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^5}},\ u_{y^2} = \frac{2y^2 - z^2 - x^2}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^5}},$$

$$u_{z^2} = \frac{2z^2 - x^2 - y^2}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^5}},$$

οπότε αμέσως παίρνουμε $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$.

25. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $u(x,t) \quad sin(at \quad m)\, sinx$ ικανοποιεί την εξίσωση χορδών $\frac{{}^2 u}{t^2} \quad a^2 \frac{{}^2 u}{x^2}$ (α).

Λύση:

Εύκολα βρίσκουμε

$$\frac{{}^2 u}{t^2} \quad a^2 \, sin(at \quad m)\, sinx, \quad \frac{{}^2 u}{x^2} \quad sin(at \quad m)\, sinx$$

από τις οποίες σχέσεις διαπιστώνουμε την αλήθεια της εξίσωσης με μερικές παραγώγους.

26. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $z(x,t) \quad \varphi(x\text{-}at)+\sigma(x+at)$ ικανοποιεί την εξίσωση χορδών (α) $\frac{{}^2 z}{t^2} \quad a^2 \frac{{}^2 z}{x^2}$, αν $\varphi$ και $\sigma$ είναι συναρτήσεις δυο φορές παραγωγίσιμες.

Λύση:

Θέτουμε $u \quad x \quad at,\ v \quad x \quad at.$

Εύκολα βρίσκουμε

$$\frac{{}^2 z}{t^2} \quad a(\varphi_{u^2} + \sigma_{v^2}), \quad \frac{{}^2 z}{x^2} \quad \varphi_{u^2} + \sigma_{v^2}$$

από τις οποίες σχέσεις προκύπτει η ζητουμένη ισότητα.

Αν η συνάρτηση $z \quad z(x,y)$ είναι n φορές παραγωγίσιμη, τότε το διαφορικό n τάξεως δίνεται από τον συμβολικό τύπο

$$(*) \quad d^n z \quad dx\frac{}{x} \quad dy\frac{}{y} \quad {}^n z$$

27. Να βρεθεί το διαφορικό $d^2 z$ της συναρτήσεως $z \quad e^{xy}$.

Λύση:

Οι μερικές παράγωγοι της συνάρτησης είναι

$$z_{x^2} \quad y^2 e^{xy},\ z_{xy} \quad (1 \quad xy)e^{xy},\ z_{y^2} \quad x^2 e^{xy}$$

Η σχέση (*) παίρνει τη μορφή

$$d^2 z \quad z_{x^2} dx^2 \quad 2z_{xy}\, dxdy \quad z_{y^2} dy^2$$

$$= e^{xy}(y^2 dx^2 \quad 2(1 \quad xy)dxdy \quad x^2 dy^2).$$

28. Δίνεται η συνάρτηση $z \quad xe^{y/x} + y/x$, όπου φ και σ είναι δυο συναρτήσεις δυο φορές παραγωγίσιμες. Να υπολογισθεί η ποσότητα

$$A = \left(x\frac{}{x} \quad y\frac{}{y}\right)^2 z$$

Λύση:

Οι μερικές παράγωγοι της συνάρτησης $z$ είναι

$$\frac{{}^2 z}{x^2} \quad \frac{y}{x^3}(ye^{y/x} \quad 2),\ \frac{{}^2 z}{y^2} \quad \frac{1}{x}e^{y/x},\ \frac{{}^2 z}{x \quad y} \quad \frac{1}{x^2}(1 \quad ye^{y/x}).$$

Η ποσότητα Α παίρνει τη μορφή

$$A \quad x^2 z_{x^2} \quad 2xyz_{xy} \quad y^2 z_{y^2}$$

$$= \frac{y}{x}(ye^{y/x} \quad 2) \quad \frac{2y}{x}(1 \quad e^{y/x}) \quad \frac{y^2}{x} \quad e^{y/x} \quad 0.$$

29. Δίνεται η συνάρτηση $z \quad \ell n(xy) \quad \sqrt{xy} \quad e^{y/x}$. Να δειχθεί η ισότητα

$$x^2 z_{x^2} \quad y^2 z_{y^2}.$$

Λύση:

Ευκολα βρίσκουμε

$$z_{x^2} \quad \frac{1}{4x^2} e^{y/x}(x^2 \quad 4xy \quad 4y^2)\sqrt{xy} \quad \frac{1}{x^2},$$

$$z_{y^2} \quad \frac{e^{y/x}(x^2 \quad 4xy \quad 4y^2)}{4xy\sqrt{xy}} \quad \frac{1}{y^2},$$

οπότε εύκολα αποδεικνύεται η ζητούμενη σχέση.

Η ποσότητα
$dU(x,y) \quad U_x(x,y)dx \quad U_y(x,y)dy$
είναι το ολικό διαφορικό της συνάρτησης $U(x, y)$.

(*) Η ποσότητα
$P(x,y)dx \quad Q(x,y)dy$
είναι ολικό διαφορικό μιας συνάρτησης, αν
$\frac{Q}{x} \quad \frac{P}{y}.$

(**) Η ποσότητα
$P(x,y,z)dx \quad Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$
είναι ολικό διαφορικό μιας συνάρτησης, αν
$\frac{Q}{x} \quad \frac{P}{y}, \frac{R}{y} \quad \frac{Q}{z}, \frac{P}{z} \quad \frac{R}{x}.$

30. Να εξετασθεί αν η ποσότητα

$$\frac{xdx \quad ydy}{\sqrt{x^2 \quad y^2}}$$

είναι ολικό διαφορικό μιας συνάρτησης και στη θετική περίπτωση να βρε θεί η συνάρτηση αυτή.

Λύση:

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι ισχύει η συνθήκη (*). Πραγματικά έχουμε

$$\frac{}{y} \frac{x}{\sqrt{x^2 \quad y^2}} \qquad \frac{xy}{(x^2 \quad y^2)\sqrt{x^2 \quad y^2}}$$

$$\frac{}{x} \frac{y}{\sqrt{x^2 \quad y^2}} \qquad \frac{xy}{(x^2 \quad y^2)\sqrt{x^2 \quad y^2}}.$$

Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα

$$U(x,y) \quad \frac{xdx}{\sqrt{x^2 \quad y^2}} \quad \sqrt{x^2 \quad y^2} \quad h(y),$$

όπου $h(y)$ είναι μια αυθαίρετη συνάρτηση του $y$, ο προσδιορισμός της οποίας γίνεται λαμβάνοντας υπόψη ότι

$$\frac{y}{\sqrt{x^2 \quad y^2}} \quad h(y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 \quad y^2}}.$$

Βλέπουμε ότι $h(y) \quad C$ (σταθερά). Δηλ. $U(x,y) \quad \sqrt{x^2 \quad y^2} \quad C$.

31. Να εξετασθεί αν η ποσότητα $\frac{ydx \quad xdy}{y^2}$ είναι ολικό διαφορικό μιας

συνάρτησης και στη θετική περίπτωση να βρεθεί η συνάρτηση αυτή.

Λύση:

Εύκολα βρίσκουμε ότι η ποσότητα είναι ολικό διαφορικό, διότι

$$\frac{\quad}{y}\ \frac{1}{y}\qquad \frac{1}{y^2},\quad \frac{\quad}{x}\ \frac{x}{y^2}\qquad \frac{1}{y^2}.$$

Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα

$$\frac{dx}{y}\quad \frac{x}{y}\quad h(y).$$

Παραγωγίζουμε ως προς $y$ και παίρνουμε

$$\left(\frac{x}{y}\quad h(y)\right)_y\qquad \frac{x}{y^2}\quad h\ (y).$$

Προκύπτει δηλ. ότι $h(y)=C$.

Ώστε η ζητούμενη συνάρτηση είναι $U(x,y)\quad \frac{x}{y}\quad C.$

32. Να εξετασθεί αν η ποσότητα

$$e^{xy}(ydx\quad xdy)$$

είναι ολικό διαφορικό μιας συνάρτησης και στη θετική περίπτωση να βρεθεί η συνάρτηση αυτή.

Λύση:

Εύκολα βρίσκουμε $(e^{xy}\ y)_y\quad (e^{xy}\ x)_x\quad e^{xy}(xy\quad 1)$, ισότητα που μας βεβαιώνει ότι η παράσταση αυτή είναι ολικό διαφορικό μιας συνάρτησης $U$.

$$U(x,y)\qquad ye^{xy}\,dx\quad e^{xy}\quad h(y).$$

Επειδή $U_y(x,y)\quad xe^{xy}$ συμπεραίνουμε ότι $h(y)=C$.

33. Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι $\frac{z}{x},\ \frac{z}{y}$ της πεπλεγμένης συνάρτησης z που ορίζεται από την εξίσωση

$$x\cos y\quad y\cos z\quad z\cos x\quad 1\quad 0.$$

Λύση:

Αν καλέσουμε $f(x,y,z)$ το πρώτο μέλος της δοθείσης εξίσωσης, τότε

$$\frac{z}{x}\qquad \frac{f_x(x,y,z)}{f_z(x,y,z)}\qquad \frac{\cos y\quad z\sin x}{\cos x\quad y\sin z}$$

$$\frac{z}{y}\qquad \frac{f_y(x,y,z)}{f_z(x,y,z)}\qquad \frac{\cos z\quad x\sin y}{\cos x\quad y\sin z}.$$

34. Να βρεθεί η παράγωγος $\frac{dy}{dx}$ της πεπλεγμένης συνάρτησης που ορίζεται από την ισότητα $y\quad 2\quad y^x$.

Από την ισότητα $f(x,y)\quad 0$, η $y$ (και η $x$) ορίζεται ως πεπλεγμένη συνάρτηση της άλλης μεταβλητής, εφόσον η $f$ είναι διαφορίσιμη ως προς $x$ και $y$. Στην περίπτωση αυτή

$$\frac{dy}{dx}\qquad \frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}.$$

Από την ισότητα $f(x,y,z)\quad 0$, η $z$ (και οι $x$, $y$) ορίζεται ως πεπλεγμένη συνάρτηση των άλλων μεταβλητών, εφόσον η $f$ είναι διαφορίσιμη ως προς $x$, $y$ και $z$. Στην περίπτωση αυτή οι μερικές παράγωγοι δίνονται από τις σχέσεις

$$\frac{z}{x}\qquad \frac{f_x(x,y,z)}{f_z(x,y,z)}$$

$$\frac{z}{y}\qquad \frac{f_y(x,y,z)}{f_z(x,y,z)}.$$

Αν το σύστημα

$$F(x,y,u,v) \quad 0,\ G(x,y,u,v) \quad 0$$

ορίζει τις u, v ως πεπλεγμένες συναρτήσεις των x, y και η ιακωβιανή

$$\frac{D(F,G)}{D(u,v)} \quad \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}$$

είναι διάφορη του μηδενός, τότε τα διαφορικά και οι παράγωγοι των συναρτήσεων αυτών παίρνονται από τις

$$F_x\,dx \quad F_y\,dy \quad F_u\,du \quad F_v\,dv \quad 0$$
$$G_x\,dx \quad G_y\,dy \quad G_u\,du \quad G_v\,dv \quad 0.$$

Αν η z είναι συνάρτηση των $x,y$ και ορίζονται παραμετρικά από τις εξισώσεις

$$x \quad x(u,v),y \quad y(u,v),z \quad z(u,v)$$

και η ιακωβιανή

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} \quad \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \quad 0,$$

τότε τα διαφορικά και οι μερικές παράγωγοι των συναρτήσεων αυτών ορίζονται από τις ισότητες

$$dx \quad x_u\,du \quad x_v\,dv$$
$$dy \quad y_u\,du \quad y_v\,dv$$
$$dz \quad z_u\,du \quad z_v\,dv.$$

Λύση:

Θέτουμε $f(x,y) \quad 2 \quad y^x \quad y$. Οι παράγωγοι της $f$ είναι

$$f_x \quad y^x \ell ny,\ f_y \quad xy^{x \quad 1} \quad 1.$$

Κατά συνέπεια $\dfrac{dy}{dx} \quad \dfrac{y^x \ell ny}{xy^{x \quad 1} \quad 1}$.

35. Έστω οι εξισώσεις

$$x \quad u \quad v,\ y \quad x^2 \quad 2uv,\ z \quad x^3 \quad 3uvx$$

από τις οποίες ορίζεται η $z$ ως συνάρτηση των $x, y$. Να βρεθούν οι $z_x$ , $z_y$ ως συναρτήσεις 1ον των $x, y$ και 2ον των $u,v$ .

Λύση:

Από τις δοθείσες σχέσεις παίρνουμε

$$\left.\begin{matrix} uv \quad \dfrac{x^2 \quad y}{2} \\ uv \quad \dfrac{x^3 \quad z}{3x} \end{matrix}\right. \quad \frac{x^3 \quad z}{3x} \quad \frac{x^2 \quad y}{2} \quad x^3 \quad 3xy \quad 2z \quad 0.$$

Από την τελευταία εξίσωση παίρνουμε εύκολα

$$z_x \quad \frac{3}{2}(y \quad x^2),\ z_y \quad \frac{3}{2}x.$$

Αντικαθιστώντας τις μεταβλητές $u,v$ παίρνουμε

$$z_x \quad 3uv,\ z_y \quad \frac{3}{2}(u \quad v).$$

36. Η συνάρτηση z ορίζεται από την εξίσωση $F(x \quad \alpha z,\ y \quad \beta z)=0$, όπου F είναι μια διαφορίσιμη συνάρτηση δυο μεταβλητών. Να βρεθεί η τιμή της παραστάσεως $A=\alpha z_x+\beta z_y$.

Λύση:

Καλούμε $u \quad x \quad \alpha z, v=y\text{-}\beta z$ , οπότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή $F(u,v) \quad 0$.

Οι μερικές παράγωγοι της $F$ ως προς $x$ και $y$ είναι

$$F_x \quad F_u \quad u_x \quad F_v \quad v_x \quad F_u$$
$$F_y \quad F_u \quad u_y \quad F_v \quad v_y \quad F_v$$
$$F_z \quad F_u \quad u_z \quad F_v \quad v_z \quad \alpha F_u \quad \beta F_v$$

Άρα θα είναι

$$z_x \quad \frac{F_x}{F_z} \quad \frac{F_u}{\alpha F_u \quad \beta F_v},\ z_y \quad \frac{F_y}{F_z} \quad \frac{F_v}{\alpha F_u \quad \beta F_v}.$$

Κατά συνέπεια

$$A=\alpha z_x+\beta z_y \quad \frac{\alpha F_u+\beta F_v}{\alpha F_u+\beta F_v} \quad 1.$$

37. Αν η $F$ είναι μια συνάρτηση δυο μεταβλητών και ικανοποιεί την εξίσωση

$$F\ \frac{x}{z},\ \frac{y}{z}\quad 0,$$

από την οποία ορίζεται ο $z$ ως πεπλεγμένη συνάρτηση των $x,\ y$, να δειχθεί η ισότητα $x\,z_x\quad y\,z_y\quad z\quad 0$.

Λυση:

Καλούμε $u\quad \frac{x}{z},\ v\quad \frac{y}{z}$. Η δοθείσα εξίσωση γίνεται $F(u,v)\quad 0$.

Οι μερικές παράγωγοι της $F$ είναι

$$F_x\quad F_u\ \frac{1}{z},\ F_y\quad F_v\ \frac{1}{z},\ F_z\qquad F_u\ \frac{x}{z^2}\quad F_v\ \frac{y}{z^2}.$$

Οι μερικές παράγωγοι της $z$ είναι

$$z_x\quad \frac{zF_u}{xF_u\quad yF_v},\ z_y\quad \frac{zF_v}{xF_u\quad yF_v}$$

οπότε η ζητούμενη σχέση αμέσως αποδεικνύεται.

38. Στη διαφορική εξίσωση

$$x(xy\quad 2y\ )\ \frac{\omega^2}{x^2}\ y\quad 0$$

να γίνει αλλαγή της μεταβλητής με τη σχέση $x\quad \frac{1}{t}$.

Λύση:

Προφανώς η μεταβλητή $y$ είναι συνάρτηση του $x$. Κατά συνέπεια

$$\frac{dy}{dx}\quad y_t\ \ t_x\qquad t^2\ \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}\quad \frac{d}{dx}\ \frac{dy}{dx}\qquad 2t^3\ \frac{dy}{dt}\quad t^4\ \frac{d^2y}{dt^2}$$

Θέτουμε τις τιμές αυτές στη δοθείσα εξίσωση και παίρνουμε

$$\frac{1}{t^2}\ \ t^3\ (2y_t\quad ty_{t^2}\ )\ \ \frac{2}{t}\ (\quad t^2\ y_t\ )\ \ \omega^2\ t^2\ y\quad 0$$

και μετά τις πράξεις παίρνουμε

$$y_{t^2}\quad \omega^2\ y\quad 0,$$

δηλ. μια διαφ. εξίσωση την οποία εύκολα λύνουμε.

***Πολικές συντεταγμένες***

Αν

$$x\quad r\cos\theta,\ y=r\sin\theta,$$

τότε

$$dx\quad \cos\theta dr\ \ r\sin\theta d\theta$$

$$dy=\sin\theta dr+r\cos\theta d\theta.$$

39. Στην εξίσωση $y_x\quad \frac{x^2\quad 2xy\quad y^2}{x^2\quad y^2}$ να εφαρμοσθεί η αλλαγή μεταβλητών από καρτεσιανές σε πολικές συντεταγμένες (α) $x\quad r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$, λαμβάνοντας υπόψη ότι ο $r$ είναι συνάρτηση της πολικής γωνίας.

Λύση:

Μετά τις απλοποιήσεις η εξίσωση παίρνει τη μορφή

(*) $\quad y_x \quad \dfrac{x \quad y}{x \quad y}.$

Εύκολα βρίσκουμε ότι

(**) $\quad \dfrac{dy}{dx} \quad \dfrac{sin\theta dr+rcos\theta d\theta}{cos\theta dr\text{-}rsin\theta d\theta}.$

Συνδυάζοντας τις ισότητες (α), (*) και (**) παίρνουμε

$$\frac{sin\theta dr+rcos\theta d\theta}{cos\theta dr\text{-}rsin\theta d\theta} \quad \frac{rcos\theta+rsi\theta}{rcos\theta\text{-}rsin\theta}.$$

Μετά τις πράξεις παίρνουμε

$$rd\theta = dr \qquad r = \frac{dr}{d\theta}.$$

40. Έστω η εξίσωση $\dfrac{^2 z}{x^2} \quad k^2 \quad \dfrac{^2 z}{t^2} \quad 0$ (εξίσωση κυμάτων). Να γίνει η αλλαγή μεταβλητών $u \quad x \quad \alpha t,\ v\text{=}y\text{+}\alpha t$.

Λύση:

Οι παράγωγοι πρώτης τάξεως της $z$ είναι:

$$\frac{z}{x} \quad \frac{z}{u}\frac{u}{x} \quad \frac{z}{v}\frac{v}{x} \quad \frac{z}{u} \quad \frac{z}{v}$$

$$\frac{z}{t} \quad \frac{z}{u}\frac{u}{t} \quad \frac{z}{v}\frac{v}{t} \quad k^2 \quad \frac{z}{v} \quad \frac{z}{u} \quad .$$

Οι παράγωγοι δευτέρας τάξεως της $z$ είναι:

$$\frac{^2 z}{x^2} \quad \frac{}{x}\frac{z}{x} \quad \frac{^2 z}{u^2} \quad 2 \quad \frac{^2 z}{u \ v} \quad \frac{^2 z}{v^2}$$

$$\frac{^2 z}{t^2} \quad \frac{}{t}\frac{z}{t} \quad k^2 \quad \frac{^2 z}{u^2} \quad 2 \quad \frac{^2 z}{u \ v} \quad \frac{^2 z}{v^2} \quad .$$

Θέτοντας τις τιμές αυτές στη δοθείσα εξίσωση παίρνουμε $\dfrac{^2 z}{u \ v} \quad 0.$

41. Δίνεται η εξίσωση $y \quad x(xy \quad y\,) \quad 0$. Να γίνει η αλλαγή $x \quad cosu$.

Λύση:

Η δοθείσα εξίσωση παίρνει τη μορφή $(1 \ \ x^2\,)y \quad xy \quad 0$.

Οι παράγωγοι της $y$ (λογιζόμενης ως σύνθετης συνάρτησης της $t$) είναι

$$y_x \quad y_t \ \ t_x \quad \frac{y_t}{sint},$$

$$y_{x^2} \quad \frac{}{x} \quad \frac{y_t}{sint} \quad \frac{1}{sin^3 t} \ ( \quad y_{t^2}\, sint \quad y_t\, cost).$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές στη δοθείσα εξίσωση παίρνουμε

$$\frac{1}{sint}\,(y_{t^2}\, sint \quad y_t\, cost) \quad \frac{x}{sint}\; y_t \quad 0 \qquad y_{t^2} \quad 0$$

$y_{t^2} \quad 0$, διότι $x{=}cost.$

42. Να πραγματοποιηθεί αλλαγή μεταβλητών στην εξίσωση $x\,z_y \quad y\,z_x \quad 0$, που ορίζεται από τις ισότητες $u \quad x,\ v \quad x^2 \quad y^2$.

Λύση:

Έχουμε

$$z_x \quad z_u\; u_x \quad z_v\; v_x \quad z_u \quad 2z_x\; x$$
$$z_y \quad z_u\; u_y \quad z_v\; v_y \quad 2z_y\; y.$$

Θέτοντας τις τιμές αυτές στη δοθείσα εξίσωση παίρνουμε

$$x\; 2z_y\; y \quad y\; (z_u \quad 2z_x\; x) \quad 0 \qquad z_u \quad 0.$$

43. Να μετασχηματισθεί η εξίσωση Laplace $\frac{{}^2 z}{x^2} \quad \frac{{}^2 z}{y^2} \quad 0$ σε πολικές συντεταγμένες $x \quad r\,cos\theta,\ y = r\,sin\theta.$

Λύση:

Οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξεως της $z$ είναι

$$z_x \quad z_r\; r_x \quad z_\theta\; \theta_x \quad z_r\; \frac{x}{r} \quad \frac{y}{r^2}\; z_\theta$$
$$z_y \quad z_r\; r_y \quad z_\theta\; \theta_y \quad z_r\; \frac{y}{r} \quad \frac{x}{r^2}\; z_\theta.$$

Οι μερικές παράγωγοι δευτέρας τάξεως της $z$ είναι

$$z_{x^2} \quad z_r \quad \frac{x}{r}^{2} \quad z_r\; \frac{y^2}{r^3} \quad \frac{2xy}{r^4}\; z_\theta \quad \frac{y^2}{r^4}\; z_{\theta^2}$$
$$z_{y^2} \quad z_r \quad \frac{y}{r}^{2} \quad z_r\; \frac{x^2}{r^3} \quad \frac{2xy}{r^4}\; z_\theta \quad \frac{y^2}{r^4}\; z_{\theta^2}.$$

Προσθέτοντας τις ισότητες αυτές κατά μέλη παίρνουμε

$$z_{x^2} \quad z_{y^2} \quad z_{r^2} \quad \frac{z_r}{r} \quad \frac{z_{\theta^2}}{r^2}.$$

Ώστε η εξίσωση Laplace σε πολικές συντεταγμένες είναι

$$\frac{{}^2 z}{r^2} \quad \frac{1}{r^2}\; \frac{{}^2 z}{\theta^2} \quad \frac{1}{r}\; \frac{z}{r} \quad 0.$$

44. Να υπολογισθούν τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης

$$z \quad x(x \quad y) \quad y(y \quad 3)$$

Λύση:

Η συνάρτηση παίρνει τη μορφή $z \quad x^2 \quad y^2 \quad xy \quad 3y$.

Οι μερικές παράγωγοι της πρώτης τάξεως είναι $z_x \quad 2x \quad y,\ z_y \quad 2y \quad x \quad 3$ και

***Μετατροπή καρτεσιανών σε πολικές συντεταγμένες***

Ισχύουν

$r \quad \sqrt{x^2 \quad y^2}$, $\theta{=}arctan(y/x)$.

Οι παράγωγοί τους είναι

$$r_x \quad \frac{x}{r},\ r_y \quad \frac{y}{r},$$
$$r_{x^2} \quad \frac{y^2}{\sqrt{r^3}},\ r_y \quad \frac{x^2}{\sqrt{r^3}}$$
$$\theta_x \quad \frac{y}{r^2},\ \theta_y \quad \frac{x}{r^2},$$
$$\theta_{x^2} \quad \frac{2xy}{r^4},\ \theta_y \quad \frac{2xy}{r^4}.$$

***Ακρότατα συναρτήσεως πολλών μεταβλητών***

Προκειμένου να βρούμε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης $f(x,y)$:

α. βρίσκουμε τις λύσεις α, β του συστήματος

$$f_x(x,y) \quad 0,\ f_y(x,y) \quad 0,$$

β. εξετάζουμε το πρόσημο της παράστασης (διακρίνουσας)

$D \quad [f_{x_o\, y_o}(\alpha,\beta)]^2 \quad f_{x_o^2}(\alpha,\beta)\; f_{y_o^2}(\alpha,\beta)$,

γ. αν ισχύει η $D{<}0$, η $f(\alpha,\beta)$ είναι ένα τοπικό ακρότατο και μάλιστα:

τοπικό μέγιστο αν

$f_{x^2}(\alpha,\beta) \quad 0$

(επομένως και $f_{y^2}(\alpha,\beta) \quad 0$)

τοπικό ελάχιστο αν

$f_{x^2}(\alpha,\beta) \quad 0$

(επομένως και $f_{y^2}(\alpha,\beta) \quad 0$),

δ. αν D>0 η $f$ δεν παρουσιάζει τοπικό ακρότατο,

ε. αν D=0 μπορεί να υπάρχει τοπικό ακρότατο ή και να μην υπάρχει. Απαιτείται στην περίπτωση αυτή να εξετάσουμε τις τιμές που παίρνουν οι επόμενοι όροι του αναπτύγματος Taylor.

μηδενίζονται όταν $2x \quad y=0,\ 2y \quad x \quad 3=0 \qquad x=1,\ y=2.$

Οι μερικές παράγωγοι δευτέρας τάξεως της συνάρτησης είναι

$z_{x^2} \quad 2,\ z_{y^2} \quad 2,\ z_{xy} \quad 1.$

Η ποσότητα $D$ είναι $D \quad (\quad 1)^2 \quad 2\ 2 \quad 3 \quad 0.$

Βλέπουμε ότι υπάρχει ακρότατο της συναρτήσεως. Επειδή $z_{x^2} \quad 0$ ($\kappa\alpha\iota$ $z_{y^2} \quad 0$) συμπεραίνουμε ότι στο σημείο $M(1,2)$ η δοθείσα συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο, η τιμή του οποίου είναι $z(1,2)=-3.$

45. Να υπολογισθούν τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης

$z \quad 3\alpha xy\text{-}x^3\ \text{-}y^3\ ,$

όπου α σταθερός πραγματικός αριθμός.

Λύση:

Οι παράγωγοι πρώτης τάξεως της συνάρτησης είναι

$z_x \quad 3\alpha y\text{-}3x^2,\ z_y \quad 3\alpha x\text{-}3y^2$

και μηδενίζονται όταν $3\alpha y\text{-}3x^2 \quad 0,\ 3\alpha x\text{-}3y^2 \quad 0 \qquad x=y=\alpha$ ή $x=y=0.$

Οι παράγωγοι δευτέρας τάξεως είναι $z_{x^2} \quad 6x,\ z_{y^2} \quad 6y,\ z_{xy} \quad 3\alpha.$

Με τις τιμές $x=y=0$ η ποσότητα D γίνεται $D \quad 9\alpha^2 \quad 0$, πράγμα που σημαίνει ότι στο σημείο αυτό η συνάρτηση δεν παρουσιάζει ακρότατο.

Με τις τιμές $x=y=\alpha$ η ποσότητα D γίνεται $D \quad 9\alpha^2\ \text{-}6\alpha\ 6\alpha=\text{-}27\alpha^2<0$. Δηλ. στο σημείο αυτό η συνάρτηση παρουσιάζει ακρότατο και μάλιστα

μέγιστο αν $\alpha>0$ ($z_{x^2} \quad 6\alpha$),

ελάχιστο αν $\alpha<0.$

Η τιμή του ακροτάτου είναι $z(\alpha,\alpha)=\alpha^3.$

46. Να υπολογισθούν, αν υπάρχουν, τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης

$z \quad (x \quad 1)^2 \quad 2y^2.$

Λύση:

Οι παράγωγοι πρώτης τάξεως της συνάρτησης είναι $z_x \quad 2(x \quad 1),z_y \quad 4y$ και μηδενίζονται όταν $x=1,\ y=0.$

Οι παράγωγοι δευτέρας τάξεως είναι $z_{x^2} \quad 2,\ z_{y^2} \quad 4,\ z_{xy}=0$. Η διακρίνουσα $D \quad 8 \quad 0$, πράγμα που σημαίνει ότι η συνάρτηση αυτή δεν παρουσιάζει ακρότατο.

47. Να βρεθεί ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με εμβαδόν ολικής επιφανείας $E=125$, του οποίου ο όγκος είναι μέγιστος.

Λύση:

Έστω x, y, z οι διαστάσεις των ακμών του παραλληλεπιπέδου. Το εμβαδόν του είναι

$E = 2(xy + yz + zx) \Rightarrow z = \frac{E - 2xy}{2(x + y)}$.

Ο όγκος του είναι $V = \frac{E - 2xy}{2(x + y)} x y$.

Οι παράγωγοι πρώτης τάξεως της συνάρτησης είναι

$$V_x = -\frac{y^2(2x^2 + 4xy - E)}{2(x + y)^2},\quad V_y = -\frac{x^2(2y^2 + 4xy - E)}{2(x + y)^2}$$

και μηδενίζονται όταν

$$\frac{y^2(2x^2 + 4xy - E)}{(x + y)^2} = 0,\quad \frac{x^2(2y^2 + 4xy - E)}{(x + y)^2} = 0,$$

από τις οποίες, επειδή $x, y \neq 0$, προκύπτει $x = y = \sqrt{\frac{E}{6}}$ και κατά συνέπεια $z = \sqrt{\frac{E}{6}}$, δηλ. πρόκειται για κύβο.

48. Να βρεθεί το ακρότατο της συνάρτησης $z = x^2 + y^2$ αν είναι γνωστό ότι οι μεταβλητές $x, y$ ικανοποιούν τη $x + y + 2 = 0$ (δεσμό).

Απόδειξη

Η συνάρτηση $F(x,y) = x^2 + y^2 + \lambda(x+y+2)$ έχει παραγώγους πρώτης τάξεως

$$F_x = 2x + \lambda,\ F_y = 2y + \lambda,\ F_\lambda = x + y + 2.$$

Το αντίστοιχο σύστημα (*)

$$2x + \lambda = 0,\ 2y + \lambda = 0,\ x + y + 2 = 0.$$

έχει λύση $x = -1,\ y = -1,\ \lambda = 2$.

Με τις τιμές $x = -1, y = -1$ η συνάρτηση $z$ παίρνει ενδεχομένως μια άκρα τιμή.

Οι παράγωγοι δευτέρας τάξεως της F είναι $F_{x^2} = 2,\ F_{y^2} = 2,\ F_{xy} = 0$, οπότε η διακρίνουσα είναι $D = 0 - 2 \cdot 2 = -4 < 0$, σχέση που βεβαιώνει ότι έχουμε ακρότατο υπό συνθήκη και μάλιστα ελάχιστο διότι $F_{x^2} > 0$.

Για να το διαπιστώσουμε δίνουμε στο $x$ μια αύξηση $h$ και στο $y$ μια αύξηση $k$ και υπολογίζουμε τη διαφορά $\Delta z = z(x,y) - z(x+h, y+k)$ στο σημείο $M(-1,-1)$.

$$\Delta z = (-1)^2 + (-1)^2 - (-1 + h)^2 - (-1 + k)^2 = -(h^2 + k^2 - 2(h + k)).$$

Το σημείο $M'(-1+h, -1+k)$ πρέπει να ικανοποιεί το δεσμό, δηλ.

$$-1 + h - 1 + k + 2 = 0 \Rightarrow h + k = 0.$$

Κατά συνέπεια $\Delta z = -(h^2 + k^2) < 0$.

Ώστε στο σημείο $M(-1,-1)$ η συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο, η τιμή του οποίου είναι $z_{min} = (-1)^2 + (-1)^2 = 2$.

49. Να βρεθεί το ακρότατο της συνάρτησης $z = 3(2 - x - y) - y$, αν είναι γνωστό ότι το σημείο $M(x,y)$ κινείται επί ενός κύκλου κέντρου Ο και ακτίνας $1$.

Λύση:

Η εξίσωση του κύκλου (δεσμός) είναι $x^2 + y^2 = 1$. Η συνάρτηση $F$ είναι

***Μέθοδος Lagrange***

Έστω η συνάρτηση με δυο μεταβλητές $z = f(x,y)$. Ζητούμε ένα τοπικό ακρότατο της συναρτήσεως αυτής αν είναι γνωστό ότι οι μεταβλητές x, y ικανοποιούν τη συνθήκη (δεσμό) $g(x,y) = 0$.

Σχηματίζουμε τη συνάρτηση

$$F(x,y) = f(x,y) + \lambda g(x,y).$$

Οι συντεταγμένες ενός τοπικού ακροτάτου της $f$, αν υπάρχουν, ικανοποιούν τις ισότητες (αναγκαιες συνθήκες)

$$F_x = f_x(x,y) + \lambda g_x(x,y)$$

(*) $$F_y = f_y(x,y) + \lambda g_y(x,y)$$

$$F_\lambda = g(x,y) = 0.$$

Εξυπακούεται ότι θα πρέπει κάθε λύση του συστήματος αυτού να εξετάζεται για να διαπιστωθεί αν πραγματικά αντιστοιχεί σε ακρότατο της συνάρτησης. Συγκεκριμένα αν $d^2F < 0$ έχουμε μέγιστο, ενώ αν $d^2F > 0$ έχουμε ελάχιστο, όπου

$$d^2F = \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 F(x,y).$$

Ειδικά αν η διακρίνουσα D της συναρτήσεως $F(x,y)$ είναι αρνητική στο σημείο που ικανοποιεί τις $F_x = 0, F_y = 0$, τότε έχουμε μέγιστο αν $F_{x^2} < 0$, ή ελάχιστο αν $F_{x^2} > 0$.

Αν η συνάρτηση είναι με ν μεταβλητές

$$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$$

και υπάρχουν κ δεσμοί

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_\nu) = 0,\ i = 1, 2, \ldots, k,$$

τότε, σχηματίζοντας την

$$F_i = f + \sum_{i=1}^{\kappa} \lambda_i g_i,$$

παίρνουμε την αναγκαία συνθήκη ύπαρξης ακροτάτου

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_\nu) = 0,\ i = 1, 2, \ldots, k$$

$$F_i(x_1, x_2, \ldots, x_\nu) = 0,\ i = 1, 2, \ldots, k.$$

$$F(x,y)\quad 6\quad 4x\quad 3y\quad \lambda(x^2+y^2-1),$$

της οποίας οι μερικές παράγωγοι είναι

$$F_x\quad 2\lambda x\text{-}4,\ F_y=2\lambda y\text{-}4,\ F_\lambda=x^2+y^2-1.$$

Οι συνθήκες (*) δίνουν

$$2\lambda x\text{-}4=0,\ 2\lambda y\text{-}4=0,\ x^2+y^2-1=0,$$

που αληθεύουν όταν ή $x\quad 4/5, y\quad 3/5, \lambda=5/2$ ή $x\quad\ 4/5, y\quad\ 3/5, \lambda=\ \ 5/2$.

Οι παράγωγοι δευτέρας τάξεως είναι

$$F_{x^2}\quad 2\lambda,\ F_{y^2}=2\lambda,\ F_{xy}=0,$$

οπότε $d^2F\quad 2\lambda(dx^2+dy^2)$.

Στο σημείο $M(4/5,3/5)$, που παίρνουμε $\lambda=5/2$, αντιστοιχεί $d^2F\quad 0$, δηλ. στο σημείο $M$ εμφανίζεται ελάχιστο υπό περιορισμό, ενώ στο σημείο $N(-4/5,-3/5)$, που παίρνουμε $\lambda= -5/2$, αντιστοιχεί $d^2F\quad 0$, δηλ.στο N εμφανίζεται μέγιστο υπό περιορισμό.

Εύκολα βρίσκουμε ότι $z_{max}\quad 11,\ z_{min}\quad 1.$

50. Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης

$$z\quad x^2\quad y^2$$

αν είναι γνωστό ότι τα $x$, $y$ ικανοποιούν την $3x\quad 2y\quad 6\quad 0$.

Λύση:

Η συνάρτηση $F$ είναι $F(x,y)\quad x^2\quad y^2\quad \lambda(3x+2y-6)$.

Οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξεως της $F$ είναι

$$F_x\quad 2x\quad 3\lambda,\ \ F_y=2y+2\lambda,\ F_\lambda=3x+2y-6.$$

Οι συνθήκες (*) δίνουν

$$2x\quad 3\lambda=0,\ \ 2y+2\lambda=0,\ 3x+2y-6=0\qquad .$$

$$x=18/13,\ y=12/3,\ \lambda=-12/13.$$

Οι παράγωγοι δευτέρας τάξεως είναι $F_{x^2}\quad F_{y^2}\quad 2,\ F_{xy}\quad 0$, οπότε

$$d^2F\quad 4(d^2x\quad d^2y)>0.$$

Δηλ. η συνάρτηση αυτή παρουσιάζει ελάχιστο υπό περιορισμό στο σημείο $M(18/13,12/13)$, η τιμή του οποίου είναι $F_{min}\quad (18/13)^2\quad (12/13)^2\quad \dfrac{36}{13}$.

### *Προτεινόμενες ασκήσεις*

51. Να βρεθεί το χωρίο στο οποίο η συνάρτηση $f(x,y)\quad \dfrac{1\quad 2xy}{y^2\quad x}$ είναι ασυνεχής.

52. Να εξετασθεί αν είναι συνεχής η συνάρτηση

$$f(x,y)\quad \begin{matrix} \dfrac{2xy}{x^2\quad y^2}, & \text{αν } x^2\quad y^2\quad 0 \\ 0, & \text{αν } x=y=0 \end{matrix}\ .$$

*Απαντήσεις*

51. Η παραβολή $y^2\quad x$.

52. Είναι συνεχής.

53. Να δειχθεί ότι $f_x\, x \quad f_y\, y \quad 2$, αν $f(x,y) \quad \ell n(x^2 \quad xy \quad y^2)$.

54. Να δειχθεί ότι $f_x \quad f_y \quad f_z \quad 0$, αν $f(x,y,z) \;\; (x \quad y)(y \quad z)(z \quad x)$.

55. Να δειχθεί ότι $f_x \quad f_y \quad f_z \quad 0$, αν $f(x,y) \quad x \quad \dfrac{x \quad y}{y \quad z}$.

56. Να βρεθούν τα ολικά διαφορικά των συναρτήσεων

α. $f(x,y) \quad \ell n tan\dfrac{y}{x}$,

β. $f(x,y,z) \quad x\,y\,z$,

γ. $f(x,y,z) \quad \dfrac{z}{\sqrt{x^2 \quad y^2}}$ στο σημείο $M(3,4,5)$.

57. Να βρεθεί η παράγωγος $\dfrac{du}{dt}$ της συνάρτησης

$u \quad \dfrac{x}{y}$, αν $x \quad e^t$, $y \quad \ell nt$.

58. Να βρεθούν οι παράγωγοι $\dfrac{z}{x}$, $\dfrac{dz}{dx}$ της συνάρτησης $z \quad arctan\dfrac{y}{x}$, αν $y \quad x^2$.

59. Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι $z_x$, $z$ της συνάρτησης $z \quad u^2 \quad v^2$, αν $u \;\; x^2 \quad y^2$, $v \;\; e^{xy}$.

60. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $z \quad \dfrac{1}{\sqrt{(z \quad \alpha)^2 \quad y^2}}$, α=σταθ. ικανοποιεί την εξίσωση $z_{x^2} \quad z_{y^2} \quad 0$.

61. Να βρεθεί το $d^2u$ της συνάρτησης $u \quad xyz$.

62. Να εξετασθεί αν είναι ολικό διαφορικό η ποσότητα $A \quad \dfrac{xdx \quad ydy \quad zdz}{\sqrt{x^2 \quad y^2 \quad z^2}}$ και στην καταφατική περίπτωση να βρεθεί η συνάρτηση $F(x,y,z)$ της οποίας είναι ολικό διαφορικό.

63. Να δειχθεί ότι είναι ολικό διαφορικό η ποσότητα $A=g(x,y) \;\; (dx \quad dy)$, όταν $g_x \quad g_y$.

64. Να βρεθούν οι ολικές παράγωγοι $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ της πεπλεγμένης συνάρτησης $y \;\; y(x)$, αν $x \quad y \quad \ell ny$.

65. Να μετασχηματισθεί η εξίσωση $(x^2 \quad 1)y \quad xy \quad 0$ θέτοντας $x \;\; cosu$.

66. Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης $u \quad x \quad 2y$, αν είναι γνωστό ότι τα $x$, $y$ είναι συντεταγμένες σημείου που γράφουν κυκλο με κέντρο το Ο και ακτίνα $\sqrt{5}$.

56α. $df \quad \dfrac{2\big(dy \;\; (y/x)dx\big)}{xsin(2y/x)}$.

β. $df \quad yzdx \;\; zxdy \;\; xydz$.

γ. $df(3,4,5) \quad \dfrac{3dx \;\; 4dy \;\; 5dz}{25}$.

57. $\dfrac{du}{dt} \quad e^t \quad \dfrac{1}{\ell nt} \quad \dfrac{1}{t\,\ell n^2 t}$.

58. $z_x \quad \dfrac{y}{x^2 \quad y^2}$, $\dfrac{dy}{dx} \quad \dfrac{1}{1 \quad x^2}$.

59. $z_x \;\; 4ux \;\; 2uye^{xy}$

$z_y \quad 4uy \;\; 2xve^{xy}$.

61. $d^2u \;\; 2(xdydz \quad ydzdx \quad zdxdy)$.

62. $F(x,y,z) \;\; \sqrt{x^2 \quad y^2 \quad z^2} \quad C$.

64. $\dfrac{dy}{dx} \quad \dfrac{y}{y \;\; 1}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2} \quad \dfrac{y}{(1 \quad y)^3}$.

65. $\dfrac{d^2y}{du^2} \quad 0$.

66. $u_{max} \quad 5$ στο $M(1,2)$

$u_{min} \quad 5$ στο $M'(-1,-2)$.