ΘΩΜΑ ΚΥΒΕΝΤΙΔΗ

# ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

## ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΜΙΑΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

ΤΕΥΧΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

*Κάθε γνήσιο αντίτυπο φέρει τη σφραγίδα του εκδότη*

ΘΩΜΑΣ Α. ΚΥΒΕΝΤΙΔΗΣ

- Γεννήθηκε το 1947 στο Νέο Πετρίτσι του Ν. Σερρών.
- Το 1965 αποφοίτησε από το εξατάξιο Γυμνάσιο Σιδηροκάστρου του Ν. Σερρών και εγγράφηκε στο Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης.
- Πήρε το πτυχίο των Μαθηματικών το 1969.
- Αναγορεύτηκε διδάκτορας στο Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης το 1979 και από το 1972 μέχρι σήμερα εργάζεται σ' αυτό.

ISBN set 960-431-694-X
ISBN Τ.2 960-431-693-1



www.ziti.gr

***Φωτοστοιχειοθεσία Εκτύπωση***

**Π. ΖΗΤΗ & Σια ΟΕ**
18ο χλμ Θεσ/νίκης-Περαίας
Τ.Θ. 4171 • Περαία Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19
Τηλ.: 23920 72.222 (5 γραμ.) - Fax: 23920 72.229
*e-mail: info@ziti.gr*

***Βιβλιοπωλείο***

**ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ**
Αρμενοπούλου 27 • 546 35 Θεσσαλονίκη
Τηλ. 2310 203.720, Fax 2310 211.305
*e-mail: sales@ziti.gr*

*«Ο φιλόσοφος μοιάζει τον άνθρωπο που κάθεται στη στεριά και βλέπει το σκληρό πόνο του όμοιού του, που παραδέρνει στην ταραγμένη θάλασσα είτε στη μάχη κάτω εκεί στον κάμπο, χωρίς ο ίδιος να παίρνει μέρος στον κίνδυνο. Θρονιασμένος στα ύψη που του ασφάλισε η μάθηση σκύβει προς τους άλλους ανθρώπους, τους βλέπει να τρέχουν εδώ κι εκεί, να ζητούν στην τύχη το δρόμο της ζωής, να τσακώνονται για την εξυπνάδα τους, για την καταγωγή τους, να ιδροκοπούν νύκτες και μέρες, με αμέτρητο κόπο, για να σκαρφαλώσουν στις κορυφές του πλούτου ή ν' αρπάξουν την εξουσία.*

*Τα κακομοίρικα μυαλά! Οι στραβωμένες καρδιές!*

*Σε σκοτάδια και σε κινδύνους σέρνουν τη λιγοστή ζωή που έχουν να ζήσουν. Μας το λέει φωναχτά η φύση.*

*Για την ευτυχία μας φτάνει απόνετο σώμα κι ατάραχο πνεύμα.»*

ΛΟΥΚΡΗΤΙΟΣ (98-55 π.Χ.)
Ρωμαίος Ποιητής – Επικούρειος
*«Der Rerum Natura»*
*(Περί Φύσεως)*
II. 1-61

# Πρόλογος

*Σ' αυτό το δεύτερο τεύχος περιέχονται, το Κεφάλαιο 9 το οποίο αναφέρεται στα ακρότατα συνάρτησης μιας πραγματικής μεταβλητής και στη σχεδίαση μιας τέτοιας συνάρτησης με καρτεσιανές συντεταγμένες, με παραμετρική μορφή και με πολική μορφή, και το Κεφάλαιο 10, όπου περιέχονται λυμένα προβλήματα τα οποία αναφέρονται σ' όλη την ύλη του βιβλίου.*

*Στο Παράρτημα, που χωρίζεται σε δύο μέρη, αναφέρονται στο πρώτο μέρος οι διανυσματικές συναρτήσεις και οι πράξεις μ' αυτές (παράγωγος, ολοκλήρωση) και στο δεύτερο μέρος στοιχεία της θεωρίας καμπύλων (τύποι του Frénet – υπολογισμός καμπυλότητας και στρέψης).*

*Η αναλυτική και λεπτομερής παρουσίαση των θεμάτων του βιβλίου, έγινε με σκοπό να βοηθήσει όσους προσπαθούν να κατανοήσουν τις έννοιες του Διαφορικού Λογισμού, οι οποίες αποτελούν τη βάση της Μαθηματικής Ανάλυσης.*

Θεσσαλονίκη, 2000 Θ. ΚΥΒΕΝΤΙΔΗΣ

# Περιεχόμενα

## Τεύχος Δεύτερο

### Κεφάλαιο 9
### Μελέτη και γραφική παράσταση συνάρτησης



### Κεφάλαιο 10


### Παραρτημα
### I. Διανυσματικές συναρτήσεις

## II. Στοιχεία της θεωρίας καμπύλων



## Απαντησεισ των Ασκησεων



## Βιβλιογραφια 

## Ευρετήριο Όρων 

# Τεύχος Πρωτο

## Εισαγωγή

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1
## Ακολουθίες πραγματικών αριθμών



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2
## Σειρές πραγματικών αριθμών



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3
## Ακολουθίες και σειρές συναρτήσεων

## Κεφάλαιο 4

## Όριο συνάρτησης



## Κεφάλαιο 5

## Συνέχεια συνάρτησης



## Κεφάλαιο 6

## Παράγωγος συνάρτησης

## Κεφάλαιο 7

## Στοιχειώδεις συναρτήσεις



## Κεφάλαιο 8

## • Βασικά θεωρήματα του Διαφορικού Λογισμού
## • Κανόνας του L'Hospital
## • Σειρές του Taylor

## Απαντησεις των Ασκησεων



## Βιβλία του συγγραφέα Θωμα Κυβεντιδη

1. *ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ, Τόμος Πρώτος, (σελ. 480, 1987).*
2. *ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ, Τόμος Δεύτερος, (σελ. 400, 1988).*
3. *ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ, Τόμος Τρίτος, (σελ. 478, 1991).*
4. *ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ (Ασκήσεις), (σελ. 560, 1998).*
5. *ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΠΛΗΘΥΣΜΩΝ (Συνεχή Μοντέλα), (σελ. 128, 1993).*
6. *ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΠΛΗΘΥΣΜΩΝ (Διακριτά Μοντέλα), (σελ. 164, 2001).*
7. *ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΚΑΙ ΔΙΑΚΡΙΤΆ ΣΥΣΤΉΜΑΤΑ, (σελ. 538, 2001).*
8. *ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ, (σελ. 320, 1994).*
9. *ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ (Ασκήσεις), (σελ. 400, 1977).*
10. *ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ (Συναρτήσεων Μιας Πραγματικής Μεταβλητής), (Δύο τεύχη: Α, σελ. 640, Β, σελ. 312, 2001).*

# Κεφαλαιο 9

## Μελέτη και γραφική παράσταση συνάρτησης

# 9

# ΜΕΛΕΤΗ ΚΑΙ ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

## 1. Ακρότατα συνάρτησης

Μια συνάρτηση $f(x)$ λέμε ότι έχει *σχετικό μέγιστο* στο $x=x_0$ αν ισχύει $f(x)<f(x_0)$, για όλα τα $x\neq x_0$ που ανήκουν σε κάποια περιοχή του $x_0$, π.χ.

$$(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon), \quad \text{όπου } \varepsilon>0.$$

Αν γράψουμε το $x=x_0+h$, όπου $h$ είναι μικρός αριθμός (θετικός ή αρνητικός) τέτοιος ώστε το $x_0+h$ ν' ανήκει στην κατάλληλη περιοχή του $x_0$ (π.χ. $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$, όπου $\varepsilon>0$), τότε η $f(x)$ έχει *σχετικό μέγιστο* στο $x=x_0$ όταν

$$f(x_0+h)-f(x_0) < 0 \ ,$$

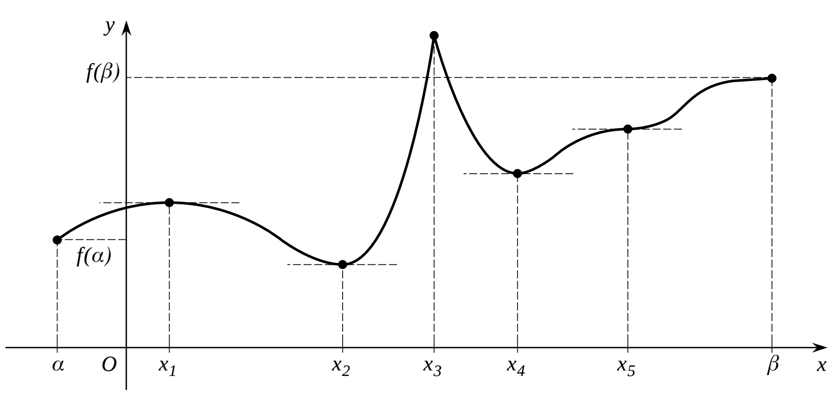
όπου $|h|$ είναι κατάλληλα μικρό.

Ανάλογα, η συνάρτηση $f(x)$ λέμε ότι έχει *σχετικό ελάχιστο* στο σημείο $x=x_0$ αν ισχύει $f(x)>f(x_0)$, για όλα τα $x\neq x_0$ που ανήκουν σε κάποια περιοχή του $x_0$, δηλαδή όταν ισχύει

$$f(x_0+h)-f(x_0) > 0 \ ,$$

όπου $|h|$ είναι κατάλληλα μικρό (ώστε $x_0+h\in(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$, όπου $\varepsilon>0$).

Επομένως, στα σημεία $x=x_0$ όπου η συνάρτηση $f(x)$ παρουσιάζει σχετικό μέγιστο (αντ. σχετικό ελάχιστο) η τεταγμένη της καμπύλης $y=f(x)$ σ' αυτά $y_0=f(x_0)$ είναι μεγαλύτερη (αντ. μικρότερη) από τις τεταγμένες των γειτονικών σημείων και από τις δύο πλευρές.




*Γράφημα που δείχνει τα ακρότητα μιας συνάρτησης.*

Στο σχήμα, η καμπύλη $y=f(x)$, ορισμένη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ έχει σχετικά μέγιστα στα σημεία $x_1$ και $x_3$, σχετικά ελάχιστα στα σημεία $x_2$ και $x_4$.

Η τιμή $y_3=f(x_3)>f(\beta)$ είναι το *απόλυτο μέγιστο* και η τιμή $y_2=f(x_2)<f(\alpha)$ είναι το *απόλυτο ελάχιστο* της συνάρτησης $y=f(x)$ στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

Σημειώνουμε, ότι το $y_1=f(x_1)$, που είναι σχετικό μέγιστο της $f(x)$, είναι μικρότερο από το $y_4=f(x_4)$ που είναι σχετικό ελάχιστο της $f(x)$.

*Προσοχή!* Στο κεφάλαιο αυτό όταν λέμε παραγωγίσιμη εννοούμε διαφορίσιμη δηλαδή με παράγωγο πραγματικό αριθμό.

Έχουμε το επόμενο θεώρημα του *Fermat*:

**ΘΕΩΡΗΜΑ 1: (Αναγκαίες συνθήκες ύπαρξης ακροτάτου)**
*Τα ακρότατα της συνεχούς συνάρτησης $f(x)$ που παρουσιάζονται σε εσωτερικά σημεία του συνόλου ορισμού της είναι αυτά όπου η παράγωγος $f'(x)=0$ ή όπου η παράγωγος $f'(x)$ δεν υπάρχει $\big($με $f'_-(x)\neq f'_+(x)\big)$.*

*Απόδειξη*

Σε κάθε εσωτερικό σημείο $x_0$ όπου η $f'(x_0)$ υπάρχει, η $f(x)$ μπορεί να έχει ακρότατο μόνον όταν $f'(x_0)=0$, γιατί αν ήταν

$$f'(x_0) > 0 \quad \text{ή} \quad f'(x_0) < 0$$

τότε
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0) > 0 \ \ (\text{ή } < 0)$$

και σε κατάλληλη περιοχή του $x_0$ οι μεταβολές $f(x_0+h)-f(x_0)$ και $h = x-x_0$ έχουν το ίδιο (αντ. αντίθετο) πρόσημο (Κεφ. 6, §3).

Επομένως, σε κάθε περιοχή του $x_0$ η $f(x)$ θα έπαιρνε τιμές και μικρότερες και μεγαλύτερες από την τιμή $f(x_0)$.

Τέλος, στα εσωτερικά σημεία του συνόλου ορισμού που δεν υπάρχει η παράγωγος μιας συνεχούς συνάρτησης παρουσιάζει μορφή ακίδας πράγμα που αποδεικνύει τη δυνατότητα ύπαρξης τοπικού ελάχιστου ή μέγιστου σ' αυτά.

Βέβαια, αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0$ (εσωτερικό σημείο του συνόλου ορισμού της) και παίρνει ακρότατο σ' αυτό, τότε είναι $f'(x_0)=0$. ■

**Παρατήρηση 1** Οι συνθήκες του Θεωρήματος 1 δεν είναι ικανές π.χ. η συνάρτηση $f(x)=x^3$ έχει παράγωγο $f'(0)=0$ αλλά δεν παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο $x_0=0$ (βλέπε παρακάτω το παράδειγμα 3).

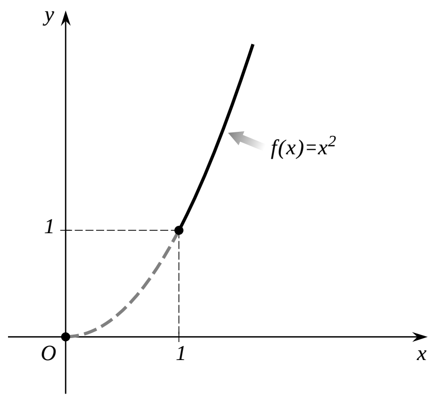
Ακόμη, η $f(x) = |x|$ παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 0$, αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό.

Τέλος, όταν το σημείο ακροτάτου είναι άκρο του συνόλου ορισμού της συνάρτησης τότε η παράγωγος σ' αυτό μπορεί να μη μηδενίζεται.

Π.χ. η συνάρτηση $f(x)=x^2, x\geq 1$ παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο $x_0=1$ , ενώ είναι $f'(1)=2\neq 0$.

Ακόμη, η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x},\ x\geq 0$ παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=0$, αλλά η παράγωγός της $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ στο $x_0=0$ είναι $f'_+(0)=+\infty$.

*Σημειώνουμε ότι τα ακρότατα (σχετικό μέγιστο ή σχετικό ελάχιστο) για τα οποία είναι $f'(x)=0$ αντιστοιχούν σε σημεία της καμπύλης $y=f(x)$ όπου η εφαπτομένη της είναι παράλληλη προς τον x–άξονα.*




Τα σημεία όπου $f'(x)=0$ λέγονται *σημεία στάσης ή κρίσιμα σημεία* της *f*.

Στο προηγούμενο σχήμα η καμπύλη έχει εφαπτομένη παράλληλη προς τον $x-$άξονα (έχει μηδενική κλίση) στα σημεία $x_1, x_2, x_4, x_5$, αλλά δεν έχει ακρότατο στο σημείο $x_5$, όπου η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς τον $x-$ άξονα, αλλά αυτή τέμνει (διαπερνά) την καμπύλη.

Αυτό το σημείο $(x_5, f(x_5))$ λέγεται *σημείο καμπής* της καμπύλης $y=f(x)$.

Επομένως, όταν η παράγωγος $f'(x_0)=0$ υπάρχει, η συνθήκη

$$f'(x_0) = 0$$

είναι αναγκαία, αλλά όχι ικανή συνθήκη για να έχει η συνάρτηση $f(x)$ ακρότατο στο σημείο $x=x_0$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2: (Ικανές συνθήκες ύπαρξης ακροτάτου)

*Αν στο σημείο $x=x_0$ ισχύουν*

*i)* $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$,

*ii)* $f^{(n)}(x_0) \neq 0$,

*και σε περιοχή του $x_0$ οι υποθέσεις του θεωρήματος 1 του Κεφ. 8, §3.2, τότε στο σημείο $x=x_0$ η $f(x)$ έχει*

*α) ένα σημείο καμπής, αν $n$ είναι περιττός (μονός),*

*β) ένα ακρότατο, αν $n$ είναι άρτιος (ζυγός), το οποίο είναι*
*σχετικό μέγιστο, όταν $f^{(n)}(x_0) < 0$,*
*σχετικό ελάχιστο, όταν $f^{(n)}(x_0) > 0$.*

*Απόδειξη*

Χρησιμοποιώντας τις υποθέσεις i) και ii) ο τύπος του *Taylor* (Κεφ. 8, § 3.2) είναι

$$f(x_0+h)-f(x_0) = r_{n-1}(h)h^n ,$$

όπου

$$r_{n-1}(h) = \frac{f^{(n)}(x_0+\theta h)}{n!} \quad , \quad 0<\theta<1 .$$

Έχουμε

$$\lim_{h\to 0} r_{n-1}(h) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \quad , \quad \text{(λόγω της συνέχειας της } f^{(n)}(x) \text{ στο } x_0\text{)},$$

οπότε, όταν το $|h|$ εκλεγεί αρκετά μικρό, το $r_{n-1}(h)$ θα έχει τότε το ίδιο πρόσημο με το $f^{(n)}(x_0)$ (Κεφ. 4, § 1 Πρόταση 5).

α) Όταν ο $n$ είναι περιττός (μονός) η περιττή δύναμη $h^n$ θα αλλάζει πρόσημο σύμφωνα με το πρόσημο του $h$.
Επομένως, η διαφορά $f(x_0+h)-f(x_0)$ επίσης θα αλλάζει πρόσημο μαζί με το $h$, δηλαδή αν $x_0+h, h>0$ (δεξιά του $x_0$) ή $x_0+h, h<0$ (αριστερά του $x_0$), η διαφορά γίνεται από + δεξιά του $x_0$ σε – αριστερά του $x_0$, όταν $f^{(n)}(x_0)>0$ ή από – σε +, όταν $f^{(n)}(x_0)<0$.
Άρα, η καμπύλη $y=f(x)$ θα τέμνει την παράλληλη προς τον $x$–άξονα εφαπτομένη της το σημείο $x=x_0$, δηλαδή το σημείο $x=x_0$ θα είναι σημείο καμπής της καμπύλης $y=f(x)$.

β) Όταν ο $n$ είναι άρτιος, τότε το $h^n$ είναι πάντοτε θετικό και η διαφορά $f(x_0+h)-f(x_0)$ και η παράγωγος $f^{(n)}(x_0)$, έχουν, σε κατάλληλη περιοχή του $x_0$, το ίδιο πρόσημο.

Επομένως, η συνάρτηση έχει σχετικό μέγιστο στο $x=x_0$ όταν είναι $f^{(n)}(x_0)<0$ και έχει σχετικό ελάχιστο όταν είναι $f^{(n)}(x_0)>0$, όπου $n$ άρτιος. ■

Για παράδειγμα θα δείξουμε ότι $|\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x| \leq \sqrt{2}$.

Θέτουμε $f(x)=\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x$ και από την εξίσωση $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x=0$ βρίσκουμε τα σημεία στάσης της $f$ που είναι

$$x=n\pi + \frac{\pi}{4} \quad , \quad n=0, 1, 2, ...$$

Βρίσκουμε τη δεύτερη παράγωγο $f''(x)=-\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x$ και έχουμε:

- όταν $n=2k$ (άρτιος), το σημείο $x_{2k} = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$ δίνει $f''(x_{2k})=-\sqrt{2}<0$ και στο σημείο $x_{2k}$ η $f$ παίρνει τοπικό μέγιστο, ίσο με $f(x_{2k})=\sqrt{2}$.

- όταν $n=2k+1$ (περιττός), το σημείο $x_{2k+1} = (2k+1)\pi + \frac{\pi}{4}$ δίνει $f''(x_{2k+1})=\sqrt{2}>0$ και στο σημείο $x_{2k+1}$ η $f$ παίρνει τοπικό ελάχιστο, ίσο με

$f(x_{2k+1})=-\sqrt{2}$.

Άρα, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $-\sqrt{2}\leq ημx+συνx\leq\sqrt{2}$.

Ακόμη, αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{2-e^x}$, $x\in I=\mathbb{R}-\{ln2\}$, η παράγωγός της είναι

$$f'(x)=\frac{e^x}{(2-e^x)^2}>0\ ,\quad \forall\, x\in I.$$

Άρα, η $f(x)$ είναι γνήσια αύξουσα στα διαστήματα

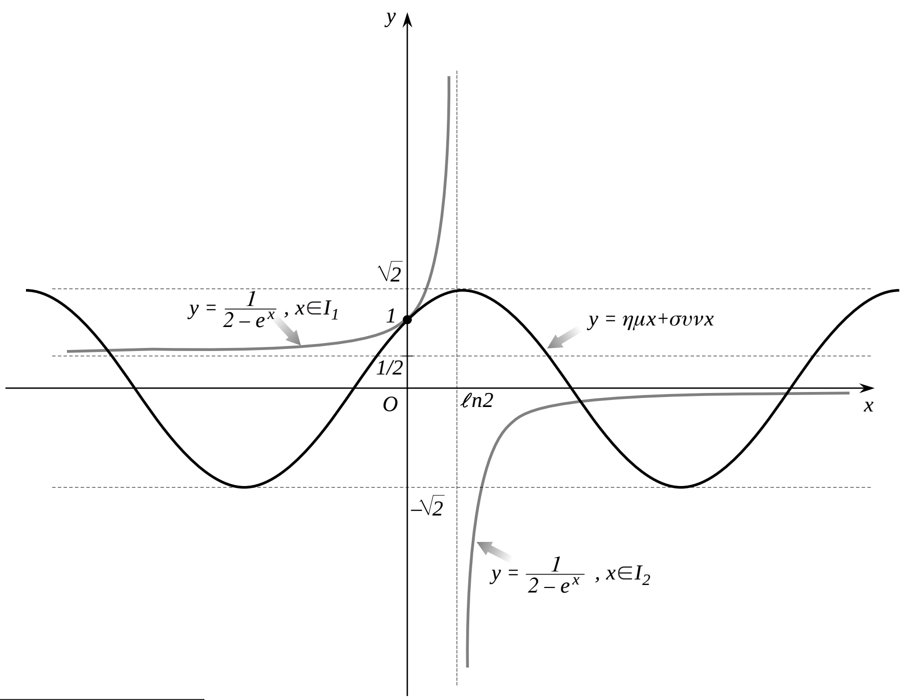
$$I_1=(-\infty, ln2)\ ,\quad I_2=(ln2, +\infty)$$

αλλά όχι στο σύνολο $I=I_1\cup I_2$, γιατί έχουμε π.χ.

$$f(0)=1>0\ ,\quad f(2)=\frac{1}{2-e^2}<0\ .$$

Αυτό το αποτέλεσμα προκύπτει επειδή το σύνολο ορισμού $I$ δεν είναι διάστημα αλλά ένωση των δύο διαστημάτων $I_1$ και $I_2$.

Έχουμε $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{2-e^x}=\dfrac{1}{2}$.



Υποθέτουμε ότι η $f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$.

**α)** Όταν είναι $x_0=\alpha$, για να 'χουμε τοπικό ακρότατο σ' αυτό πρέπει στο διάστημα $[\alpha,\alpha+\varepsilon)$, $\varepsilon>0$, η τιμή $f(\alpha)$ να είναι μέγιστη ή ελάχιστη.

- Αν είναι $f'(x)>0$, $\forall\, x\in(\alpha,\alpha+\varepsilon)$ η $f$ είναι γνήσια αύξουσα στο $[\alpha,\alpha+\varepsilon)$ και το $f(\alpha)$ είναι τοπικό ελάχιστο.
- Αν είναι $f'(x)<0$, $\forall\, x\in(\alpha,\alpha+\varepsilon)$ η $f$ είναι γνήσια φθίνουσα στο $[\alpha,\alpha+\varepsilon)$ και το $f(\alpha)$ είναι τοπικό μέγιστο.

**β)** Όταν είναι $x_0=\beta$, για να 'χουμε τοπικό ακρότατο σ' αυτό πρέπει στο διάστημα $(\beta-\varepsilon,\beta]$, $\varepsilon>0$, η τιμή $f(\beta)$ να είναι μέγιστη ή ελάχιστη.

- Αν είναι $f'(x)>0$, $\forall\, x\in(\beta-\varepsilon,\beta)$ η $f$ είναι γνήσια αύξουσα στο $(\beta-\varepsilon,\beta]$ και το $f(\beta)$ είναι τοπικό μέγιστο.
- Αν είναι $f'(x)<0$, $\forall\, x\in(\beta-\varepsilon,\beta)$ η $f$ είναι γνήσια φθίνουσα στο $(\beta-\varepsilon,\beta]$ και το $f(\beta)$ είναι τοπικό ελάχιστο.

γ) Όταν είναι $x_0\in(\alpha,\beta)$, για να 'χουμε τοπικό ακρότατο σ' αυτό πρέπει η $f$ να αλλάζει μονοτονία στο $x_0$ δηλαδή στο διάστημα $(x_0-\varepsilon_1,x_0)$, $\varepsilon_1>0$ να είναι αύξουσα και στο διάστημα $(x_0,x_0-\varepsilon_2)$, $\varepsilon_2>0$ να είναι φθίνουσα ή αντίστροφα.
Αν η $f$ είναι και παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ και αν $f'(x)<0$, $\forall\, x\in(x_0-\varepsilon_1,x_0)$ και $f'(x)>0$, $\forall\, x\in(x_0,x_0-\varepsilon_2)$ ή αντίστροφα, τότε η $f$ έχει στο $x_0$ τοπικό ακρότατο. ■

Η εφαρμογή του Θεωρήματος 2 απαιτεί τον υπολογισμό της παραγώγου δεύτερης τάξης $f''(x)$ και πιθανόν παραγώγων ανώτερης τάξης.

Γι' αυτό σε πολλές περιπτώσεις το παρακάτω Θεώρημα 3 είναι ευκολότερο να εφαρμοστεί.

*Ακόμη, το θεώρημα αυτό πρέπει να χρησιμοποιείται στα σημεία όπου η πρώτη παράγωγος $f'(x_0)$ δεν υπάρχει.*

ΘΕΩΡΗΜΑ 3: *Υποθέτουμε ότι:*

*i)* η $f(x)$ *είναι ορισμένη στο* $x=x_0$,

*ii)* η $f'(x)$ *υπάρχει σε κατάλληλη μικρή περιοχή του* $x_0$,
*(π.χ.* $\varepsilon>0$, $0<|x-x_0|<\varepsilon$) *εκτός ίσως του* $x_0$ *όπου μπορεί να μην υπάρχει,*

*iii)* η $f'(x)$ *έχει σταθερό πρόσημο όταν είναι* $x<x_0$ *και όταν είναι* $x>x_0$.

*Τότε καθώς το* $x$ *αυξάνοντας περνάει από το* $x_0$:

*α)* η $f(x)$ *δεν έχει ακρότατο στο* $x_0$, *όταν το πρόσημο της παραγώγου* $f'(x)$ *δεν αλλάζει,*

> β) η $f(x)$ έχει σχετικό μέγιστο στο $x_0$, όταν το πρόσημο της παραγώγου $f'(x)$ αλλάζει από $+$ σε $-$,
>
> γ) η $f(x)$ έχει σχετικό ελάχιστο $x_0$, όταν το πρόσημο της παραγώγου $f'(x)$ αλλάζει από $-$ σε $+$.

*Απόδειξη*

Γνωρίζουμε ότι η $f(x)$ είναι γνήσια αύξουσα ή γνήσια φθίνουσα σε περιοχή του $x$ όταν η παράγωγος $f'(x)$ είναι θετική ή αρνητική, αντίστοιχα (Κεφ. 6, § 3).

Επομένως, αντίστοιχα θα έχουμε:

α) η $f(x)$ αυξάνει (ή φθίνει) συνέχεια καθώς το $x$ περνάει από το σημείο $x_0$, η $f(x)$ δεν μπορεί να έχει ακρότατο,

β) η $f(x)$ αυξάνει καθώς το $x$ πλησιάζει το $x_0$ και αρχίζει να φθίνει καθώς απομακρύνεται απ' αυτό, άρα η $f(x)$ έχει σχετικό μέγιστο στο $x_0$,

γ) η $f(x)$ φθίνει καθώς το $x$ πλησιάζει το $x_0$ και αρχίζει ν' αυξάνει καθώς απομακρύνεται απ' αυτό, άρα η $f(x)$ έχει σχετικό ελάχιστο στο $x_0$. ■

Χρησιμοποιούμε το Θεώρημα 3:

- Όταν δεν υπάρχει η παράγωγος $f''(x_0)$ στο σημείο στάσης $x_0$ $\left(f'(x_0)=0\right)$ π.χ. η $f(x) = |x|^{\frac{3}{2}}$ έχει $f'(0)=0$, με $f(x) \geq f(0)=0$ τοπικό ελάχιστο στο $0$ ενώ $f''(0) = +\infty$, δηλαδή δεν έχει πεπερασμένη παράγωγο δεύτερης τάξης στο $0$.

- Όταν υπάρχει η $f''(x_0)=0$ και δεν υπάρχει παράγωγος ανώτερης τάξης π.χ. η $f(x) = |x|^{\frac{5}{2}}$ έχει $f'(0)=0, f''(0)=0$, με $f(x) \geq f(0)=0$ τοπικό ελάχιστο στο $0$ δεν έχει πεπερασμένη παράγωγο ανώτερης τάξης του δύο στο $0$ (είναι $f'''(0) = +\infty$).

- Όταν η $f$ έχει παραγώγους οποιασδήποτε τάξης στο σημείο στάσης $x_0$, αλλά όλες μηδενίζονται, δηλαδή $f^{(n)}(x_0)=0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Π.χ. η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

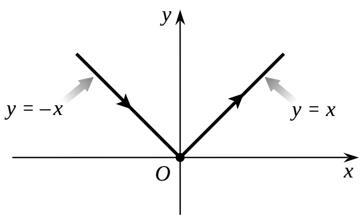
έχει παραγώγους οποιασδήποτε τάξης στο $0$, που μηδενίζονται σ' αυτό

$$f^{(n)}(0) = 0 \qquad \text{(βλέπε Κεφ. 8, § 3.5, Παρ. 2)}$$

και παίρνει ελάχιστο στο $x=0$.

## Παραδείγματα

**1**




Αν είναι $f(x) = |x|, x\in\mathbb{R}$ τότε

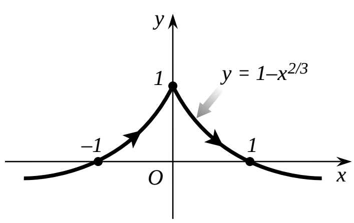
$$f'_-(x) = -1 (x<0) \ , \ f'_+(x) = 1 (x>0)$$

ενώ η $f'(0)$ δεν ορίζεται.

➡ Καθώς το $x$ περνάει από το $0$ το πρόσημο της $f'(x)$ αλλάζει από – σε +, επομένως η $y=f(x)$ έχει ελάχιστο στο $0$.

**2** Αν είναι $f(x) = 1 - x^{\frac{2}{3}}, x\in\mathbb{R}$ τότε

$$f'(x) = -\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} \quad \text{και η } f'(x) \text{ δεν ορίζεται στο } x=0.$$

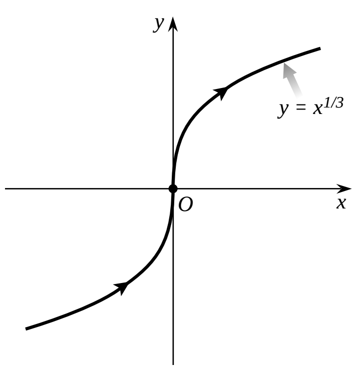



➡ Καθώς το $x$ περνάει από το $0$, το πρόσημο της $f'(x)$ αλλάζει από + σε –, επομένως η $y=f(x)$ παίρνει μέγιστο στο $0$.

Είναι $f'_-(0)=+\infty$ και $f'_+(0)=-\infty$.

**3** Αν είναι $f(x) = x^{\frac{1}{3}}, \ x\in\mathbb{R}$ τότε

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \quad \text{και η } f'(x) \text{ απειρίζεται στο } x=0.$$




➡ Καθώς το $x$ περνάει από το $0$, το πρόσημο της $f'(x)$ παραμένει θετικό, επομένως η $y=f(x)$ δεν έχει ακρότατο στην αρχή.

Επειδή η καμπύλη τέμνεται από τον $y$–άξονα, που είναι η εφαπτομένη της καμπύλης στο $0$, στο $0$ έχουμε σημείο καμπής, με

$$f'(0) = +\infty .$$

**4** Το πολυώνυμο $f(x) = x^2(x-1)^3$ είναι συνεχές στο $x \in \mathbb{R}$.

➡ Βρίσκουμε τις παραγώγους του

$$f'(x) = x(x-1)^2(5x-2) \ ,$$

$$f''(x) = 2(x-1)(10x^2-8x+1) \ ,$$

$$f'''(x) = 60x^2-72x+18 \ .$$

Επειδή η $f'(x)$ ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τα ακρότατα της $f(x)$ μπορούν να εμφανιστούν μόνον στα σημεία $x$ όπου $f'(x)=0$:

$$f'(x) = x(x-1)^2(5x-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x=0 \ , \ x = \frac{2}{5} \ , \ x=1 \ .$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 2 έχουμε:

στο $x = 0 : f''(0) = -2<0$ , άρα έχουμε σχετικό μέγιστο στο $x=0$,

στο $x = \frac{2}{5} : f''\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{18}{15} > 0$ , άρα έχουμε σχετικό ελάχιστο στο $x = \frac{2}{5}$,

στο $x = 1 : f''(1) = 0, f'''(1) = 6>0$ άρα έχουμε σημείο καμπής στο $x=1$.

Σύμφωνα με το Θεώρημα 3 έχουμε:

Ο μεγιστοβάθμιος όρος του πολυωνύμου $f'(x)$, δηλαδή ο $5x^4$ δείχνει ότι $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f'(x)>0$.

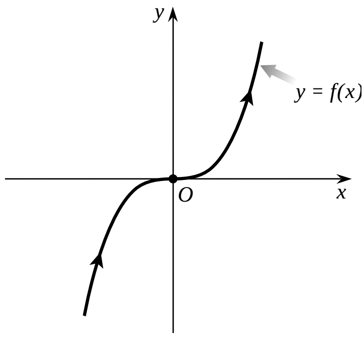
Επιπλέον, η πρώτη παράγωγος $f'(x)$ *μπορεί ν' αλλάζει πρόσημο μόνον στις ρίζες περιττής πολλαπλότητας*, στην περίπτωσή μας στα σημεία $x=0, x = \frac{2}{5}$.

Έτσι η $f'(x)$ έχει τις ακόλουθες εναλλαγές προσήμου

$$-\infty \quad + \quad 0 \quad - \quad \frac{2}{5} \quad + \quad 1 \quad + \quad +\infty$$

επομένως, η $f(x)$ έχει μέγιστο στο $x=0$, ελάχιστο στο $x = \frac{2}{5}$ και σημείο καμπής στο $x=1$.

**5** Σ' ένα σημείο στάσης $x_0$ μπορεί οι παράγωγοι $f^{(n)}(x_0)=0, \ \forall \ n \in \mathbb{N}$ κι αυτό να είναι σημείο καμπής με οριζόντια εφαπτομένη.




➡ Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

που έχει το στάσιμο σημείο $0$ και $f^{(n)}(x_0)=0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, ενώ το $0$ είναι σημείο καμπής με τον άξονα των $x$ εφαπτόμενο στην καμπύλη της.

## 2. Κυρτές και κοίλες συναρτήσεις

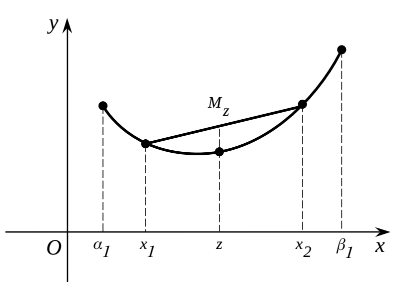
Λέμε ότι η καμπύλη $y=f(x)$ στο διάστημα $[\alpha_1, \beta_1]$ είναι *κυρτή* (στρέφει τα κοίλα προς τα άνω) όταν για κάθε $x_1, x_2 \in [\alpha_1, \beta_1]$ και για κάθε $\lambda \in [0,1]$ ισχύει

$$f\big(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\big) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)\,. \qquad \text{(σχήμα 1)} \quad (1)$$

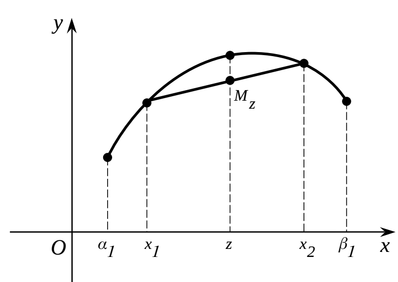
Λέμε ότι η καμπύλη $y=f(x)$ στο διάτημα $[\alpha_1, \beta_1]$ είναι *κοίλη* (στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω) όταν για κάθε $x_1, x_2 \in [\alpha_1, \beta_1]$ και για κάθε $\lambda \in [0, 1]$ ισχύει

$$f\big(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\big) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)\,. \qquad \text{(σχήμα 2)} \quad (2)$$

Όταν οι ανισότητες ισχύουν χωρίς ισότητα τότε λέμε ότι η συνάρτηση είναι *αυστηρά κυρτή* και *αυστηρά κοίλη*, αντίστοιχα.




*Σχήμα 1*




*Σχήμα 2*

Στην κυρτή συνάρτηση το σημείο $M_z$ βρίσκεται πάνω από το σημείο $\big(z, f(z)\big)$ της καμπύλης ή συμπίπτει μ' αυτό και στην κοίλη συνάρτηση το $M_z$ βρίσκεται κάτω από το σημείο $\big(z, f(z)\big)$ της καμπύλης, για όλα τα $z=\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, $\forall\, x_1$, $x_2 \in [\alpha_1, \beta_1]$, όπου $\lambda \in [0, 1]$, που είναι τα σημεία του διαστήματος $[x_1, x_2]$.

Όταν η καμπύλη $y=f(x)$ είναι αυστηρά κυρτή ή αυστηρά κοίλη στο $[\alpha_1, \beta_1]$ το σημείο $M_z$ βρίσκεται πάνω ή κάτω αντίστοιχα από το σημείο $(z, f(z))$.

Το σημείο $M_z$ ανήκει στη χορδή που ενώνει τα σημεία $(x_1, f(x_1))$ και $(x_2, f(x_2))$ με τετμημένη $z=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2, \lambda\in[0, 1]$, οπότε $z\in[x_1, x_2]$.

*Προσοχή!* Οι ανισότητες απαιτείται να ισχύουν για κάθε $x_1<x_2$ σημεία του $[\alpha_1, \beta_1]$ κι όχι μόνον για τα άκρα του διαστήματος.

Γενικότερα, αν η συνάρτηση $f$ είναι κυρτή (αντ. κοίλη) στο διάστημα $I$ και $x_i\in I$, $\lambda_i\in[0, 1]$, $i=1, 2, ..., n$ *και* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i=1$, τότε ισχύει

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) \quad (\text{αντ. } \ge)$$

που λέγεται ανισότητα του *Jensen* (βλέπε [4], Κεφ. 5, §5.2.2).

Από τα παραπάνω γίνεται φανερό ότι: *Μια συνάρτηση $f(x)$ είναι κυρτή και κοίλη συγχρόνως στο διάστημα $[\alpha_1, \beta_1]$ όταν είναι ευθεία γραμμή.*

ΘΕΩΡΗΜΑ : *Αν η συνάρτηση $f$ είναι κυρτή στο $[\alpha_1, \beta_1]$, τότε για κάθε τρία σημεία $x_1<x<x_2$ του $[\alpha_1, \beta_1]$ ισχύουν οι ανισότητες*

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}. \tag{3}$$

*Αν αντίστροφα ισχύει μία από τις τρεις ανισότητες που περιέχονται στην (3) τότε η $f$ είναι κυρτή στο $[\alpha_1, \beta_1]$.*

*Αν η συνάρτηση $f$ είναι κοίλη στο $[\alpha_1, \beta_1]$, τότε ισχύουν οι (3) με αντιστροφή των ανισοτήτων. Όταν η $f$ είναι αυστηρά κυρτή ή αυστηρά κοίλη στο $[\alpha_1, \beta_1]$ οι ανισότητες (3) γίνονται αυστηρές.*

*Απόδειξη*

Αφού είναι $x_2-x_1>0$, τότε έχουμε $\lambda = \dfrac{x_2-x}{x_2-x_1}$ , $1-\lambda = \dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$ , $\lambda\in[0, 1]$ και από την ανισότητα (1) παίρνουμε

$$f(x) \le \frac{x_2-x}{x_2-x_1} f(x_1) + \frac{x-x_1}{x_2-x_1} f(x_2)$$

$$\Rightarrow \quad (x_2-x_1)f(x) \le (x_2-x)f(x_1)+(x-x_1)f(x_2) . \tag{4}$$

Η τελευταία ανισότητα γράφεται ισοδύναμα με τους παρακάτω τρόπους:

$$(x_2-x_1)f(x) \le (x_2-x_1+x_1-x)f(x_1)+(x-x_1)f(x_2)$$

$$\Rightarrow \quad (x_2-x_1)f(x) \le (x_2-x_1)f(x_1)+(x_1-x)f(x_1)+(x-x_1)f(x_2)\,, \tag{4.1}$$

$$(x_2-x_1)f(x) \le (x_2-x)f(x_1)+(x-x_2+x_2-x_1)f(x_2)$$

$$\Rightarrow \quad (x_2-x_1)f(x) \le (x_2-x)f(x_1)+(x-x_2)f(x_2)+(x_2-x_1)f(x_2)\,, \tag{4.2}$$

$$(x_2-x_1)f(x) = (x_2-x+x-x_1)f(x) \le (x_2-x)f(x_1)+(x-x_1)f(x_2)$$

$$\Rightarrow \quad (x_2-x)f(x)+(x-x_1)f(x) \le (x_2-x)f(x_1)+(x-x_1)f(x_2)\,. \tag{4.3}$$

Από τις σχέσεις (4.1), (4.2), (4.3) προκύπτουν αντίστοιχα οι ανισότητες

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\,, \tag{A$_1$}$$

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}\,, \tag{A$_2$}$$

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}\,. \tag{A$_3$}$$

Προφανώς, καθεμιά από τις ανισότητες ($A_1$), ($A_2$), ($A_3$) είναι ισοδύναμη με την κυρτότητα της συνάρτησης $f$ στο διάστημα $[\alpha_1, \beta_1]$.

Από τις ανισότητες ($A_1$), ($A_2$), ($A_3$) προκύπτουν οι ανισότητες (3) και αυτό αποδεικνύει το θεώρημα.

Από τη διαδικασία της απόδειξης φαίνεται ότι, αν η (1) έχει αυστηρή ανισότητα, τότε αυτή θα διατηρηθεί και στις ανισότητες ($A_1$), ($A_2$), ($A_3$) και αντίστροφα.

Αν η συνάρτηση $f$ είναι κοίλη στο $[\alpha_1, \beta_1]$ χρησιμοποιούμε ανάλογα την ανισότητα (2) και η απόδειξη είναι ανάλογη. Αν η $f$ είναι αυστηρά κοίλη στο $[\alpha_1, \beta_1]$ η ανισότητα (2) γίνεται αυστηρή και η απόδειξη είναι, επίσης, ανάλογη. ■

Οι κυρτές και οι κοίλες συναρτήσεις έχουν πολλές σημαντικές ιδιότητες και μερικές απ' αυτές θα δούμε στις παρακάτω προτάσεις.

**ΠΡΟΤΑΣΗ 1:** *Αν η συνάρτηση $f$ είναι κυρτή ή κοίλη στο $[\alpha_1, \beta_1]$, τότε σε κάθε σημείο $\xi \in (\alpha_1, \beta_1)$ υπάρχουν οι παράγωγοι από τα δεξιά $f'_+(\xi)$ και από τα αριστερά $f'_-(\xi)$ και η $f$ είναι συνεχής στο $(\alpha_1, \beta_1)$.*

*Απόδειξη*

Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f$ είναι κυρτή στο διάστημα $[\alpha_1, \beta_1]$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση μέσης μεταβολής της $f$ στο $x_1 \in (\alpha_1, \beta_1)$ (Κεφ.6, §1)

$$F_{x_1}(x) = \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$$

και από την ανισότητα ($A_1$) του θεωρήματος παίρνουμε ότι

$$x_1 < x < x_2 \quad \Rightarrow \quad F_{x_1}(x) \le F_{x_1}(x_2)$$

δηλαδή η $F_{x_1}(x)$ είναι αύξουσα αριστερά του $x_1$.

Ανάλογα, από την ανισότητα ($A_2$) του θεωρήματος παίρνουμε ότι

$$x_1 < x < x_2 \quad \Rightarrow \quad F_{x_2}(x_1) \le F_{x_2}(x)$$

δηλαδή η συνάρτηση μέσης μεταβολής $F_{x_2}(x)$ είναι αύξουσα αριστερά του $x_2$.

Τέλος, από την ανισότητα ($A_3$) του θεωρήματος παίρνουμε ότι

$$x_1 < x < x_2 \quad \Rightarrow \quad F_x(x_1) \le F_x(x_2)$$

δηλαδή η συνάρτηση $F_x$ είναι αύξουσα όταν τα $x_1, x_2$ βρίσκονται δεξιά και αριστερά του $x$.

Επειδή όμως τα $x_1, x, x_2$ είναι τρία τυχαία σημεία των $(\alpha_1, \beta_1)$ (μόνο η σχετική θέση τους τα διαφοροποιεί) συνεπάγεται ότι η συνάρτηση μέσης μεταβολής σε τυχαίο σημείο $\xi \in (\alpha_1, \beta_1)$ είναι αύξουσα.

Έστω $\xi \in (\alpha_1, \beta_1)$ και $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $[\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon] \subset (\alpha_1, \beta_1)$.

Επειδή η συνάρτηση μέσης μεταβολής της $f$ στο $\xi$

$$F_\xi(x) = \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$$

είναι αύξουσα στο $[\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon]$, έχουμε

$$F_\xi(\xi-\varepsilon) \le F_\xi(x) \le F_\xi(\xi+\varepsilon) \quad , \quad \forall\, x \in [\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon] \ .$$

Άρα η $F_\xi(x), x\in[\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon]$ είναι φραγμένη και αύξουσα, οπότε σύμφωνα με την Πρόταση 5 της § 2 του Κεφ. 4, θα υπάρχουν τα όρια από τα δεξιά $\lim\limits_{x\to\xi^+} F_\xi(x)=f'_+(\xi)\in\mathbb{R}$, από τ' αριστερά $\lim\limits_{x\to\xi^-} F_\xi(x)=f'_-(\xi)\in\mathbb{R}$ και $f'_-(\xi)\leq f'_+(\xi)$.

Αλλά έχουμε

$$\lim_{x\to\xi^-}\big(f(x)-f(\xi)\big) = \lim_{x\to\xi^-}\frac{f(x)-f(\xi)}{(x-\xi)}(x-\xi) = f'_-(\xi)\cdot 0 = 0$$

και

$$\lim_{x\to\xi^+}\big(f(x)-f(\xi)\big) = \lim_{x\to\xi^+}\frac{f(x)-f(\xi)}{(x-\xi)}(x-\xi) = f'_+(\xi)\cdot 0 = 0 ,$$

οπότε η $f$ είναι συνεχής από τα δεξιά και από τ' αριστερά στο $\xi$, άρα συνεχής στο $\xi$.

**Παρατήρηση 1** Η Πρόταση 1 δεν εξασφαλίζει την ύπαρξη των παραγώγων από τα δεξιά και από τ' αριστερά στα άκρα $\alpha_1$ και $\beta_1$ του διαστήματος $[\alpha_1, \beta_1]$.

Π.χ. θεωρείστε τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x=-1 \\ x^2, & x\in(-1, 1) \\ 0, & x=1 \end{cases}$$

που είναι κυρτή στο $[-1, 1]$, αλλά δεν υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ οι παράγωγοι $f'_+(-1)$, $f'_-(1)$ και η $f$ δεν είναι συνεχής στα άκρα του διαστήματος $-1, 1$, (είναι $f'_+(-1)=+\infty$, $f'_-(+1)=-\infty$). ■

Από τον ορισμό *της κυρτής συνάρτησης* $f(x)$ στο $[\alpha_1, \beta_1]$ προκύπτει (Θεώρημα) ότι $\forall\, x_1, x_2\in[\alpha_1, \beta_1] (x_1<x_2)$ ισχύει

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} \;,\quad x\in(x_1, x_2)$$

και για *την κοίλη συνάρτηση* $f(x)$ στο $[\alpha_1, \beta_1]$ προκύπτει ότι $\forall\, x_1, x_2\in[\alpha_1, \beta_1]$ $(x_1<x_2)$ ισχύει

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \geq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \geq \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} \;,\quad x\in(x_1, x_2) .$$

Από τους ορισμούς *αυστηρά κυρτή* και *αυστηρά κοίλη* συνάρτηση $f(x)$ στο $[\alpha_1, \beta_1]$ οι παραπάνω ανισότητες γίνονται αυστηρές (χωρίς ισότητες), αντίστοιχα.

Θέτουμε $I=[\alpha_1, \beta_1]$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2: *Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $I$ τότε ισχύουν:*

*η $f(x)$ κυρτή στο $I$ $\Leftrightarrow$ η $f'(x)$ αύξουσα στο $I$,*

*η $f(x)$ κοίλη στο $I$ $\Leftrightarrow$ η $f'(x)$ φθίνουσα στο $I$.*

*Απόδειξη*

Αφού η $f(x)$ είναι κυρτή στο $I$, για $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$, έχουμε

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} \quad , \quad x \in (x_1, x_2)\,.$$

Από τις ανισότητες αυτές, αφού η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $I$ προκύπτει

$$f'(x_1) = f'_+(x_1) = \lim_{x \to x_1^+} \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \lim_{x \to x_2^-} \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} = f'_-(x_2) = f'(x_2)$$

Άρα, παίρνουμε $f'(x_1) \le f'(x_2)$, όταν $x_1 < x_2$, δηλαδή η $f'(x)$ είναι αύξουσα στο διάστημα $I=[\alpha_1, \beta_1]$.

Αντίστροφα, από το θεώρημα της μέσης τιμής έχουμε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \quad , \quad \xi_1 \in (x_1, x) \quad , \quad f'(\xi_2) = \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} \quad , \quad \xi_2 \in (x, x_2)$$

οπότε, αν είναι $\xi_1 < \xi_2$ τότε, από την υπόθεση, $f'(\xi_1) \le f'(\xi_2)$.

Επομένως, προκύπτει ότι

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} \quad , \quad x \in (x_1, x_2)$$

δηλαδή η συνάρτηση $f(x)$ είναι κυρτή.

Αποδεικνύεται, παρόμοια, και το δεύτερο σκέλος της Πρότασης 1. ■

Σύμφωνα με την Πρόταση 2 και το Θεώρημα 1 (Κεφ. 6, §3) έχουμε:

ΠΡΟΤΑΣΗ 3: *Αν η $f(x)$ έχει συνεχή πρώτη παράγωγο $f'(x)$ στο $I=[\alpha_1, \beta_1]$ και δεύτερη παράγωγο στο $(\alpha_1, \beta_1)$, τότε ισχύουν:*

*η $f(x)$ κυρτή στο $I$ $\Leftrightarrow$ $\forall x \in (\alpha_1, \beta_1), f''(x) \ge 0$,*

*η $f(x)$ κοίλη στο $I$ $\Leftrightarrow$ $\forall x \in (\alpha_1, \beta_1), f''(x) \le 0$.*

*Σημείωση*

Η $f'(x)$ αύξουσα στο διάστημα $I=[\alpha_1, \beta_1]$ σημαίνει $(f')'(x)\geq 0$ στο διάστημα $I$ και η $f'(x)$ φθίνουσα στο διάστημα $I=[\alpha_1, \beta_1]$ σημαίνει $(f')'(x)\leq 0$ στο διάστημα $I$.

ΟΡΙΣΜΟΣ: *Το σημείο* $x_0\in(\alpha, \beta)$ *στο οποίο έχουμε:*

- $\exists\ \varepsilon_1>0,\ [x_0-\varepsilon_1,\ x_0]\subset(\alpha,\ \beta)$ *και η* $f(x)$ *είναι κυρτή (αντ. κοίλη) στο* $[x_0-\varepsilon_1, x_0]$
- $\exists\ \varepsilon_2>0,\ [x_0,\ x_0+\varepsilon_2]\subset(\alpha,\ \beta)$ *και η* $f(x)$ *είναι κοίλη (αντ. κυρτή) στο* $[x_0, x_0+\varepsilon_2]$

*λέγεται* ***σημείο καμπής*** *της συνάρτησης* $f\colon [\alpha, \beta]\to\mathbb{R}$.

Γεωμετρικά, η εφαπτομένη της καμπύλης $f(x)$ στο σημείο καμπής της $(x_0, f(x_0))$ διαπερνά την καμπύλη.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4: *Αν η συνάρτηση* $f(x)$ *είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα* $[\alpha, \beta]$ *και υπάρχει η παράγωγος δεύτερης τάξης* $f''(x_0)$ *της* $f(x)$ *στο σημείο* $x_0\in(\alpha, \beta)$*, το οποίο είναι σημείο καμπής της* $f(x)$*, τότε ισχύει* $f''(x_0)=0$.

*Απόδειξη*

Από τον ορισμό του σημείου καμπής υπάρχει $\varepsilon>0,\ [x_0-\varepsilon,\ x_0+\varepsilon]\subset I$ και η παράγωγος συνάρτηση $f'(x)$ είναι:

αύξουσα στο $[x_0-\varepsilon,\ x_0]$ και φθίνουσα στο $[x_0,\ x_0+\varepsilon]$

ή φθίνουσα στο $[x_0-\varepsilon,\ x_0]$ και αύξουσα στο $[x_0,\ x_0+\varepsilon]$.

Επομένως, το σημείο $x_0\in(\alpha, \beta)$ είναι σημείο (τοπικού) ακροτάτου της $f'(x)$ και άρα σ' αυτό ισχύει (§1, Θεώρημα 1)

$$(f')'(x_0) = f''(x_0) = 0\,. \qquad \blacksquare$$

**Παρατήρηση 2** Η σχέση $f''(x_0)=0$ είναι μόνον αναγκαία συνθήκη (κι όχι ικανή) για να είναι το $x_0$ σημείο καμπής της συνάρτησης $f(x)$.

Ακόμη, αν η $f''(x_0)$ δεν υπάρχει, τότε το $x_0$ μπορεί να είναι σημείο καμπής ή να μην είναι σημείο καμπής της $f(x)$.

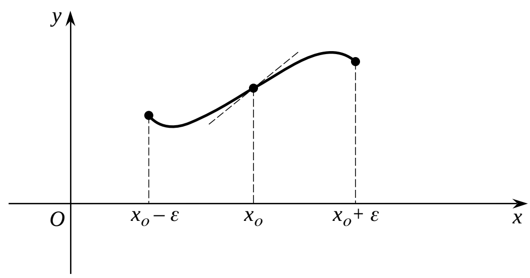
Επομένως, η $f(x)$ μπορεί να έχει σημείο καμπής στο $x=x_0$ μόνον όταν η $f''(x_0)=0$ ή η $f''(x_0)$ δεν υπάρχει. $\blacksquare$

Αποδεικνύεται, ότι, αν η δεύτερη παράγωγος $f''(x)$ υπάρχει στο διάστημα $[\alpha_1, \beta_1]$, τότε:

α) όταν είναι $f''(x)>0$ στο $[\alpha_1, \beta_1]$ η καμπύλη $y=f(x)$ είναι αυστηρά κυρτή στο $[\alpha_1, \beta_1]$.

β) όταν είναι $f''(x)<0$ στο $[\alpha, \beta]$ η καμπύλη $y=f(x)$ είναι αυστηρά κοίλη στο $[\alpha_1, \beta_1]$.

Σύμφωνα με τα παραπάνω για να είναι ένα σημείο $(x_0, f(x_0))$ της καμπύλης $y=f(x)$ σημείο καμπής της πρέπει και αρκεί η $f''(x)$ να παίρνει στα διαστήματα $[x_0-\varepsilon, x_0]$ και $[x_0, x_0+\varepsilon]$, $\varepsilon>0$, ετερόσημες τιμές, δηλαδή $f''(x)>0$, $\forall x \in [x_0, x_0+\varepsilon]$ και $f''(x)<0$, $\forall x \in [x_0, x_0+\varepsilon]$ ή αντίστροφα.




*Σημείο καμπής*
*(η εφαπτομένη της καμπύλης στο $(x_o, f(x_o))$ την διαπερνά)*

Βέβαια, αν η συνάρτηση $f''(x)$ είναι συνεχής στο σημείο $x=x_0$, τότε θα είναι $f''(x_0)=0$. Ενδέχεται ακόμη η $f''(x_0)$ να μην υπάρχει και το σημείο $x_0$ να είναι σημείο καμπής.

Για παράδειγμα θεωρούμε τη συνάρτηση

$$y = f(x) = \begin{cases} x + \ln x\,, & \alpha\nu\ x \in (0,\ 1) \\ e^{2(x-1)}\,, & \alpha\nu\ x \in [1,\ +\infty) \end{cases}$$

η οποία έχει τις παραγώγους

$$y' = f'(x) = \begin{cases} 1+\dfrac{1}{x}\,, & \alpha\nu\ x \in (0,\ 1), \\ 2e^{2(x-1)}, & \alpha\nu\ x \in [1,\ +\infty), \end{cases} \qquad y'' = f''(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x^2}\,, & \alpha\nu\ x \in (0,\ 1), \\ 4e^{2(x-1)}, & \alpha\nu\ x \in (1,\ +\infty). \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι έχουμε $y' = f'(x) \neq 0$, $\forall\ x \in (0, +\infty)$, ενώ είναι $y'' = f''(x) < 0$, αν $x \in (0, 1)$ και $y'' = f''(x) > 0$, αν $x \in (1, +\infty)$ και η παράγωγος $y'' = f''(1)$ δεν υπάρχει.

Άρα το σημείο $x_0 = 1$ είναι σημείο καμπής της συνάρτησης $f$.

*Ένα σημείο $x_0$ είναι σημείο καμπής της $f(x)$ όταν η καμπύλη $y=f(x)$ είναι δεξιά του $x_0$ κοίλη (αντ. κυρτή) και αριστερά του $x_0$ είναι κυρτή (αντ. κοίλη).*

**Παρατήρηση 3** Από τα παραπάνω προκύπτει ότι το σημείο καμπής $x_0$ είναι αναγκαστικά εσωτερικό σημείο του διαστήματος $I=[\alpha, \beta]$ και, εφόσον η παράγωγος $f'(x)$ υπάρχει στο $(\alpha, \beta)$, είναι σημείο ακρότατου της $f'(x), x\in(\alpha, \beta)$.

Άρα, η αναζήτηση των σημείων καμπής μιας συνάρτησης που έχει πρώτη παράγωγο $f'$ παντού στο $(\alpha, \beta)$ ανάγεται στην αναζήτηση ακροτάτων της παραγώγου συνάρτησης $f'$ και τα σημεία στάσης ή κρίσιμα σημεία της $f'$ είναι τα πιθανά σημεία καμπής της $f$.

Επομένως, αν η δεύτερη παράγωγος της $f$ μηδενίζεται στο $x_0$, το σημείο αυτό είναι πιθανό σημείο καμπής της $f$ και ταυτόχρονα σημείο στάσης για την $f'$.

Τέλος, σύμφωνα με το Θεώρημα 2 της § 1, αν $x_0\in(\alpha, \beta)$ και

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$$

και $f^{(n)}(x_0)\neq 0$, όπου $n=2k+1$ *περιττός φυσικός αριθμός*, τότε το σημείο $x_0$ είναι σημείο καμπής της συνάρτησης $f$.

**Παρατήρηση 4** Όταν γνωρίζουμε ότι μια συνάρτηση $f$ είναι κυρτή ή κοίλη στο διάστημα $[\alpha_1, \beta_1]$, λόγω των ανισοτήτων (1) και (2), μπορούμε ν' αποδείξουμε ανισότητες μεταξύ των τιμών $f(x)$ και των τιμών της ευθείας $y(x)$ που περνάει από τα σημεία $(\alpha_1, f(\alpha_1)), (\beta_1, f(\beta_1))$.

Π.χ. θα δείξουμε ότι $x^2-\eta\mu x-2\pi x<0$ στο $(0, 2\pi)$.

Η συνάρτηση $f(x)=x^2-\eta\mu x, x\in[0, 2\pi]$, επειδή $f''(x)=2+\eta\mu x>0, \forall x\in[0, 2\pi]$ είναι αυστηρά κυρτή στο $[0, 2\pi]$.

Η ευθεία $y=2\pi x$ περνάει από τα σημεία

$$(0, f(0))=(0, 0), (2\pi, f(2\pi))=(2\pi, 4\pi^2)$$

και, σύμφωνα με την αυστηρή ανισότητα (1) (βλέπε αρχή αυτής της παραγράφου), ισχύει

$$f(x) = x^2-\eta\mu x < y(x) = 2\pi x \ , \forall x\in(0, 2\pi) \ .$$

Με ανάλογο τρόπο δείξτε ότι $\tau o\xi\varepsilon\varphi x > \dfrac{\pi x}{4}, \forall x\in(0, 1)$.

## Παραδείγματα

**1** Η συνάρτηση $y=\dfrac{1}{1+x^2}, x\in\mathbb{R}$ έχει παραγώγους

$$y'=-\frac{2x}{(1+x^2)^2} \quad \text{και} \quad y''=\frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}, \quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

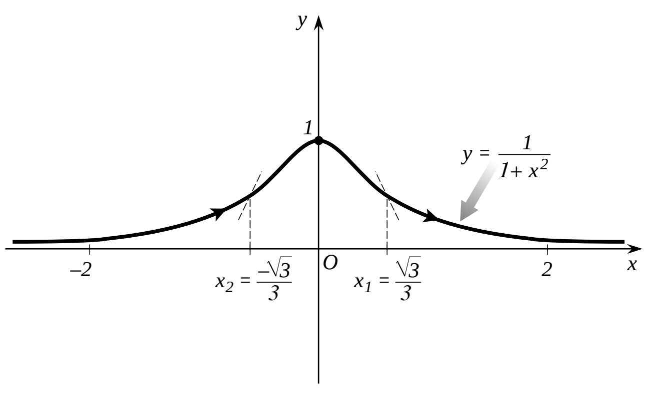
➡ Αν τεθεί $y''=0$ βρίσκουμε τα ενδεχόμενα σημεία καμπής

$$x_1=\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad x_2=-\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Παρατηρούμε ότι για $x<\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ είναι $y''<0$ και για $x>\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ είναι $y''>0$.

Άρα, το σημείο $x_1=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ είναι σημείο καμπής.

Όμοια, αποδεικνύεται ότι και το σημείο $x_2=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ είναι σημείο καμπής.




Η καμπύλη $y=\dfrac{1}{1+x^2}, x\in\mathbb{R}$ είναι συμμετρική ως προς τον $y$–άξονα.

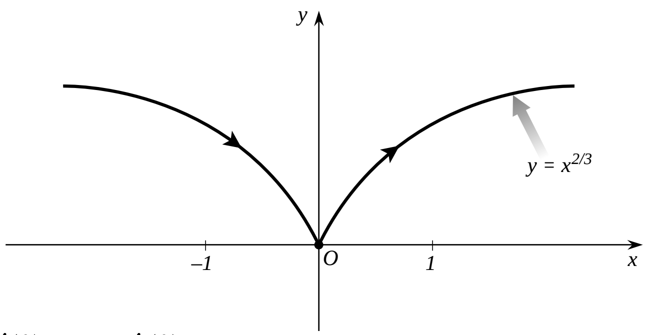
Από τα παραπάνω προκύπτει, ακόμη, ότι για $|x|>\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ η καμπύλη στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω (κυρτή) και για $|x|<\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω (κοίλη).

**2** Η καμπύλη $y = x^{\frac{2}{3}}$, $x \in \mathbb{R}$ δεν έχει σημείο καμπής.

➡ Πράγματι έχουμε:

$$y'' = -\frac{2}{9x^{\frac{4}{3}}}$$

και η $y''$ δεν ορίζεται για $x=0$.
Άρα, το σημείο $x=0$ είναι ενδεχόμενο σημείο καμπής, αλλά δεξιά του $x=0$ $(x>0)$ και αριστερά του $x=0$ $(x<0)$ η δεύτερη παράγωγος είναι πάντοτε $y''<0$. Άρα, η καμπύλη στρέφει πάντοτε τα κοίλα προς τα κάτω (κοίλη), δηλαδή $\forall x \in \mathbb{R}$.




Είναι $y'_-(0)=-\infty$, $y'_+(0)=+\infty$.

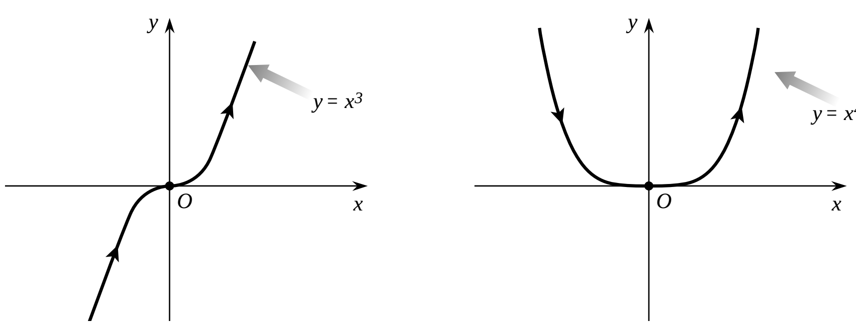
**3** Η συνάρτηση $y = x^3$ έχει πρώτη παράγωγο $y'=3x^2$ που μηδενίζεται στο σημείο $x=0$.

➡ Επειδή είναι $y''=6x$ και $y''(0)=0$, παίρνουμε την τρίτη παράγωγο

$$y''' = 6 > 0 \ .$$

Επομένως, η $y = x^3$ δεν έχει ακρότατο (τοπικά) στο σημείο $x=0$ επειδή η πρώτη μη μηδενιζόμενη παράγωγος σ' αυτό είναι περιττής τάξης $(n=3)$.

Επειδή η $y'''(0)=6>0$ η συνάρτηση $y=x^3, x \in \mathbb{R}$ είναι γνήσια αύξουσα σε μία περιοχή του $0$, αλλά όπως φαίνεται στο σχήμα είναι αύξουσα στο $\mathbb{R}$.



Η συνάρτηση $y=x^4, x\in\mathbb{R}$ έχει πρώτη παράγωγο $y'=4x^3$ που μηδενίζεται στο σημείο $x=0$.

Επειδή είναι $y''=12x^2$ και $y''(0)=0$, $y'''=24x$ και $y'''(0)=0$, παίρνουμε την τέταρτη παράγωγο

$$y^{(4)}(x) = 24 \ , \quad \forall x\in\mathbb{R} \ .$$

Επομένως, η $y=x^4, x\in\mathbb{R}$ έχει ακρότατο (τοπικά) στο σημείο $x=0$, επειδή η πρώτη μη μηδενιζόμενη παράγωγος σ' αυτό είναι άρτιας τάξης $(n=4)$.

Επειδή η $y^{(4)}(0)=24>0$ η $y=x^4, x\in\mathbb{R}$ έχει ελάχιστο στο σημείο $x=0$, και όπως βλέπουμε στο σχήμα αυτό είναι και απόλυτο ελάχιστο της συνάρτησης στο $\mathbb{R}$. ■

## Γενικές παρατηρήσεις

**Α)** Η παράγωγος μόνο σ' ένα σημείο $\xi$ του συνόλου ορισμού μιας συνάρτησης $f$ δεν μπορεί να δώσει πληροφορίες για τη μονοτονία της $f$ σε περιοχή του $\xi$, όταν η παράγωγος συνάρτηση $f'$ είναι ασυνεχής στο $\xi$.

Π.χ. η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x\left(1+2x\,\eta\mu\,\dfrac{1}{x}\right), & \text{αν } x\neq 0 \\ 0, & \text{αν } x=0. \end{cases}$$

είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x\neq 0$, άρα και συνεχής, με παράγωγο

$$f'(x) = 1 + 4x\,\eta\mu\,\frac{1}{x} - 2\sigma\upsilon\nu\,\frac{1}{x} \ , \quad x\neq 0 \ .$$

Στο σημείο $x=0$ έχουμε

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\left(1+2x\eta\mu\,\frac{1}{x}\right) = 1 > 0$$

και η παράγωγος συνάρτησης $f'(x)$ δεν είναι συνεχής στο $0$.
Πράγματι, για

$$x_n = \frac{1}{2n\pi} \to 0,$$

όταν $n\to+\infty$, έχουμε $f'(x_n)=-1\to -1$ και για $x_n' = \dfrac{1}{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}} \to 0$, όταν $n\to+\infty$, έχουμε $f'(x_n)\to 1$ (αρκούσε βέβαια το ότι $-1\neq f'(0)=1$)

Παίρνουμε μια περιοχή $(-\varepsilon, \varepsilon)$, $\varepsilon>0$ του μηδενός και τις τρεις ακολουθίες

$$x_n = \frac{1}{2n\pi} > x'_n = \frac{1}{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}} > x''_n = \frac{1}{2(n+1)\pi+\dfrac{\pi}{2}}, \quad n\in\mathbb{N}$$

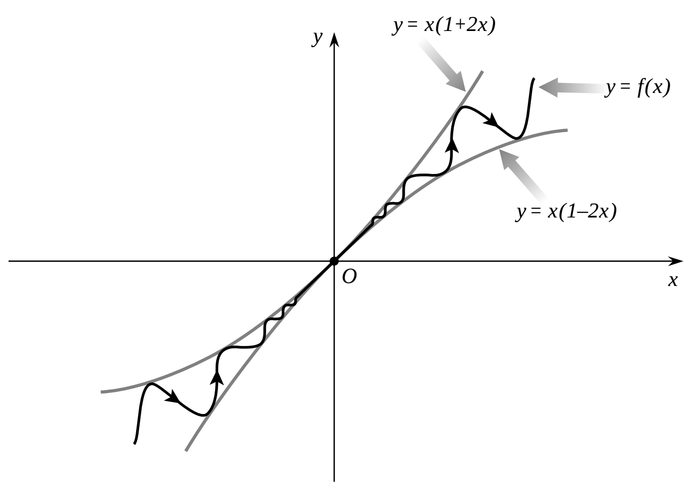
που τείνουν στο $0$, άρα στο διάστημα $(-\varepsilon, \varepsilon)$ υπάρχουν άπειροι όροι τους.

Αλλά είναι $f(x'_n)>f(x_n)$ και $f(x''_n)<f(x_n)$, $\forall\, n\in\mathbb{N}$.

Αν πάρουμε $-x_n<-x'_n<-x''_n$ θα έχουμε

$$f(-x'_n) < f(-x_n) \quad \text{και} \quad f(-x''_n) > f(-x_n)\ , \quad \forall\, n\in\mathbb{N}$$

και οι τρεις ακολουθίες $(-x_n)$, $(-x'_n)$, $(-x''_n)$ τείνουν πάλι στο $0$.
Έχουμε λοιπόν $f'(0)=1>0$ και δεν μπορούμε απ' αυτό ν' αποφανθούμε για τη μονοτονία της $f$ στην περιοχή $(-\varepsilon, \varepsilon)$ του μηδενός, επειδή η παράγωγος συνάρτηση $f'$ είναι ασυνεχής στο $0$.




Βέβαια, όταν η παράγωγος συνάρτησης $f'$ είναι συνεχής στο σημείο $x_0$ τότε (Τεύχος Α′, Κεφ. 6, §3, Θεώρημα 1):

- όταν είναι $f'(x_0)>0$ η συνάρτηση $f$ είναι σε περιοχή του $x_0$ γνήσια αύξουσα,
- όταν είναι $f'(x_0)<0$ η συνάρτηση $f$ είναι σε περιοχή του $x_0$ γνήσια φθίνουσα.

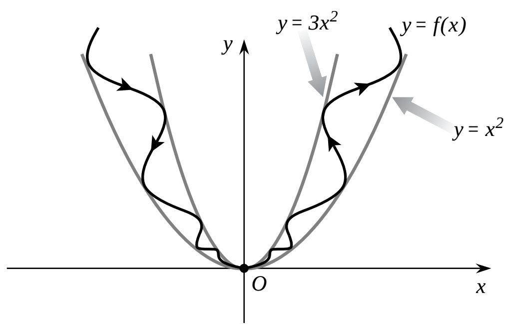
Μια συνάρτηση $\varphi$ συνεχής σ' ένα σημείο $x_0$, με $\varphi(x_0)\neq 0$, διατηρεί σε περιοχή του $x_0$ το πρόσημο της $\varphi(x_0)$. (Βλέπε Κεφ. 5, § 1, Θεώρημα 1).

**Β)** Όταν η συνάρτηση $f$ παίρνει τοπικό μέγιστο ή ελάχιστο στο σημείο $x_0$ δεν είναι αναγκαίο ν' αλλάζει το πρόσημο της παραγώγου $f'$ δεξιά και αριστερά του σημείου $x_0$.

Π.χ. η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2\left(2 + \eta\mu \dfrac{1}{x}\right), & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

στο σημείο $0$ είναι παραγωγίσιμη, με $f'(0)=0$, κι έχει στο $0$ τοπικό ελάχιστο, αλλά η παράγωγος $f'(x)$ δε διατηρεί σταθερό πρόσημο δεξιά ή αριστερά του σημείο $0$.




Παρατηρείστε, από το σχήμα, ότι σε οποιοδήποτε διάστημα $(-\varepsilon, \varepsilon)$, $\varepsilon>0$ υπάρχουν άπειρα σημεία όπου η συνάρτηση $f$ έχει τοπικό ελάχιστο.

**Γ)** Υπάρχουν σημεία στάσης της συνάρτησης $f$ που δεν είναι ακρότατα ή σημεία καμπής με οριζόντια εφαπτομένη.

Π.χ. η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2\eta\mu \dfrac{1}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

έχει παράγωγο $f'(0)=0$ και από το σχήμα φαίνεται ότι στο $0$ δεν έχει ακρότατο.

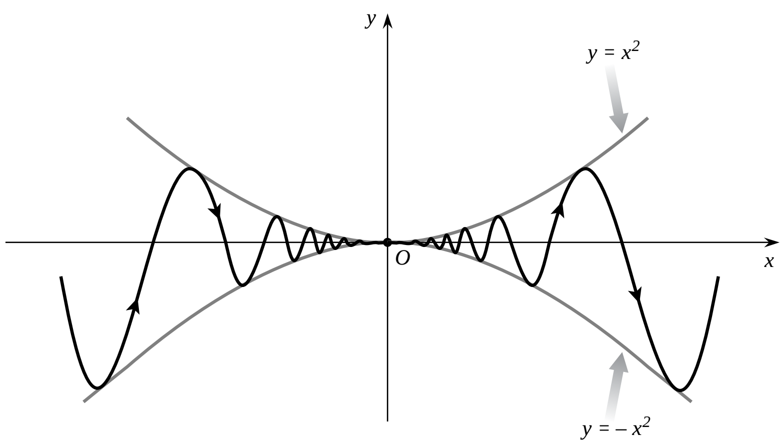
Αν πάρουμε τις ακολουθίες

$$x_n = \frac{2}{(4n+1)\pi}\ , \quad x'_n = \frac{2}{(4n-1)\pi}\ , \quad n \in \mathbb{N}$$

που τείνουν στο μηδέν, όταν $n \to +\infty$, θα έχουμε

$$f(x_n) = \left[\frac{2}{(4n+1)\pi}\right]^2 > 0 \quad \text{και} \quad f(x_n) = -\left[\frac{2}{(4n+1)\pi}\right]^2 < 0$$

μέσα στο ίδιο διάστημα $(0, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$.




Παίρνοντας τις ακολουθίες $(-x_n)$, $(-x'_n)$ που τείνουν, επίσης, στο μηδέν, έχουμε ανάλογα αποτελέσματα στο διάστημα $(-\varepsilon, 0)$, $\varepsilon > 0$.

Ο άξονας των $x$ είναι εφαπτόμενος στην καμπύλη $y=f(x)$ στο μηδέν και την τέμνει στα άπειρα σημεία $x = \dfrac{1}{n\pi}$, $n \in \mathbb{N}$.

Σε κανένα διάστημα $(-\varepsilon, 0)$ ή $(0, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ οσονδήποτε μικρός, η συνάρτηση $f$ δεν είναι κυρτή ή κοίλη, οπότε το σημείο μηδέν δεν μπορεί να είναι σημείο καμπής της.

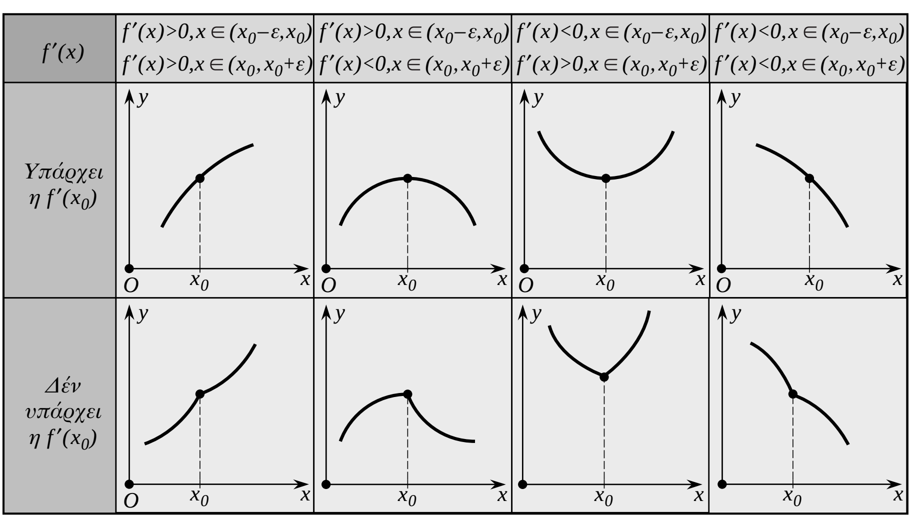
*Ερώτημα:* Μπορεί μια συνεχής συνάρτηση $f$ σ' ένα διάστημα να μην έχει ακρότατο στα άκρα του;

Ναι, αν θεωρήσουμε ως διάστημα ορισμού της παραπάνω συνάρτησης $f(x)$ το $(-\infty, 0]$ ή $[0, +\infty)$, παρατηρούμε ότι η συνεχής συνάρτηση $f$ δεν έχει ακρότατο στο άκρο $0$ του διαστήματος ορισμού της.

## Πινακας Ιδιοτητων και Συνθηκων

| **Ιδιότητα της $f: I \to \mathbb{R}$** | **Αναγκαία Συνθήκη** | **Ικανή Συνθήκη** |
|---|---|---|
| Αύξουσα | $f'(x) \geq 0$ | $f'(x) \geq 0$ |
| Φθίνουσα | $f'(x) \leq 0$ | $f'(x) \leq 0$ |
| Γνήσια αύξουσα | $f'(x) > 0$ και $f'(x_0) = 0$, τα $x_0$ δε σχηματίζουν διάστημα | $f'(x) > 0$ |
| Γνήσια φθίνουσα | $f'(x) < 0$ και $f'(x_0) = 0$, τα $x_0$ δε σχηματίζουν διάστημα | $f'(x) < 0$ |
| Τοπικό μέγιστο στο $x_0$ | $f'(x_0) = 0$, αν $x_0$ εσωτερικό σημείο του $I$, ή η $f'(x_0)$ δεν υπάρχει | $f'(x_0) = 0$ και $f''(x_0) < 0$, ή αλλαγή προσήμου της $f'(x)$ από θετικό σε αρνητικό. |
| Τοπικό ελάχιστο στο $x_0$ | $f'(x_0) = 0$, αν $x_0$ εσωτερικό σημείο του $I$, ή η $f'(x_0)$ δεν υπάρχει | $f'(x_0) = 0$ και $f''(x_0) > 0$, ή αλλαγή προσήμου της $f'(x)$ από αρνητικό σε θετικό. |
| Κυρτή στο $I$ | $f''(x) \geq 0$ , $\forall x \in I$ , | $f''(x) \geq 0$ $\forall x \in I$. |
| Κοίλη στο $I$ | $f''(x) \leq 0$ , $\forall x \in I$ , | $f''(x) \leq 0$ $\forall x \in I$. |

***Μορφή της καμπύλης y=f(x) σε περιοχή του $x_0$***



# 3. Ασύμπτωτες καμπύλης

## 1 *Κάθετες και οριζόντιες ασύμπτωτες*

Η ευθεία $x=x_0$ λέγεται *κάθετη ασύμπτωτη* της καμπύλης $y=f(x)$, όταν ισχύει

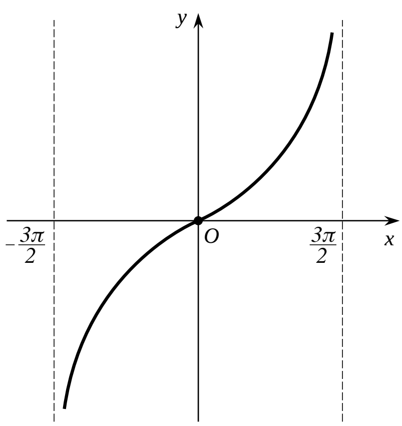
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \quad \text{ή} \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$$

όπου $x_0$ είναι σημείο συσσώρευσης του συνόλου ορισμού της συνάρτησης $f$.

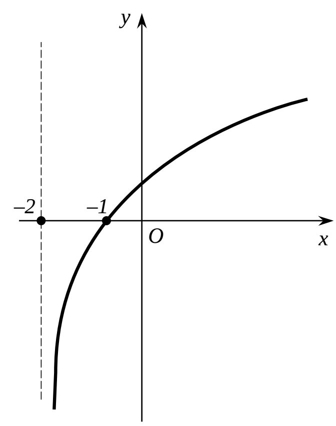
Δηλαδή, οι τιμές $x_0$ (εφόσον υπάρχουν) για τις οποίες η $f(x)$ απειρίζεται ($+\infty$ ή $-\infty$) δίνουν αμέσως τις παράλληλες προς τον άξονα των $y$ ασύμπτωτες της καμπύλης.

Π.χ. η καμπύλη $y=\varepsilon\varphi\,\dfrac{x}{3}$, $-\dfrac{3\pi}{2} < x < \dfrac{3\pi}{2}$ έχει ασυμπτώτους τις ευθείες $x=\dfrac{3\pi}{2}$ και $x=-\dfrac{3\pi}{2}$.

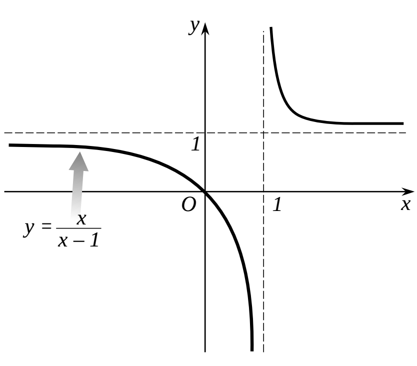
Η καμπύλη $y=ln(x+2)$, $-2<x<+\infty$, έχει ασύμπτωτη την ευθεία $x=-2$.




$y = \varepsilon\varphi\,\frac{x}{2}$




$y = ln(x+2)$




Η ευθεία $y=y_0$ λέγεται *οριζόντια ασύμπτωτη* της καμπύλης $y=f(x)$, όταν ισχύει

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = y_0 \quad \text{ή} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = y_0$$

όπου η $f$ ορίζεται σε διάστημα $[M, +\infty)$ ή $(-\infty, -M]$, $M>0$.

Π.χ. η καμπύλη $y=\dfrac{x}{x-1}$, $x\neq 1$ έχει κάθετη ασύμπτωτη $x_0=1$, επειδή $\lim\limits_{x\to 1^-} y=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to 1^+} y=+\infty$, και οριζόντια ασύμπτωτη $y_0=1$ επειδή είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x-1}=1$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x-1}=1$.

Π.χ. η καμπύλη

$$y=\begin{cases}\dfrac{\eta\mu x}{x}, & \text{αν } x\neq 0\\ 1, & \text{αν } x=0\end{cases}$$

έχει την οριζόντια ασύμπτωτη $y=0$, επειδή

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=0\ .$$

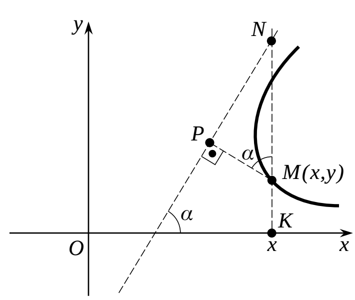
Η καμπύλη παλινδρομεί πάνω κάτω από τον άξονα των $x$ και καθώς το $x$ τείνει στο $+\infty$ ή $-\infty$, η μέγιστη απομάκρυνση από τον άξονα των $x$ τείνει να μηδενιστεί και η καμπύλη να συμπέσει μ' αυτόν.

## 2 *Πλάγιες ασύμπτωτες*

Θα θεωρήσουμε την περίπτωση $x\to+\infty$ (ανάλογα εξετάζεται η περίπτωση $x\to-\infty$), οπότε η $f$ ορίζεται σε διάστημα $[M,+\infty)$, $M>0$ (αντ. $(-\infty,-M]$, $M>0$).

Για να είναι η ευθεία $y=\lambda x+\mu$, $x\in\mathbb{R}$ *πλάγια ασύμπτωτη* της καμπύλης $y=f(x)$, πρέπει και αρκεί να μηδενίζεται το όριο

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(\lambda x+\mu)]=0\ . \qquad (1)$$




Το μήκος $|MP|$ είναι το μήκος της απόστασης της καμπύλης $y=f(x)$ από την πλάγια ασύμπτωτη $y=\lambda x+\mu$, οπότε έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty}|MP|=0\ .$$

Από το σχήμα φαίνεται ότι

$$\sigma\upsilon\nu\alpha=\frac{|MP|}{|NM|}\quad\Rightarrow\quad |NM|=\frac{|MP|}{\sigma\upsilon\nu\alpha}\ ,$$

όπου $\alpha$ η γωνία που σχηματίζει η ασύμπτωτη με τον άξονα των $x$.

Επειδή είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} |MP| = 0$ και $συνα\neq 0$ $\left(αφού\ α \neq \dfrac{\pi}{2}\right)$ συνεπάγεται ότι

$$\lim_{x\to+\infty} |NM| = 0 \ .$$

Αλλά είναι

$$|NM| = |KM - KN| = |f(x) - (\lambda x + \mu)|,$$

οπότε προκύπτει

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - \lambda x - \mu] = 0 . \qquad (1)$$

Αντίστροφα, όταν ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty} |NM| = 0$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} |MP| = 0$ και η $y=\lambda x+\mu$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της καμπύλης $y=f(x)$.

Όταν η $y=\lambda x+\mu$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της $f$, τότε από τη σχέση (1) παίρνουμε

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{[f(x) - \lambda x - \mu]}{x} = 0 \ .$$

Αυτό το όριο ισχύει μόνον αν

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - \lambda - \frac{\mu}{x}\right) = 0 \ .$$

δηλαδή αν ισχύει

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} . \qquad (2)$$

Όταν το όριο (2) υπάρχει τότε το $\mu$ είναι:

$$\mu = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - \lambda x) \qquad (3)$$

*Αν ένα από τα όρια (2) ή (3) δεν υπάρχει, τότε η καμπύλη $y=f(x)$ δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη.*

Όταν και τα δύο όρια (2) και (3) υπάρχουν η ευθεία

$$y = \lambda x + \mu \ , \quad x \in \mathbb{R}$$

είναι πλάγια ασύμπτωτη της καμπύλης $y=f(x)$.

Σημειώνουμε ότι η ύπαρξη μόνον του ορίου $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lambda$ δεν εξασφαλίζει την ύπαρξη πλάγιας ασύμπτωτης της καμπύλης $y=f(x)$.

Π.χ. η συνάρτηση $f(x)=x+\sigma\upsilon\nu^2 x, x\in\mathbb{R}$ έχει το όριο

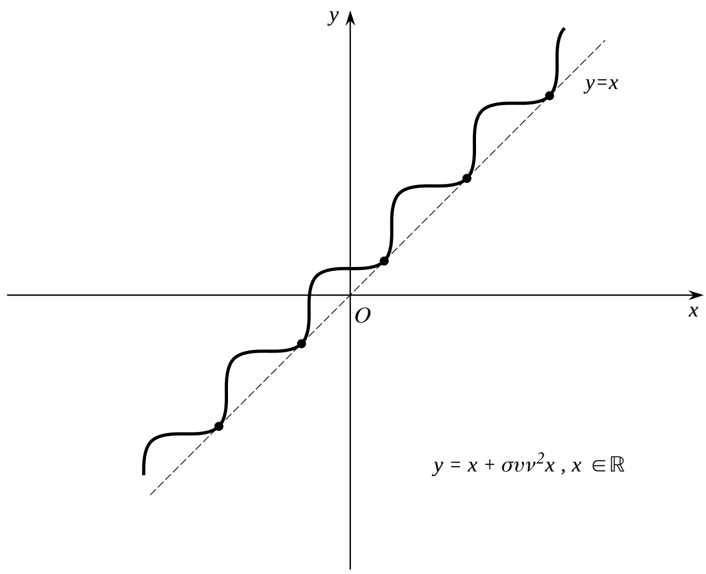
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sigma\upsilon\nu^2 x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left[1+\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2x}{2x}\right]=1+\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x}+\lim_{x\to+\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{2x}=1\ ,$$

αλλά το όριο

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-\lambda x]=\lim_{x\to+\infty}\sigma\upsilon\nu^2 x$$

δεν υπάρχει.

Άρα δεν υπάρχει πλάγια ασύμπτωτη της καμπύλης $y=x+\sigma\upsilon\nu^2 x, x\in\mathbb{R}$.




Η συνάρτηση $y=x+\sigma\upsilon\nu^2 x, x\in\mathbb{R}$ είναι γνήσια αύξουσα και έχει κοινά σημεία με τη διχοτόμο $y=x$ στα σημεία $x_n=(2k+1)\dfrac{\pi}{2}, k=0, 1, 2, \ldots$

Η παραγωγός της $y'$ είναι $y'=1+\eta\mu 2x>0$

για κάθε $\quad x\neq k\pi+\dfrac{3\pi}{4}\quad$ και $\quad y'\left(k\pi+\dfrac{3\pi}{4}\right)=0.$

## Παραδείγματα

**1** Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της καμπύλης

$$y=\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}\ ,\ \ x^2>1\ .$$

➡ Από τη σχέση $x^2=1$ παίρνουμε τις κάθετες ασύμπτωτες

$$x=-1 \quad \text{και} \quad x=1 \;,$$

επειδή ισχύει $\lim\limits_{x\to -1^-} y=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to 1^+} y=+\infty$.

Αναζητούμε πλάγιες ασύμπτωτες.

Για $x\to+\infty$ παίρνουμε

$$\lambda_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x\sqrt{x^2-1}}=1 \;,$$

$$\mu_1=\lim_{x\to+\infty}(y-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}=0 \;,$$

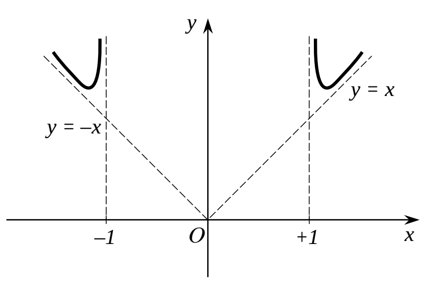
οπότε η $y=x$ είναι μία πλάγια ασύμπτωτη της καμπύλης.

Ανάλογα, για $x\to-\infty$, παίρνουμε

$$\lambda_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x\sqrt{x^2-1}}=-1 \;,$$

$$\mu_2=\lim_{x\to-\infty}(y+x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}=0 \;,$$

οπότε η $y=-x$ είναι μία ακόμη πλάγια ασύμπτωτη της καμπύλης.



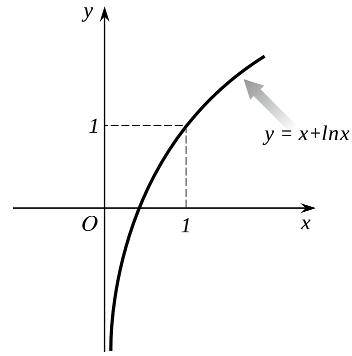

**2** Η καμπύλη $y=x+lnx$, $x>0$, έχει κάθετη ασύμπτωτη στο $x=0$, επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+} y=+\infty$.

Η καμπύλη δεν έχει πλάγιες ασύμπτωτες.

➡ Πράγματι έχουμε

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{lnx}{x}\right)$$

$$= 1 + \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1 \ ,$$



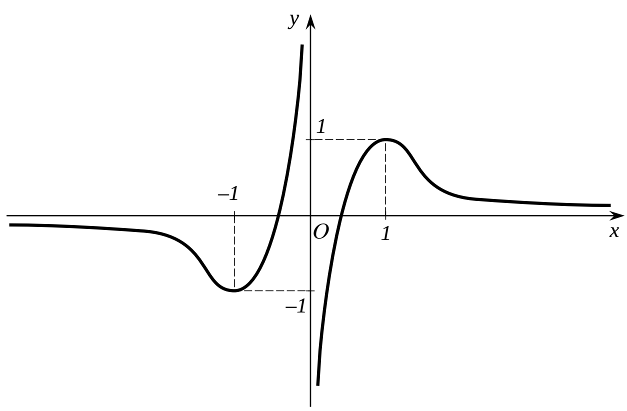

αλλά είναι

$$\mu = \lim_{x\to+\infty} (f(x)-\lambda x) = \lim_{x\to+\infty} (y-x)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} lnx = +\infty \ .$$

**3** Εξετάστε την ύπαρξη ασυμπτώτων της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^3} \ , \ x\neq 0 \ .$$




➡ Όταν το $|x|\to+\infty$ οι τιμές της $f(x)$ τείνουν στο μηδέν, οπότε έχουμε την οριζόντια ασύμπτωτη $y=0$.

Γράφουμε την $f(x) = \frac{1}{x}\left(2 - \frac{1}{x^2}\right)$ και βλέπουμε ότι, όταν $x\to 0^-$ οι τιμές $f(x)\to-\infty$ και όταν $x\to 0^+$ οι τιμές $f(x)\to+\infty$.

Άρα, ο άξονας των $y$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της καμπύλης $y=f(x)$.

**4** Έστω $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, όπου

$$P(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \ldots + \alpha_0 \quad , \quad Q(x) = \beta_{n-1}x^{n-1} + \ldots + \beta_0 \ ,$$

με συντελεστές $\alpha_n \neq 0, \alpha_i\, \beta_i \neq 0, i=0, \ldots , n-1$. Δείξτε ότι η $f$ έχει την πλάγια ασύμπτωτη $y=\lambda x+\mu$, με $\lambda = \dfrac{\alpha_n}{\beta_{n-1}}$ και είναι $\mu=0$ όταν $\alpha_{n-1}\beta_{n-1}=\alpha_n\beta_{n-2}$.

➡ Έχουμε

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{P(x)}{xQ(x)} = \frac{\alpha_n x^n + \ldots}{\beta_{n-1}x^n + \ldots}$$

και
$$\frac{f(x)}{x} \to \frac{\alpha_n}{\beta_{n-1}} = \lambda, \quad \text{όταν} \ x \to +\infty \quad \text{ή} \ -\infty \ .$$

Ακόμη είναι

$$f(x) - \lambda x = \frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{\alpha_n x}{\beta_{n-1}} = \frac{(\alpha_{n-1}\beta_{n-1} - \alpha_n \beta_{n-2})x^{n-1} + \ldots}{\beta_{n-1}(\beta_{n-1}x^{n-1} + \ldots)}$$

και $\dfrac{f(x)}{x} - \lambda x \ \to \ \dfrac{\alpha_{n+1}\beta_{n-1} - \alpha_n\beta_{n-2}}{(\beta_{n-1})^2} = \mu$, όταν $x \to +\infty$ ή $-\infty$ .

Προφανώς, είναι $\mu=0$ όταν $\alpha_{n-1}\beta_{n-1} = \alpha_n\beta_{n-2}$ .

**5** Να μελετηθεί και να σχεδιασθεί η καμπύλη της συνάρτησης

$$y = f(x) = e^{\frac{1}{x}} + |x| \ , \ x \neq 0 \ .$$

➡ Η συνάρτηση γράφεται

$$y = f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} + x, & \text{αν } x>0, \\ e^{\frac{1}{x}} - x, & \text{αν } x<0, \end{cases}$$

και έχει τις παραγώγους

$$y' = f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} + 1, & \text{αν } x>0 \\ -\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} - 1, & \text{αν } x<0 \end{cases} \quad \text{και} \quad y'' = f''(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}} + 2xe^{\frac{1}{x}}}{x^4} \ , \ x \neq 0 \ .$$

Η δεύτερη παράγωγος $f''(x)=0$ μηδενίζεται μόνον για $x=-\dfrac{1}{2}$ και είναι $f''(x)>0$, για $x>-\dfrac{1}{2}$ και $f''(x)<0$ για $x<-\dfrac{1}{2}$ (πάντοτε $x\neq 0$) λόγω του θεωρήματος του *Darboux* για την παράγωγο συνάρτηση $f'(x)$, $x\neq 0$, (αφού $f''(-1)<0$ και $f''(1)>0$) *(Κεφ. 8, §1)*.

Άρα, η $f'(x)$ είναι γνήσια αύξουσα στα διαστήματα

$$\left(-\frac{1}{2},\,0\right) \text{ και } (0,\,+\infty)$$

Επειδή η $f'(x)$ είναι συνεχής και ισχύουν

$$f'(1)=-e+1<0\ ,\quad f'(2)=-\frac{\sqrt{e}}{4}+1>0$$

προκύπτει ότι η $f'(x)$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα $\xi$ στο διάστημα $(1,\,2)$, η οποία είναι μοναδική λόγω της γνήσιας μονοτονίας της συνάρτησης $f'(x)$ στο διάστημα $(0,\,+\infty)$ $\left(\text{η } f''(x)=0 \text{ ισχύει μόνον για } x=-\dfrac{1}{2}\right)$.

Για $x<0$ προφανώς ισχύει $y'=f'(x)<0$, οπότε η $f(x)$ είναι γνήσια φθίνουσα στο $(-\infty,\,0)$.

Έχουμε τα όρια

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty\ ,\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=0\ ,\quad \lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty\ .$$

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $0$ | | $1$ | $\xi$ | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | | | ‖ | $-$ | | $0$ | | $+$ |
| $y''$ | | $-$ | $0$ | $+$ | ‖ | | | $+$ | | |
| $y$ | $+\infty$ | $\searrow$ | ⋮ | $\searrow$ $0$ | ‖ $+\infty$ | $\searrow$ | | $f(\xi)$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |
| | | | *σημείο καμπής* | | | | | *ελάχιστο* | | |

## ***Ασύμπτωτες***

Δεν υπάρχει οριζόντια ασύμπτωτη.

Επειδή $\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ η $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Είναι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}+1\right)=1$$

και
$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-1x]=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}}=1\ ,$$

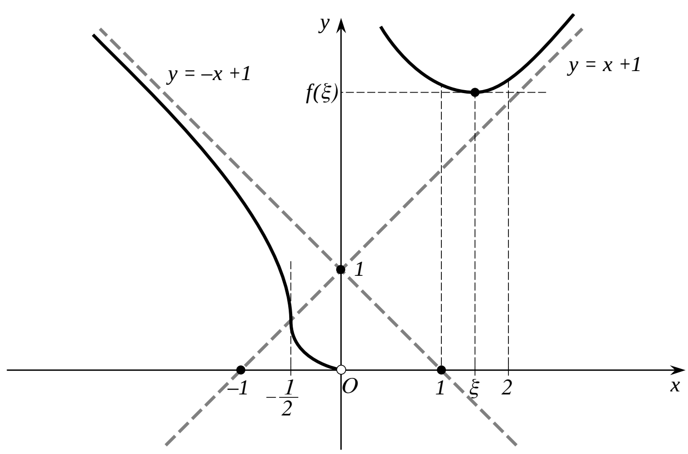
οπότε έχουμε, για $x\to+\infty$, την πλάγια ασύμπτωτη $y=x+1$.

Ακόμη, είναι
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}-1\right)=-1$$

και

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(-1)x]=\lim_{x\to-\infty}e^{\frac{1}{x}}=1\ ,$$

οπότε έχουμε, για $x\to-\infty$, την πλάγια ασύμπτωτη $y=-x+1$.




Η καμπύλη $f(x) = e^{\frac{1}{x}}+|x|,\ x\neq 0.$

## 4. Σχεδίαση καμπύλης

Για τη σχεδίαση μιας καμπύλης $y=f(x)$ πρέπει να λαμβάνουμε υπόψη τα παρακάτω στοιχεία:

1) το σύνολο ορισμού της συνάρτησης $f(x)$,
2) τη συνέχεια της συνάρτησης, βρίσκοντας συγχρόνως τα σημεία ασυνέχειά της,
3) την περιοδικότητα (αν υπάρχει),