ΘΩΜΑ ΚΥΒΕΝΤΙΔΗ

ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

Κάθε γνήσιο αντίτυπο υπογράφεται από το συγγραφέα

ΘΩΜΑΣ Α. ΚΥΒΕΝΤΙΔΗΣ

Γεννήθηκε το 1947 στο Νέο Πετρίτσι του Ν. Σερρών.
Το 1965 αποφοίτησε από το εξατάξιο Γυμνάσιο Σιδηροκάστρου του Ν. Σερρών
και εγγράφηκε στο Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης.
Πήρε το πτυχίο των Μαθηματικών το 1969.
Αναγορεύτηκε διδάκτορας στο Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης
το 1979 και από το 1972 μέχρι σήμερα εργάζεται σ' αυτό.

ISBN 960-431-275-8

Δεύτερη Έκδοση 1994

«Η επιστημονική γνώση πλησιάζει έτσι την καλλιτεχνική δημιουργία. Και στη μία και στην άλλη περίπτωση έχουμε να κάνουμε με μιαν ύλη που την πλάθει ο νους και μ' ένα νου που τον πλάθει η ύλη για να μπορέσει να εκφραστεί. Τίποτε δεν είναι δοσμένο από πριν μέσα στη γνώση μα ούτε και μέσα στον ίδιο τον κόσμο. Κόσμος και γνώση είναι δύο κινούμενα σχήματα που αλλάζουν αδιάκοπα σε στενή αλληλοεξάρτηση. Αδιάκοπα καινούργιες σχέσεις γεννιούνται μεταξύ τους κι οι καινούργιες αυτές σχέσεις δίνουν τον τόπο τους στη γνώση και στην επιστήμη της κάθε εποχής.

Αυτή είναι η διαλεχτική σχέση.

Η επιστήμη είναι λοιπόν όπως κι η τέχνη κάτι ανοιχτό που πλάθεται αδιάκοπα με στενή συνεργασία του νου και του κόσμου. Τα πράματα οδηγούν το νου σε καινούργιους δρόμους για να βρει κανούργια γνωστικά μέσα, καινούργια μαθηματικά σχήματα, που να μπορούν να εκφράσουν καλύτερα τον κόσμο. Μα τα σχήματα αυτά δίνουν με τη σειρά τους στον κόσμο καινούργια υφή κι αλλάζουν τη μορφή του.

Η διαλεχτική αυτή πορεία που δεν κλείνει τίποτε, παρά αφήνει όλα ανοιχτά στο δρόμο της, φανερώνεται καθαρά στο πνεύμα της σύγχρονης επιστήμης. Καμιά έννοια από τις πιο βασικές που μεταχειρίζεται η επιστήμη, όπως η ύλη, έκταση, χώρος κ.λπ. δεν προβάλλει σαν καθορισμένη από πριν παρά μπορεί να δεχτεί διάφορες και αντίθετες λύσεις.

Η θεωρία της σχετικότητας, των κβάντα στη φυσική, οι ευκλείδειες και μη ευκλείδειες γεωμετρίες στα μαθηματικά, ο ντετερμινισμός και ο ιντετερμινισμός δείχνουν πόσο ανοιχτά πρέπει να μένουν τα νοήματα της φιλοσοφίας και της επιστήμης. Η πραγματικότητα προβάλλει σαν πολύπλευρη κι αντιφατική και η επιστήμη μοιάζει πελώρια φαντασία που δημιουργεί έναν κόσμο πιθανό, που όμως τρέχει ολοένα κι αλλάζει".

Από το βιβλίο του *Χ. ΘΕΟΔΩΡΙΔΗ:* "*Εισαγωγή στη Φιλοσοφία*", Εκδόσεις "ΕΣΤΙΑΣ", Αθήνα, 1955

(Γνωσιοθεωρία: ΙΙ. Το πρόβλημα για τη δυνατότητα).

Αυτό το βιβλίο αφιερώνεται στα παιδιά μου

Τάσο και Νίκο ΚΥΒΕΝΤΙΔΗ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το βιβλίο αυτό είναι μια εισαγωγή στο Λογισμό Μεταβολών και στα προβλήματα του Βέλτιστου Ελέγχου, και έχει στόχο να παρουσιάσει απλά και κατανοητά, αλλά και με μαθηματική αυστηρότητα, τα βασικά αποτελέσματά τους.

Η εισαγωγή των εννοιών γίνεται χωρίς ο αναγνώστης να επιβαρυνθεί με πολλές θεωρητικές διαδικασίες, για να είναι έτσι κατανοητή και από μη μαθηματικούς.

Σε κάθε κεφάλαιο περιέχονται οι ορισμοί, οι προτάσεις, τα θεωρήματα, οι παρατηρήσεις και τα παραδείγματα, τα οποία δείχνουν τον τρόπο εφαρμογής της θεωρίας στα προβλήματα.

Στο τέλος, στα λυμένα προβλήματα, δίνονται ορισμένες εφαρμογές που δείχνουν τη δύναμη των μαθηματικών για την ερμηνεία διαφόρων προβλημάτων και τονίζουν τη μεγάλη σημασία του Λογισμού Μεταβολών και του Βέλτιστου Ελέγχου, όχι μόνο για τα Μαθηματικά, αλλά και τις άλλες Επιστήμες.

Οι προτεινόμενες ασκήσεις συνοδεύονται με τις απαντήσεις τους.

Στο παράρτημα παραθέτουμε όλες εκείνες τις ειδικές έννοιες που χρησιμοποιούμε για την ανάπτυξη της θεωρίας.

Ακόμη, το βιβλίο αυτό έχει σκοπό να δώσει ερεθίσματα για την παραπέρα μελέτη της σχετικής βιβλιογραφίας.

Οι προαπαιτούμενες γνώσεις, για την κατανόηση του βιβλίου, είναι ο Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός, καθώς και οι Στοιχειώδεις Διαφορικές Εξισώσεις.

Θεσσαλονίκη, 1993 — *Θ. ΚΥΒΕΝΤΙΔΗΣ*

Π Ε Ρ Ι Ε Χ Ο Μ Ε Ν Α

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4
ΙΚΑΝΗ ΣΥΝΘΗΚΗ ΓΙΑ ΑΚΡΑ ΤΙΜΗ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5
ΑΠ' ΕΥΘΕΙΑΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΓΙΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ
ΛΟΓΙΣΜΟΥ ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6
ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΒΕΛΤΙΣΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ

ΧΡΗΣΙΜΟΙ ΤΥΠΟΙ

Οι *υπερβολικές συναρτήσεις* ορίζονται ως εξής:

$\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ (υπερβολικό ημίτονο) , $\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$ (υπερβολική εφαπτομένη)

$\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ (υπερβολικό συνημίτονο), $\coth x = \dfrac{\cosh x}{\sinh x}$ (υπερβολ. συνεφαπτομένη)

Βασικοί τύποι των υπερβολικών συναρτήσεων:

$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$, $\sinh x + \cosh x = e^x$, $\sinh x - \cosh x = -e^{-x}$

$\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x$, $\sinh(-x) = -\sinh x$, $\cosh(-x) = \cosh x$

$\cosh 2x = \sinh^2 x + \cosh^2 x$, $\tanh(-x) = -\tanh x$, $\coth(-x) = -\coth x$

$\sinh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1)$,

$\cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1)$, $\displaystyle\int \sinh \alpha x \, dx = \frac{1}{\alpha}\cosh \alpha x$, $\displaystyle\int \cosh \alpha x \, dx = \frac{1}{\alpha}\sinh \alpha x$

$1 - \tanh^2 x = (\cosh^2 x)^{-1}$, $(\sinh \alpha x)' = \alpha \cdot \cosh \alpha x$, $(\cosh \alpha x)' = \alpha \cdot \sinh \alpha x$

$\coth^2 x - 1 = (\sinh^2 x)^{-1}$, (α σταθερή).

Τύποι του de Moivre

$(\sinh x + \cosh x)^k = \sinh kx + \cosh kx$, $(\cosh x - \sinh x)^k = \cosh kx - \sinh kx$,

$(\text{συν}x + i\text{ημ}x)^k = \text{συν}kx + i\text{ημ}kx$, $(\text{συν}x - i\text{ημ}x)^k = \text{συν}kx - i\text{ημ}kx$, $i = \sqrt{-1}$.

Βασικοί τύποι των τριγωνομετρικών συναρτήσεων:

$ημ^2x+συν^2x = 1$,	$ημ(-x) = -ημx$, $συν(-x) = συνx$
$ημ2x = 2ημx\,συνx$,	$εφ(-x) = -εφx$, $σφ(-x) = -σφx$
$1+εφ^2x = (συν^2x)^{-1}$,	$\int ημα\,x\,dx = -\frac{1}{α}συναx$, $\int συνα\,x\,dx = \frac{1}{α}ημαx$
$1+σφ^2x = (ημ^2x)^{-1}$,	$(ημαx)' = α\cdot συναx$, $(συναx)' = -αημαx$
$ημ^2x = \frac{1}{2}(1-συν2x)$,	(α σταθερή)
$συν^2x = \frac{1}{2}(1+συν2x)$,	$συν2x = συν^2x-ημ^2x$.

Τύποι του Euler

$e^{ix} = συνx+iημx$, $e^{-ix} = συνx-iημx$, $i=\sqrt{-1}$.

Σχέσεις μεταξύ των τριγωνομετρικών και των υπερβολικών συναρτήσεων:

$ημix = i\sinh x$, $συνix = \cosh x$, $εφix = i\tanh x$, $σφix = -i\coth x$, $i=\sqrt{-1}$.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στα προβλήματα που αναφέρονται στη θεωρία των άκρων τιμών (μέγιστα και ελάχιστα) του Διαφορικού Λογισμού αναγόμαστε στη μελέτη πραγματικών συναρτήσεων μιας ή περισσοτέρων πραγματικών μεταβλητών και αναζητούμε συγκεκριμένες πραγματικές τιμές των μεταβλητών αυτών για τις οποίες η μελετούμενη συνάρτηση παίρνει μέγιστη ή ελάχιστη τιμή.

Στα προβλήματα του Λογισμού Μεταβολών η λύση ανάγεται στη μελέτη παραστάσεων οι οποίες περιέχουν μία ή περισσότερες άγνωστες πραγματικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής, δηλαδή στη μελέτη συναρτήσεων των οποίων το σύνολο ορισμού είναι σύνολο συναρτήσεων και το σύνολο τιμών υποσύνολο των πραγματικών αριθμών. Έτσι, *αντί ν' αναζητούμε έναν αριθμό, αναζητούμε μια συνάρτηση που να δίνει στη δοσμένη παράσταση τη μέγιστη ή ελάχιστη δυνατή τιμή.*

Οι παραστάσεις αυτές λέγονται "συναρτησιακά" και είναι μια γενίκευση της έννοιας της συνάρτησης.

Οι εφαρμογές του Λογισμού Μεταβολών καλύπτουν όλους τους κλάδους της Επιστήμης. Στις τεχνικές κατασκευές επιδιώκεται η βελτιστοποίηση των κατασκευών, π.χ. ελαχιστοποίηση της μάζας για δοσμένα όρια αντοχής ή ο προσδιορισμός του σχήματος έτσι ώστε να ελαχιστοποιούνται οι τριβές και οι τάσεις. Στην οικονομία επιδιώκεται η ελαχιστοποίηση του κόστους. Τέλος, στη φυσική είναι δυνατή η διατύπωση των προβλημάτων σαν προβλημάτων άκρων τιμών ενός συναρτησιακού.

Στη συνέχεια θ' αναφέρουμε μερικά χαρακτηριστικά προβλήματα.

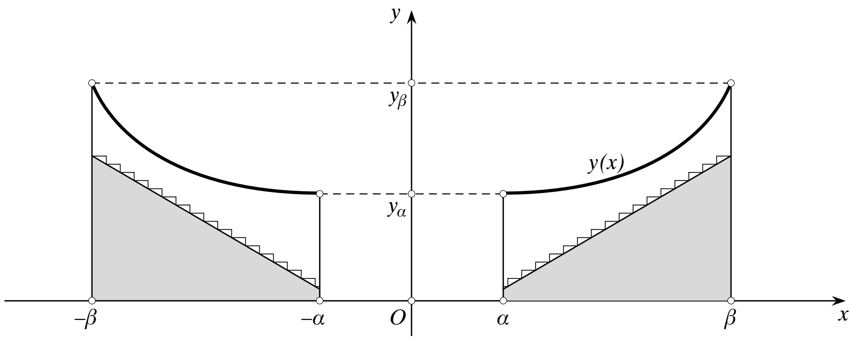
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1: Ελάχιστη επιφάνεια περιστροφής.

Οι κερκίδες κυκλικού σταδίου να στεγαστούν με στέγη ελάχιστου εμβαδού της οποίας η εσωτερική και η εξωτερική της περιφέρεια βρίσκονται σε δοσμένα ύψη.

Έστω ότι $y(x)$ είναι η διατομή της ζητούμενης επιφάνειας.

Το μήκος τόξου αυτής της καμπύλης, ανάμεσα στις ακτίνες x και $x+\Delta x$, είναι προσεγγιστικά (για Δx πολύ μικρό):

$$\Delta s \simeq \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2} = \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\cdot \Delta x$$



ενώ ο δακτύλιος που βρίσκεται ανάμεσα σε αυτές τις δύο ακτίνες έχει εμβαδό (προσεγγιστικά):

$$\Delta E \simeq 2\pi x \cdot \Delta s = 2\pi x \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \cdot \Delta x \, .$$

Το εμβαδόν της επιφάνειας που προκύπτει με περιστροφή της καμπύλης $y(x)$, περί τον άξονα των y, είναι

$$E(y) = 2\pi \int_\alpha^\beta x\sqrt{1+(y'(x))^2}\, dx \, .$$

Η ελαχιστοποίηση του συναρτησιακού $E(y)$ ζητείται για $y \in C^1([\alpha, \beta], R)$, υπό τους συνοριακούς περιορισμούς

$$y(\alpha) = y_\alpha \, , \qquad y(\beta) = y_\beta \, ,$$

όπου y_α, y_β είναι δοσμένα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Στον ευκλείδειο χώρο των τριων διαστάσεων δίνονται δύο σημεία $A(x_0, y_0, z_0)$ *και* $B(x_1, y_1, z_1)$ (σε τρισορθογώνιο σύστημα αξόνων). Μεταξύ των τόξων που έχουν άκρα τα σημεία A, B ποιο είναι εκείνο που έχει το ελάχιστο μήκος;

Θεωρούμε δύο πραγματικές συναρτήσεις y, z κλάσης C^1 στο κλειστό διάστημα $I = [x_0, x_1]$, και τέτοιες ώστε

$$y(x_0) = y_0 \, , \;\; y(x_1) = y_1, \quad z(x_0) = z_0, \quad z(x_1) = z_1 \, .$$

Αν θέσουμε

$$S = \{(x, y, z) : x \in I, \;\; y = y(x) \, , \;\; z = z(x)\} \, ,$$

είναι φανερό ότι το τόξο αυτό S έχει άκρα τα σημεία A, B και το μήκος του l δίνεται από τη σχέση

$$l = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+(y'(x))^2+(z'(x))^2}\ dx\ .$$

Η σχέση αυτή ανάγει τη λύση του προβλήματος στην εύρεση δύο πραγματικών συναρτήσεων $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ κλάσης C^1 στο I και τέτοιων ώστε η τιμή του ολοκληρώματος

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+(\varphi_1'(x))^2+(\varphi_2'(x))^2}\ dx$$

να είναι η ελάχιστη τιμή του l.

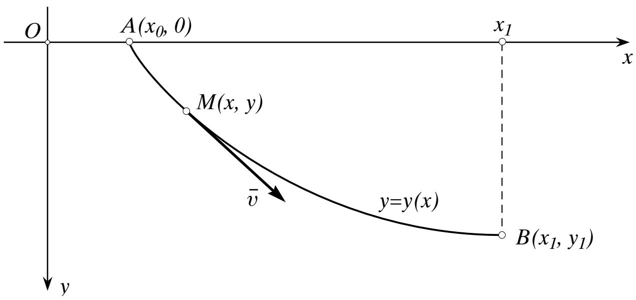
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3: Πρόβλημα του βραχυστοχρόνου.

Δίνονται δύο σημεία A, B στον ευκλείδειο χώρο των τριων διαστάσεων. Να βρεθεί τόξο καμπύλης με άκρα τα A, B και τέτοιο ώστε βαρύ υλικό σημείο που ξεκινά από το A, χωρίς αρχική ταχύτητα και κινούμενο χωρίς τριβή υπό την επίδραση της βαρύτητας, κινούμενο πάνω στο τόξο να φτάσει στο B στον ελάχιστο δυνατό χρόνο.

Το πρόβλημα αυτό είναι γνωστό ως "πρόβλημα του βραχυστοχρόνου" και λύθηκε από τον *Johann BERNOULI* το 1696.

Αρχικά αποδεικνύεται ότι *το ζητούμενο τόξο πρέπει να βρίσκεται στο κατακόρυφο επίπεδο που περνάει από τα σημεία A, B.*

Θεωρούμε, πάνω σ' αυτό το επίπεδο, ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων και έστω $A(x_0, 0), B(x_1, y_1)$.



Θέτουμε $I = [x_0, x_1]$, $S = \{(x, y): x \in I, y = y(x)\}$, όπου y πραγματική συνάρτηση κλάσης C^1 στο $I = [x_0, x_1]$ και τέτοια ώστε

$$y(x_0) = 0\ ,\quad y(x_1) = y_1\ .$$

Είναι φανερό ότι το τόξο S έχει άκρα τα δοσμένα σημεία A, B και αν t είναι ο χρόνος που απαιτείται, για τη μετάβαση του βαρέος υλικού σημείου από το A στο B, τότε

$$t = \int_{x_0}^{x_1} \frac{ds}{\upsilon} \ ,$$

όπου υ είναι το μέτρο της ταχύτητας στο σημείο $M(x, y)$ του τόξου S.

Αλλά, αφού το βαρύ υλικό σημείο κινείται πάνω στο S υπό την επίδραση της βαρύτητας και χωρίς τριβή, με αρχική ταχύτητα στο A μηδέν, θα είναι (διατήρηση της ενέργειας $\frac{1}{2}m\upsilon^2 = mgy$)

$$\upsilon = \sqrt{2gy} \ ,$$

όπου $y=y(x)$ και g η επιτάχυνση της βαρύτητας.

Επομένως έχουμε

$$t[y] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+(y'(x))^2}}{\sqrt{y(x)}} \, dx,$$

όπου g η επιτάχυνση της βαρύτητας.

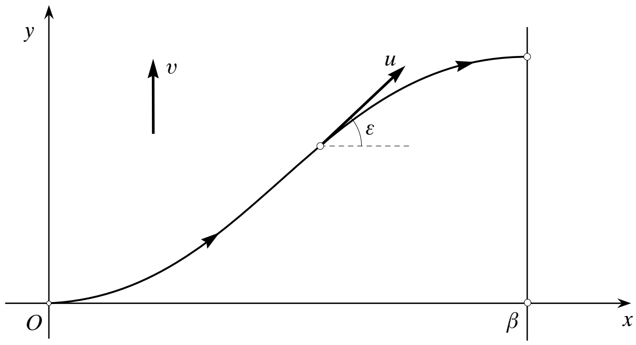
Η σχέση αυτή ανάγει τη λύση του προβλήματος στον προσδιορισμό μιας συνάρτησης $\varphi(x)$ κλάσης C^1 στο I και τέτοιας ώστε η τιμή του ολοκληρώματος

$$\frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+(\varphi'(x))^2}}{\sqrt{\varphi(x)}} \, dx$$

να είναι η ελάχιστη δυνατή.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4: Το πρόβλημα της ναυσιπλοΐας.

Υποθέτουμε ότι οι όχθες ποταμού είναι παράλληλες και σε απόσταση β μονάδων.



Τη μία όχθη τη θεωρούμε ως άξονα των y. Η ταχύτητα του ρεύματος σε κάθε σημείο (x, y) είναι $\upsilon=\upsilon(x)$, δηλαδή παράλληλη προς τον άξονα των

y. Μια βάρκα κινείται με ταχύτητα u $(u^2 > \upsilon^2)$ και πρόκειται να διασχίσει τον ποταμό στον ελάχιστο δυνατό χρόνο, με σημείο εκκίνησης την αρχή των αξόνων $(0, 0)$.

Αν είναι ε η γωνία, που εξαρτάται από την πορεία της βάρκας, τότε η πραγματική ταχύτητα της βάρκας στον ποταμό δίνεται από τις δ.ε. $\frac{dx}{dt} = u\sigma\upsilon\nu\varepsilon$, $\frac{dy}{dt} = \upsilon(x) + u\eta\mu\varepsilon$. Για το δρόμο $y=y(x)$, πάνω στον οποίο κινείται η βάρκα, έχουμε

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt} = \frac{\upsilon + u\eta\mu\varepsilon}{u\sigma\upsilon\nu\varepsilon}.$$

Ο απαιτούμενος χρόνος, για να πάει η βάρκα στην απέναντι όχθη, δίνεται από τη σχέση

$$t = \int_0^t dt = \int_0^\beta \frac{dt}{dx}\, dx = \int_0^\beta \frac{dx}{u\sigma\upsilon\nu\varepsilon} \quad .$$

Αλλά είναι

$$u\sigma\upsilon\nu\varepsilon\, \frac{dy}{dx} = \upsilon + u\sqrt{1 - \sigma\upsilon\nu^2\varepsilon}\ ,$$

κι αν λυθεί αυτή ως προς $1/u\,\sigma\upsilon\nu\varepsilon$ σε συνάρτηση των υ, u, y' και αντικατασταθεί στο ολοκλήρωμα, προκύπτει

$$t = \int_0^\beta \frac{\sqrt{u^2(1+(y'(x)^2) - \upsilon^2(x))} - \upsilon(x)y'(x)}{u^2 - \upsilon^2(x)}\, dx\,,$$

όπου $\upsilon(x)$ είναι γνωστή συνάρτηση.

Το ολοκλήρωμα αυτό, το οποίο ζητάμε να γίνει ελάχιστο, είναι του ίδιου τύπου με τα ολοκληρώματα των προηγουμένων προβλημάτων. Αλλά όμως εδώ υποτίθεται μόνον μία αρχική συνθήκη: $y(0) = 0$.

Το άλλο άκρο μπορεί να κινείται ελεύθερα κατά μήκος της όχθης $x = \beta$.

Αυτό είναι βέβαια λογικό γιατί διάφορα σημεία τερματισμού δίνουν, γενικά, διάφορους χρόνους και ενδιαφερόμαστε για τον ελάχιστο χρόνο διάσχισης του ποταμού, ανεξάρτητα από το που μπορούμε να προσαράξουμε. ■

Η προσπάθεια εύρεσης γενικών μεθόδων με τις οποίες να επιτυγχάνεται η λύση προβλημάτων, όπως τα παραπάνω, συνετέλεσε στη διαμόρφωση ιδιαίτερου κλάδου της Μαθηματικής Επιστήμης, ο οποίος και πήρε το όνομα "Λογισμός Μεταβολών".

Στη διαμόρφωση του κλάδου του Λογισμού των Μεταβολών συνετέλεσαν, αρχικά οι εργασίες των *EULER, LAGRANGE, LEGENDRE* και *JACOBI.* Κατόπιν οι *WEIERSTRASS, DU BOIS-REYMOND, SCHEEFFER, SCHWARZ* και άλλοι, πρόσθεσαν σ' αυτόν νέες και σημαντικές θεωρίες.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

1. Ο χώρος των καμπύλων κλάσης C^1

Έστω $I = [\alpha, \beta] \subset R$. Μία καμπύλη του χώρου R^n είναι μια απεικόνιση

$$\varphi: I \to R^n$$

και είναι κλάσης C^k αν η φ είναι κλάσης C^k, δηλαδή με συνεχή παράγωγο k τάξης στο I.

Το σύνολο αυτών των καμπύλων το σημειώνουμε $C^k(I, R^n)$.

Θα θεωρήσουμε γενικότερα καμπύλες σ' ένα χώρο *Banach* E (στο σώμα R).

Έτσι μια καμπύλη κλάσης C^1 είναι, από τον ορισμό, μια απεικόνιση

$$\varphi : I \to E$$

κλάσης C^1.

Το σύνολο αυτών των καμπύλων $C^1(I, E)$ μπορεί να εφοδιαστεί με δομή *διανυσματικού χώρου* (στο R) με τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού με αριθμό $\lambda \in R$.

Αυτόν τον διανυσματικό χώρο τον σημειώνουμε V.

Θα ορίσουμε τώρα στον V δομή χώρου *Banach* (βλέπε ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ).

ΟΡΙΣΜΟΣ: *Για* $\varphi: I \to E$ *κλάσης* C^1 *ορίζουμε*

$$\|\varphi\| = \sup_{x \in I} \|\varphi(x)\| + \sup_{x \in I} \|\varphi'(x)\|$$

που είναι αριθμός πεπερασμένος και μεγαλύτερος ή ίσος με μηδέν, γιατί οι απεικονίσεις $x \to \|\varphi(x)\|$ *και* $x \to \|\varphi'(x)\|$ *είναι συναρτήσεις συνεχείς με τιμές θετικές ή μηδέν και φραγμένες στο συμπαγές διάστημα* I.

Αποδεικνύεται ότι η $\|\varphi\|$ ορίζει νορμική στον V.

ΠΡΟΤΑΣΗ: *Ο νορμικός χώρος* $(V, \|\varphi\|)$ *είναι πλήρης.*

Απόδειξη: Έστω (φ_n) *μια ακολουθία Cauchy* του νορμικού χώρου V. Επειδή είναι

$$\sup_{x\in I} \|\varphi_m(x)-\varphi_n(x)\| \leq \|\varphi_m-\varphi_n\|$$

η ακολουθία (φ_n) είναι επίσης ακολουθία *Cauchy* με τη νορμική της ομοιόμορφης σύγκλισης.

Άρα, η (φ_n) συγκλίνει ομοιόμορφα προς μια συνεχή συνάρτηση

$$\varphi: I \to E,$$

γιατί ο E είναι χώρος *Banach*.

Μένει να δείξουμε ότι η φ είναι κλάσης C^1 και ότι είναι το όριο της ακολουθίας (φ_n) με τη νορμική του χώρου V.

Αλλά η ακολουθία των παραγώγων (φ'_n) είναι επίσης ακολουθία του *Cauchy* με τη νορμική της ομοιόμορφης σύγκλισης γιατί

$$\sup_{x\in I} \|\varphi'_m(x)-\varphi'_n(x)\| \leq \|\varphi_m-\varphi_n\| .$$

Άρα, η (φ'_n) συγκλίνει ομοιόμορφα προς μια συνεχή συνάρτηση ψ.

Από το Διαφορικό Λογισμό είναι γνωστό (ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ, Πρόταση 1) ότι

$$\varphi'(x) = \psi(x), \quad x\in I .$$

Έτσι έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I}\|\varphi_n(x)-\varphi(x)\| = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I}\|\varphi'_n(x)-\varphi'(x)\| = 0$$

και κατά συνέπεια $\lim_{n\to\infty}\|\varphi_n-\varphi\| = 0$, πράγμα που αποδεικνύει το ζητούμενο.

2. Συναρτησιακό

Έστω $U \subset R \times E \times E$ ανοικτό σύνολο* και $F: U \to R$ συνάρτηση κλάσης C^k. Σημειώνουμε με $F(x, y, z)$ την τιμή της στο σημείο $(x, y, z) \in U$.

Για δοσμένη καμπύλη $\varphi: I \to E$ κλάσης C^1 τέτοια ώστε

$$\big(x, \varphi(x), \varphi'(x)\big) \in U, \quad \forall\, x\in I \qquad (1)$$

μπορούμε να ορίσουμε τον πραγματικό αριθμό

---

* Είναι $U = I_0 \times A \times B$, όπου $I_0 \subset R$, $A \subset E$, $B \subset E$ ανοικτά σύνολα και $I \subset I_0$.

$$\int_\alpha^\beta F(x,\ \varphi(x),\ \varphi'(x))\, dx\,. \tag{2}$$

Αυτός ο αριθμός εξαρτάται από την φ και τον σημειώνουμε $J[\varphi]$.

Αν σημειώσουμε με Ω το σύνολο των $\varphi\in V$ *που ικανοποιούν την (1)*, με τη χρήση της F ορίζουμε τη συνάρτηση κλάσης C^k

$$J\colon \Omega \to R$$

η οποία λέγεται *συναρτησιακό* επί του συνόλου Ω.

ΠΡΟΤΑΣΗ: *Το σύνολο Ω είναι ανοικτό σύνολο του χώρου Banach V.*

Απόδειξη: Έστω $\varphi_0\in \Omega$. Θα δείξουμε ότι όλα τα $\varphi\in V$, τέτοια ώστε $\|\varphi-\varphi_0\|$ να είναι αρκετά μικρό, ανήκουν επίσης στο Ω.

Έστω $K\subset U$ η εικόνα της συνεχούς απεικόνισης

$$x \to (x,\ \varphi_0(x),\ \varphi_0'(x))$$

του I στο U.

Το K είναι συμπαγές σύνολο γιατί το διάστημα I είναι συμπαγές.

Υπάρχει λοιπόν $\varepsilon>0$ τέτοιο, ώστε όλα τα σημεία

$$(x,\ y,\ z)\in I\times E\times E$$

με $\|y-\varphi_0(x)\|\leq\varepsilon$, $\|z-\varphi_0'(x)\|\leq\varepsilon$, ανήκουν στο U (ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ, Πρόταση 2).

Έστω λοιπόν $\varphi\in V$ τέτοιο ώστε

$$\|\varphi-\varphi_0\|\leq\varepsilon\,.$$

Σύμφωνα με τον ορισμό της νορμικής του V έχουμε

$$\|\varphi(x)-\varphi_0(x)\|\leq\varepsilon\,,\quad \|\varphi'(x)-\varphi_0'(x)\|\leq\varepsilon$$

για όλα τα $x\in I$.

Επομένως, έχουμε

$$(x,\ \varphi(x),\ \varphi'(x))\in U,\quad \forall\ x\in I\,.$$

Παράδειγμα

Έστω $V=C^1([0,1],R)$ και $F\colon R\times R\times R\to R$ κλάσης C^k, $k\geq 1$.

Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $F(x,y,y')=y$, που είναι κλάσης C^∞ ως προς $(x,y,y')\in R^3$, τότε έχουμε το συναρτησιακό

$$\forall\ y \in V \to J[y] = \int_0^1 y(x)dx \in R\ .$$

Π.χ. αν η y: $[0, 1] \to R$ είναι η $y(x) = 1$, $x \in [0, 1]$, τότε έχουμε

$$J[y] = \int_0^1 1 \cdot dx = 1\ .$$

Αν η y: $[0, 1] \to R$ είναι η $y(x) = e^x$, $x \in [0, 1]$, τότε έχουμε

$$J[y] = \int_0^1 e^x dx = e - 1\ .$$

Παρατήρηση

Ένα συναρτησιακό $J[y]$ μπορεί να ορισθεί κατά πολλούς τρόπους.

Π.χ. για κάθε $y \in V = C^1\ ([0, 1], R)$ ορίζουμε την τιμή $J[y] = y'(x_0)$, όπου $x_0 \in [0, 1]$. Εκλέγουμε $x_0 = 1 \in [0, 1]$.

Έτσι, αν η y: $[0, 1] \to R$ είναι η $y(x) = x^2$, $x \in [0, 1]$, *τότε έχουμε*

$$J[y] = (x^2)' \big|_{x=1} = 2x\big|_{x=1} = 2$$

και, αν η y: $[0, 1] \to R$ είναι η $y(x) = log(1+x)$, $x \in [0, 1]$, τότε έχουμε

$$J[y] = \left(log(1+x)\right)'\big|_{x=1} = \frac{1}{1+x}\bigg|_{x=1} = \frac{1}{2}\ .$$

3. Μεταβολές - Ορισμοί άκρων τιμών

Γραμμικό συναρτησιακό είναι ένα συναρτησιακό $L[\varphi]$ που ικανοποιεί τις συνθήκες:

i) $L[c\varphi] = cL[\varphi]$, c σταθερή,

ii) $L[\varphi_1 + \varphi_2] = L[\varphi_1] + L[\varphi_2]$.

Παίρνοντας μια καμπύλη $\overline{\varphi}$ γειτονική της φ σχηματίζουμε τη μονοπαραμετρική οικογένεια των καμπύλων

$$y(x, \lambda) = \varphi(x) + \lambda\left(\overline{\varphi}(x) - \varphi(x)\right)\ ,\ \lambda \in [-1, +1],\ \ x \in [\alpha, \beta]$$

που είναι επίσης γειτονικές της φ.

Προφανώς $y(x, 0) = \varphi(x)$, $y(x, 1) = \overline{\varphi}(x)$, $x \in [\alpha, \beta]$.

Η διαφορά

$$\bar{\varphi}-\varphi$$

λέγεται *μεταβολή της συνάρτησης* φ και συμβολίζεται $\delta\varphi$.

Αν η μεταβολή ενός συναρτησιακού

$$\Delta J = J[\varphi+\delta\varphi]-J[\varphi]$$

μπορεί να παρασταθεί με τη μορφή

$$\Delta J = L[\varphi,\, \delta\varphi]+\varepsilon(\varphi,\, \delta\varphi) max\|\delta\varphi\| ,$$

όπου $L[\varphi,\, \delta\varphi]$ είναι *γραμμικό συναρτησιακό ως προς* $\delta\varphi$, και max $\|\delta\varphi\|$ είναι η μέγιστη τιμή του $\|\delta\varphi\|$ και

$$\varepsilon(\varphi,\, \delta\varphi) \to 0, \quad \text{όταν } max\|\delta\varphi\| \to 0 ,$$

τότε το $L[\varphi,\, \delta\varphi]$ λέγεται *μεταβολή* (ή *πρώτη μεταβολή*) του συναρτησιακού και σημειώνεται $\delta J[\varphi]$.

Η μεταβολή του συναρτησιακού $J[\varphi]$ *μπορεί να προσδιορισθεί ως η παράγωγος του συναρτησιακού*

$$J[\varphi+\lambda\delta\varphi]$$

ως προς λ *στο σημείο* $\lambda=0$.

Έχουμε λοιπόν

$$\Delta J = J[\varphi+\lambda\delta\varphi]-J[\varphi] = L[\varphi,\, \lambda\delta\varphi]+\varepsilon(\varphi,\, \lambda\delta\varphi)\, |\lambda|\, max\, \|\delta\varphi\| ,$$

οπότε η παράγωγος του $J[\varphi+\lambda\delta\varphi]$ ως προς λ στο $\lambda=0$ είναι

$$\lim_{\Delta\lambda\to 0} \frac{\Delta J}{\Delta\lambda} = \lim_{\lambda\to 0} \frac{\Delta J}{\lambda} = \lim_{\lambda\to 0} \frac{L[\varphi,\, \lambda\delta\varphi]+\varepsilon(\varphi,\, \lambda\delta\varphi)\, |\lambda|\, max\, \|\delta\varphi\|}{\lambda} =$$

$$= L[\varphi,\, \delta\varphi] ,$$

επειδή είναι $L[\varphi,\, \lambda\delta\varphi] = \lambda L[\varphi,\, \delta\varphi]$ και

$$\lim_{\lambda\to 0} \frac{\varepsilon(\varphi,\, \lambda\delta\varphi)\, |\lambda|\, max\|\delta\varphi\|}{\lambda} = \pm \lim_{\lambda\to 0}\, \varepsilon(\varphi,\, \lambda\delta\varphi) max\|\delta\varphi\| = 0 ,$$

γιατί $\varepsilon(\varphi,\, \lambda\delta\varphi) \to 0$, όταν $\lambda\to 0$.

Επομένως, η μεταβολή του συναρτησιακού $J[\varphi]$ ισούται με την παράγωγο

$$\frac{d}{d\lambda} J[\varphi+\lambda\delta\varphi]\Big|_{\lambda=0} .$$

ΟΡΙΣΜΟΣ: *Η συνάρτηση* φ_0 *δίνει* σχετικό ελάχιστο *για το συναρτησιακό* $J[\varphi]$ *αν είναι*

$$\Delta J = J[\varphi] - J[\varphi_0] \geq 0$$

για όλες τις συναρτήσεις φ *που ανήκουν σε μια περιοχή της* φ_0.

Αν η διαφορά είναι

$$\Delta J = J[\varphi] - J[\varphi_0] \leq 0$$

έχουμε σχετικό μέγιστο *στην* φ_0.

Αν είναι $\Delta J \leq 0$ *και* $\Delta J = 0$ *μόνον για* $\varphi = \varphi_0$, *τότε λέμε ότι έχουμε* αυστηρό σχετικό μέγιστο στην φ_0.

Αν είναι $\Delta J \geq 0$ *και* $\Delta J = 0$ *μόνον για* $\varphi = \varphi_0$, *τότε λέμε ότι έχουμε* αυστηρό σχετικό ελάχιστο *στην* φ_0.

ΘΕΩΡΗΜΑ: *Αν* φ_0 *είναι εσωτερικό σημείο του τόπου ορισμού του συναρτησιακού* $J[\varphi]$, *το οποίο έχει στην* φ_0 *μεταβολή* $\delta J[\varphi_0]$ *και παίρνει σχετικό μέγιστο ή ελάχιστο στην* φ_0, *τότε η μεταβλητή* $\delta J[\varphi_0]$ *είναι μηδέν (δηλαδή* $\delta J[\varphi_0] = 0$*).*

Απόδειξη: Για σταθερά φ_0 και $\delta\varphi$, το συναρτησιακό

$$J[\varphi_0 + \lambda\delta\varphi] = g(\lambda)$$

είναι συνάρτηση της μεταβλητής λ, η οποία για $\lambda = 0$, από την υπόθεση, παίρνει σχετικό μέγιστο ή ελάχιστο.

Επομένως, θα είναι

$$g'(0) = 0\,, \quad \text{και} \quad \frac{d}{d\lambda} J[\varphi_0 + \lambda\delta\varphi]\Big|_{\lambda=0} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{J[\varphi_0 + \lambda\delta\varphi] - J[\varphi_0]}{\lambda} = 0\,,$$

δηλαδή $\delta J[\varphi_0] = 0$.

Έτσι, η μεταβολή δJ ενός συναρτησιακού J είναι μηδέν στις καμπύλες όπου παίρνει σχετική μέγιστη ή ελάχιστη τιμή. ■

Σημειώσεις

α) Η μεταβλητή λ μπορεί να πάρει θετική ή αρνητική τιμή σε μια περιοχή του σημείου $\lambda = 0$, δηλ. $\lambda \in (-\varrho, +\varrho)$, $\varrho > 0$, επειδή η φ_0 είναι εσωτερικό σημείο του τόπου ορισμού του συναρτησιακού.

Πράγματι, αφού η φ_0 είναι εσωτερικό σημείο θα υπάρχει περιοχή της ακτίνας $\eta > 0$ τέτοια ώστε αυτή η περιοχή να βρίσκεται ολόκληρη μέσα στον τόπο ορισμού του συναρτησιακού.

Έχουμε λοιπόν

$$\|\varphi_0-(\varphi_0+\lambda\delta\varphi)\| = |\lambda|\,\|\delta\varphi\| < \eta \Rightarrow |\lambda| < \frac{\eta}{\|\delta\varphi\|} = \varrho>0\,,$$

δηλαδή τα σημεία

$$\varphi_0+\lambda\delta\varphi\,,\ \ \lambda\in(-\varrho,\ +\varrho)$$

ανήκουν στον τόπο ορισμού του συναρτησιακού J.

β) Έχουμε

$$J[\varphi_0+\lambda\delta\varphi] = \int_\alpha^\beta F\big(x,\ \varphi_0(x)+\lambda\delta\varphi(x),\ \ \varphi_0'(x)+\lambda\delta'\varphi(x)\big)dx\,,$$

οπότε

$$\frac{dJ}{d\lambda} = \int_\alpha^\beta \left(\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\lambda} + \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{\partial^2 y}{\partial x\partial\lambda}\right)dx\,,$$

όπου $\quad y = \varphi_0+\lambda\delta\varphi,\ \ \lambda\in(-\varrho,\ +\varrho)$.

Επομένως, θα είναι

$$\frac{d}{d\lambda}J[\varphi_0+\lambda\delta\varphi\,]\Big|_{\lambda=0} =$$

$$= \int_\alpha^\beta \left[\frac{\partial F}{\partial y}\big(x,\varphi_0(x),\varphi_0'(x)\big)\ \delta\varphi(x) + \frac{\partial F}{\partial y'}\big(x,\varphi_0(x),\varphi_0'(x)\big)\ \delta'\varphi(x)\right]dx,$$

όπου οι συναρτήσεις

$$\frac{\partial F}{\partial y},\ \frac{\partial F}{\partial y'}\,,$$

ανήκουν στο χώρο $L(R^n,\ R)$ των συνεχών γραμμικών απεικονίσεων από το R^n στο R (όταν η F είναι κλάσης C^k, $k\geq 1$ *και* $E=R^n$).

[Είναι

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \left(\frac{\partial F}{\partial y_1},\frac{\partial F}{\partial y_2},\ldots,\frac{\partial F}{\partial y_n}\right),\quad \text{όπου}\ \ y = \big(y_1(x),\ \ldots,\ y_n(x)\big)^T$$

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \left(\frac{\partial F}{\partial y_1'},\frac{\partial F}{\partial y_2'},\ldots,\frac{\partial F}{\partial y_n'}\right),\quad \text{όπου}\ \ y' = \big(y_1'(x),\ \ldots,\ y_n'(x)\big)^T$$

και

$$\delta\varphi(x) = \big(\delta\varphi_1(x),\ \ldots,\ \delta\varphi_n(x)\big)^T,\quad \delta'\varphi(x) = \big(\delta'\varphi_1(x),\ \ldots,\ \delta'\varphi_n(x)\big)^T$$

(T σημαίνει ανάστροφος)].

γ) Η ύπαρξη άκρων τιμών εξαρτάται από τη νορμική που χρησιμοποιούμε. Π.χ. το συναρτησιακό

$$J[y] = \int_0^{\pi} y^2(x)\,[1-(y'(x))^2]\,dx$$

έχει στη συνάρτηση $y_0(x) \equiv 0$, $x \in [0, \pi]$ σχετικό ελάχιστο στο νορμικό χώρο $(V, \|\bullet\|)$. (Για $\|y\| \le \varepsilon < 1$ προκύπτει $|y'(x)| \le \varepsilon < 1$, $x \in [0, \pi]$, οπότε $J[y] > 0$, ενώ $J[y_0] = 0$).

Στο νορμικό χώρο όμως $(V, \|\bullet\|_u)$, όπου $\|y\|_u = \sup_{x \in [0, \pi]} |y(x)|$, το συναρτησιακό δεν έχει σχετικό ελάχιστο στην $y_0(x) \equiv 0$.

Πράγματι, αν πάρουμε τη συνάρτηση

$$y_1(x) = \frac{1}{\sqrt{n}}\,\eta\mu nx, \quad x \in [0, \pi], \quad n \quad \text{φυσικός αριθμός},$$

τότε

$$J[y_1] = \frac{1}{n}\int_0^{\pi} \eta\mu^2 nx(1 - n\sigma\upsilon\nu^2 nx)dx = \frac{1}{n}\int_0^{\pi} \eta\mu^2 nx dx - \frac{1}{4}\int_0^{\pi} \eta\mu^2 2nx dx =$$

$$= \frac{\pi}{2n} - \frac{\pi}{8},$$

που τείνει στο $-\frac{\pi}{8}$, όταν $n \to \infty$.

(Για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει μεγάλο n_0 τέτοιο ώστε $\|y_1\|_u \le \varepsilon$, $\forall\, n \ge n_0$).

Βέβαια, όταν το συναρτησιακό παίρνει άκρα τιμή στο νορμικό χώρο $(V, \|\bullet\|_u)$ τότε παίρνει άκρα τιμή και στο νορμικό χώρο $(V, \|\bullet\|)$, δεν ισχύει το αντίστροφο.

[Οι νορμικές $\|y\|_u = \sup_{x \in I} |y(x)|$, $\|y\| = \sup_{x \in I} |y(x)| + \sup_{x \in I} |y'(x)|$, $I = [\alpha, \beta]$ δεν είναι ισοδύναμες τοπολογικά στο χώρο συναρτήσεων $V = C^1([\alpha, \beta], R)$.]

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΑΝΑΓΚΑΙΑ ΣΥΝΘΗΚΗ ΓΙΑ ΣΧΕΤΙΚΗ ΑΚΡΑ ΤΙΜΗ

1. Μέθοδος των ***Du Bois - Reymond*** *–* *Διαφορική εξίσωση των* ***Euler - Lagrange***

Το σύνολο των καμπύλων $y: I \to R$ κλάσης C^1 τέτοιων ώστε

$$y(\alpha) = y_1\,,\ \ y(\beta) = y_2$$

όπου $y_1 \in R$, $y_2 \in R$ είναι δοσμένα, είναι αφινικός (ομοπαραλληλικός) υποχώρος $W(y_1, y_2)$ του χώρου *Banach* V.

Αν πάρουμε σταθερό $y_0 \in W(y_1, y_2)$ κάθε στοιχείο του $W(y_1, y_2)$ γράφεται με τη μορφή

$$y = y_0 + \psi\,,$$

όπου $\psi \in W(0, 0)$ που είναι διανυσματικός υποχώρος του V.

Έτσι η y_0 ορίζει μια αμφιμονότιμη απεικόνιση του $W(0, 0)$ επί του $W(y_1, y_2)$ ως εξής:

$$\psi \to y_0 + \psi \ \ (\mu\varepsilon\tau\alpha\varphi o\varrho\acute{\alpha}).$$

Ο χώρος $W(y_1, y_2)$ δεν είναι τίποτε άλλο παρά ο χώρος των καμπύλων $y: I \to R$ κλάσης C^1 των οποίων η αρχή (α, y_1) και το πέρας (β, y_2) είναι δοσμένα.

Ο χώρος $W(y_1, y_2)$ *εφοδιασμένος με τη μετρική που προκύπτει από τη νορμική* $\|\bullet\|$ *του* V *(δηλαδή τη μετρική* $d(y, z) = \|y - z\|$, $\forall\, y, z \in W(y_1, y_2)$*) είναι πλήρης μετρικός χώρος.*

Ενδιαφερόμαστε κυρίως για το σύνολο

$$W(y_1, y_2) \cap \Omega = \Omega(y_1, y_2)$$

που είναι ανοικτό σύνολο του $W(y_1, y_2)$ (ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ, §2).

Αν θεωρήσουμε τον περιορισμό του συναρτησιακού

$$J: \Omega \to R\,,$$

όπου

$$J[y] = \int_\alpha^\beta F(x,\, y(x),\, y'(x))\, dx\,,$$

στο $\Omega(y_1, y_2)$, τότε, αν η $F: U \to R$ είναι κλάσης C^k, και το συναρτησιακό

$$J: \Omega(y_1, y_2) \to R$$

είναι κλάσης C^k *(CARTAN [2], II. Proposition 1.2.2).*

[Τα παραπάνω ισχύουν και για καμπύλες $y: I \to R^n$ κλάσης C^1 τέτοιες ώστε $y(\alpha) = y_1$, $y(\beta) = y_2$, όπου $y_1 \in R^n$, $y_2 \in R^n$ είναι δοσμένα].

ΛΗΜΜΑ *(Du Bois-Reymond)*: *Αν $g(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και αν*

$$\int_\alpha^\beta g(x) n'(x) dx = 0\ ,$$

για όλες τις συναρτήσεις $\eta(x)$ κλάσης C^1 στο $[\alpha, \beta]$ και $\eta(\alpha) = \eta(\beta) =$ $= 0$, τότε η $g(x)$ είναι σταθερή.

Απόδειξη: Έστω

$$c = \frac{1}{\beta - \alpha} \int_\alpha^\beta g(x) dx\,.$$

Έχουμε

$$\int_\alpha^\beta [g(x) - c] dx = 0 \tag{1}$$

και η συνάρτηση

$$\eta(x) = \int_\alpha^x [g(s) - c] ds$$

ικανοποιεί τις υποθέσεις του λήμματος, οπότε ισχύει

$$\int_\alpha^\beta g(x)\, [g(x) - c] dx = 0\,. \tag{2}$$

Πολλαπλασιάζοντας την *(1)* με $-c$ και προσθέτοντας την *(2)*, προκύπτει

$$\int_\alpha^\beta [g(x) - c]^2 dx = 0\,.$$

Άρα, $g(x) = c$, $\forall\ x \in [\alpha, \beta]$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1: *Υποθέτουμε ότι*

(i) *η συνάρτηση* F *είναι κλάσης* C^1 *ως προς* x, y, y' *στο* U,

(ii) *το συναρτησιακό* J *δέχεται σχετικό ακρότατο (μέγιστο ή ελάχιστο), στην* $\varphi_0 \in \Omega(y_1, y_2)$,

τότε:

α) *η* $\dfrac{\partial F}{\partial y'}$, *θεωρούμενη ως συνάρτηση του* x *έχει συνεχή παράγωγο στο* I, *και*

β) $\dfrac{\partial F}{\partial y} - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0\,, \ \forall\, x \in I = [\alpha, \beta]$.

Απόδειξη: Έχουμε

$$J[\varphi] = \int_\alpha^\beta F\big(x, \varphi(x), \varphi'(x)\big)dx\,, \ \forall\, \varphi \in \Omega(y_1, y_2)$$

οπότε

$$J[\varphi_0+\lambda\delta\varphi] = \int_\alpha^\beta F\big(x, \varphi_0(x)+\lambda\delta\varphi(x),\ \varphi_0'(x)+\lambda\delta'\varphi(x)\big)\, dx\,,$$

όπου $\lambda \in (-\varrho, +\varrho)$, $\varrho>0$ και $\delta\varphi \in \Omega(0, 0)$ (έτσι ώστε $\varphi_0+\lambda\delta\varphi \in \Omega(y_1, y_2)\big)$.

Αφού το $\Omega(y_1, y_2)$ είναι ανοικτό σύνολο υπάρχει $\eta > 0$ τέτοιο ώστε $\|\varphi_0-(\varphi_0+\lambda\delta\varphi)\| = |\lambda|\, \|\delta\varphi\| < \eta$ να συνεπάγεται $\varphi_0+\lambda\delta\varphi \in \Omega(y_1, y_2)$.

Επειδή

$$\delta J[\varphi_0] = \frac{d}{d\lambda} J[\varphi_0+\lambda\delta\varphi]\big|_{\lambda=0}\ ,$$

θα είναι

$\delta J[\varphi_0] =$

$$= \int_\alpha^\beta \left[\frac{\partial F}{\partial y}\big(x, \varphi_0(x), \varphi_0'(x)\big)\, \delta\varphi(x) + \frac{\partial F}{\partial y'}\big(x, \varphi_0(x), \varphi_0'(x)\big)\, \delta'\varphi(x)\right]dx, \quad (3)$$

$\forall\, \delta\varphi \in \Omega(0, 0)$, με $\|\delta\varphi\| \le \varepsilon$, $(\varepsilon>0$ κατάλληλο $\varepsilon \le \dfrac{\eta}{\varrho}$, δηλαδή τέτοιο ώστε $\varphi_0+\lambda\delta\varphi \in \Omega(y_1, y_2))$.

Θεωρούμε το ολοκλήρωμα

$$\int_\alpha^\beta \frac{\partial F}{\partial y}\, \delta\varphi(x)dx$$

το οποίο, με κατά παράγοντες ολοκλήρωση, γίνεται

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial F}{\partial y}\, \delta\varphi(x) dx = \left[\delta\varphi(x) \int_{\alpha}^{x} \frac{\partial F}{\partial y} ds \right]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} \delta'\varphi(x) \left(\int_{\alpha}^{x} \frac{\partial F}{\partial y} ds \right) dx$$

και επειδή $\delta\varphi(\alpha)=\delta\varphi(\beta)=0$, έχουμε

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial F}{\partial y}\, \delta\varphi(x) dx = - \int_{\alpha}^{\beta} \delta'\varphi(x) \left(\int_{\alpha}^{x} \frac{\partial F}{\partial y} ds \right) dx \,.$$

Επομένως η (3) παίρνει τη μορφή

$$\delta J[\varphi_0] = \int_{\alpha}^{\beta} \delta'\varphi(x) \left[\frac{\partial F}{\partial y'} - \int_{\alpha}^{x} \frac{\partial F}{\partial y} ds \right] dx, \quad \forall\ \delta\varphi \in \Omega(0,\, 0),$$

με $\|\delta\varphi\| \leq \varepsilon$.

Αλλ' όμως, λόγω της (ii) υπόθεσης, η μεταβολή $\delta J[\varphi_0] = 0$, δηλαδή,

$$\int_{\alpha}^{\beta} \delta'\varphi(x) \left[\frac{\partial F}{\partial y'} - \int_{\alpha}^{x} \frac{\partial F}{\partial y} ds \right] dx = 0 \,,$$

$\forall\ \delta\varphi \in \Omega(0,\, 0)$, με $\|\delta\varphi\| \leq \varepsilon$.

Σύμφωνα με το λήμμα θα είναι

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \int_{\alpha}^{x} \frac{\partial F}{\partial y} ds + c \,, \quad \forall\ x \in I$$

όπου c σταθερή.

Η συνάρτηση $p(x) = \int_{\alpha}^{x} \frac{\partial F}{\partial y} ds,\ x \in I$ είναι παραγωγίσιμη στο I και είναι

$$p'(x) = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y} \left(x,\, \varphi_0(x),\, \varphi_0'(x)\right) \,, \quad \forall\ x \in I \,.$$

Λόγω της συνέχειας της $\frac{\partial F}{\partial y}$ στο U και της συνέχειας των $\varphi_0(x)$, $\varphi_0'(x)$ στο I, η $p'(x)$ θα είναι επίσης συνεχής στο I.

Από τη σχέση

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = p(x) + c, \quad \forall\ x \in I$$

συνεπάγεται ότι η $\frac{\partial F}{\partial y'}$, θεωρούμενη ως συνάρτηση του $x \in I$, έχει συνεχή παράγωγο στο I.

Έχουμε λοιπόν

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=\frac{\partial F}{\partial y}\ ,\ \ \forall\ x\in I$$

δηλαδή

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0\ ,\ \ \forall\ x\in I\ . \qquad (4)$$

Αυτή η διαφορική εξίσωση (4) λέγεται *διαφορική εξίσωση των Euler - Lagrange.*

Σημείωση

Οι λύσεις αυτής της δ.ε. των *Euler - Lagrange* (4), που ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες $y(\alpha)=y_1$, $y(\beta)=y_2$, λέγονται *άκρες καμπύλες* του συναρτησιακού $J[y]$.

Σημειώνουμε ότι, σ' όλες τις άκρες καμπύλες, η πρώτη μεταβολή $\delta J[y]$ μηδενίζεται αλλά το συναρτησιακό $J[y]$ δεν παίρνει αναγκαστικά σχετικό μέγιστο ή ελάχιστο σ' όλες.

Ακόμη, επειδή η $F(x, y, y')$ δεν είναι πάντοτε γραμμική ως προς y και y', παρατηρούμε ότι η δ.ε. των *Euler - Lagrange* είναι, γενικά, μια μη γραμμική δ.ε. δεύτερης τάξης.

Παράδειγμα 1

Να βρεθεί η δ.ε. (διαφορική εξίσωση) των *Euler - Lagrange* για το συναρτησιακό

$$J[y]=\int_{\alpha}^{\beta}[(y')^2+2xy-y^2]dx,\ \ y\in\Omega(y_1,\ y_2)\ .$$

Στις εφαρμογές, για συντομία, θέτουμε $\varphi(x)=y$ και $\varphi'(x)=y'$.

Εδώ η F ορίζεται από τη σχέση (θέτω $z=y'$)

$$F(x,\ y,\ z)=z^2+2xy-y^2,\quad \forall\ (x,\ y,\ z)\in U=R^3$$

και είναι κλάσης C^∞ ως προς x, y, z.

Έχουμε λοιπόν

$$\frac{\partial F}{\partial y}=2x-2y\quad \text{και}\quad \frac{\partial F}{\partial z}=2z\ .$$

Επομένως, η δ.ε. των *Euler - Lagrange* γι' αυτό το συναρτησιακό είναι

$$2x-2y-\frac{d}{dx}(2y') = 0 \Rightarrow y''+y = x\ .$$

Βέβαια, οι λύσεις $y(x)$ αυτής της δ.ε. πρέπει να ικανοποιούν τις δοσμένες συνοριακές συνθήκες $y(\alpha)=y_1,\ \ y(\beta)=y_2$.

Η γενική λύση της δ.ε. των *Euler - Lagrange* είναι *([5],* Κεφ. *2, §1)*

$$y(x) = c_1\sigma\upsilon\nu x+c_2\eta\mu x+x\ ,\quad c_1, c_2 \text{ αυθαίρετες σταθερές}\ .$$

Αν έχουμε π.χ. τις συνοριακές συνθήκες

$$y(0) = 0\ ,\ \ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

τότε βρίσκουμε

$$c_1 = 0\ ,\ \ c_2 = 1-\frac{\pi}{2}$$

και η άκρα καμπύλη, όπου μηδενίζεται η πρώτη μεταβολή του συναρτησιακού $J[y]$, είναι

$$y(x) = \left(1-\frac{\pi}{2}\right)\eta\mu x+x\ ,\quad x\in\left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Παρατήρηση

Πρέπει όμως να έχουμε υπόψη πως το συνοριακό πρόβλημα

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0\ ,\quad y(\alpha) = y_1,\quad y(\beta) = y_2$$

δεν έχει πάντοτε λύση, και αν έχει λύση αυτή μπορεί να μην είναι μοναδική. Π.χ. το συνοριακό πρόβλημα

$$y''+y = x\ ,\quad y(0) = 0\ ,\ \ y(\pi) = \pi$$

έχει τις άπειρες λύσεις

$$y(x) = c_2\eta\mu x+x\ ,\ \ x\in[0, \pi],\ \ c_2 \text{ αυθαίρετη σταθερή},$$

ενώ το συνοριακό πρόβλημα

$$y''+y = x\ \ ,\quad y(0) = 0\ ,\ \ y(\pi) = 1$$

δεν έχει λύση.

Παράδειγμα 2

Στο επίπεδο δίνονται δύο σημεία $A(\alpha, y_1), B(\beta, y_2)$. Μεταξύ των τόξων που έχουν άκρα τα σημεία A, B ποιο είναι εκείνο που έχει το ελάχιστο μήκος;

Για $y\in \Omega(y_1, y_2)$ το μήκος τόξου είναι

$$J[y] = \int_\alpha^\beta \sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx .$$

Οι συναρτήσεις του $\Omega(y_1, y_2)$ που δίνουν αυστηρό ελάχιστο στο $J[y]$ είναι λύσεις της αντίστοιχης διαφορικής εξίσωσης των *Euler - Lagrange* (Θεώρημα 1).

Εδώ έχουμε

$$F(x, y, y') = \sqrt{1+(y')^2}\ ,\ \forall\ (x, y, y')\in U=R^3$$

οπότε

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} = \frac{1}{(1+(y')^2)^{3/2}}\ ,\ \frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial y} = 0\,,\ \frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x} = 0 \quad \text{και} \ \frac{\partial F}{\partial y} = 0\ .$$

Επομένως η δ.ε. των *Euler - Lagrange* παίρνει τη μορφή

$$(1+(y')^2)^{-3/2}\cdot y'' = 0$$

και επειδή είναι

$$(1+(y')^2)^{-3/2} \neq 0,\ \ \forall\ (x, y, y')\in R^3$$

προκύπτει

$$y''(x) = 0\,.$$

Η γενική λύση αυτής της δ.ε. είναι

$$y = c_1x+c_2,\ \ \forall\ x\in R$$

όπου c_1, c_2 αυθαίρετες σταθερές.

Από τις συνοριακές συνθήκες προκύπτει το γραμμικό σύστημα

$$y_1 = c_1\alpha+c_2\,,\quad y_2 = c_1\beta+c_2$$

και, αν είναι

$$\begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ \beta & 1 \end{vmatrix} = \alpha-\beta \neq 0\ ,$$

αυτό έχει τη μοναδική λύση

$$c_1^0 = \frac{y_1-y_2}{\alpha-\beta}\ ,\quad c_2^0 = \frac{\alpha y_2-\beta y_1}{\alpha-\beta}\ .$$

Άρα, η συνάρτηση

$$\varphi_0(x) = c_1^0\, x + c_2^0 \ , \quad \forall\, x \in I = [\alpha, \beta]$$

θα είναι ενδεχομένως η ζητούμενη.

Το διάγραμμα της $\varphi_0(x)$, $x \in [\alpha, \beta]$ είναι το ευθύγραμμο τμήμα $\overline{AB}$, οπότε είναι

$$J[y] > J[\varphi_0] \, , \quad \forall\, y \in \Omega(y_1, y_2)$$

και το $J[y]$ παίρνει αυστηρό ελάχιστο στην $\varphi_0 \in \Omega(y_1, y_2)$.

Παράδειγμα 3

Στο επίπεδο δίνεται το σημείο $A(1, 1)$, αν O είναι η αρχή των αξόνων, μεταξύ των τόξων που έχουν άκρα τα σημεία O, A και εφάπτονται στον άξονα των x στην αρχή O, ποιο είναι εκείνο που έχει το ελάχιστο μήκος;

Για $y \in \Omega(0, 1)$, με $y'(0)=0$, ορίζουμε το μήκος τόξου

$$J[y] = \int_0^1 \sqrt{1+(y'(x))^2}\, dx \, .$$

Όπως στο παράδειγμα 2 η δ.ε. των *Euler - Lagrange* παίρνει τη μορφή

$$y''(x) = 0 \ , \quad x \in [0, 1]$$

της οποίας η γενική λύση είναι

$$y(x) = c_1 x + c_2, \quad \forall\, x \in I = [0, 1]$$

όπου c_1, c_2 αυθαίρετες σταθερές.

Από τις συνοριακές συνθήκες παίρνουμε το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} 0 &= c_2 \\ 1 &= c_1 + c_2 \end{aligned}$$

που έχει τη λύση $c_1=1$, $c_2=0$.

Επομένως, η συνάρτηση

$$\varphi_0(x) = x \, , \quad x \in [0, 1]$$

θα είναι ενδεχομένως η ζητούμενη.

Αλλά $\varphi_0'(0) = 1 \neq 0$, άρα το $J[y]$ δεν έχει άκρα τιμή στο σύνολο $y \in \Omega(0, 1)$, με $y'(0) = 0$. ■

Στις εφαρμογές λοιπόν, μετά τη λύση της δ.ε. των Euler - Lagrange θα πρέπει να γίνεται έλεγχος ποιες απ' αυτές τις λύσεις πληρούν τις *απαιτήσεις του προβλήματος και αν το συναρτησιακό δέχεται σχετικό ακρότατο (μέγιστο ή ελάχιστο) σ' αυτές.*

Στη συνέχεια θα υποθέσουμε ότι η $\varphi_0''(x)$ υπάρχει για όλα τα $x \in I$ και η F είναι κλάσης C^2 ως προς x, y, y' στο U.

Οπότε, από την *(4)*, προκύπτει η δ.ε. των *Euler-Lagrange*

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\,\varphi_0''(x) + \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y}\,\varphi_0'(x) + \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0\,. \qquad (5)$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2: *Η ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι το συναρτησιακό J σταθερό, δηλαδή*

$$J[y]=c\,, \quad c \text{ σταθερή}, \ \forall\, y \in \Omega(y_1, y_2)$$

είναι η F να ορίζεται από μια σχέση της μορφής

$$F(x, y, y') = M(x, y)+N(x, y)y'\,, \quad \forall\, (x, y, y') \in U$$

όπου M, N είναι κλάσης C^2 στον απλώς συναφή τόπο D, και τέτοιες ώστε

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}\,, \quad \forall\, (x, y) \in D.$$

Απόδειξη: Η συνθήκη είναι αναγκαία.

Εφόσον το J είναι σταθερό θα είναι

$$\delta J[y]=0\,, \quad \forall\, y \in \Omega(y_1, y_2)$$

οπότε η δ.ε. των *Euler - Lagrange (5)* γίνεται ταυτότητα.

Άρα

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \equiv 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x} - y'\,\frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y} \equiv 0\,,$$

(αν ήταν $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \neq 0$ λόγω της συνέχειας, σ' ένα ανοικτό σύνολο $\Omega_1(y_1, y_2) \subset \Omega(y_1, y_2)$, θα είχαμε δ.ε. 2ης τάξης και δεν θα ήταν $\delta J[y]=0$, $\forall\, y \in \Omega_1 \subset \Omega(y_1, y_2)$).

Από την πρώτη σχέση προκύπτει

$$F(x, y, y') = M(x, y)+N(x, y)y'\,, \quad \forall\, (x, y, y') \in U$$

όπου οι $M(x, y)$, $N(x, y)$ είναι κλάσης C^2 στον τόπο D (υποσύνολο της προβολής του U στο R^2), αφού η F είναι κλάσης C^2 στο U.

Από τη δεύτερη σχέση προκύπτει

$$\frac{\partial}{\partial y}[M(x, y)+N(x, y)y'] - \frac{\partial^2}{\partial y'\partial x}[M(x, y)+N(x, y)y'] -$$

$$- y' \frac{\partial^2}{\partial y'\partial y}[M(x, y)+N(x, y)y'] \equiv 0$$

και μετά τις πράξεις

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}, \quad \forall\ (x, y)\in D .$$

Η συνθήκη είναι ικανή

Επειδή είναι

$$F(x, y, y') = M(x, y)+N(x, y)y' \quad \text{και} \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}, \quad \forall\ (x, y)\in D ,$$

όπου D είναι απλώς συναφής τόπος, είναι γνωστό από το Διαφορικό Λογισμό ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$J[y] = \int_{\alpha}^{\beta} F(x, y, y')dx = \int_{(\alpha,\, y_1)}^{(\beta,\, y_2)} M(x, y)dx+N(x, y)dy$$

είναι ανεξάρτητο του δρόμου ολοκλήρωσης. Επομένως το $J[y]$ έχει την ίδια σταθερή τιμή κατά μήκος κάθε καμπύλης της οποίας το διάγραμμα ανήκει στον τόπο D, και $y\in \Omega(y_1, y_2)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3: *Αν είναι*

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}(x, y, y') = 0 , \quad \forall\ (x, y, y')\in U$$

τότε η διαφορική εξίσωση των Euler - Lagrange (5) εκφυλίζεται σε εξίσωση, που δεν περιέχει τις παραγώγους y', y'', *της μορφής*

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

όπου οι συναρτήσεις M, N *είναι κλάσης* C^2 *σ' έναν απλώς συναφή τόπο* D.

Απόδειξη: Αφού

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}(x, y, y') = 0, \quad \forall\ (x, y, y') \in U$$

θα είναι

$$F(x, y, y') = M(x, y) + N(x, y)y', \ \ \forall\ (x, y, y') \in U$$

όπου (Θεώρημα 2) οι συναρτήσεις M, N είναι κλάσης C^2 σ' έναν απλώς συναφή τόπο D.

Αλλά, επειδή $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y'^2} = 0$, η διαφορική εξίσωση των *Euler - Lagrange* παίρνει τη μορφή

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y}\, y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

την οποία πρέπει να ικανοποιεί η $F = M + Ny'$. Θα έχουμε λοιπόν

$$y' \frac{\partial^2}{\partial y' \partial y}[M+Ny'] + \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x}\,[M+Ny'] - \frac{\partial}{\partial y}[M+Ny'] = 0$$

και μετά τις πράξεις

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}\ , \quad \forall\ (x, y) \in D\ . \qquad \blacksquare$$

Παράδειγμα 4

Έστω, το συναρτησιακό πρόβλημα

$$J[y] = \int_0^1 (y^2 + x^2 y')dx\ ,\ \ y(0) = 0\ ,\ \ y(1) = \alpha\ .$$

Η δ.ε. των *Euler - Lagrange* είναι (εδώ είναι συναρτησιακή εξίσωση)

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 2y - 2x = 0 \Rightarrow y = x\ .$$

Η πρώτη συνοριακή συνθήκη $y(0) = 0$ ικανοποιείται αλλά η δεύτερη ικανοποιείται μόνον όταν $\alpha = 1$. $\blacksquare$

Συμπεραίνουμε ότι: *Η διαφορική εξίσωση των Euler - Lagrange σε όλες τις περιπτώσεις ή θα είναι μια συνήθης διαφορική εξίσωση δεύ-*

τερης τάξης ή θα εκφυλίζεται σε μια συναρτησιακή εξίσωση, ως προς τη συνάρτηση $y(x)$, *που δεν περιέχει τις παραγώγους* y', y''.

Σε καμιά περίπτωση δεν είναι δυνατόν αυτή να παίρνει τη μορφή συνήθους διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης.

2. *Ειδικές μορφές της διαφορικής εξίσωσης των Euler - Lagrange*

Η διαφορική εξίσωση των *Euler - Lagrange* είναι βασικής σημασίας για τη μελέτη των προβλημάτων του Λογισμού των Μεταβολών.

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε μερικές ειδικές περιπτώσεις, στις οποίες η δ.ε. των *Euler - Lagrange* μπορεί να υποβιβαστεί σε δ.ε. πρώτης τάξης με υπολογισμό πρώτων ολοκληρωμάτων της.

I. Η F *δεν εξαρτάται από το* y

Έχουμε το συναρτησιακό

$$J[y]=\int_{\alpha}^{\beta} F(x, y'(x))dx\ , \quad y(\alpha)=y_1\ , \ \ y(\beta)=y_2$$

οπότε $\dfrac{\partial F}{\partial y}=0$ και η δ.ε. των *Euler - Lagrange* παίρνει τη μορφή

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0\ ,$$

δηλαδή έχει το πρώτο ολοκλήρωμα

$$\frac{\partial F}{\partial y'}=c\ ,$$

όπου c αυθαίρετη σταθερή.

Λύνοντας αυτό το πρώτο ολοκλήρωμα ως προς $y'(x)$ παίρνουμε μια δ.ε. πρώτης τάξης της μορφής

$$\frac{dy}{dx}=g(x, c)$$

απ’ όπου, με ολοκλήρωση, βρίσκουμε την $y(x)$.

Αν το πρώτο ολοκλήρωμα δεν λύνεται ως προς $y'(x)$ και λύνεται ως προς x, ή είναι πεπλεγμένης μορφής, η λύση βρίσκεται παραμετρικά.

Παράδειγμα 1

Έστω το συναρτησιακό πρόβλημα

$$J[y] = \int_1^2 \frac{\sqrt{1+(y'(x))^2}}{x}\, dx \ , \quad y(1) = 0 \, , \ y(2) = 1 \, .$$

Η συνάρτηση F δεν περιέχει το y.

Επομένως από το πρώτο ολοκλήρωμα της δ.ε. των *Euler - Lagrange*

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'(x)}{x\sqrt{1+(y'(x))^2}} = c \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{cx}{\pm\sqrt{1-c^2x^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dy = \frac{1}{\pm c}\frac{d\omega}{2\sqrt{1-\omega}} \Rightarrow dy = \frac{1}{\pm c}\, d\sqrt{1-\omega} \ , \ \text{όπου} \ \omega=(cx)^2 \, ,$$

απ' όπου με ολοκλήρωση βρίσκουμε

$$y(x) = \frac{1}{\pm c}\sqrt{1-c^2x^2} + c_1$$

ή ακόμη

$$(y-c_1)^2 + x^2 = \frac{1}{c^2} \, ,$$

όπου c_1, c αυθαίρετες σταθερές.

Από τις συνοριακές συνθήκες $y(1) = 0, \ y(2) = 1$ βρίσκουμε ότι

$$c = \frac{1}{\pm\sqrt{5}} \, , \quad c_1 = 2$$

και τελικά έχουμε ως λύση του προβλήματος την περιφέρεια του κύκλου $x^2+(y-2)^2 = 5$.