ΘΩΜΑ ΚΥΒΕΝΤΙΔΗ

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ
ΚΑΙ
ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

ΘΩΜΑΣ Α. ΚΥΒΕΝΤΙΔΗΣ

- Γεννήθηκε το 1947 στο Νέο Πετρίτσι του Ν. Σερρών.
- Το 1965 αποφοίτησε από το εξατάξιο Γυμνάσιο Σιδηροκάστρου του Ν. Σερρών και εγγράφηκε στο Τμήμα Μαθηματικών του Α.Π.Θ.
- Πήρε το πτυχίο των Μαθηματικών το 1969.
- Αναγορεύτηκε διδάκτορας στο Τμήμα Μαθηματικών του Α.Π.Θ. το 1979 και από το 1972 μέχρι σήμερα εργάζεται σ' αυτό.

ISBN 960-431-704-0

Δεύτερη έκδοση 2001

Ανατύπωση διορθωμένη 2007

Φωτοστοιχειοθεσία
Εκτύπωση

Π. ΖΗΤΗ & Σια ΟΕ
18ο χλμ Θεσ/νίκης-Περαίας
Τ.Θ. 4171 • Περαία Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19
Τηλ.: 23920 72.222 (10 γραμ.) - Fax: 23920 72.229
e-mail: info@ziti.gr

Βιβλιοπωλείο

ΕΚΔΟΣΕΙΣ **ΖΗΤΗ**
Αρμενοπούλου 27 • 546 35 Θεσσαλονίκη
Τηλ. 2310 203.720, Fax 2310 211.305
e-mail: sales@ziti.gr

www.ziti.gr

“Ἕν οἶδα, ὅτι οὐδὲν οἶδα”
(Ένα γνωρίζω, ότι τίποτα δε γνωρίζω)

ΣΩΚΡΑΤΗΣ (470-399 π.Χ.)

Αθηναίος φιλόσοφος γιός του γλύπτη Σωφρονίσκου και της Φαιναρέτης.

Ασχολήθηκε με φιλοσοφικές μελέτες και άκουσε μαθήματα του Προδίκου και του μουσικού Δάμωνος.

Εδίδασκε στην αρχαία αγορά των Αθηνών.

Η μέθοδος διδασκαλίας του ήταν η "μαιευτική": υπέβαλλε ερωτήσεις και μ’ αυτές "εξεμαίευε" απαντήσεις στο ερώτημα που έθετε στην αρχή.

Τα θέματα του ήταν ηθικού, θρησκευτικού, κοινωνικού και πολιτικού περιεχομένου. Η άποψη της φιλοσοφίας του Σωκράτη συνοψίζεται στις φράσεις του *“Φιλοσοφοῦντὰ με δεῖν ζῆν καὶ ἐξετάζοντα ἐμαυτὸν καὶ τοὺς ἄλλους”*, *“Γνώθι σαὐτόν”*.

Επειδή ο Σωκράτης καταπολέμησε πολλές συνήθειες της εποχής του, και διατάξεις του πολιτεύματος (μαζί με τους αριστοκρατικούς επέκρινε τη δημοκρατία), απέκτησε πολλούς εχθρούς και κατηγορήθηκε ότι εισάγει νέους θεούς, νέα δαιμόνια και ότι διέφθειρε τους νέους. Όλα αυτά συνέβησαν μέσα στη ζάλη του Πελοποννησιακού πολέμου (431-404 π.Χ).

Καταδικάσθηκε σε θάνατο, αρνήθηκε να αποδράσει, όπως του πρότεινε ο μαθητής του Κρίτων, ήπιε το κώνειο και απέθανε.

Ο Σωκράτης ήταν εγκρατής, γαλήνιος και με χρηστό ήθος.

Τίποτε δεν έγραψε, όλα όσα γνωρίζουμε γι’ αυτόν τα πληροφορούμαστε από τον Πλάτωνα, τον Ξενοφώντα και τον Αριστοτέλη.

Αυτό το βιβλίο αφιερώνεται
στα παιδιά μου Τάσο και Νίκο,
και στη γυναίκα μου Δήμητρα.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Πολλά προβλήματα, από διάφορους χώρους της επιστήμης, μπορούν να εκφρασθούν με εξισώσεις διαφορών που περιέχουν διακριτές μεταβλητές.

Οι εξισώσεις διαφορών περιγράφουν φαινόμενα που η εξέλιξή τους παρατηρείται σε διακριτούς χρόνους. Η αριθμητική ανάλυση προσεγγίζει συναρτήσεις με συναρτήσεις διακριτών μεταβλητών. Η μεγάλη ανάπτυξη των Η/Υ, οι οποίοι χρησιμοποιούν μαθηματικά μοντέλα με διακριτές μεταβλητές, επισημαίνει τη σπουδαιότητα των εξισώσεων διαφορών.

Οι εξισώσεις διαφορών χρησιμοποιούνται για την περιγραφή μοντέλων στα ψηφιακά συστήματα, στις πιθανότητες, στο πρόβλημα των ουρών, στη στατιστική, στις στοχαστικές διαδικασίες, στη θεωρία αριθμών, στα ηλεκτρικά κυκλώματα, στη ψυχολογία, στην κοινωνιολογία, στη γενετική της βιολογίας, στην οικονομία κ.λπ. τα οποία μοντέλα ευκολότερα μπορεί κανείς να τα επεξεργαστεί στους Η/Υ.

Οι εξισώσεις διαφορών που λύνουν προβλήματα, ανάλογα εκείνων που λύνονται με διαφορικές εξισώσεις, έχουν το πλεονέκτημα ότι η παρουσίαση τους δεν προϋποθέτει τη γνώση δυσνόητων μαθηματικών εννοιών.

Σ' αυτό το βιβλίο παρουσιάζουμε τη βασική θεωρία, κυρίως των γραμμικών εξισώσεων διαφορών και των γραμμικών συστημάτων εξισώσεων διαφορών με διακριτές μεταβλητές, και δίνουμε κάποια έμφαση στην ευστάθεια των λύσεών τους.

Ακόμη, παρουσιάζονται τα διακριτά συστήματα και οι z-μετασχηματισμοί που χρησιμοποιούνται για τη μελέτη τους.

Η ανάπτυξη της θεωρίας γίνεται με απλό και κατανοητό τρόπο.

Γι' αυτό το σκοπό παραθέτουμε αρκετά λυμένα προβλήματα και ασκήσεις με τις απαντήσεις τους, καθώς και ορισμένες εφαρμογές.

Θεσσαλονίκη, 2000 Θ. ΚΥΒΕΝΤΙΔΗΣ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4
ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ - ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5
ΛΥΜΕΝΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6
ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ

Βιβλία του συγγραφέα Θ. ΚΥΒΕΝΤΙΔΗ

1. *ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ, Τόμος Πρώτος,* (σελ. 480, 1987).

2α. *ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ,* (σελ. 512, 2007).

2. *ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ, Τόμος Δεύτερος,* (σελ. 400, 1988).

3. *ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ, Τόμος Τρίτος,* (σελ. 478, 1991).

4. *ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ (Ασκήσεις),* (σελ. 560, 1998).

5. *ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΠΛΗΘΥΣΜΩΝ (Συνεχή Μοντέλα)*, (σελ. 128, 1993).

6. *ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΠΛΗΘΥΣΜΩΝ (Διακριτά Μοντέλα)*, (σελ. 164, 2001).

7. *ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΚΑΙ ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ,* (σελ. 538, 2001).

8. *ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ,* (σελ. 320, 1994).

9. *ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ (Ασκήσεις),* (σελ. 400, 1977).

10. *ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ*
Συναρτήσεων Μιας Πραγματικής Μεταβλητής,
(Δύο Τεύχη, Α, σελ. 640, 2001 – Β, σελ. 312, 2001).

11. *ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ*
Συναρτήσεων Μιας Πραγματικής Μεταβλητής,
(σελ. 624, 2005).

12. *ΑΝΩΤΕΡΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ*
(Τόμος Πρώτος, σελ. 624, Τόμος Δεύτερος, σελ. 616,
Τόμος Τρίτος, σελ. 504, 2006).

ΤΥΠΟΙ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΩΝ

$$\sum_{n=1}^{k} n = \frac{k(k+1)}{2} \;, \qquad \sum_{n=0}^{k-1} (n+1) = \frac{k(k+1)}{2} \;,$$

$$\sum_{n=1}^{k} n^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \,, \qquad \sum_{n=0}^{k-1} (n+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \,,$$

$$\sum_{n=1}^{k} n^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} \,, \qquad \sum_{n=0}^{k-1} (2n+1) = k^2 \,,$$

$$\sum_{n=1}^{k} 2n = \sum_{n=1}^{2k} n - \sum_{n=0}^{k-1} (2n+1) = \frac{2k(2k+1)}{2} - k^2 = k(k+1) \;,$$

$$\sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{k-1}{k} \,, \qquad \sum_{n=0}^{k} (-1)^n n^2 = (-1)^k \frac{k(k+1)}{2} \,,$$

k ακέραιος

$$\sum_{n=0}^{k-1} \alpha^n = 1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^{k-1} = \frac{\alpha^k-1}{\alpha-1}$$ (Γεωμετρική πρόοδος),

$$\sum_{n=1}^{k} [\alpha+(n-1)\omega] = \frac{k}{2}\,[2\alpha+(k-1)\omega]$$ (Αριθμητική πρόοδος),

$$\sum_{n=1}^{k} n\alpha^n = \alpha+2\alpha^2+\ldots+k\alpha^k = \alpha\,\frac{1-\alpha^k}{(1-\alpha)^2} - \frac{k\alpha^{k+1}}{1-\alpha}$$ (Μεικτή πρόοδος),

$$\sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} \alpha^{k-n}\beta^n = (\alpha+\beta)^k \quad (n\leq k)$$ (Διώνυμο του *Newton*).

ΠΙΝΑΚΑΣ

Ειδικές τιμές των τριγωνομετρικών συναρτήσεων

θ	$0°$ $180°$	$30°$ $150°$	$45°$ $135°$	$60°$ $120°$	$90°$ $270°$
$ημθ$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	± 1
$συνθ$	± 1	$\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$	0
$εφθ$	0	$\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$	± 1	$\pm\sqrt{3}$	$\pm\infty$
$σφθ$	$\pm\infty$	$\pm\sqrt{3}$	± 1	$\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

- Το άνω πρόσημο αντιστοιχεί στην πρώτη γραμμή των τιμών της γωνίας θ και το κάτω πρόσημο στη δεύτερη γραμμή των τιμών της γωνίας θ.

- Η αντιστοιχία των μοιρών της γωνίας θ σε ακτίνια είναι:

$$\begin{array}{ccccc} 0° & 30° & 45° & 60° & 90° \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 0 & \frac{\pi}{6} & \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{3} & \frac{\pi}{2} \end{array}$$

και

$$\begin{array}{ccccc} 180° & 150° & 135° & 120° & 270° \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ \pi & \frac{5\pi}{6} & \frac{3\pi}{4} & \frac{2\pi}{3} & \frac{3\pi}{2} \end{array}$$

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι εξισώσεις διαφορών περιέχουν *διακριτές μεταβλητές* και *διακριτές συναρτήσεις* και εμφανίζονται σε μαθηματικά μοντέλα, όπου η μεταβλητή παίρνει μόνον ένα διακριτό σύνολο τιμών, και είναι χρήσιμες στις αριθμητικές μεθόδους επίλυσης των διαφορικών εξισώσεων, στα πειράματα με διακριτό χρόνο παρατήρησης και τους Η/Υ που χρησιμοποιούν διακριτές μεταβλητές.

Κάθε εξίσωση της μορφής

$$F(k, y_k, y_{k+1}, \ldots, y_{k+r}) = 0 \ ,$$

όπου F είναι δοσμένη συνάρτηση, r είναι κάποιος φυσικός αριθμός και $k=0, 1, 2, \ldots$, λέγεται *εξίσωση διαφορών* (θα γράφουμε στο εξής ε.δ.).

Γενικότερα, το k παίρνει τις τιμές $k=n_0, n_0+1, \ldots$, όπου n_0 είναι θετικός ή αρνητικός ακέραιος.

Θα θεωρούμε στη συνέχεια το $n_0 \geq 0$.

Λύση της ε.δ. είναι μια ακολουθία y_k που την επαληθεύει για $k=n_0, n_0+1, \ldots, n_0 \geq 0$.

Π.χ. η ακολουθία $y_k=2^k, k=0, 1, 2, \ldots$ είναι λύση της ε.δ.

$$y_{k+1}-2y_k = 0 \ .$$

Πράγματι, έχουμε

$$y_{k+1}-2y_k = 2^{k+1}-2 \cdot 2^k = 2^{k+1}-2^{k+1} = 0 \ , \quad k=0, 1, 2, \ldots \ .$$

Τάξη της ε.δ. λέγεται η διαφορά μεταξύ του μεγαλύτερου και του μικρότερου δείκτη των y_k.

Όταν η τάξη της ε.δ. είναι r τότε *αρχικές συνθήκες* της ε.δ. είναι r δοσμένες τιμές της y_k *σε* r *διαδοχικές διαφορετικές τιμές του* k.

Π.χ. η ε.δ. $y_{k+2}-3y_{k+1}+2y_k = 0$ είναι τάξης 2 και οι τιμές $y_0=1, y_1=2$ ή $y_3=-1, y_4=0{,}7$ ή $y_{12}=0, y_{13}=3$ αποτελούν αρχικές συνθήκες της.

Συνοριακές συνθήκες της ε.δ. είναι δοσμένες τιμές της y_k σε *μη διαδοχικές διαφορετικές τιμές του* k.

Π.χ. η ε.δ. $y_{k+2}-3y_{k+1}+2y_k = 0$ και οι τιμές

$y_0=1,\ y_{10}=2$ ή $y_1=-1,\ y_{20}=0$

αποτελούν συνοριακές συνθήκες της.

Μια ε.δ. λέγεται *γραμμική ε.δ.* αν μπορεί να πάρει τη μορφή

$$\alpha_r(k)y_{k+r}+\alpha_{r-1}(k)y_{k+r-1}+\ldots+\alpha_1(k)y_{k+1}+\alpha_0(k)y_k = f(k)\ , \qquad (1)$$

όπου r είναι δοσμένος φυσικός αριθμός και $\alpha_r, \alpha_{r-1}, \ldots, \alpha_1, \alpha_0$ και f είναι δοσμένες συναρτήσεις του k, που ορίζονται για $k=n_0, n_0+1, \ldots, n_0\geq 0$.

Όταν ισχύει η σχέση

$$\alpha_r(k)\alpha_0(k) \neq 0,\ \ \text{για}\ \ k=n_0, n_0+1, \ldots, n_0\geq 0,$$

η γραμμική ε.δ. είναι τάξης r*.

Οι παρακάτω ε.δ. είναι γραμμικές στο σύνολο τιμών $k=0, 1, 2, \ldots$

1) $y_{k+1}-(1-k)y_k = 1$, 2) $y_{k+2}+2y_{k+1}+y_k = k^2$,

3) $ky_{k+3}-4y_{k+2}+y_k = 0$, 4) $y_{k+4}+y_k = k+1$.

Η πρώτη ε.δ. έχει ιδιάζον σημείο το $k=1$ και η τρίτη ε.δ. έχει ιδιάζον σημείο το $k=0$.

Έτσι, η πρώτη ε.δ. είναι τάξης 1, για $k=2, 3, 4, \ldots$ και η τρίτη ε.δ. είναι τάξης 3, για $k=1, 2, 3, \ldots$.

Οι άλλες δύο ε.δ. είναι τάξης 2 και 4, αντίστοιχα, για $k=0, 1, 2, \ldots$.

Οι επόμενες ε.δ. δεν είναι γραμμικές, δηλαδή είναι *μη γραμμικές ε.δ.*

$$y_{k+2}-y_k^2 = 0\ , \qquad y_k y_{k+3}-y_{k+1} = 3k-2\ ,$$

$$\frac{1}{2+y_{k+1}^2}+y_{k+2} = 1\ .$$

Όπως στις διαφορικές εξισώσεις η ε.δ. (1) λέγεται *μη ομογενής* γραμμική ε.δ. και όταν η f είναι ταυτοτικά μηδέν λέγεται *ομογενής* γραμμική ε.δ.

Όταν *όλοι* οι συντελεστές $\alpha_r, \alpha_{r-1}, \ldots, \alpha_1, \alpha_0$ είναι σταθερές, τότε η ε.δ. (1) λέγεται γραμμική ε.δ. *με σταθερούς συντελεστές,* διαφορετικά λέγεται γραμμική ε.δ. *με μεταβλητούς συντελεστές.*

Σημειώσεις

1. Μια ε.δ. μπορεί να οριστεί και πάνω σε σύνολο τιμών

---

* Για την τάξη ε.δ. βλέπε την εργασία M. KWAPISZ, "*Remarks on the Notion of Order of Difference Equations*", J. of Difference Eq. and Appl. 8, N° 10 (2002), 849-856.

$$k = -n_0\,,\ -(n_0-1),\ \ldots,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

όπου n_0 φυσικός αριθμός, αντί του συνόλου τιμών $k=0, 1, 2, \ldots$ όπου θα μελετήσουμε τις ε.δ.

Π.χ. η ε.δ. $y_{k+1} = g(y_k, y_{k-1}, \ldots, y_{k-n_0})$, $k=0, 1, 2, \ldots$ όπου n_0 είναι δοσμένος φυσικός αριθμός (θετικός ακέραιος).

2. Η ε.δ. $y_{k+1} = y_k+y_{k-1}$ (για $k-1 \to k$ γράφεται $y_{k+2} = y_{k+1}+y_k$) είναι δεύτερης τάξης, ενώ η ε.δ.

$$y_{k+2} = y_k+y_{k-3}$$

(για $k-3 \to k$ γράφεται $y_{k+5} = y_{k+3}+y_k$) είναι πέμπτης τάξης.

Οι παρακάτω ε.δ. είναι πρώτης τάξης

$$y_{k+4}+3y_{k+3} = 2\,,\quad k=0, 1, 2, \ldots$$

(γράφεται $u_k = y_{k+3}$: $u_{k+1}+3u_k = 2\,,\quad k=3, 4, 5, \ldots$

ή για $k+3 \to k$: $y_{k+1}+3y_k = 2,\quad k=3, 4, 5, \ldots$)

$$y_{k+2}+ky_{k+1} = k^2\,,\quad k=1, 2, \ldots$$

(γράφεται $u_k = y_{k+1}$: $u_{k+1}+ku_k = k^2,\ k=1, 2, \ldots$

ή για $k+1 \to k$: $y_{k+1}+(k-1)y_k = (k-1)^2\,,\quad k=2, 3, \ldots$)

$$y_{k+5}+y_{k+4} = k+5\,,\quad k=0, 1, 2, \ldots$$

(γράφεται $u_k = y_{k+4}$: $u_{k+1}+u_k = k+5\,,\quad k=0, 1, 2, \ldots$

ή για $k+4 \to k$: $y_{k+1}+y_k = k+1\,,\quad k=4, 5, 6, \ldots$)

3. Στις αριθμητικές μεθόδους επίλυσης διαφορικών εξισώσεων, όπως η μέθοδος του *Euler*, προσεγγίζουμε την παράγωγο

$$y'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{y(x+h)-y(x)}{h}\,,$$

στα σημεία

$$x_k = x_0+kh\,,\quad k=0, 1, 2, \ldots$$

Σημειώνουμε τις τιμές

$$y_0 = y(x_0),\ \ y_1 = y(x_1),\ \ldots,\ \ y_k = y(x_k)\,,\ \ldots$$

και ορίζουμε την προσέγγιση των παραγώγων

$$y'(x_k) \simeq \frac{y\big(x_0+(k+1)h\big)-y(x_0+kh)}{h} = \frac{y_{k+1}-y_k}{h}\,,\quad k=0, 1, 2, \ldots\ .$$

Επομένως, αν έχουμε τη διαφορική εξίσωση

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

και την αρχική τιμή $y(x_0) = y_0$, τότε παίρνουμε τον τύπο του *Euler*

$$\frac{y_{k+1}-y_k}{h} = f(x_k, y_k) \quad , \quad k=0, 1, 2, \ldots$$

που είναι ε.δ. πρώτης τάξης, με αρχική συνθήκη $y_0 = y(x_0)$.

Π.χ. το πρόβλημα της αρχικής τιμής

$$y' = y+x \, , \ y(0)=1$$

με $h=0,1$ ανάγεται στην ε.δ. (εδώ είναι $x_0=0$ και $y_0=1$)

$$y_{k+1}-y_k = (0,1)\ [y_k+(0,1)k] \ , \ k=0, 1, 2, \ldots .$$

4. Η αναζήτηση λύσης του προβλήματος της αρχικής τιμής

$$y''-2x^2y'+8y = 0 \, , \ y(0)=0 \, , \ y'(0)=1$$

με τη μορφή σειράς δυνάμεων

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k \, ,$$

(το $x_0=0$ είναι συνηθισμένο σημείο της δ.ε., ([7], Κεφ. 2, §5, Τόμος Πρώτος), με την αντικατάσταση των $y(x), y'(x), y''(x)$ στη διαφορική εξίσωση, ανάγεται στο πρόβλημα της ε.δ. τρίτης τάξης

$$(k+2)\ (k+1)\alpha_{k+2}+8\alpha_k-2(k-1)\alpha_{k-1} = 0 \, , \ k=2, 3, \ldots$$

με αρχικές συνθήκες $\alpha_0=0, \alpha_1=1, \alpha_2=0.$

5. Η αντιστοιχία μεταξύ των συνεχών και διακριτών συναρτήσεων είναι:

συνεχής συνάρτηση	$y(x)$	$\leftrightarrow$	διακριτή συνάρτηση y_k (ακολουθία)
σύνολο ορισμού	$x\in [0, +\infty)$	$\leftrightarrow$	σύνολο ορισμού $k=0, 1, 2, \ldots$
	$x\in \mathbb{R}$	$\leftrightarrow$	$k\in \mathbb{Z}$ ακέραιοι αριθμοί
παράγωγος	$y'(x)$	$\leftrightarrow$	y_{k+1} (για την ακρίβεια $y_{k+1}-y_k$)
	$y''(x)$	$\leftrightarrow$	y_{k+2}
(r φυσικός αριθμός)	$y^{(r)}(x)$	$\leftrightarrow$	y_{k+r}, r φυσικός αριθμός.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ

1. Γραμμικές εξισώσεις διαφορών πρώτης και δεύτερης τάξης

Η γραμμική ε.δ. πρώτης τάξης με μεταβλητούς συντελεστές

$$y_{k+1}-q_k y_k = r_k \quad , \quad q_k \neq 0 \, , \quad k=0,\, 1,\, 2,\, \ldots \tag{1}$$

όπου q_k, r_k είναι δοσμένες ακολουθίες, έχει τη γενική λύση

$$y_k = \left(\prod_{i=0}^{k-1} q_i \right) y_0 + \sum_{n=0}^{k-2} \left(\prod_{i=n+1}^{k-1} q_i \right) r_n + r_{k-1} \, , \; k=0,\, 1,\, 2,\, \ldots$$

ή

$$y_k = \left(\prod_{i=n_0}^{k-1} q_i \right) y_{n_0} + \sum_{n=n_0}^{k-2} \left(\prod_{i=n+1}^{k-1} q_i \right) r_n + r_{k-1} \, , \quad k=n_0,\, n_0+1,\, \ldots$$

όπου ο όρος y_0 (ή y_{n_0}) είναι αυθαίρετη σταθερή (αρχική τιμή).

Όταν είναι $q_k=q\neq 0$ σταθερή, τότε η γενική λύση της (1) είναι

$$y_k = q^k y_0 + \sum_{n=0}^{k-2} q^{k-n-1} r_n + r_{k-1} \, , \quad k=0,\, 1,\, 2,\, \ldots$$

όπου y_0 είναι αυθαίρετη σταθερή.

Για ν' αποδείξουμε την έκφραση της γενικής λύσης διαιρούμε την ε.δ. (1) με τον όρο $\prod_{i=0}^{k} q_i$ και παίρνουμε

$$\frac{y_{k+1}}{\prod_{i=0}^{k} q_i} - \frac{y_k}{\prod_{i=0}^{k-1} q_i} = \frac{r_k}{\prod_{i=0}^{k} q_i} \quad .$$

Από την τελευταία εξίσωση, για $k=1, 2, 3, \ldots$, έχουμε

$$k=1 \quad : \qquad \frac{y_2}{q_0q_1} - \frac{y_1}{q_0} = \frac{r_1}{q_0q_1} \ ,$$

$$k=2 \quad : \qquad \frac{y_3}{q_0q_1q_2} - \frac{y_2}{q_0q_1} = \frac{r_2}{q_0q_1q_2} \ ,$$

$$k=3 \quad : \qquad \frac{y_4}{q_0q_1q_2q_3} - \frac{y_3}{q_0q_1q_2} = \frac{r_3}{q_0q_1q_2q_3} \ ,$$

κ.τ.λ.

Αθροίζοντας τις σχέσεις αυτές παίρνουμε

$$\frac{y_{k+1}}{\prod_{i=0}^{k} q_i} - \frac{y_1}{q_0} = \sum_{n=1}^{k} \left(\prod_{i=0}^{n} q_i \right)^{-1} r_n \ .$$

Αλλά, για $k=0$, έχουμε

$$y_1 - q_0 y_0 = r_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{y_1}{q_0} = y_0 + \frac{r_0}{q_0} \ ,$$

οπότε η προηγούμενη εξίσωση γίνεται

$$\frac{y_{k+1}}{\prod_{i=0}^{k} q_i} = y_0 + \sum_{n=0}^{k} \left(\prod_{i=0}^{n} q_i \right)^{-1} r_n$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{y_{k+1}}{\prod_{i=0}^{k} q_i} = y_0 + \sum_{n=0}^{k-1} \left(\prod_{i=0}^{n} q_i \right)^{-1} r_n + \left(\prod_{i=0}^{k} q_i \right)^{-1} r_k$$

$$\Rightarrow \qquad y_{k+1} = \left(\prod_{i=0}^{k} q_i \right) y_0 + \sum_{n=0}^{k-1} \left(\prod_{i=n+1}^{k} q_i \right) r_n + r_k \ .$$

Επομένως, θέτοντας $k-1$ αντί k, παίρνουμε τη γενική λύση της (1)

$$y_k = \left(\prod_{i=0}^{k-1} q_i \right) y_0 + \sum_{n=0}^{k-2} \left(\prod_{i=n+1}^{k-1} q_i \right) r_n + r_{k-1} \ ,$$

όπου y_0 είναι αυθαίρετη σταθερή και $k=0, 1, 2, \ldots$.

Θεωρούμε ότι, όταν $k_2<k_1$, τότε $\sum_{j=k_1}^{k_2} f(j)=0$ και $\prod_{j=k_1}^{k_2} f(j)=1$.

Επομένως η γενική λύση της ε.δ. (1) μπορεί να γραφεί

$$y_k = \left(\prod_{i=0}^{k-1} q_i\right) y_0 + \sum_{n=0}^{k-1} \left(\prod_{i=n+1}^{k-1} q_i\right) r_n \quad , \quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ .$$

Η άλλη μορφή της γενικής λύσης προκύπτει για αρχική τιμή y_{n_0} και $k=n_0,\ n_0+1,\ n_0+2,\ \ldots$

ΘΕΩΡΗΜΑ (Ύπαρξης και μοναδικότητας)

Το πρόβλημα της αρχικής τιμής

$$y_{k+1}-q_k y_k = r_k\ , \quad y_0=A$$

όπου q_k, r_k είναι δοσμένες ακολουθίες, με $q_k\neq 0$ για όλα τα $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ και A είναι δοσμένος αριθμός, έχει μοναδική λύση.

Απόδειξη

Παρατηρούμε ότι:

για $k=0$ έχουμε $\quad y_1 = q_0 y_0+r_0$

και ο y_1 προσδιορίζεται κατά μοναδικό τρόπο,

για $k=1$ έχουμε $\quad y_2 = q_1 y_1+r_1$

και ο y_2 προσδιορίζεται κατά μοναδικό τρόπο.

Έτσι, όταν ο y_n έχει προσδιοριστεί κατά μοναδικό τρόπο, τότε από τη σχέση $y_{n+1} = q_n y_n+r_n$

και ο y_{n+1} προσδιορίζεται κατά μοναδικό τρόπο.

Επομένως, το πρόβλημα της αρχικής τιμής

$$y_{k+1}-q_k y_k = r_k\ , \quad y_0=A$$

για $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, έχει μοναδική λύση.

Παρατήρηση 1

Η γενική λύση της ε.δ.

$$y_{k+1}-q_k y_k = r_k \quad (\text{μη ομογενής}) \tag{1}$$

ισούται με το άθροισμα της γενικής λύσης της ε.δ.

$$y_{k+1}-q_k y_k = 0 \quad (\text{ομογενής}) \tag{2}$$

και μιας μερικής λύσης της ε.δ. (1).

Αρκεί να παρατηρήσουμε πως η διαφορά δύο λύσεων $y_k^{(1)}, y_k^{(2)}, k=0, 1, 2, 3, \dots$ της γραμμικής ε.δ. (1) είναι λύση της ε.δ. (2).

Όταν είναι $q_k=q$ σταθερή, τότε για την εύρεση της μερικής λύσης της (1) μπορούμε να εφαρμόσουμε τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών που περιγράφουμε παρακάτω στις γραμμικές ε.δ. δεύτερης τάξης .

Σημείωση 1

Η ε.δ.

$$k y_{k+1} - y_k = 0$$

α) στο σύνολο $k=0, 1, 2, \dots$ δεν έχει λύση για $y_0 \neq 0$ και έχει άπειρες λύσεις για $y_0=0,$

β) στο σύνολο $k=1, 2, \dots$ έχει πάντοτε μοναδική λύση.

Παράδειγμα 1

Να βρεθούν οι γενικές λύσεις των ε.δ.

α) $y_{k+1} - y_k = k\,,$ β) $y_{k+1} - \dfrac{2k+3}{2k+1}\, y_k = 0\,,$

γ) $y_{k+1} + 3y_k = -1\,,\ y_0=1\,,$ δ) $y_{k+1} - y_k = \sigma\upsilon\nu 2k.$

α) Εδώ είναι $q=1$, οπότε έχουμε

$$y_k = 1^k y_0 + \sum_{n=0}^{k-2} 1^{k-n-1}\, n+k-1 = y_0 + \sum_{n=0}^{k-1} n$$

$$\Rightarrow \qquad y_k = c + \frac{1}{2}\, k(k-1), \quad k=0, 1, 2, \dots .$$

όπου $c = y_0$ είναι αυθαίρετη σταθερή.

β) Εδώ έχουμε $q_k = \dfrac{2k+3}{2k+1}$, $r_k=0$, οπότε η γενική λύση είναι

$$y_k = \left(\prod_{i=0}^{k-1} \frac{2i+3}{2i+1} \right) y_0 = (2k+1)c\,, \quad k=0, 1, 2, \dots$$

όπου $c=y_0$ αυθαίρετη σταθερή.

γ) Θεωρούμε την αντίστοιχη ομογενή γραμμική ε.δ.

$$y_{k+1} + 3y_k = 0 \tag{2}$$

της οποίας η γενική λύση είναι

$$y_k^0 = (-3)^k c\,, \quad k=0, 1, 2, \dots$$

όπου c αυθαίρετη σταθερή.

Αναζητούμε μια μερική λύση της ε.δ.

$$y_{k+1}+3y_k = -1 \tag{1}$$

με τη μορφή $y_k=A$, A προσδιοριστέα σταθερή (επειδή το 1 δεν είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης $\lambda+3=0$).

Αντικαθιστώντας στην ε.δ. (1) παίρνουμε

$$A+3A \equiv -1 \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{1}{4}\,,$$

οπότε μια μερική λύση της ε.δ. (1) είναι

$$y_k^{\mu} = -\frac{1}{4}\,,\ \ k=0, 1, 2, \ldots .$$

Επομένως, η γενική λύση της ε.δ. (1) είναι

$$y_k = y_k^0+y_k^{\mu} = (-3)^k c-\frac{1}{4}\,,\quad k=0, 1, 2, \ldots$$

όπου c αυθαίρετη σταθερή.

Από την αρχική συνθήκη παίρνουμε

$$y_0=1 \quad \Rightarrow \quad y_0 = c-\frac{1}{4}=1 \quad \Rightarrow \quad c=\frac{5}{4}$$

οπότε η ζητούμενη λύση είναι

$$y_k = \frac{5}{4}(-3)^k-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}[5(-3)^k-1]\,,\quad k=0, 1, 2, \ldots\ .$$

Μπορούμε να βρούμε τη γενική λύση και από τον τύπο

$$y_k = \left(\prod_{i=0}^{k-1}(-3)\right)y_0+\sum_{n=0}^{k-2}\left(\prod_{i=n+1}^{k-1}(-3)\right)(-1)+(-1)$$

$$\Rightarrow \qquad y_k = (-3)^k y_0+\sum_{n=0}^{k-1}(-3)^{k-n-1}(-1)$$

$$\Rightarrow \qquad y_k = (-3)^k y_0+(-1)\,\frac{(-3)^k-1}{(-3)-1}\,,\quad k=0, 1, 2, \ldots$$

Για $y_0=1$ (αρχική συνθήκη) βρίσκουμε τη λύση

$$y_k = (-3)^k+\frac{(-3)^k-1}{1-(-3)}=\frac{1}{4}[5(-3)^k-1]\,,\ \ k=0, 1, 2, \ldots$$

Χρησιμοποιούμε το δείκτη $k=0$ στη γενική λύση επειδή γι’ αυτόν ο δεύτερος όρος μηδενίζεται και δίνει την ταυτότητα $y_0=y_0$.

δ) Θεωρούμε την αντίστοιχη ομογενή γραμμική ε.δ.

$$y_{k+1} - y_k = 0$$

της οποίας η γενική λύση είναι

$$y_k^0 = 1^k c = c, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, c \text{ αυθαίρετη σταθερή.}$$

Αναζητούμε μια μερική λύση της ε.δ.

$$y_{k+1} - y_k = \sigma\upsilon\nu 2k \tag{1}$$

με τη μορφή $y_k^\mu = A\sigma\upsilon\nu 2k + B\eta\mu 2k$, A, B προσδιοριστέες σταθερές.

Η χαρακτηριστική εξίσωση της (2) $\lambda - 1 = 0$ (3) δεν έχει μιγαδικές ρίζες, οπότε ο αριθμός $1 \cdot e^{i2} = \sigma\upsilon\nu 2 + i\eta\mu 2$ δεν είναι ρίζα της (3).

Έχουμε $y_{k+1}^\mu = A\sigma\upsilon\nu(2k+1) + B\eta\mu 2(k+1)$, αλλά είναι

$$\begin{aligned} \sigma\upsilon\nu\, 2(k+1) &= \sigma\upsilon\nu(2k+2) &&= \sigma\upsilon\nu 2k\, \sigma\upsilon\nu 2 - \eta\mu 2k\, \eta\mu 2, \\ \eta\mu 2(k+1) &= \eta\mu(2k+2) &&= \eta\mu 2k\, \sigma\upsilon\nu 2 + \sigma\upsilon\nu 2k\, \eta\mu 2, \end{aligned}$$

οπότε παίρνουμε

$$y_{k+1}^\mu = (A\sigma\upsilon\nu 2 + B\eta\mu 2)\sigma\upsilon\nu 2k + (B\sigma\upsilon\nu 2 - A\eta\mu 2)\eta\mu 2k.$$

Αντικαθιστώντας στην ε.δ. (1) παίρνουμε

$$[A(\sigma\upsilon\nu 2 - 1) + B\eta\mu 2]\sigma\upsilon\nu 2k + [B(\sigma\upsilon\nu 2 - 1) - A\eta\mu 2]\eta\mu 2k \equiv \sigma\upsilon\nu 2k,$$

απ' όπου προκύπτει το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} A(\sigma\upsilon\nu 2 - 1) + B\eta\mu 2 &= 1, \\ -A\eta\mu 2 + B(\sigma\upsilon\nu 2 - 1) &= 0, \end{aligned}$$

το οποίο έχει τη λύση

$$A = -\frac{1}{2}, \quad B = -\frac{1}{2}\frac{\eta\mu 2}{1 - \sigma\upsilon\nu 2} = -\frac{1}{2}\sigma\varphi 1.$$

Άρα, μια μερική λύση της ε.δ. (1) είναι η

$$y_k^\mu = -\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu 2k - \frac{1}{2}\sigma\varphi 1 \cdot \eta\mu 2k = -\frac{\eta\mu(2k+1)}{2\eta\mu 1}, \; k = 0, 1, 2, \ldots$$

Επομένως, η γενική λύση της ε. δ. (1) δίνεται από τη σχέση

$$y_k = y_k^0 + y_k^\mu = c - \frac{\eta\mu(2k+1)}{2\eta\mu 1}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή. ■

Η γραμμική ε.δ. πρώτης τάξης $y_{k+1}-qy_k = 0$, όπου q σταθερή, έχει τη γενική λύση

$$y_k = cq^k\ ,\ \ k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή.

Παρατηρούμε ότι ($k\to\infty$ σημαίνει $k\to+\infty$):

όταν είναι $|q|<1$ τότε $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = \lim\limits_{k\to\infty} cq^k = 0$,

όταν είναι $q>1$ τότε $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = \lim\limits_{k\to\infty} cq^k = +\infty$, αν $c>0$ ή $-\infty$, αν $c<0$.

όταν είναι $q=1$ τότε $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = \lim\limits_{k\to\infty} c1^k = c$,

όταν είναι $q=-1$ τότε

$\lim\limits_{k\to\infty} y_k = \lim\limits_{k\to\infty} c(-1)^k$ ταλαντεύεται μεταξύ c και $-c$,

όταν είναι $q<-1$ τότε

$\lim\limits_{k\to\infty} y_k = \lim\limits_{k\to\infty} cq^k$ ταλαντεύεται μεταξύ $+\infty$ και $-\infty$. ■

Γραμμικές εξισώσεις διαφορών δεύτερης τάξης

Θεωρούμε τη γραμμική ε.δ. δεύτερης τάξης

$$\alpha_2(k)y_{k+2}+\alpha_1(k)y_{k+1}+\alpha_0(k)y_k = f(k)\ , \qquad (1_o)$$

όπου $\alpha_2,\ \alpha_1,\ \alpha_0$ και f είναι δοσμένες συναρτήσεις του k, που ορίζονται για $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$.

Επειδή η ε.δ. (1_o) υποτίθεται δεύτερης τάξης οι συντελεστές είναι

$$\alpha_2(k)\neq 0\ ,\quad \alpha_0(k)\neq 0\ ,\ \text{ για όλα τα } k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Διαιρώντας και τα δύο μέλη της ε.δ. (1_o) με $\alpha_2(k)$ και θέτοντας

$$\frac{\alpha_1(k)}{\alpha_2(k)} = p_k\ ,\quad \frac{\alpha_0(k)}{\alpha_2(k)} = q_k\ ,\quad \frac{f(k)}{\alpha_2(k)} = r_k$$

καταλήγουμε στη μορφή της *γραμμικής ε.δ. δεύτερης τάξης*

$$y_{k+2}+p_k y_{k+1}+q_k y_k = r_k\ , \qquad (1)$$

όπου $p_k,\ q_k$ και r_k είναι δοσμένες ακολουθίες και $q_k\neq 0$ για όλους τους $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$.

Λύση της ε.δ. (1) είναι μια ακολουθία y_k που την επαληθεύει για όλους τους $k=0, 1, 2, \ldots$.

Π.χ. η ε.δ. $y_{k+2}-3y_{k+1}+2y_k = 0$ έχει τις λύσεις $y_k = 1^k = 1$ και $y_k=2^k$, $k=0, 1, 2, \ldots$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1: (Ύπαρξης και μοναδικότητας)

Το πρόβλημα της αρχικής τιμής

$$y_{k+2}+p_k y_{k+1}+q_k y_k = r_k\,, \tag{1}$$

$$y_0=A\,,\ \ y_1=B \tag{1_α}$$

όπου p_k, q_k *και* r_k *είναι δοσμένες ακολουθίες αριθμών, με* $q_k\neq 0$ *για όλους τους* $k=0, 1, 2, \ldots$ *και* A, B *είναι δοσμένες σταθερές, έχει μοναδική λύση.*

Απόδειξη

Για $k=0$ η ε.δ. (1) γίνεται

$$y_2+p_0y_1+q_0y_0 = r_0\,,$$

και, λόγω των αρχικών συνθηκών (1_α), βρίσκουμε

$$y_2 = r_0-p_0B-q_0A\,.$$

Άρα, το y_2 προσδιορίζεται κατά μοναδικό τρόπο.

Για $k=1$ η ε.δ. (1) γίνεται

$$y_3 = r_1-p_1y_2-q_1y_1 = r_1-p_1y_2-q_1B$$

και το y_3 προσδιορίζεται κατά μοναδικό τρόπο.

Υποθέτουμε πως οι όροι $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{\nu+1}$ της λύσης y_k είναι κατά μοναδικό τρόπο προσδιορισμένοι, τότε από την ε.δ. (1), για $k=\nu$, παίρνουμε

$$y_{\nu+2} = -p_\nu y_{\nu+1}-q_\nu y_\nu\,.$$

Άρα, το $y_{\nu+2}$ προσδιορίζεται κατά μοναδικό τρόπο.

Επομένως, όλοι οι όροι της λύσης y_k του προβλήματος της αρχικής τιμής (1), (1_α), προσδιορίζονται κατά μοναδικό τρόπο, δηλαδή η λύση y_k είναι μοναδική, για $k=0, 1, 2, \ldots$.

Παρατήρηση 2

Η υπόθεση $\alpha_2(k)\neq 0$, για $k=0, 1, 2, \ldots$ είναι σημαντική για το Θεώρημα 1.

Π.χ. η ε.δ. $ky_{k+2}-y_k = 0$, για $k=0, 1, 2, \ldots$

α) με τις αρχικές τιμές $y_0=1$, $y_1=0$ δεν έχει λύση,

β) με τις αρχικές τιμές $y_0=0$, $y_1=0$ έχει άπειρες λύσεις,

γ) με τις αρχικές τιμές $y_1=0$, $y_2=1$ έχει μοναδική λύση, για $k=1, 2, \ldots$

ΟΡΙΣΜΟΙ: *Οι ακολουθίες* $y_k^{(1)}$, $y_k^{(2)}$, $k=0, 1, 2, \ldots$ *λέμε ότι είναι* γραμμικά εξαρτημένες, *όταν υπάρχουν σταθερές* c_1, c_2, *όχι και οι δύο μηδέν, τέτοιες ώστε*

$$c_1 y_k^{(1)} + c_2 y_k^{(2)} = 0\,, \quad k=0, 1, 2, \ldots\,.$$

Διαφορετικά, οι ακολουθίες $y_k^{(1)}$, $y_k^{(2)}$, $k=0, 1, 2, \ldots$ *λέμε ότι είναι* γραμμικά ανεξάρτητες.

Η ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} y_k^{(1)} & y_k^{(2)} \\ y_{k+1}^{(1)} & y_{k+1}^{(2)} \end{vmatrix}, \quad k=0, 1, 2, \ldots$$

λέγεται ορίζουσα του *Casorati και σημειώνεται*

$$C_k = C\left(y_k^{(1)}, y_k^{(2)}\right) = \begin{vmatrix} y_k^{(1)} & y_k^{(2)} \\ y_{k+1}^{(1)} & y_{k+1}^{(2)} \end{vmatrix}, \quad k=0, 1, 2, \ldots\,.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 1: *Αν* $y_k^{(1)}$, $y_k^{(2)}$, $k=0, 1, 2, \ldots$ *είναι δύο λύσεις της ομογενούς γραμμικής ε.δ. δεύτερης τάξης*

$$y_{k+2} + p_k y_{k+1} + q_k y_k = 0\,, \tag{2}$$

όπου $q_k \neq 0$, *για* $k=0, 1, 2, \ldots$, *τότε η ορίζουσα του Casorati*

$$C_k = C\left(y_k^{(1)}, y_k^{(2)}\right)$$

ή μηδενίζεται ή δεν μηδενίζεται για όλους τους $k=0, 1, 2, \ldots$.

Απόδειξη

Έχουμε

$$C_{k+1} = \begin{vmatrix} y_{k+1}^{(1)} & y_{k+1}^{(2)} \\ y_{k+2}^{(1)} & y_{k+2}^{(2)} \end{vmatrix} = y_{k+1}^{(1)}\, y_{k+2}^{(2)} - y_{k+1}^{(2)} y_{k+2}^{(1)} =$$

$$= y_{k+1}^{(1)}\left(-p_k y_{k+1}^{(2)} - q_k y_k^{(2)}\right) - y_{k+1}^{(2)}\left(-p_k y_{k+1}^{(1)} - q_k y_k^{(1)}\right) =$$

$$= q_k\left(y_k^{(1)} y_{k+1}^{(2)} - y_k^{(2)} y_{k+1}^{(1)}\right) = q_k C_k\,.$$

Δηλαδή, παίρνουμε τη γραμμική ε.δ. πρώτης τάξης

$$C_{k+1} = q_k C_k$$

απ' όπου, για $k=0, 1, 2, \ldots$, βρίσκουμε

$$C_1 = q_0 C_0, \quad C_2 = q_1 C_1 = q_0 q_1 C_0\,, \quad C_3 = q_2 C_2 = q_0 q_1 q_2 C_0$$

και η γενική λύση της είναι

$$C_k = \left(\prod_{i=0}^{k-1} q_i \right) C_0 ,$$

όπου $\prod_{i=0}^{k-1} q_i = q_0 q_1 q_2 \dots q_{k-1}$.

Από την υπόθεση έχουμε $q_i \neq 0$, $\forall$ $i=0, 1, 2, \dots$, οπότε η ορίζουσα του *Casorati* C_k:

όταν είναι $C_0=0$, μηδενίζεται $C_k=0$, $\forall$ $k=0, 1, 2, \dots$

όταν είναι $C_0 \neq 0$, δεν μηδενίζεται $C_k \neq 0$, $\forall$ $k=0, 1, 2, \dots$ ■

Η υπόθεση $q_k \neq 0$, για $k=0, 1, 2, \dots$ είναι αναγκαία για να ισχύει η Πρόταση 1.

Π.χ. η ε.δ. $y_{k+2} - k y_k = 0$, για $k=0, 1, 2, \dots$, έχει τις δύο λύσεις

$$y_k^{(1)} : 1, 1, 0, 1, 0, 3, 0, 15, \dots$$

$$y_k^{(2)} : 0, 2, 0, 2, 0, 6, 0, 30 , \dots .$$

Η ορίζουσα του *Casorati* αυτών είναι

$$C_k = C(y_k^{(1)}, y_k^{(2)}) = \begin{cases} 2 , & \text{αν } k=0 \\ 0 , & \text{αν } k \neq 0 \end{cases}$$

οπότε οι δύο λύσεις $y_k^{(1)}$, $y_k^{(2)}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες, για $k=0, 1, 2, \dots$, ενώ είναι

$$y_k^{(2)} = 2 y_k^{(1)} , \text{ για } k=1, 2, 3, \dots$$

δηλαδή είναι γραμμικά εξαρτημένες, για $k=1, 2, 3, \dots$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2: *Όταν είναι* $C(y_k^{(1)}, y_k^{(2)}) \neq 0$, *για όλους τους* $k=0, 1, 2, \dots$ *οι λύσεις* $y_k^{(1)}, y_k^{(2)}$, $k=0, 1, 2, \dots$ *της* (2) *είναι γραμμικά ανεξάρτητες, ενώ όταν είναι* $C(y_k^{(1)}, y_k^{(2)}) = 0$, *για όλους τους* $k=0, 1, 2, \dots$, *οι λύσεις είναι γραμμικά εξαρτημένες.*

Απόδειξη

Έστω ότι έχουμε $C(y_k^{(1)}, y_k^{(2)}) \neq 0$, για όλους τους $k=0, 1, 2, \dots$ και ότι υπάρχει γραμμικός συνδυασμός των δύο λύσεων

$$c_1 y_k^{(1)} + c_2 y_k^{(2)} = 0 , \quad k=0, 1, 2, \dots .$$

Αλλά το γραμμικό σύστημα

$$c_1 y_k^{(1)} + c_2 y_k^{(2)} = 0\,,$$
$$c_1 y_{k+1}^{(1)} + c_2 y_{k+1}^{(2)} = 0\,,$$

επειδή ισχύει $C(y_k^{(1)}, y_k^{(2)}) \neq 0$, έχει μόνον τη μηδενική λύση, για όλους τους $k=0, 1, 2, \ldots$, άρα οι δύο λύσεις $y_k^{(1)}, y_k^{(2)}$, $k=0, 1, 2, \ldots$ της (2) είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Όταν όμως ισχύει $C(y_k^{(1)}, y_k^{(2)}) = 0$, για όλους τους $k=0, 1, 2, \ldots$ το παραπάνω γραμμικό σύστημα έχει μη μηδενική λύση ως προς c_1, c_2.

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη εξίσωση με q_k και τη δεύτερη με p_k, και προσθέτοντας τις δύο εξισώσεις παίρνουμε

$$q_k(c_1 y_k^{(1)} + c_2 y_k^{(2)}) + p_k(c_1 y_{k+1}^{(1)} + c_2 y_{k+1}^{(2)}) = 0$$
$$\Rightarrow \quad c_1(p_k y_{k+1}^{(1)} + q_k y_k^{(1)}) + c_2(p_k y_{k+1}^{(2)} + q_k y_k^{(2)}) = 0\,.$$

Επειδή οι $y_k^{(1)}, y_k^{(2)}$ είναι λύσεις της ε.δ. (2) έχουμε

$$y_{k+2}^{(1)} = -(p_k y_{k+1}^{(1)} + q_k y_k^{(1)})\,,$$
$$y_{k+2}^{(2)} = -(p_k y_{k+1}^{(2)} + q_k y_k^{(2)})\,,$$

και η τελευταία εξίσωση γίνεται

$$c_1 y_{k+2}^{(1)} + c_2 y_{k+2}^{(2)} = 0\,.$$

Άρα, έχουμε

$$c_1 y_k^{(1)} + c_2 y_k^{(2)} = 0\,, \quad \text{για όλους τους } k=0, 1, 2, \ldots$$

οπότε οι δύο λύσεις $y_k^{(1)}, y_k^{(2)}$ είναι γραμμικά εξαρτημένες για $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2: *Έστω* $y_k^{(1)}, y_k^{(2)}$, $k=0, 1, 2, \ldots$ *δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς γραμμικής ε.δ.*

$$y_{k+2} + p_k y_{k+1} + q_k y_k = 0\,, \tag{2}$$

όπου $q_k \neq 0$, *για* $k=0, 1, 2, \ldots$ *και έστω* y_k^{μ} *μια μερική λύση της μη ομογενούς γραμμικής ε.δ.*

$$y_{k+2} + p_k y_{k+1} + q_k y_k = r_k\,. \tag{1}$$

Τότε η γενική λύση της ε.δ. (1) δίνεται από τον τύπο

$$y_k = c_1 y_k^{(1)} + c_2 y_k^{(2)} + y_k^{\mu} \;,$$

όπου c_1, c_2 *είναι αυθαίρετες σταθερές.*

Απόδειξη

Έστω y_k τυχαία λύση της ε.δ. (1) και y_k^{μ} μία ορισμένη μερική λύση της ε.δ. (1), τότε η διαφορά τους

$$y_k - y_k^{\mu}$$

είναι λύση της ε.δ. (2).

Αρκεί να δείξουμε ότι η γενική λύση της ε.δ. (2) δίνεται από τον τύπο

$$y_k^0 = c_1 y_k^{(1)} + c_2 y_k^{(2)} \;, \quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

όπου c_1, c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές.

Προφανώς ο συνδυασμός $c_1 y_k^{(1)} + c_2 y_k^{(2)}$ είναι λύση της (2).

Αν y_k^0 είναι τυχαία λύση της ε.δ. (2) σχηματίζουμε το γραμμικό σύστημα

$$y_{k_0}^0 = c_1 y_{k_0}^{(1)} + c_2 y_{k_0}^{(2)} \;,$$

$$y_{k_0+1}^0 = c_1 y_{k_0+1}^{(1)} + c_2 y_{k_0+1}^{(2)} \;, \quad \text{για κάποιο } k_0 \geq 0 \,.$$

Επειδή είναι $C(y_k^{(1)}, y_k^{(2)}) \neq 0$, για $k=0, 1, 2, \ldots$ (Προτάσεις 1 και 2) αυτό το γραμμικό σύστημα έχει μοναδική λύση ως προς c_1, c_2.

Γι' αυτές τις τιμές των c_1, c_2 οι δύο λύσεις της ε.δ. (2)

$$c_1 y_k^{(1)} + c_2 y_k^{(2)} \qquad \text{και} \quad y_k^0$$

ικανοποιούν τις ίδιες αρχικές συνθήκες για k_0 και k_0+1.

Άρα, οι δύο αυτές λύσεις της ε.δ. (2) ταυτίζονται (Θεώρημα 1).

Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $k_1 < k_0$ τέτοιο ώστε

$$y_{k_1}^0 \neq c_1 y_{k_1}^{(1)} + c_2 y_{k_1}^{(2)} \;,$$

για την παραπάνω μοναδική λύση των c_1, c_2, τότε σχηματίζουμε πάλι το γραμμικό σύστημα

$$y_{k_1}^0 = c_1 y_{k_1}^{(1)} + c_2 y_{k_1}^{(2)} \;,$$

$$y_{k_1+1}^0 = c_1 y_{k_1+1}^{(1)} + c_2 y_{k_1+1}^{(2)} \;,$$

το οποίο, επειδή είναι $C_{k_1} \neq 0$, έχει μοναδική λύση c_1^0, c_2^0.

Αλλά τότε οι λύσεις του (2),

$$y_k^0 \,, \quad c_1^0 y_k^{(1)} + c_2^0 y_k^{(2)} \;,$$

ταυτίζονται για $k \geq k_1$ (Θεώρημα 1).

Επομένως, για $k_0 > k_1$ έχουμε τις σχέσεις

$$y^0_{k_0} = c^0_1 y^{(1)}_{k_0} + c^0_2 y^{(2)}_{k_0} = c_1 y^{(1)}_{k_0} + c_2 y^{(2)}_{k_0} \ ,$$

$$y^0_{k_0+1} = c^0_1 y^{(1)}_{k_0+1} + c^0_2 y^{(2)}_{k_0+1} = c_1 y^{(1)}_{k_0+1} + c_2 y^{(2)}_{k_0+1} \ ,$$

απ' όπου, επειδή είναι $C_{k_0} \neq 0$, προκύπτει ότι $c^0_1 = c_1$, $c^0_2 = c_2$. ■

Σημειώνουμε ότι, αν $y^{\mu_1}_k$ είναι λύση της ε.δ.

$$y_{k+2} + p_k y_{k+1} + q_k y_k = r^{(1)}_k \qquad (1.1)$$

και αν $y^{\mu_2}_k$ είναι λύση της ε.δ.

$$y_{k+2} + p_k y_{k+1} + q_k y_k = r^{(2)}_k \ , \qquad (1.2)$$

τότε το άθροισμά τους

$$y^{\mu_1}_k + y^{\mu_2}_k$$

είναι λύση της ε.δ.

$$y_{k+2} + p_k y_{k+1} + q_k y_k = r^{(1)}_k + r^{(2)}_k \ .$$

Ακόμη, οι αυθαίρετες σταθερές c_1, c_2 της γενικής λύσης μπορούν να θεωρηθούν ως *περιοδικές συναρτήσεις* $c_1(k)$, $c_2(k)$ *περιόδου 1,* δηλαδή

$$c_1(k+1) = c_1(k) \ , \ \ c_2(k+1) = c_2(k), \ \ \forall \ k=0, 1, 2, \dots \ .$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 3: *Θεωρούμε την ομογενή γραμμική ε.δ. δεύτερης τάξης*

$$\alpha_2 y_{k+2} + \alpha_1 y_{k+1} + \alpha_0 y_k = 0 \ , \qquad (2)$$

όπου α_0, α_1, α_2 *είναι πραγματικοί αριθμοί και* $\alpha_2 \alpha_0 \neq 0$.

Όταν λ_1 *και* λ_2 *είναι ρίζες* της χαρακτηριστικής εξίσωσης

$$\alpha_2 \lambda^2 + \alpha_1 \lambda + \alpha_0 = 0 \ , \qquad (3)$$

τότε η γενική λύση της ε.δ. (2) δίνεται από τον τύπο (τα c_1, c_2 *είναι αυθαίρετες σταθερές):*

1) Ρίζες πραγματικές και διαφορετικές $\lambda_1 \neq \lambda_2$:

$$y_k = c_1 \lambda^k_1 + c_2 \lambda^k_2 \ ,$$

2) Ρίζες πραγματικές και ίσες $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$:

$$y_k = c_1 \lambda^k + c_2 k \lambda^k \ ,$$

3) *Συζυγείς μιγαδικές ρίζες* $\lambda_1, \lambda_2 = \alpha \pm i\beta$:

$$y_k = c_1 r^k \sigma\upsilon\nu k\theta + c_2 r^k \eta\mu k\theta ,$$

όπου ο μιγαδικός αριθμός $\alpha+i\beta$ *σε πολικές συντεταγμένες γράφεται*

$$\alpha+i\beta = r(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta) = re^{i\theta} , \quad (\beta\neq 0)$$

με $r = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ *και* $\sigma\upsilon\nu\theta = \dfrac{\alpha}{r}$, $\eta\mu\theta = \dfrac{\beta}{r}$, $-\pi<\theta\leq\pi$

$(\theta = \tau o\xi\varepsilon\varphi \dfrac{\beta}{\alpha}$, $-\pi<\theta\leq\pi)$.

Απόδειξη

Η ομογενής γραμμική ε.δ. δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές (πραγματικούς αριθμούς) (2), για να έχει λύση της μορφής

$$y_k = \lambda^k \ (\lambda\neq 0) , \ k=0, 1, 2, \dots$$

πρέπει να ισχύει

$$\alpha_2\lambda^{k+2}+\alpha_1\lambda^{k+1}+\alpha_0\lambda^k = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda^k(\alpha_2\lambda^2+\alpha_1\lambda+\alpha_0) = 0 \quad (\alpha_2\alpha_0\neq 0) .$$

Άρα, όταν το λ είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης

$$\alpha_2\lambda^2+\alpha_1\lambda+\alpha_0 = 0 \tag{3}$$

τότε η $y_k=\lambda^k$ είναι λύση της ε.δ. (2).

1) Όταν είναι $\lambda_1\neq\lambda_2$ δύο ρίζες της (3) τότε οι λύσεις της ε.δ. (2)

$$y_k^{(1)} = \lambda_1^k , \quad y_k^{(2)} = \lambda_2^k , \quad k=0, 1, 2, \dots$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Πράγματι, έχουμε ορίζουσα του *Casorati*

$$C(\lambda_1^k, \ \lambda_2^k) = \begin{vmatrix} \lambda_1^k & \lambda_2^k \\ \lambda_1^{k+1} & \lambda_2^{k+1} \end{vmatrix} = \lambda_1^k \lambda_2^k(\lambda_2-\lambda_1) \neq 0 , \quad \forall \ k=0, 1, 2, \dots$$

επειδή είναι $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$ (αφού $\alpha_0\neq 0$) και $\lambda_1\neq\lambda_2$.

2) Όταν είναι $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$ διπλή ρίζα της (3) τότε η ε.δ. (2) έχει, εκτός από τη λύση $y_k=\lambda^k$, και τη λύση

$$y_k = k\lambda^k , \ k=0, 1, 2, \dots$$

Πράγματι, έχουμε

$$\alpha_2(k+2)\lambda^{k+2}+\alpha_1(k+1)\lambda^{k+1}+\alpha_0 k\lambda^k = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda^k[\alpha_2(k+2)\lambda^2+\alpha_1(k+1)\lambda+\alpha_0 k] = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda^k[k(\alpha_2\lambda^2+\alpha_1\lambda+\alpha_0)+\lambda(2\alpha_2\lambda+\alpha_1)] = 0\,,$$

πράγμα που ισχύει επειδή το λ είναι διπλή ρίζα της (3) (οπότε έχουμε $\alpha_2\lambda^2+\alpha_1\lambda+\alpha_0 = 0$ και $2\alpha_2\lambda+\alpha_1 = 0$).

Οι δύο λύσεις $y_k^{(1)} = \lambda^k,\ y_k^{(2)} = k\lambda^k,\ k=0, 1, 2, \ldots$ της ε.δ. (2) είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Πράγματι, έχουμε ορίζουσα του *Casorati*

$$C(\lambda^k, k\lambda^k) = \begin{vmatrix} \lambda^k & k\lambda^k \\ \lambda^{k+1} & (k+1)\lambda^{k+1} \end{vmatrix} = \lambda^{2k+1} \neq 0, \quad \forall\ k=0, 1, 2, \ldots$$

επειδή είναι $\lambda\neq 0$.

3) Η απόδειξη είναι ανάλογη της παραπάνω περίπτωσης 1).

Σημειώνουμε πως, όταν είναι

$$\lambda_1 = \alpha+i\beta = re^{i\theta}\,, \quad \lambda_2 = \alpha-i\beta = re^{-i\theta} \quad (\beta\neq 0)$$

όπου $r = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,,\ \theta = \tau o\xi\varepsilon\varphi\,\dfrac{\beta}{\alpha},\ -\pi<\theta\leq\pi,$ τότε ισχύει (τύπος του *Euler*)

$$(\alpha\pm i\beta)^k = r^k e^{\pm ik\theta} = r^k(\sigma\upsilon\nu k\theta\pm i\eta\mu k\theta)\,.$$

Επομένως, έχουμε τη γενική λύση της ε.δ. (2)

$$\begin{aligned} y_k &= c_1(\alpha+i\beta)^k+c_2(\alpha-i\beta)^k = \\ &= c_1(re^{i\theta})^k+c_2(re^{-i\theta})^k = c_1 r^k e^{ik\theta}+c_2 r^k e^{-ik\theta} = \\ &= c_1 r^k(\sigma\upsilon\nu k\theta+i\eta\mu k\theta)+c_2 r^k(\sigma\upsilon\nu k\theta-i\eta\mu k\theta) = \\ &= (c_1+c_2)r^k\sigma\upsilon\nu k\theta+i(c_1-c_2)r^k\eta\mu k\theta = \\ &= c_1^0 r^k\sigma\upsilon\nu k\theta+c_2^0 r^k\eta\mu k\theta\,, \end{aligned}$$

όπου $c_1^0 = c_1+c_2,\ c_2^0 = i(c_1-c_2)$ είναι αυθαίρετες σταθερές.

Αποδεικνύεται ότι οι δύο λύσεις πραγματικών τιμών της ε.δ. (2)

$$y_k^{(1)} = r^k\sigma\upsilon\nu k\theta\,, \quad y_k^{(2)} = r^k\eta\mu k\theta\,, \quad k=0, 1, 2, \ldots$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Πράγματι, έχουμε ορίζουσα του *Casorati*

$$C_0 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ r\sigma\upsilon\nu\theta & r\eta\mu\theta \end{vmatrix} = r\eta\mu\theta = \beta \neq 0 \,,$$

οπότε είναι $C_k = q_0 q_1 \ldots q_{k-1} C_0 \neq 0$, $\forall\ k=1, 2, 3, \ldots$

Επειδή όμως συνήθως ζητάμε λύσεις πραγματικών τιμών στην έκφραση της γενικής λύσης θεωρούμε πως οι αυθαίρετες σταθερές c_1^0, c_2^0 είναι πραγματικοί αριθμοί.

Ακόμη, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οι αυθαίρετες σταθερές c_1, c_2 είναι συζυγείς μιγαδικές της μορφής

$$c_1 = \alpha_1(\sigma\upsilon\nu\beta_1 + i\eta\mu\beta_1), \quad c_2 = \alpha_1(\sigma\upsilon\nu\beta_1 - i\eta\mu\beta_1)$$

όπου α_1, β_1 αυθαίρετες σταθερές ,

οπότε έχουμε

$$y_k = c_1\lambda_1^k + c_2\lambda_2^k = \alpha_1(\sigma\upsilon\nu\beta_1 + i\eta\mu\beta_1)r^k(\sigma\upsilon\nu k\theta + i\eta\mu k\theta) +$$
$$+\alpha_1(\sigma\upsilon\nu\beta_1 - i\eta\mu\beta_1)r^k(\sigma\upsilon\nu k\theta - i\eta\mu k\theta)$$

$$\Rightarrow \quad y_k = 2\alpha_1 r^k(\sigma\upsilon\nu k\theta\ \sigma\upsilon\nu\beta_1 - \eta\mu k\theta\ \eta\mu\beta_1) = 2\alpha_1 r^k \sigma\upsilon\nu(k\theta + \beta_1) \,,$$

όπου α_1, β_1 είναι αυθαίρετες σταθερές.

Άρα, η γενική λύση της ε.δ. (2), σ' αυτήν την περίπτωση 3), γράφεται ακόμη και με τη μορφή

$$y_k = 2\alpha_1 r^k \sigma\upsilon\nu(k\theta + \beta_1) \,,$$

όπου α_1, β_1 είναι αυθαίρετες σταθερές.

Υπενθυμίζουμε ότι $r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ και $\theta = \tau o\xi\varepsilon\varphi \dfrac{\beta}{\alpha}$, $-\pi < \theta \leq \pi$ είναι το μέτρο και το όρισμα του μιγαδικού αριθμού $\alpha + i\beta$.

Σημείωση 2

Το πραγματικό και το φανταστικό μέρος μιας μιγαδικής λύσης της ε.δ. (2) είναι επίσης λύσεις *πραγματικών τιμών* της ε.δ. (2), επειδή οι συντελεστές $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ είναι πραγματικοί αριθμοί.

Όταν $\lambda_1, \lambda_2 = \alpha \pm i\beta$ είναι μιγαδικές ρίζες της (3) τότε η γενική λύση της ε.δ. (2) δίνεται και από τη σχέση

$$y_k = c_1(\alpha + i\beta)^k + c_2(\alpha - i\beta)^k \ , \quad k=0, 1, 2, \ldots$$

όπου c_1, c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές.

[Είναι γνωστό από το Διαφορικό Λογισμό ότι η σειρά *Taylor* της συνάρτησης e^x στο σημείο $x_0 = 0$ είναι

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R} .$$

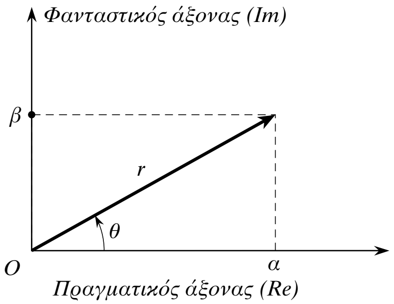
Αν θέσουμε όπου x το ix $(i=\sqrt{-1})$, και πάρουμε το ανάπτυγμα ως ορισμό του e^{ix}, θα βρούμε

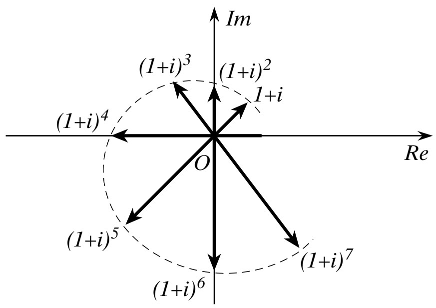
$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sigma\upsilon\nu x + i\eta\mu x ,$$

αφού $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1$, $i^5=i, \ldots$ και έχουμε τις σειρές του *Taylor*

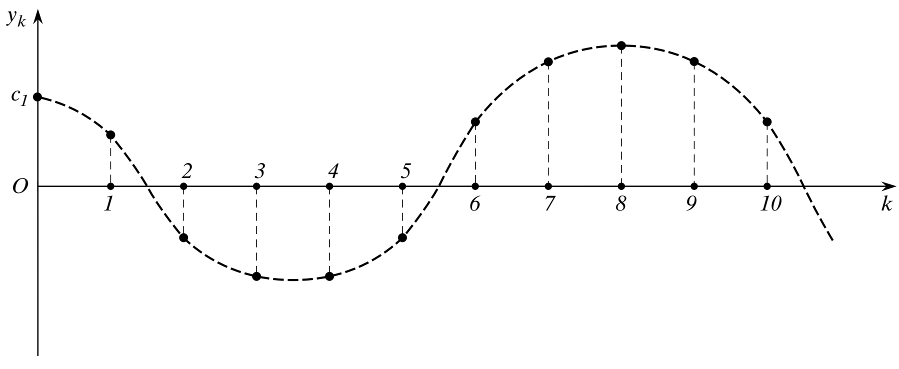
$$\sigma\upsilon\nu x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \quad \eta\mu x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R} .$$

Ορίζουμε λοιπόν $e^{ix} = \sigma\upsilon\nu x + i\eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$, $i=\sqrt{-1}$.]





Το διάννυσμα $(1+i)^k$ περιστρέφεται $(r = \sqrt{2} > 1)$



Ταλαντώσεις της $y_k = r^k(c_1\sigma\upsilon\nu k\theta + c_2\eta\mu k\theta)$, $r>1$, $k=0, 1, 2, \ldots$.

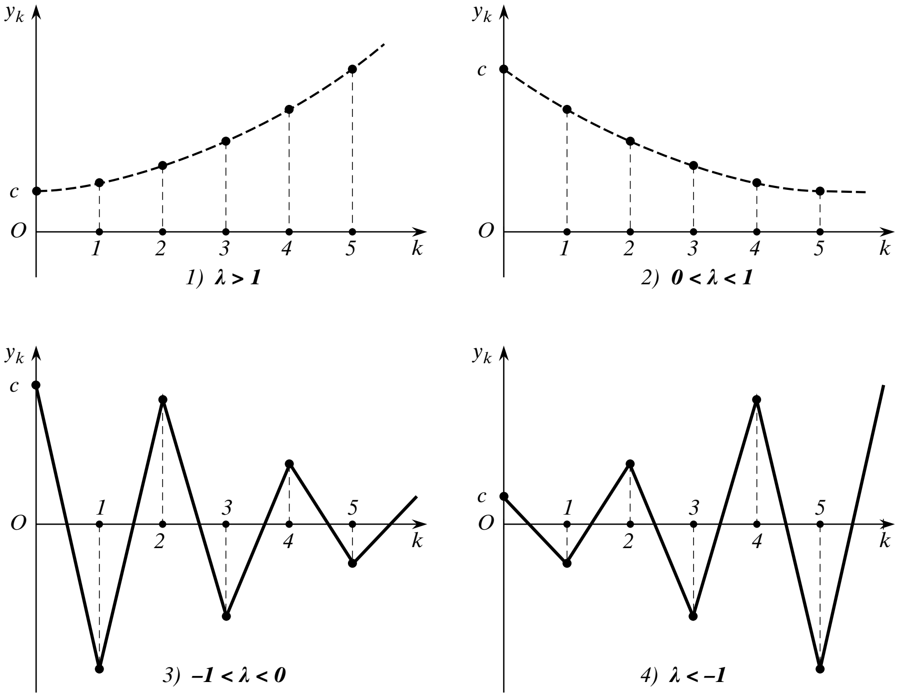
Παρατηρούμε ότι οι μιγαδικές ρίζες $\lambda_1, \lambda_2 = \alpha \pm i\beta$ αντιστοιχούν σε ταλαντευόμενες λύσεις.

Αυτές οι λύσεις ταλαντεύονται με αυξανόμενο πλάτος, όταν είναι $r = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} > 1$, με ελαττούμενο πλάτος, όταν είναι $r = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} < 1$ και με σταθερό πλάτος, όταν είναι $r = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} = 1$.

Η ιδιοσυχνότητα των ταλαντώσεων εξαρτάται από το λόγο $\frac{\beta}{\alpha}$.

Όταν είναι $\theta=\lambda\pi$, λ ρητός αριθμός, και $r=1$, τότε οι λύσεις είναι περιοδικές, δηλαδή επανέρχονται στις ίδιες τιμές κάθε περίοδο (υπενθυμίζουμε ότι $\theta = \tau o\xi\varepsilon\varphi \frac{\beta}{\alpha}$, $-\pi<\theta\leq\pi$). ■

Ποιοτική συμπεριφορά της λύσης $y_k = c\lambda^k$



1) $\lambda > 1$

2) $0 < \lambda < 1$

3) $-1 < \lambda < 0$

4) $\lambda < -1$

Σημείωση 3. Η συμπεριφορά της γενικής λύσης της ε.δ. (2) επηρεάζεται από *την κυρίαρχη* ρίζα λ_i της (3), δηλαδή τη ρίζα λ_i με τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.

Π.χ. αν είναι $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ τότε η συμπεριφορά της γενικής λύσης είναι παρόμοια της λύσης (μετά από κάποια τιμή του $k \ge k_0$)

$$y_k = c\lambda_1^k \ .$$

Ακόμη, στις περιπτώσεις των ριζών της (3)

$$\lambda=1, \ \lambda=0, \ \lambda=-1$$

έχουμε: τη σταθερή λύση $y_k=c$,
τη μηδενική λύση $y_k=0$,
τη ταλαντευόμενη λύση μεταξύ c και $-c$,
αντίστοιχα.

Παράδειγμα 2

Να βρεθούν οι γενικές λύσεις των ε.δ.

α) $3y_{k+2}-5y_{k+1}-2y_k = 0$, β) $y_{k+2}-2y_{k+1}+2y_k = 0$,

γ) $y_{k+2}-6y_{k+1}+9y_k = 0$, $y_0=0$, $y_1=1$.

α) Η χαρακτηριστική εξίσωση της ε.δ. είναι

$$3\lambda^2-5\lambda-2 = 0$$

και έχει τις ρίζες $\lambda_1=2$, $\lambda_2 = -\dfrac{1}{3}$.

Επομένως, η ε.δ. έχει τις δύο λύσεις $y_k^{(1)}=2^k$, $y_k^{(2)}=\left(-\dfrac{1}{3}\right)^k$, των οποίων η ορίζουσα του *Casorati* είναι

$$C\left(2^k, \left(-\frac{1}{3}\right)^k\right) = \begin{vmatrix} 2^k & \left(-\frac{1}{3}\right)^k \\ 2^{k+1} & \left(-\frac{1}{3}\right)^{k+1} \end{vmatrix} = -\frac{7}{3}2^k\left(-\frac{1}{3}\right)^k \neq 0 , \quad \forall \ k=0, 1, 2, \dots$$

Άρα, αυτές οι δύο λύσεις είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Η γενική λύση της ε.δ. δίνεται από τη σχέση

$$y_k = c_1 2^k + c_2\left(-\frac{1}{3}\right)^k, \quad k=0, 1, 2, \dots$$

όπου c_1, c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές.

β) Η χαρακτηριστική εξίσωση της ε.δ. είναι

$$\lambda^2-2\lambda+2 = 0$$

και έχει τις μιγαδικές ρίζες $\lambda_1 = 1+i$, $\lambda_2 = 1-i$.

Άρα, εδώ έχουμε $\alpha=1, \beta=1$ και

$$r = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}\,,$$

$$\theta = \tau o\xi\, \varepsilon\varphi \frac{\beta}{\alpha} = \tau o\xi\varepsilon\varphi 1 = \frac{\pi}{4} = 45^\circ\,.$$

Επομένως, η γενική λύση της ε.δ. δίνεται από τη σχέση

$$y_k = (\sqrt{2})^k \left(c_1\sigma\upsilon\nu \frac{k\pi}{4} + c_2\eta\mu \frac{k\pi}{4}\right), \quad k=0, 1, 2, \ldots$$

όπου c_1, c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές.

γ) Η χαρακτηριστική εξίσωση της ε.δ. είναι

$$\lambda^2-6\lambda+9 = 0$$

και έχει τη διπλή ρίζα $\lambda=3$.

Επομένως, η ε.δ. έχει τις δύο λύσεις

$$y_k^{(1)} = 3^k, \quad y_k^{(2)} = k3^k\,, \quad k=0, 1, 2, \ldots$$

των οποίων η ορίζουσα του *Casorati* είναι

$$C_k = C(3^k, k3^k) = \begin{vmatrix} 3^k & k3^k \\ 3^{k+1} & (k+1)3^{k+1} \end{vmatrix}, \quad k=0, 1, 2, \ldots\,.$$

Έχουμε λοιπόν

$$C_0 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 3\neq 0\,,$$

οπότε από τη σχέση

$$C_k = 9^k C_0\,, \quad k=0, 1, 2, \ldots$$

προκύπτει ότι $C_k\neq 0$, $\forall\, k=0, 1, 2, \ldots$.

Άρα, οι δύο αυτές λύσεις είναι γραμμικά ανεξάρτητες και η γενική λύση της ε.δ. δίνεται από τη σχέση

$$y_k = c_1 3^k + c_2 k3^k\,, \quad k=0, 1, 2, \ldots$$

όπου c_1, c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές.

Από τις δοσμένες αρχικές συνθήκες παίρνουμε

$$\left.\begin{array}{l} y_0=0 \;\Rightarrow\; y_0=c_1=0 \\ y_1=1 \;\Rightarrow\; y_1=3c_1+3c_2 = 1 \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; \begin{array}{l} c_1=0\,, \\ c_2 = \dfrac{1}{3}\,. \end{array}$$

Επομένως, θέτοντας στη γενική λύση τις τιμές $c_1=0, c_2=\frac{1}{3}$ βρίσκουμε τη ζητούμενη λύση του προβλήματος των αρχικών τιμών

$$y_k=\frac{1}{3}k3^k, \quad k=0, 1, 2, \ldots \qquad \blacksquare$$

Η εύρεση μιας μερικής λύσης y_k^{μ} της μη ομογενούς γραμμικής ε.δ. (1) γίνεται με τις παρακάτω δύο μεθόδους: τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών και τη μέθοδο της μεταβολής των σταθερών.

Ι. Μέθοδος των προσδιοριστέων συντελεστών

Για να εφαρμοστεί η μέθοδος των προσδιοριστέων συντελεστών στη μη ομογενή γραμμική ε.δ.

$$\alpha_2 y_{k+2}+\alpha_1 y_{k+1}+\alpha_0 y_k = r_k \qquad (1)$$

πρέπει: Π_1) οι συντελεστές $\alpha_2, \alpha_1, \alpha_0,$ με $\alpha_2\alpha_0 \neq 0$, να είναι σταθερές,
Π_2) η r_k να έχει ειδική μορφή.

Η r_k να έχει ειδική μορφή σημαίνει να είναι γραμμικός συνδυασμός ακολουθιών με γενικούς όρους των επομένων τύπων:

1) k^{α}, ο α ακέραιος αριθμός, $\alpha \geq 0$,
2) β^k, όπου $\beta \neq 0$ σταθερή,
3) $\sigma\upsilon\nu k\gamma$, όπου $\gamma \neq 0$ σταθερή,
4) $\eta\mu k\delta$, όπου $\delta \neq 0$ σταθερή,
5) γινόμενο δύο ή περισσοτέρων όρων των τύπων *1-4* (πλην του *3)* επί *4)*) και γραμμικός συνδυασμός τους.

Οι ακολουθίες k^{α}, β^k, $\sigma\upsilon\nu k\gamma$, $\eta\mu k\delta$ αντιστοιχούν στις συναρτήσεις x^{α}, $e^{\beta x}$, $\sigma\upsilon\nu\gamma x$, $\eta\mu\delta x$, αντίστοιχα, και η αναζήτηση των μορφών των μερικών λύσεων της ε.δ. (1) γίνεται με τρόπο ανάλογο μ' αυτόν που γίνεται στις διαφορικές εξισώσεις.

Επομένως, αναζητούμε μια μερική λύση της ε.δ.

$$\alpha_2 y_{k+2}+\alpha_1 y_{k+1}+\alpha_0 y_k = r_k , \qquad (1)$$

όπου $\alpha_2, \alpha_1, \alpha_0$, με $\alpha_2\alpha_0 \neq 0$, είναι σταθερές, ως εξής:

i) Όταν είναι

$$r_k = P(k)\beta^k ,$$

όπου $P(k)$ πολυώνυμο βαθμού m, τότε αναζητούμε μερική λύση της ε.δ. (1) με τη μορφή

$$y_k^{\mu} = k^{\nu} Q(k) \beta^k \quad ,$$

όπου $Q(k)$ είναι προσδιοριστέο πολυώνυμο βαθμού m και ν είναι η πολλαπλότητα της ρίζας β της χαρακτηριστικής εξίσωσης

$$\alpha_2\lambda^2+\alpha_1\lambda+\alpha_0 = 0 \tag{3}$$

ή $\nu=0$, αν ο β δεν είναι ρίζα της (3).

ii) Όταν είναι

$$r_k = \beta^k \, (P_1(k)\sigma\upsilon\nu k\gamma+P_2(k)\eta\mu k\gamma) \, ,$$

όπου $P_1(k)$, $P_2(k)$ είναι πολυώνυμα βαθμών m_1, m_2, αντίστοιχα, τότε αναζητούμε μερική λύση της ε.δ. (1) με τη μορφή

$$y_k^{\mu} = k^{\nu}\beta^k \, (Q_1(k) \, \sigma\upsilon\nu k\gamma+Q_2(k)\eta\mu k\gamma) \, ,$$

όπου $Q_1(k)$, $Q_2(k)$ είναι προσδιοριστέα πολυώνυμα

βαθμού $max\{m_1, m_2\}$ και ν είναι η πολλαπλότητα της ρίζας

$$\beta e^{i\gamma} = \beta(\sigma\upsilon\nu\gamma+i\eta\mu\gamma)$$

της (3) ή $\nu=0$, αν ο αριθμός $\beta e^{i\gamma}$ δεν είναι ρίζα της (3).

iii) Όταν είναι

$$r_k = r_k^{(1)}+ r_k^{(2)}+ \dots +r_k^{(m)} \, ,$$

όπου $r_k^{(i)}$ είναι της i) ή ii) μορφής, τότε χωρίζουμε την ε.δ. (1) στις ε.δ.

$$\alpha_2 y_{k+2}+\alpha_1 y_{k+1} +\alpha_0 y_k = r_k^{(i)} \qquad i=1, 2, \dots, m \tag{1.i}$$

και υπολογίζουμε τις μερικές λύσεις των

$$y_k^{\mu_i} \, , \; i=1, 2, \dots, m \, .$$

Το άθροισμα αυτών των μερικών λύσεων των ε.δ. (1.i)

$$y_k^{\mu} = y_k^{\mu_1}+ y_k^{\mu_2}+ \dots +y_k^{\mu_m}$$

είναι μια μερική λύση της ε.δ. (1).

Προσοχή! Όταν είναι $\beta=1$ δεν φαίνεται άμεσα αυτή η τιμή, αλλά πρέπει να τη λαμβάνουμε υπόψη μας.