ΘΩΜΑ ΚΥΒΕΝΤΙΔΗ

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΜΙΑΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

ΤΕΥΧΟΣ ΠΡΩΤΟ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

Κάθε γνήσιο αντίτυπο φέρει τη σφραγίδα του εκδότη

ΘΩΜΑΣ Α. ΚΥΒΕΝΤΙΔΗΣ

- Γεννήθηκε το 1947 στο Νέο Πετρίτσι του Ν. Σερρών.
- Το 1965 αποφοίτησε από το εξατάξιο Γυμνάσιο Σιδηροκάστρου του Ν. Σερρών και εγγράφηκε στο Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης.
- Πήρε το πτυχίο των Μαθηματικών το 1969.
- Αναγορεύτηκε διδάκτορας στο Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης το 1979 και από το 1972 μέχρι σήμερα εργάζεται σ' αυτό.

ISBN set 960-431-694-X
ISBN Τ.1 960-431-692-3

www.ziti.gr

Φωτοστοιχειοθεσία Εκτύπωση

Π. ΖΗΤΗ & Σια ΟΕ
18ο χλμ Θεσ/νίκης-Περαίας
Τ.Θ. 4171 • Περαία Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19
Τηλ.: 23920 72222 (10 γραμ.) - Fax: 23920 72229
e-mail: info@ziti.gr

Βιβλιοπωλείο

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
Αρμενοπούλου 27 • 546 35 Θεσσαλονίκη
Τηλ. 2310 203720, Fax 2310 211305
e-mail: sales@ziti.gr

«Τὸ φρικωδέστατον οὖν τῶν κακῶν ὁ θάνατος οὐθὲν πρὸς ἡμᾶς, ἐπειδήπερ ὅταν μὲν ἡμεὶς ὦμεν, ὁ θάνατος οὐ παρέστιν, ὅταν δὲ ὁ θάνατος παρῇ, τὸθ' ἡμεῖς οὐκ ἐσμὲν»

[*Το φριχτότατο λοιπόν αυτό κακό, ο θάνατος, δεν πρέπει να μας σκοτίζει, γιατί όσο εμείς υπάρχουμε, ο θάνατος δεν υπάρχει, κι άμα έρθει ο θάνατος εμείς δεν υπάρχουμε.*]

ΕΠΙΚΟΥΡΟΣ (341-270 π.Χ)

Γιος του Νεοκλέους και της Χαιρεστράτης, γεννήθηκε στη Σάμο το 341 π.Χ., αλλά οι γονείς του ήταν Αθηναίοι που εστάλησαν ως κληρούχοι στη Σάμο λόγω της φτώχειας τους. Το γένος τους ήταν από την αρχοντική οικογένεια των Φιλαϊδών. Το 306 π.Χ. πήγε στην Αθήνα και ίδρυσε την Επικούρειο Σχολή. Ο Επίκουρος δίδασκε ως σκοπό της ζωής την ηδονή με την έννοια να μην υποφέρει το σώμα και να μη ταράζεται η ψυχή.

Τη φύση δεν πρέπει να τη βιάζουμε παρά να την υπακούουμε.

Πίστευε ότι ο άνθρωπος έχει μέσα του την ευτυχία, τη μακαριότητα, φτάνει να παραμερίσει όσα τον ενοχλούν και του κάνουν κόλαση τη ζωή. Έτσι στην ουδέτερη κατάσταση της «αταραξίας» η ευτυχία αναβλύζει από μέσα του και γεμίζει το είναι του.

Ο Επίκουρος δέχεται απερίφραστα την ύπαρξη των θεών *«θεοὶ μὲν γὰρ εἰσὶν· ἐναργὴς γὰρ αὐτῶν ἐστίν ἡ γνῶσις»,* αλλά οι θεοί δεν φροντίζουν για τον κόσμο ούτε ανακατώνονται στις υποθέσεις των ανθρώπων.

Απέρριπτε τα μαθηματικά της εποχής του γιατί θεωρούσε πως οδηγούσαν στην ύπαρξη ιδεωδών αντικειμένων *«ὡς τῶν μαθημάτων μηδὲν συνεργούντων πρὸς σοφίας τελείωσιν».*

Το φιλοσοφικό σύστημα του Επίκουρου διαιρείται σε τρία μέρη το κανονικό, το φυσικό και το ηθικό του, και έχει σκοπό να συμβάλλει στην ευδαιμονία της ζωής και ν' απαλλάξει τους ανθρώπους απο τις μεταφυσικές ανησυχίες.

Το πλούσιο γραπτό έργο του Επίκουρου χάθηκε. Ο Διογένης Λαέρτιος (3ος μ.Χ. αι.) γράφοντας μια ιστορία της φιλοσοφίας περιέλαβε στο κεφάλαιο της επικουρικής φιλοσοφίας μέρος των γραπτών του Επίκουρου.

Αυτό το βιβλίο αφιερώνεται
σ’ όλους εκείνους τους ανθρώπους,
που διατηρούν την *αξιοπρέπειά* τους
και με *θέληση*, *μέθοδο*, *υπομονή*
και *επιμονή*, δημιουργούν έναν
καλύτερο κόσμο.

Πρόλογος

Ο Διαφορικός Λογισμός συναρτήσεων μιας πραγματικής μεταβλητής περιέχει τις βασικές έννοιες και ιδιότητες των πραγματικών συναρτήσεων.

Το βιβλίο αυτό είναι εισαγωγικό, και σαν τέτοιο δεν περιέχει ιδιαίτερα μεγάλες δυσκολίες, χωρίς βέβαια να θυσιάζεται η μαθηματική αυστηρότητα.

Επειδή όμως ο Διαφορικός Λογισμός θεωρείται δυσνόητος, γι' αυτούς που έρχονται σε πρώτη επαφή μαζί του, παραθέτουμε λεπτομερή ανάλυση των εννοιών του.

Η εισαγωγή περιγράφει την αλγεβρική δομή των πραγματικών αριθμών και την τοπολογική δομή τους, γι' αυτό ο αναγνώστης πρέπει να την προσέξει ιδιαίτερα. Η εισαγωγή είναι το αλφάβητο του Διαφορικού Λογισμού και ειδικά οι παράγραφοί της §1, §3, §5.

Το πρώτο κεφάλαιο αναφέρεται στις ακολουθίες και το δεύτερο στις σειρές πραγματικών αριθμών, ενώ το τρίτο κεφάλαιο αναφέρεται στις ακολουθίες και σειρές συναρτήσεων.

Το τέταρτο κεφάλαιο αναφέρεται στο όριο συνάρτησης και το πέμπτο στη συνέχεια συνάρτησης και ο αναγνώστης πρέπει να κατανοήσει πλήρως την έννοια του ορίου, πάνω στην οποία κυρίως θεμελιώνεται ο Διαφορικός Λογισμός.

Το έκτο και έβδομο κεφάλαιο αναφέρονται στις παραγώγους και τις στοιχειώδεις συναρτήσεις, αντίστοιχα, ενώ το όγδοο κεφάλαιο αναπτύσσει τα βασικά θεωρήματα του Διαφορικού Λογισμού (Rolle, Μέσης Τιμής, Κανόνας του l' Hospital, Τύπος του Taylor - Σειρές του Taylor).

Τέλος, στο ένατο κεφάλαιο γίνεται η μελέτη και η γραφική παράσταση συνάρτησης με καρτεσιανές συντεταγμένες, με παραμετρική μορφή και με πολική μορφή, στο δέκατο κεφάλαιο περιέχονται λυμένα προβλήματα και στο παράρτημα αναφέρονται οι διανυσματικές συναρτήσεις και στοιχεία της θεωρίας καμπύλων.

Σημειώνουμε ότι οι κατηγορίες των συνεχών, παραγωγίσιμων και των συνεχών ολοκληρώσιμων συναρτήσεων είναι μάλλον η εξαίρεση κι όχι ο κανόνας μέσα στο σύνολο των πραγματικών συναρτήσεων, γι' αυτό είναι σημαντικό να γνωρίζει κανείς την αυστηρή θεμελίωση των εννοιών της Μαθηματικής Ανάλυσης.

Ελπίζω το βιβλίο αυτό να βοηθήσει όλους όσους προσπαθούν να κατανοήσουν αυτές τις βασικές έννοιες του Διαφορικού Λογισμού.

Θεσσαλονίκη, 2000 Θ. ΚΥΒΕΝΤΙΔΗΣ

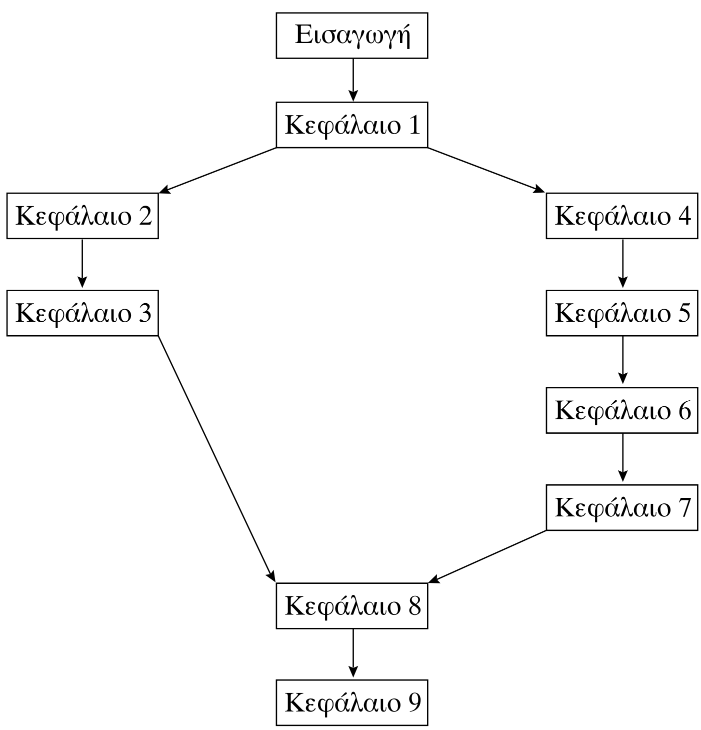
Βασική ύλη

Στον αναγνώστη που θέλει να κάνει μια επιλογή της *βασικής ύλης* του Διαφορικού Λογισμού συναρτήσεων μιας πραγματικής μεταβλητής προτείνουμε την παρακάτω ύλη:

- Εισαγωγή (πλην §4),
- Κεφ. 1, Κεφ. 2 (πλην §4.1, §5. §8),
- Κεφ. 4, Κεφ. 5, Κεφ. 6 (πλην §7),
- Κεφ. 7 (πλην §4), Κεφ. 8, Κεφ. 9 (πλην §8).

Βέβαια, ο αναγνώστης, ανάλογα με το τι θέλει να μάθει, μπορεί ν' αυξήσει ή να ελαττώσει αυτήν τη βασική ύλη.

Σύνδεση των Κεφαλαίων



Περιεχόμενα

Τεύχος Πρωτο

Εισαγωγή

Κεφάλαιο 1
Ακολουθίες πραγματικών αριθμών

Κεφάλαιο 2
Σειρές πραγματικών αριθμών

Κεφάλαιο 3
Ακολουθίες και σειρές συναρτήσεων

Κεφάλαιο 4
Όριο συνάρτησης

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Συνέχεια συνάρτησης

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Παράγωγος συνάρτησης

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Στοιχειώδεις συναρτήσεις

Κεφάλαιο 8

- **Βασικά θεωρήματα του Διαφορικού Λογισμού**
- **Κανόνας του L'Hospital**
- **Σειρές του Taylor**

Απαντησεις των Ασκησεων

Τεύχος Δεύτερο

Κεφάλαιο 9

Μελέτη και γραφική παράσταση συνάρτησης

Κεφάλαιο 10

Παραρτημα

I. Διανυσματικές συναρτήσεις

II. Στοιχεία της θεωρίας καμπύλων

Απαντησεις των Ασκησεων

Βιβλία του συγγραφέα Θωμα Κυβεντιδη

1. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ, Τόμος Πρώτος, (σελ. 480, 1987).
1a. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ, (σελ. 436, 2004).
2. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ, Τόμος Δεύτερος, (σελ. 400, 1988).
3. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ, Τόμος Τρίτος, (σελ. 478, 1991).
4. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ (Ασκήσεις), (σελ. 560, 1998).
5. ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΠΛΗΘΥΣΜΩΝ (Συνεχή Μοντέλα), (σελ. 128, 1993).
6. ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΠΛΗΘΥΣΜΩΝ (Διακριτά Μοντέλα), (σελ. 164, 2001).
7. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΚΑΙ ΔΙΑΚΡΙΤΆ ΣΥΣΤΉΜΑΤΑ, (σελ. 538, 2001).
8. ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ, (σελ. 320, 1994).
9. ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ (Ασκήσεις), (σελ. 400, 1977).
10. ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ (Συναρτήσεων Μιας Πραγματικής Μεταβλητής), (Δύο Τεύχη: Α, σελ. 640, 2001 – Β, σελ. 312, 2001).
11. ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Συναρτήσεων Μιας Πραγματικής Μεταβλητής, (σελ. 624, 2005).
12. ΑΝΩΤΕΡΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (Τόμος Πρώτος, σελ. 624, Τόμος Δεύτερος, σελ. 616, Τόμος Τρίτος, σελ. 504, 2006)

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Εισαγωγή

Εισαγωγή στους πραγματικούς αριθμούς

Το σύνολο των πραγματικών αριθμών, που το συμβολίζουμε με το γράμμα $\mathbb{R}$, έχει τις παρακάτω αλγεβρικές δομές:

Οι πραγματικοί αριθμοί μαζί με την πράξη της πρόσθεσης $(\mathbb{R}, +)$ αποτελούν *αντιμεταθετική ομάδα (Αβελιανή ομάδα),* δηλαδή ικανοποιούν τα αξιώματα:

A_1: $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ τότε $\alpha+\beta \in \mathbb{R}$,

A_2: $(\alpha+\beta)+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma)$ (προσεταιριστική ιδιότητα),

A_3: $0+\alpha = \alpha$, το 0 λέγεται *ουδέτερο στοιχείο*,

A_4: $-\alpha+\alpha = 0$, το $-\alpha$ λέγεται *αντίθετο στοιχείο*,

A_5: $\alpha+\beta = \beta+\alpha$ (αντιμεταθετική ιδιότητα).

Οι πραγματικοί αριθμοί, μαζί με τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ αποτελούν *σώμα,* δηλαδή ικανοποιούν τα αξιώματα:

I. Το $(\mathbb{R}, +)$ αποτελεί μια αντιμεταθετική ομάδα.

II. Το $(\mathbb{R} - \{0\}\ , \cdot)$ αποτελεί μια αντιμεταθετική ομάδα ως προς τον πολλαπλασιασμό, δηλαδή ικανοποιεί τα αξιώματα:

B_1: $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$ τότε $\alpha \cdot \beta \in \mathbb{R}$,

B_2: $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$, (προσεταιριστική ιδιότητα),

B_3: $1 \cdot \alpha = \alpha$, το 1 λέγεται *ουδέτερο στοιχείο,*

B_4: $\alpha^{-1} \cdot \alpha = 1$, $\alpha \neq 0$, α^{-1} λέγεται *αντίστροφο στοιχείο*,

B_5: $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$ (αντιμεταθετική ιδιότητα).

III. Ο πολλαπλασιασμός είναι επιμεριστικός ως προς την πρόσθεση

$$\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta+\alpha\gamma.$$

Σημειώσεις 1

1. Το μηδέν έχει την σπουδαία ιδιότητα

$$\alpha \cdot 0 = 0 \ , \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Η σχέση αυτή δείχνει ότι το μηδέν δεν έχει αντίστροφο, γι' αυτό και το εξαιρέσαμε από την πολλαπλασιαστική ομάδα.

Ακόμη, *διαίρεση δια του μηδενός είναι αδύνατη,* γιατί δεν υπάρχει στοιχείο x που να ικανοποιεί τη σχέση $x \cdot 0=\alpha$, με $\alpha \neq 0$.

Βέβαια, αν είναι $\alpha=0$ τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $x \cdot 0=0$.

2. Προφανώς, είναι $\alpha+(-\beta) = \alpha-\beta$ (αφαίρεση) και $\dfrac{\alpha}{\beta} = \alpha\beta^{-1}$ (διαίρεση), δηλαδή οι πράξεις της αφαίρεσης και της διαίρεσης εκφράζονται από τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού, που ορίσαμε πιο πάνω. ■

Οι πραγματικοί αριθμοί $\mathbb{R}$ έχουν *διάταξη:*

α) Αν είναι $\alpha \neq \beta$ τότε $\alpha<\beta$ ή $\beta>\alpha$

β) Αν είναι $\alpha<\beta$ και $\beta<\gamma$ τότε $\alpha<\gamma$ (μεταβατική ιδιότητα).

Επομένως, οι πραγματικοί αριθμοί $\mathbb{R}$ με τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού $(\mathbb{R}, +\ \cdot)$ αποτελούν ένα *διατεταγμένο σώμα.*

Παρακάτω (§3) θα δούμε ότι οι πραγματικοί αριθμοί $\mathbb{R}$ επιπλέον έχουν: *το αξίωμα του συνεχούς* και *την αρχιμήδεια ιδιότητα.*

Δύναμη πραγματικού αριθμού

Για τη θεωρητική θεμελίωση της ύπαρξης της δύναμης πραγματικού αριθμού βλέπε το Κεφ. 2 του Ε. ΠΟΥΛΕΑ [8] και του Β. ΣΤΑΪΚΟΥ [10].

Αν $\alpha \neq 0$ πραγματικός αριθμός και $n \in \mathbb{N}$ φυσικός αριθμός τότε έχουμε:

i) $\alpha^n=\alpha \cdot \alpha \ldots \alpha$ (γινόμενο n παραγόντων ίσων με α), $\alpha^{-n} = \dfrac{1}{\alpha^n}$,
και αποδεικνύεται ότι, για $\alpha>0$, ισχύουν

ii) υπάρχουν $\alpha_1>0, \alpha_2>0$ τέτοια ώστε $\alpha_1^n < \alpha < \alpha_2^n$,
με $\alpha_2^n - \alpha_1^n < \varepsilon$, $\varepsilon>0$ οσονδήποτε μικρός,

iii) υπάρχει μοναδικός θετικός πραγματικός αριθμός $s>0$ τέτοιος ώστε $s^n=\alpha$ και γράφουμε $s=\sqrt[n]{\alpha}$ που λέγεται η *n-τάξης θετική ρίζα* του $\alpha>0$.

Ακόμη, αντί για n φυσικό αριθμό, μπορούμε να θεωρήσουμε $\varrho=\dfrac{p}{q}$, p, $q \in \mathbb{N}$, *θετικό* ρητό αριθμό, οπότε έχουμε

$$\alpha>0\ , \quad \alpha^{\varrho} = \alpha^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\alpha^p} = (\sqrt[q]{\alpha})^p\ , \quad \alpha^0=1,$$

που είναι η ρητή δύναμη θετικού πραγματικού αριθμού.

Σημειώνουμε ότι *οι περιττές* ρίζες αρνητικών αριθμών ορίζονται και υπάρχουν, όπως οι ακέραιες ρίζες θετικών αριθμών.

Π.χ. είναι $\sqrt[3]{-1} = -1$, επειδή $(-1)^3=-1$.

Τα πράγματα όμως αλλάζουν αν πάμε να ορίσουμε τη δύναμη αρνητικών αριθμών με ρητό εκθέτη.

Π.χ. $-1=\sqrt[3]{-1}=(-1)^{\frac{1}{3}}=(-1)^{\frac{2}{6}}=\sqrt[6]{(-1)^2}=1$, άτοπο.

Γι' αυτόν το λόγο στη μαθηματική ανάλυση μη ακέραιες δυνάμεις ορίζονται, γενικά, μόνον για θετικούς πραγματικούς αριθμούς.

(Βλέπε παρακάτω τη σημείωση 2).

Ακόμη, πρέπει να γράφουμε

$$\sqrt[2k]{\frac{p}{q}}=\frac{\sqrt[2k]{|p|}}{\sqrt[2k]{|q|}}\ ,\ \text{όπου } p,\ q\in\mathbb{Z} \text{ ακέραιοι αριθμοί, } pq>0.$$

Τέλος, η δύναμη σε αρνητικό εκθέτη ορίζεται από τη σχέση

$$\alpha^{-\varrho}=\frac{1}{\alpha^{\varrho}}\ ,\ \alpha\neq 0$$

όπου ϱ θετικός ρητός αριθμός.

Πώς πρέπει να εννοούμε τη δύναμη, α^t, όπου $\alpha>0$ και t άρρητος αριθμός;

Θεωρούμε μια ακολουθία ϱ_n ρητών αριθμών, $n\in\mathbb{N}$, η οποία συγκλίνει στο t (βλέπε §1 και το Κεφ. 1), οπότε ορίζεται η δύναμη α^t ως το όριο της ακολουθίας $(\alpha^{\varrho_n}),\ n\in\mathbb{N}$ (Κεφ. 5, §6).

Ισχύουν οι σχέσεις $\alpha^{t_1}\cdot\alpha^{t_2}=\alpha^{t_1+t_2}$,

$$(\alpha^{t_1})^{t_2}=\alpha^{t_1\cdot t_2},\ t_1, t_2\in\mathbb{R}$$

και οι σχέσεις

$$0^t=0\ ,\ t>0 \quad \text{και} \quad 1^t=1\ ,\ t\in\mathbb{R}.$$

Σημείωση 2

Αν ϱ είναι ρητός πραγματικός αριθμός, τότε μπορεί να βρεθεί μόνον ένα διατεταγμένο ζεύγος (p, q), όπου $p\in\mathbb{Z}$ ακέραιος αριθμός και $q\in\mathbb{N}$ φυσικός αριθμός, τέτοιο ώστε $\varrho=\frac{p}{q}$ και ο q να μην διαιρεί το p, δηλαδή το κλάσμα $\frac{p}{q}$ να είναι ανάγωγο.

Άρα, για $\alpha>0$ και $\forall\ q\in\mathbb{N}$ ή $\alpha<0$ και $q\in\mathbb{N}$ περιττό, μπορούμε να ορίσουμε

$$\alpha^{\varrho}=\alpha^{\frac{p}{q}}=(\alpha^p)^{\frac{1}{q}}=\sqrt[q]{\alpha^p}$$

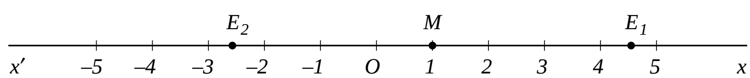
και ο αριθμός α^{ϱ} λέγεται *δύναμη με βάση το* α *και εκθέτη το* ϱ (όπου βέβαια η q ρίζα του α^p ορίζεται).

Π.χ. το $(-1)^{\frac{1}{2}}$ δεν ορίζεται, ενώ το $(-1)^{\frac{1}{3}}$ ορίζεται.

1. Πραγματικοί αριθμοί

Αρχικά θα απεικονίσουμε τους πραγματικούς αριθμούς πάνω σε μία ευθεία γραμμή $x'x$.

Θεωρούμε δύο διαφορετικά σημεία O και M, το M δεξιά του O, πάνω σε μία ευθεία $x'x$.



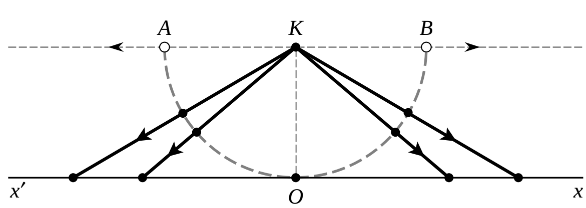
Στο O αντιστοιχούμε το μηδέν και στο M τη μονάδα, έτσι σε κάθε σημείο της ευθείας $x'x$ αντιστοιχούμε την απόστασή του από το O (δηλ. την απόλυτη τιμή του), δεξιά του O με πρόσημο $+$ και αριστερά του O με πρόσημο $-$.

Π.χ. το σημείο E_1 (δεξιά του O) αντιστοιχεί στο 4,5 και
το σημείο E_2 (αριστερά του O) αντιστοιχεί στο $-2{,}5$.

Η ευθεία $x'x$ λέγεται *ευθεία* ή *άξονας των πραγματικών αριθμών* ή *πραγματική ευθεία.*

Σχόλιο

Αν προβάλουμε τα σημεία της πραγματικής ευθείας $x'Ox$ πάνω στα σημεία μιας ημιπεριφέρειας κύκλου, όπως φαίνεται στο σχήμα, βλέπουμε ότι το επ' άπειρο σημείο $+\infty$ αντιστοιχεί στο σημείο B και το επ' άπειρο σημείο $-\infty$ αντιστοιχεί στο σημείο A, ενώ οι υπόλοιποι πραγματικοί αριθμοί $\mathbb{R}$ αντιστοιχούν στα σημεία της ημιπεριφέρειας AOB.



Φυσικοί αριθμοί

Το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$ είναι οι αριθμοί *1, 2, 3, ...*

Το άθροισμα και το γινόμενο δύο φυσικών αριθμών είναι πάντοτε φυσικός αριθμός (δεν ισχύει το ίδιο για την αφαίρεση και τη διαίρεση των φυσικών αριθμών).

Ακέραιοι αριθμοί

Αν στους φυσικούς αριθμούς $\mathbb{N}$ επισυνάψουμε το μηδέν 0 και τους αντίθετούς τους, παίρνουμε το *σύνολο* $\mathbb{Z}$ *των ακεραίων αριθμών* $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

Το άθροισμα, η αφαίρεση και το γινόμενο δύο ακεραίων είναι πάντοτε ακέραιος αριθμός (δεν ισχύει το ίδιο για τη διαίρεση των ακέραιων αριθμών).

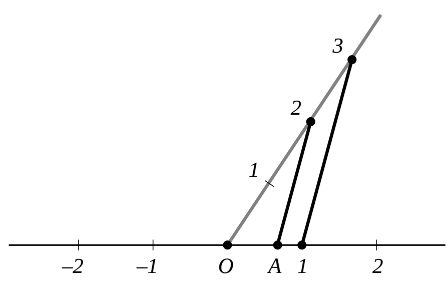
Ρητοί αριθμοί

Αν στους ακεραίους επισυνάψουμε και όλα τα κλάσματα της μορφής $\frac{p}{q}$, όπου p, q ακέραιοι αριθμοί $(q \neq 0)$ τότε παίρνουμε το *σύνολο* $\mathbb{Q}$ *των ρητών αριθμών.*

Εκτός του αθροίσματος, της αφαίρεσης και του γινομένου τώρα και το πηλίκο (σε αντίθεση με τους ακεραίους αριθμούς) δύο ρητών αριθμών $\frac{\alpha}{\beta}$, $\beta \neq 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ είναι πάντοτε ρητός αριθμός.

Απλές γεωμετρικές κατασκευές στο επίπεδο δίνουν τη γεωμετρική παράσταση των ρητών αριθμών πάνω στην πραγματική ευθεία.

Π.χ. στο σχήμα βλέπουμε την κατασκευή του ρητού αριθμού $\frac{2}{3}$ (σημείο A).



Επειδή ισχύει $\frac{p}{q} = \frac{-p}{-q}$, μπορούμε να γράψουμε κάθε ρητό αριθμό r σαν ένα κλάσμα με *θετικό παρονομαστή.*

Επομένως, ο ρητός αριθμός r λέγεται *θετικός* ή *αρνητικός* ανάλογα με το πρόσημο του αριθμητή.

Μπορούμε να εισάγουμε τους ρητούς αριθμούς στην πραγματική ευθεία π.χ. ο ρητός αριθμός $\frac{-5}{3}$ παριστάνεται από το σημείο που βρίσκεται στο $\frac{1}{3}$ της απόστασης από το O (αρχή) έως το -5.

1) *Οι ρητοί αριθμοί σχηματίζουν ένα διατεταγμένο σύνολο.*

Αν α, β είναι δύο άνισοι ρητοί αριθμοί τότε ο $\alpha-\beta$ ή $\beta-\alpha$ είναι θετικός αριθμός.

Διατάσσουμε τώρα τους ρητούς αριθμούς ορίζοντας τη *διάταξη* $<$ έτσι ώστε

$$\alpha<\beta\ ,\ \text{όταν}\ \beta-\alpha\ \text{είναι θετικός.}$$

Αν $\beta-\alpha$ και $\gamma-\beta$ είναι θετικοί, τότε

$$\gamma-\alpha = (\gamma-\beta)+(\beta-\alpha) \qquad \text{είναι θετικός.}$$

Επομένως, η διάταξη $<$ ικανοποιεί και τα δύο αξιώματα μιας διατεταγμένης σχέσης.

Άρα, αν $\alpha>0$ ισχύουν οι σχέσεις:

- αν $\alpha<\beta$, τότε $\alpha+x < \beta+x$,
- αν $\alpha<\beta$, $x>0$ τότε $\alpha x < \beta x$,
- αν $\alpha<\beta$, $x<0$ τότε $\alpha x > \beta x$.

2) *Οι ρητοί αριθμοί σχηματίζουν ένα πυκνό σύνολο.*

Πράγματι, δεν υπάρχει σημείο ρητού αριθμού επί της πραγματικής ευθείας το οποίο να έχει άμεσα προηγούμενο, γιατί μεταξύ δύο οποιονδήποτε ρητών σημείων α, β, όσο κοντά κι αν είναι, υπάρχει πάντοτε κάποιο άλλο και επομένως άπειρα σε πλήθος.
Πράγματι, το σημείο $\gamma = \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ είναι ρητός αριθμός και βρίσκεται ακριβώς στο μισό της απόστασης μεταξύ των ρητών αριθμών α και β, γιατί αν είναι $\alpha<\beta$, τότε $\gamma-\alpha=\beta-\gamma = \frac{1}{2}(\beta-\alpha)$.
Αλλά, η διαδικασία της διχοτόμησης μπορεί να συνεχιστεί χωρίς τελειωμό.

3) *Οι ρητοί αριθμοί σχηματίζουν ένα αριθμήσιμο σύνολο.*
Όλα τα θετικά κλάσματα $\frac{p}{q}$ μπορούν να ταξινομηθούν σε διαδοχικές ομάδες για τις οποίες ισχύει

$$p+q = 2\ ,\quad p+q = 3\ ,\quad p+q = 4, \ldots$$

Άρα έχουμε

$$\begin{array}{cccccccccccccccccc}
\frac{1}{1}\bullet & \frac{1}{2}, & \frac{2}{1}\bullet & \frac{1}{3}, & \frac{2}{2}, & \frac{3}{1}\bullet & \frac{1}{4}, & \frac{2}{3}, & \frac{3}{2}, & \frac{4}{1}\bullet & \frac{1}{5}, & \frac{2}{4}, & \frac{3}{3}, & \frac{4}{2}, & \frac{5}{1}\bullet & \ldots \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & & & \updownarrow & \\
1 & 2 & 3 & 4 & & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & & & & 11 & \ldots
\end{array}$$

και, αν παραλείψουμε τις επαναλήψεις των κλασμάτων, προκύπτει μια ακολουθία στην οποία κάθε θετικό κλάσμα το συναντάμε ακριβώς μία φορά.

Επομένως, η ακολουθία των κλασμάτων αυτών μπορεί να τεθεί σε μια αμφιμονότιμη απεικόνιση με τους φυσικούς αριθμούς $\mathbb{N}$ (θετικούς ακεραίους), δηλαδή

$$r_n \in \mathbb{Q}\ ,\ r_n \leftrightarrow n\ ,\ n \in \mathbb{N}$$

με $$r_1 = 1\ ,\ r_2 = \frac{1}{2}\ ,\ r_3 = 2\ ,\dots,\ r_{10} = \frac{1}{5}\ ,\ r_{11} = 5\ ,\dots$$

όπου για κάθε n ορίζεται ακριβώς ένα r_n.

Όλους τους ρητούς αριθμούς (θετικούς, αρνητικούς και μηδέν) μπορούμε να τους γράψουμε

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & r_1 & -r_1 & r_2 & -r_2 & r_3 & -r_3 & \dots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \dots \end{array}$$

κι έτσι να τεθούν σε αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση με τους φυσικούς αριθμούς $\mathbb{N}$.

Κάθε σύνολο που μπορεί να τεθεί σε αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση με τους φυσικούς αριθμούς $\mathbb{N}$ λέγεται *αριθμήσιμο σύνολο.* ■

΄Ενα αριθμητικό κλάσμα είναι ρητός αριθμός αν και μόνον αν είναι περιοδικό π.χ.

$$\frac{1}{3} = 0{,}3\ ,\quad \frac{1}{7} = 0{,}14287.$$

΄Οταν το αριθμητικό κλάσμα δεν είναι περιοδικό λέγεται *άρρητος αριθμός* (βλέπε παρακάτω την §4).

Άρρητοι αριθμοί

Από την αρχαιότητα ανακαλύφθηκαν πραγματικοί αριθμοί οι οποίοι δεν είναι ρητοί. Π.χ. το μήκος της διαγωνίου ενός τετραγώνου με πλευρά 1 δεν είναι ρητός αριθμός.

Συμβολίζουμε με x το μήκος της διαγωνίου, τότε θα έχουμε (Πυθαγόρειο Θεώρημα) $x^2 = 1^2 + 1^2 = 2$.

΄Εστω ότι ο x είναι ρητός αριθμός $x = \frac{p}{q}$, $q \neq 0$, όπου $p, q \in \mathbb{Z}$.

Απλοποιώντας, αν χρειαστεί, στο κλάσμα $\frac{p}{q}$ μπορεί να θεωρηθεί ότι: «οι ακέραιοι αριθμοί p και q δεν είναι και οι δύο ζυγοί (άρτιοι) αριθμοί».

Θα έχουμε λοιπόν

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \quad \Rightarrow \quad p^2 = 2q^2$$

οπότε ο p^2, και άρα και ο p, είναι ζυγός (άρτιος) αριθμός.

Έστω $p=2p_1$, όπου p_1 κάποιος ακέραιος αριθμός.

Τότε θα έχουμε

$$2q^2=4p_1^2 \quad \Rightarrow \quad q^2=2p_1^2$$

οπότε ο q^2, και άρα q, είναι ζυγός (άρτιος) αριθμός.

Φτάσαμε σε άτοπο κι έτσι συμπεραίνουμε ότι ο $x=\sqrt{2}$ δεν είναι ρητός αριθμός. ■

Οι άρρητοι αριθμοί συμβολίζονται

$$\mathbb{R} - \mathbb{Q}$$

όπου $\mathbb{R}$ είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών (ρητών και άρρητων αριθμών).

Όπως κάναμε προηγουμένως στους ρητούς αριθμούς, ανάλογα μπορούμε να δείξουμε ότι:

1) *Οι άρρητοι αριθμοί σχηματίζουν ένα διατεταγμένο σύνολο.*
2) *Οι άρρητοι αριθμοί σχηματίζουν ένα πυκνό σύνολο.*
3) *Οι άρρητοι αριθμοί δεν σχηματίζουν ένα αριθμήσιμο σύνολο.*

Για το 3) βλέπε Π. ΞΕΝΙΚΑΚΗ [4], Κεφ. 1, §1.3, όπου αποδεικνύεται ότι οι πραγματικοί αριθμοί $\mathbb{R}$ δεν είναι αριθμήσιμο σύνολο, οπότε αν οι άρρητοι αριθμοί ήταν αριθμήσιμου πλήθους θα καταλήγαμε στο άτοπο ότι οι πραγματικοί αριθμοί $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ είναι αριθμήσιμου πλήθους.

Η παρακάτω πρόταση συνδέει «τη θεωρία με την πράξη»:

ΠΡΟΤΑΣΗ: *Κάθε άρρητος αριθμός α μπορεί να προσεγγισθεί μ' έναν ρητό αριθμό με όποιο σφάλμα θέλουμε.*

Απόδειξη

Ας προσεγγίσουμε τον άρρητο αριθμό α με σφάλμα μικρότερο του $\frac{1}{n}$, $n\in\mathbb{N}$. Όποιος κι αν είναι ο αριθμός α περιέχεται μεταξύ δύο διαδοχικών φυσικών αριθμών n_0 και n_0+1, δηλαδή $n_0<\alpha<n_0+1$.

Διαιρούμε το διάστημα $[n_0, n_0+1]$, σε n υποδιαστήματα

$$\left[n_0,\ n_0+\frac{1}{n}\right],\ \left[n_0+\frac{1}{n},\ n_0+\frac{2}{n}\right], \dots, \left[n_0+\frac{m}{n},\ n_0+\frac{m+1}{n}\right], \dots,$$

$$\left[n_0+\frac{n-1}{n},\ n_0+1\right]$$

οπότε ο άρρητος αριθμός α θ' ανήκει σ' ένα απ' αυτά τα υποδιαστήματα.

Δηλαδή, έχουμε

$$\alpha\in\left[n_0+\frac{m}{n},\ n_0+\frac{m+1}{n}\right] \quad\Rightarrow\quad n_0+\frac{m}{n}<\alpha<n_0+\frac{m+1}{n},$$

άρα καθένας από τους ρητούς αριθμούς

$$n_0+\frac{m}{n}\ ,\ \ n_0+\frac{m+1}{n}$$

προσεγγίζει τον άρρητο αριθμό α με σφάλμα μικρότερο του $\frac{1}{n}$.

Ο ρητός αριθμός $n_0+\frac{m}{n}$ είναι ο μικρότερος του α και ο $n_0+\frac{m+1}{n}$ ο μεγαλύτερος του α, με σφάλμα προσέγγισης και οι δύο μικρότερο του $\frac{1}{n}$, $n\in\mathbb{N}$ (φυσικοί αριθμοί). ■

Από όλα τα προηγούμενα γίνεται φανερό πως ισχύουν οι σχέσεις:

$$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$$

και οι πραγματικοί αριθμοί $\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup(\mathbb{R}-\mathbb{Q})$ *δεν είναι αριθμήσιμο σύνολο.*

Σημείωση

Οι πραγματικοί αριθμοί $\mathbb{R}$ ορίζονται και με *την τομή DEDEKIND:*

α) Έχουμε μια διαμέριση των ρητών αριθμών $\mathbb{Q}$ σε δύο υποσύνολα A_1, A_2 ξένα μεταξύ τους, δηλαδή $A_1\cap A_2=\varnothing$ και $A_1\cup A_2=\mathbb{Q}$.

β) Κάθε ρητός αριθμός του συνόλου A_1 είναι μικρότερος από κάθε ρητό αριθμό του συνόλου A_2, δηλαδή αν $\alpha\in A_1$ και $\beta\in A_2$ τότε $\alpha<\beta$.

Οι τομές *DEDEKIND* συμβολίζονται A_1/A_2 και καθορίζουν τους ρητούς και τους άρρητους αριθμούς.

Βλέπε τα βιβλία Ε. ΠΟΥΛΕΑ [8], Κεφ. 1, §3 και L. BRAND [1], Κεφ. 1, §6.

2. Διαστήματα

Η πραγματική ευθεία $\mathbb{R}$ είναι *διατεταγμένο σώμα,* δηλ. οι συνήθεις πράξεις (πρόσθεση, πολλαπλασμός, ύπαρξη 0, 1, ύπαρξη αντιθέτου και αντιστρόφου) καθώς και η *σχέση διάταξης* $\alpha\leq\beta$ είναι ορισμένες στην $\mathbb{R}$.

Ένα σύνολο στοιχείων λέγεται *διατεταγμένο* αν υπάρχει μια σχέση $<$ τέτοια ώστε:

i) όταν είναι $\alpha\neq\beta$ τότε $\alpha<\beta$ ή $\alpha>\beta$,

ii) όταν $\alpha<\beta$, $\beta<\gamma \Rightarrow \alpha<\gamma$ (μεταβατική ιδιότητα).

Τα πεδία ορισμού των πραγματικών συναρτήσεων θα είναι συνήθως διαστήματα, δηλαδή υποσύνολα της $\mathbb{R}$, της μορφής (υποθέτουμε ότι $\alpha<\beta$):

Σύνολο	*Σύμβολο*	*Ονομασία*
$\{x\in\mathbb{R}: \alpha<x<\beta\}$	(α, β)	ανοικτό διάστημα α, β
$\{x\in\mathbb{R}: \alpha<x\}$	$(\alpha, +\infty)$	ανοικτό διάστημα $\alpha, +\infty$
$\{x\in\mathbb{R}: x<\alpha\}$	$(-\infty, \alpha)$	ανοικτό διάστημα $+\infty, \alpha$
$\mathbb{R}$	$(-\infty, +\infty)$	πραγματικοί αριθμοί
$\{x\in\mathbb{R}: \alpha\le x\le\beta\}$	$[\alpha, \beta]$	κλειστό διάστημα α, β
$\{x\in\mathbb{R}: \alpha\le x\}$	$[\alpha, +\infty)$	κλειστό διάστημα $\alpha, +\infty$
$\{x\in\mathbb{R}: x\le\alpha\}$	$(-\infty, \alpha]$	κλειστό διάστημα $-\infty, \alpha$
$\{x\in\mathbb{R}: \alpha<x\le\beta\}$	$(\alpha, \beta]$	ανοικτό αριστερά και κλειστό δεξιά
$\{x\in\mathbb{R}: \alpha\le x<\beta\}$	$[\alpha, \beta)$	κλειστό αριστερά και ανοικτό δεξιά

Τα σύμβολα $-\infty$, $+\infty$ διαβάζονται «μείον άπειρο» και «συν άπειρο» αντί-

3. Φραγμένα σύνολα πραγματικών αριθμών

Ένα μη κενό σύνολο $A\subset\mathbb{R}$ λέγεται *φραγμένο προς τα κάτω* (αντ. *προς τα πάνω*) όταν

$$\exists\, \alpha\in\mathbb{R},\ \forall\, x\in A:\quad \alpha\le x$$

(αντ.
$$\exists\, \beta\in\mathbb{R},\ \forall\, x\in A:\quad x\le\beta).$$

Ο πραγματικός αριθμός α (αντ. β) λέγεται *κάτω φράγμα* (αντ. *πάνω φράγμα*) του συνόλου A.

Προφανώς κάθε αριθμός $\alpha_1<\alpha$ (αντ. $\beta_1>\beta$) είναι επίσης κάτω φράγμα (αντ. πάνω φράγμα) του συνόλου A.

Το σύνολο $A\subset\mathbb{R}$ λέγεται *φραγμένο* όταν είναι *φραγμένο προς τα κάτω και προς τα πάνω,* δηλαδή όταν

$$\exists\, \alpha, \beta\in\mathbb{R},\ \forall\, x\in A:\ \alpha\le x\le\beta.$$

Επομένως, ένα μη κενό σύνολο $A\subset\mathbb{R}$ είναι:
φραγμένο, όταν είναι υποσύνολο διαστήματος $[\alpha, \beta]$, με $\alpha, \beta\in\mathbb{R}$,
φραγμένο προς τα κάτω, όταν είναι υποσύνολο διαστήματος

$$[\alpha, +\infty)\ ,\ \text{με}\ \ \alpha\in\mathbb{R},$$

φραγμένο προς τα πάνω, όταν είναι υποσύνολο διαστήματος

$$(-\infty, \beta] \ , \ \text{με} \ \ \beta\in\mathbb{R}\,.$$

- *Πάνω πέρας* ή *supremum* ενός προς τα πάνω φραγμένου συνόλου A λέγεται ένα πάνω φράγμα β του A το οποίο έχει την ιδιότητα: $\beta\le\beta_1$, $\forall\, \beta_1$ πάνω φράγμα του A δηλαδή είναι το μικρότερο από τα πάνω φράγματα του A.

  Συμβολίζεται $\beta=supA$.
- *Κάτω πέρας* ή *infimum* ενός προς τα κάτω φραγμένου συνόλου A λέγεται ένα κάτω φράγμα α του A το οποίο έχει την ιδιότητα: $\alpha_1\le\alpha$, $\forall\, \alpha_1$ κάτω φράγμα του A, δηλαδή είναι το μεγαλύτερο από τα κάτω φράγματα του A.

  Συμβολίζεται $\alpha=inf\,A$.

Ο αριθμός α είναι *κάτω πέρας* (*infimum)* του υποσυνόλου $A\subset\mathbb{R}$ όταν:
i) ο α είναι κάτω φράγμα του A, και
ii) $\forall\, \varepsilon>0,\ \exists\, \alpha\in A:\ \alpha\le x<\alpha+\varepsilon$.

Αντίστοιχα, ο β είναι *πάνω πέρας (supremum)* του $A\subset\mathbb{R}$ όταν:
i) ο β είναι πάνω φράγμα του A, και
ii) $\forall\, \varepsilon>0,\ \exists\, x\in A:\ \beta-\varepsilon<x\le\beta$

Ορισμοί sup A, inf A

$\alpha = inf\,A$

i) $\forall\, x\in A\,,\ x\ge\alpha\,,$ ii) $\forall\, \varepsilon>0\,,\ \exists\, x\in A\,,\ x<\alpha+\varepsilon.$

$\beta = sup\,B$

i) $\forall\, x\in A\,,\ x\le\beta\,,$ ii) $\forall\, \varepsilon>0\,,\ \exists\, x\in A\,,\ x>\beta-\varepsilon.$

Είναι φανερό ότι «*το supremum (αντ. infimum), αν υπάρχει, είναι μοναδικό*».

Πράγματι, αν $\alpha,\,\alpha'$ είναι δύο *infimum* του $A\subset\mathbb{R}$ τότε $\alpha\le\alpha'$ και $\alpha'\le\alpha$ οπότε $\alpha=\alpha'$.

Ακόμη, αν $\beta,\,\beta'$ είναι δύο *supremum* του $A\subset\mathbb{R}$ τότε $\beta\le\beta'$, και $\beta'\le\beta$ οπότε $\beta=\beta'$.

Αν γράψουμε $-A = \{-x\colon x\in A\}$, τότε βλέπουμε ότι

$$inf\,A = -sup(-A).$$

Αξίωμα του συνεχούς στο $\mathbb{R}$

Για κάθε φραγμένο προς τα πάνω (αντ. προς τα κάτω) και μη κενό υποσύνολο A των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ το $sup\,A$ (αντ. $inf\,A$) υπάρχει.

Προσοχή! Η ιδιότητα αυτή δεν ισχύει αν αντικαταστήσουμε το $\mathbb{R}$ με το σύνολο των ρητών αριθμών $\mathbb{Q}$.

Παρατήρηση 1 Το $sup\,A$ και το $inf\,A$, όταν υπάρχουν (στο $\mathbb{R}$) δεν ανήκουν αναγκαστικά στο υποσύνολο A.

Όταν ανήκουν στο A λέγονται *μέγιστο* ή *maximum* και *ελάχιστο* ή *minimum* του υποσυνόλου $A\subset\mathbb{R}$.

Παραδείγματα

1 Τα υποσύνολα $A = (\alpha, \beta)\subset\mathbb{R}$, $B = [\alpha, \beta]\subset\mathbb{R}$, $\Gamma = (\alpha, \beta]$ έχουν:
$sup\,A=\beta\notin A$, $inf\,A = \alpha\notin A$,
$sup\,B=\beta\in B$, $inf\,B = \alpha\notin B$,
$sup\,\Gamma=\beta\in\Gamma$, $inf\,\Gamma = \alpha\notin\Gamma$.

2 Τα υποσύνολα $A = (-\infty, 2)$, $B = [5, +\infty)$ έχουν:
$sup\,A=\beta\notin A$, $inf\,A = -\infty$.
$sup\,B=+\infty$, $inf\,B = 5\in B$.

3 Να βρεθούν τα *supremum* και *infimum* των συνόλων
$A = \{0, 1, 3\}$, ,
$B = \{x\in\mathbb{R} : x<0\}$,
$\Gamma = \{x\in\mathbb{Z}:$ x διαιρείται με το $3\}$.

➡ Έχουμε $sup\,A=3$, $inf\,A=0$
και $sup\,B=0$, $inf\,B=-\infty$.

Θα δείξουμε ότι $sup\,B=0$.
Πράγματι, αν $x\in B$ τότε $x<0$, οπότε το μηδέν 0 είναι πάνω φράγμα του B.
Αν α είναι άλλο πάνω φράγμα του B τότε αποκλείεται $\alpha<0$ (διότι τότε $\frac{\alpha}{2}<0 \Rightarrow \frac{\alpha}{2}\in B$) και θα έπρεπε $\frac{\alpha}{2}<\alpha$, με $\alpha<0$.
Παίρνουμε λοιπόν (επειδή $\alpha<0$) $\frac{1}{2}>1$, πράγμα άτοπο.

Παρατηρούμε ότι το σύνολο Γ γράφεται

$$\Gamma = \{3k : k\in\mathbb{Z}\}.$$

Θα δείξουμε ότι το Γ δεν είναι φραγμένο προς τα πάνω (αντ. προς τα κάτω).

Υποθέτουμε ότι το Γ είναι φραγμένο.

Επειδή το Γ είναι μη κενό (π.χ. το $3\in\Gamma$) υποθέτουμε ότι υπάρχει το $sup\,\Gamma$, έστω $\beta=sup\,\Gamma$. Τότε όμως, $\beta-1<\beta$ και άρα θα υπάρχει στοιχείο του Γ που θα είναι μεγαλύτερο του $\beta-1$, δηλ. θα υπάρχει $k\in\mathbb{Z}$ τέτοιος ώστε

$$\beta \geq 3k > \beta - 1 \quad (\text{με } \varepsilon = 1 > 0).$$

Έχουμε λοιπόν $3k+3 > \beta-1+3 \Rightarrow 3(k+1) > \beta+2 > \beta$ και $3(k+1) \in \Gamma$, που είναι άτοπο (γιατί βρήκαμε στοιχείο του Γ γνήσια μεγαλύτερο από το $\beta = sup\Gamma$).

Ανάλογα γίνεται η απόδειξη και για το $inf\Gamma$.

Έχουμε λοιπόν

$$sup\Gamma = +\infty \quad , \quad inf\Gamma = -\infty.$$

ΑΡΧΙΜΗΔΕΙΑ ΙΔΙΟΤΗΤΑ

*Αν α είναι τυχαίος **θετικός** πραγματικός αριθμός και γ ένας άλλος πραγματικός αριθμός, τότε υπάρχει φυσικός αριθμός $n \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε*

$$n\alpha > \gamma.$$

Απόδειξη

Αν δεν υπάρχει τέτοιο $n \in \mathbb{N}$, τότε το σύνολο

$$A = \{n\alpha : n \in \mathbb{N}\}$$

θα είναι φραγμένο προς τα πάνω και μη κενό.

Επομένως, θα υπάρχει το $supA$ και έστω $supA = \beta$.

Επειδή $\beta - \alpha < \beta$ (με $\varepsilon = \alpha > 0$) θα υπάρχει ένα στοιχείο $m\alpha$, $m \in \mathbb{N}$ του A τέτοιο ώστε $\beta - \alpha < m\alpha \leq \beta \Rightarrow \beta < (m+1)\alpha$.

Αλλ' όμως $(m+1)\alpha \in A$ κι έτσι φτάσαμε σε άτοπο. ■

Η Αρχιμήδεια ιδιότητα, όταν είναι $\dfrac{\gamma}{\alpha} = r > 0$ ρητός αριθμός, γίνεται:

*Αν r είναι **θετικός** ρητός αριθμός τότε υπάρχει φυσικός αριθμός n τέτοιος ώστε να ισχύει $n > r$.*

Παρατήρηση 2 Μπορεί να δειχθεί ότι υπάρχουν διατεταγμένα σώματα στα οποία δεν ισχύει η ιδιότητα αυτή. Επομένως, η ισχύς της στους πραγματικούς αριθμούς $\mathbb{R}$, εξαρτάται ουσιαστικά από το αξίωμα του συνεχούς.

$\overline{\mathbb{R}}$ *επεκτεταμένη πραγματική ευθεία*

Το σύνολο $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ λέγεται *επεκτεταμένη πραγματική ευθεία* και σ' αυτό ορίζουμε τις πράξεις:

1) $+\infty + (+\infty) = +\infty \quad , \quad -\infty + (-\infty) = -\infty$.

2) $\alpha+(\pm\infty) = \pm\infty \quad , \quad \alpha\in\mathbb{R}$.

3) $(+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty \quad , \quad (-\infty)(+\infty) = (+\infty)(-\infty) = -\infty$,
$(-\infty)\cdot(-\infty) = +\infty$.

4) Αν $\alpha>0$, $\alpha(+\infty) = +\infty$, $\alpha\cdot(-\infty) = -\infty$.
Αν $\alpha<0$, $\alpha(+\infty) = -\infty$, $\alpha\cdot(-\infty) = +\infty$.

5) $\dfrac{\alpha}{\pm\infty} = 0$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

Οι πράξεις

$$+\infty +(-\infty) = +\infty -\infty$$

$$0\cdot(\pm\infty)$$

$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\, ,\ \frac{0}{0}$$

δεν είναι δυνατόν να οριστούν, γιατί δεν έχουν τιμή μονοσήμαντα ορισμένη. Στις περιπτώσεις αυτές λέμε ότι η πράξη έχει *απροσδιόριστη τιμή*.

Αλλά έχουμε: όταν το μηδέν δεν είναι όριο ακολουθίας,

$$0\cdot(\pm\infty) = 0$$

και είναι

$$\frac{0}{0} = 0$$

όταν ο αριθμητής είναι το μηδέν και ο παρονομαστής είναι όριο ακολουθίας

$$\alpha_n\to 0,\ \alpha_n\neq 0\ ,\ \forall\, n\in\mathbb{N}.$$

4. Δυαδική και δεκαδική μορφή των πραγματικών αριθμών

Θα χρειαστούμε την παρακάτω πρόταση:

ΠΡΟΤΑΣΗ 1: *Αν $x\in\mathbb{R}$ τότε υπάρχει μια φθίνουσα ακολουθία κλειστών διαστημάτων $I_n = \left[\alpha_n, \alpha_n + \dfrac{1}{2^n}\right]$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ $\alpha_n\in\mathbb{Q}$, τέτοια ώστε $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} I_n = \{x\}$.*

Απόδειξη

Προφανώς υπάρχει ακέραιος α_0 τέτοιος ώστε $x \in I_0 = [\alpha_0, \alpha_0+1]$.

Διαιρούμε το διάστημα I_0 σε δύο υποδιαστήματα

$$\left[\alpha_0 , \alpha_0 + \frac{1}{2}\right] , \left[\alpha_0 + \frac{1}{2} , \alpha_0+1\right]$$

οπότε το x θ' ανήκει σ' ένα απ' αυτά, που το σημειώνουμε

$$I_1 = \left[\alpha_1 , \alpha_1 + \frac{1}{2}\right].$$

Αν είναι $x = \alpha_0 + \frac{1}{2}$ τότε ανήκει και στα δύο υποδιαστήματα.
Στη συνέχεια διαιρούμε το I_1 σε δύο υποδιαστήματα

$$\left[\alpha_1 , \alpha_1 + \frac{1}{2^2}\right] , \left[\alpha_1 + \frac{1}{2^2} , \alpha_1 + \frac{1}{2}\right]$$

και το x ανήκει σ' ένα απ' αυτά, που το σημειώνουμε

$$I_2 = \left[\alpha_2 , \alpha_2 + \frac{1}{2^2}\right].$$

Συνεχίζοντας, κατασκευάζουμε μια φθίνουσα ακολουθία κλειστών και φραγμένων διαστημάτων I_n, $n=0, 1, 2, \ldots$ με $I_n = \left[\alpha_n , \alpha_n + \frac{1}{2^n}\right]$, όπου $\alpha_n \in \mathbb{Q}$ και $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n$.

Αν είχαμε και $y \in \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n$, με $y \neq x$, $y<x$ (ή $y>x$) τότε για τον αριθμό $x-y = \delta>0$ (ή $y-x = \delta>0$) υπάρχει k φυσικός αριθμός τέτοιος ώστε $\frac{1}{2^k} < \delta$, δηλαδή

$$x-y = \delta > \frac{1}{2^k} \left(\text{ή } y-x = \delta > \frac{1}{2^k}\right).$$

Αλλά, επειδή είναι $x, y \in I_k$, αφού ανήκουν στην τομή $\bigcap_{n=0}^{\infty} I_n$, θα έχουμε

$$x-y = \delta < \frac{1}{2^k} \left(\text{ή } y-x = \delta < \frac{1}{2^k}\right)$$

πράγμα που δημιουργεί αντίθεση.

Άρα , είναι $y=x$ και $\bigcap_{n=0}^{\infty} I_n = \{x\}$. ■

ΠΟΡΙΣΜΑ: *Κάθε πραγματικός αριθμός (ρητός ή άρρητος) μπορεί να εγκλωβισθεί μεταξύ δύο ρητών αριθμών, των* α_n *και* $\alpha_n + \dfrac{1}{2^n}$, *που διαφέρουν οσοδήποτε λίγο, εδώ* $\dfrac{1}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Άμεση εφαρμογή της Πρότασης 1 είναι η γραφή ενός πραγματικού αριθμού $x \in [0, 1]$ με τη βοήθεια των ψηφίων 0 και 1 που λέγεται *δυαδική μορφή*.

Αν $x \in [0, 1]$ τότε γράφουμε

$$x = 0, \beta_1 \beta_2 \beta_3 \ldots$$

όπου

$$\beta_n = \begin{cases} 0 \ , & \text{αν } \alpha_n = \alpha_{n-1} \\ 1 \ , & \text{αν } \alpha_n = \alpha_{n-1} + \dfrac{1}{2^n} \end{cases}$$

όπου τα α_n ορίσθηκαν στην Πρόταση 1.

Από την απόδειξη της Πρότασης 1 προκύπτει ότι η μορφή αυτή δεν είναι μοναδική όταν είναι

$$x = \frac{m}{2^n} \ , \quad m = 1, 2, \ldots, 2^n - 1$$

δηλαδή στα σημεία όπου η επιλογή του α_n έχει δύο δυνατότητες.

Για παράδειγμα έχουμε (σε δυαδική μορφή)

$$\frac{1}{2} = 0{,}100\ldots \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} = 0{,}\ 0111\ldots$$

$$\frac{3}{8} = 0{,}01100\ldots \quad \text{ή} \quad \frac{3}{8} = 0{,}01011\ldots$$

$$\frac{2}{3} = 0{,}1010\ldots$$

Στις αριθμητικές σειρές (Κεφ. 2) θα δούμε ότι η δυαδική μορφή αντιστοιχεί στο άθροισμα της σειράς

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{2^n} \ , \ \text{όπου} \ \beta_n = 0 \ \text{ή} \ 1.$$

Σημειώνουμε ότι, αν $y \in \mathbb{R}$ τότε $y = [y] + x$, όπου $x = y - [y] \in [0, 1]$, όπου $[y]$ το ακέραιο μέρος του y που δεν υπερβαίνει το y.

Αν στην απόδειξη της Πρότασης 1 κάθε φορά διαιρέσουμε το διάστημα I_n,

$n=1, 2, \ldots$. σε *δέκα* υποδιαστήματα, τότε με την παραπάνω διαδικασία μπορούμε να γράψουμε κάθε πραγματικό αριθμό με τη βοήθεια των ψηφίων $0, 1, 2, \ldots, 9$.

Βρίσκουμε λοιπόν την ακολουθία των κλειστών διαστημάτων

$$[\alpha_1, \beta_1] \ , \ [\alpha_2, \beta_2], \ldots, [\alpha_n, \beta_n]$$

όπου

$$\alpha_1=\alpha_0 \ , \ \alpha_2=\alpha_0+\frac{\delta_1}{10} \ , \ \alpha_3=\alpha_0+\frac{\delta_1}{10}+\frac{\delta_2}{10^2}, \ldots$$

$$\alpha_n=\alpha_0+\frac{\delta_1}{10}+\frac{\delta_2}{10^2}+\ldots+\frac{\delta_{n-1}}{10^{n-1}}, \ldots$$

και

$$\beta_1=\alpha_0+1 \, , \ \beta_2=\alpha_0+\frac{\delta_1+1}{10} \ , \ \beta_3=\alpha_0+\frac{\delta_1}{10}+\frac{\delta_2+1}{10^2}, \ldots$$

$$\beta_n=\alpha_0+\frac{\delta_1}{10}+\frac{\delta_2}{10^2}+\ldots+\frac{\delta_{n-1}+1}{10^{n-1}}, \ldots$$

όπου $\delta_j \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$.

(Θεωρούμε ότι $\delta_0=\alpha_0$ και προφανώς $\alpha_n<\alpha_0+1$, $\forall\, n\in\mathbb{N}$.)

Επομένως, ο πραγματικός αριθμός $x\in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$, όπου $I_n=[\alpha_n, \beta_n]$, $n=1, 2, \ldots$. , οπότε έχουμε

$$x=\lim_{n\to+\infty}\alpha_n=\lim_{n\to+\infty}\left(\alpha_0+\frac{\delta_1}{10}+\frac{\delta_2}{10^2}+\ldots+\frac{\delta_{n-1}}{10^{n-1}}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\delta_n}{10^n}.$$

Παίρνουμε έτσι τη *δεκαδική μορφή* των πραγματικών αριθμών.

Έτσι κάθε αριθμός $x\in[0, 1]$ γράφεται με τη μορφή

$$x=0, \delta_1\,\delta_2\,\delta_3\ldots$$

όπου $\delta_n\in\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι αυτή η μορφή δεν είναι μοναδική όταν είναι

$$x=\frac{m}{10^n} \ , \ m=1, 2, \ldots, 10^n-1.$$

δηλαδή στα σημεία όπου η επιλογή του α_n έχει δύο δυνατότητες.

Στο ένα από τα δύο δεκαδικά αναπτύγματα, από κάπου και πέρα συνεχίζεται μόνο με το ψηφίο 9.

Πολλές φορές ένα δεκαδικό ανάπτυγμα από κάπου και πέρα συνεχίζεται με το ψηφίο 0, π.χ.

$$0,\, \delta_1\, \delta_2 \dots \delta_{n_0}\, 0\, 0 \dots$$

τότε συνήθως γράφουμε $0,\, \delta_1\, \delta_2 \dots \delta_{n_0}$ και είναι

$$0,\, \delta_1\, \delta_2 \dots \delta_{n_0} = \sum_{n=1}^{n_0} \frac{\delta_n}{10^n}.$$

Για παράδειγμα έχουμε

$$\frac{1}{10} = 0{,}100 \dots = \frac{1}{10} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{0}{10^n} \quad \text{ή} \quad \frac{1}{10} = 0{,}099 \dots = \frac{0}{10} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{9}{10^n}$$

$$\frac{1}{2} = 0{,}500 \dots = \frac{5}{10} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{0}{10^n} \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} = 0{,}499 \dots = \frac{4}{10} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{9}{10^n}$$

$$0{,}5102 = \frac{5}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{0}{10^3} + \frac{2}{10^4} \quad , \quad \frac{1}{3} = 0{,}333 \dots = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \dots$$

$$1 = 0{,}99 \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n}.$$

΄Ενας δεκαδικός αριθμός λέγεται *περιοδικός*, αν έχει άπειρα δεκαδικά ψηφία, και από κάποιο δεκαδικό ψηφίο και πέρα τα υπόλοιπα ψηφία επαναλαμβάνονται περιοδικά.

΄Εστω το περιοδικό δεκαδικό ανάπτυγμα

$$x = 0,\, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \delta_1 \delta_2 \dots \delta_\mu \delta_1 \delta_2 \dots \delta_\mu \dots$$

όπου τα μ φηφία που ακολουθούν το α_k επαναλαμβάνονται με την ίδια διαδοχή.

Θέτουμε $y = 0,\, \delta_1 \delta_2 \dots \delta_\mu \delta_1 \delta_2 \dots \delta_\mu \dots =$

$$= \left[\frac{\delta_1}{10} + \frac{\delta_2}{10^2} + \dots + \frac{\delta_\mu}{10^\mu}\right] + \left[\frac{\delta_1}{10^{\mu+1}} + \dots + \frac{\delta_\mu}{10^{2\mu}}\right] + \dots$$

οπότε έχουμε

$$10^\mu y = [10^{\mu-1}\delta_1 + 10^{\mu-2}\delta_2 + \dots \delta_\mu] + \left[\frac{\delta_1}{10} + \dots + \frac{\delta_\mu}{10^\mu} + \dots\right] = x_0 + y\,,$$

όπου είναι $x_0 = 10^{\mu-1}\delta_1 + 10^{\mu-2}\delta_2 + \dots + \delta_\mu$.

Άρα, είναι $y = \dfrac{x_0}{10^\mu - 1}$.

Ανάλογα, θέτοντας $y_0 = 10^{k-1}\alpha_1 + 10^{k-2}\alpha_2 + \dots + \alpha_k$, έχουμε

$$10^k x = [10^{k-1}\alpha_1 + 10^{k-2}\alpha_2 + \ldots + \alpha_k] + \left[\frac{\delta_1}{10} + \frac{\delta_2}{10^2} + \ldots + \frac{\delta_\mu}{10^\mu} + \ldots\right] =$$

$$= y_0 + y = y_0 + \frac{x_0}{10^\mu - 1}.$$

Τελικά, παίρνουμε

$$x = \frac{y_0}{10^k} + \frac{x_0}{10^k[10^\mu - 1]},$$

όπου τα y_0, x_0 είναι ακέραιοι αριθμοί, απ' όπου προκύπτει ότι ο αριθμός x είναι ρητός αριθμός.

Αποδεικνύεται ότι κάθε περιοδικός δεκαδικός αριθμός είναι ρητός και αντίστροφα, ενώ κάθε άρρητος αριθμός γράφεται ως δεκαδικός αριθμός με άπειρα δεκαδικά ψηφία μη-περιοδικά.

Σημειώνουμε, τέλος, ότι για $y \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$y = [y] + x,$$

όπου $x = y - [y] \in [0, 1]$ και $[y]$ είναι το ακέραιο μέρος του αριθμού y που δεν τον υπερβαίνει.

Π.χ. οι δεκαδικοί αριθμοί

$$2{,}743574357435\ \ldots$$
$$0{,}333\ \ldots$$

είναι περιοδικοί, ενώ οι δεκαδικοί αριθμοί

$$\sqrt{2} = 1{,}414213562\ \ldots$$
$$\sqrt{3} = 1{,}732050808\ \ldots$$

δεν είναι περιοδικοί (άρα είναι άρρητοι αριθμοί).

Προηγουμένως είδαμε ότι υπάρχουν αριθμοί που έχουν δύο δεκαδικά αναπτύγματα και ότι το ένα απ' αυτά από κάποια θέση και μετά συνεχίζεται μόνον με το ψηφίο 9.

Αν εξαιρέσουμε τ' αναπτύγματα αυτού του είδους παίρνουμε την παρακάτω πρόταση 2, που δείχνει τη μοναδικότητα του άλλου αναπτύγματος.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2: *Κάθε πραγματικός αριθμός $x \in [0, 1]$ έχει μοναδικό δεκαδικό ανάπτυγμα του οποίου τα ψηφία δεν είναι από κάποια θέση και πέρα όλα 9.*

Απόδειξη

Έστω ότι ο αριθμός $x \in [0, 1]$ έχει τα δύο αναπτύγματα

$$x = 0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots , x = 0, \beta_1 \beta_2 \beta_3 \ldots$$

όπου σε κανένα απ' αυτά δεν είναι από κάποια θέση και πέρα όλα *9*, και υπάρχει φυσικός αριθμός k τέτοιος ώστε να ισχύει

$$\alpha_{k+1} \neq \beta_{k+1} \text{ και } \alpha_\nu = \beta_\nu , \text{ για } \nu = 1, 2, \ldots, k.$$

Υποθέτουμε ότι $\alpha_{k+1} > \beta_{k+1}$ (ανάλογα $\alpha_{k+1} < \beta_{k+1}$).

Άρα, έχουμε $\alpha_{k+1} \geq \beta_{k+1} + 1$ και

$$\begin{aligned} 0, \alpha_{k+1} 0\, 0 \ldots &\geq 0, \beta_{k+1} 00 \ldots + 0, 100 \ldots \\ &= 0, \beta_{k+1} 00 \ldots + 0, 099 \ldots \\ &= 0, \beta_{k+1} 99 \ldots > 0, \beta_{k+1} \beta_{k+2} \ldots \end{aligned}$$

αφού είναι $\beta_{k+\nu} < 9$, για κάποιο $\nu \in \mathbb{N}$.

Αλλά τότε παίρνουμε

$$0, \alpha_{k+1} \alpha_{k+2} \ldots \geq 0, \alpha_{k+1} 00 \ldots > 0, \beta_{k+1} \beta_{k+2} \ldots$$

απ' όπου προκύπτει

$$0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k \alpha_{k+1} \alpha_{k+2} \ldots > 0, \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_k \beta_{k+1} \beta_{k+2} \ldots$$

αφού από την υπόθεση που κάναμε ισχύει

$$\alpha_1 = \beta_1 , \ \alpha_2 = \beta_2 \ldots . \ \alpha_k = \beta_k .$$

Δηλαδή, έχουμε $x > x$, πράγμα άτοπο. ■

Με διαδικασίες ανάλογες με τις παραπάνω διαδικασίες για τη δυαδική και δεκαδική μορφή, προκύπτουν οι τριαδική, τετραδική, ... μορφή των πραγματικών αριθμών.

5. Τοπολογική δομή του $\mathbb{R}$

Στην πραγματική ευθεία $\mathbb{R}$ ορίσαμε το μηδέν και τη μονάδα στο M κι έτσι αντιστοιχήσαμε τους πραγματικούς αριθμούς στα σημεία της ευθείας $x'x$ (§1).

Η απόσταση του τυχαίου σημείου x της πραγματικής ευθείας $\mathbb{R}$ από το μηδέν 0 είναι η απόλυτη τιμή του $|x|$.

Ακόμη, *η απόσταση* μεταξύ δύο τυχαίων σημείων $x, y\in\mathbb{R}$ είναι η απόλυτη τιμή της διαφοράς $|x-y|$.

Επομένως, αν συμβολίσουμε με $d(x, y) = |x-y|$ την απόσταση των σημείων $x, y\in\mathbb{R}$, τότε λέμε πως η συνάρτηση.

$$d: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ = \{x\in\mathbb{R} : x\geq 0\}$$

ορίζει μια *μετρική* πάνω στην πραγματική ευθεία $\mathbb{R}$.

Γενικότερα, μια συνάρτηση

$$d: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

λέμε ότι ορίζει *μετρική* ή *απόσταση* πάνω στην πραγματική ευθεία $\mathbb{R}$ όταν ικανοποιεί τα τρία αξιώματα:

$[M_1]$ $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x=y$, $\quad\forall\, x, y\in\mathbb{R}$

$[M_2]$ $d(x, y) = d(y, x)$, $\quad\forall\, x, y\in\mathbb{R}$ (συμμετρική ιδιότητα),

$[M_3]$ $d(x, z) \leq d(x, y)+d(y, z)$, $\quad\forall\, x, y, z\in\mathbb{R}$ (τριγωνική ανισότητα).

Προφανώς η συνάρτηση $d(x, y) = |x-y|$, $\forall\, x, y\in\mathbb{R}$ ικανοποιεί τα τρία αξιώματα $[M_1]$, $[M_2]$, $[M_3]$ της μετρικής.

Βέβαια, πάνω στην πραγματική ευθεία $\mathbb{R}$ μπορεί να ορίσει κανείς κι άλλες μετρικές (αποστάσεις).

Π.χ. η συνάρτηση

$$d(x, y) = \begin{cases} 1\ , & \text{όταν } x\neq y \\ 0\ , & \text{όταν } x=y \end{cases}\ ,\ \forall\, x, y\in\mathbb{R}$$

ορίζει μια άλλη μετρική (απόσταση) πάνω στο $\mathbb{R}$.

Οι μετρικές ορίζονται, γενικότερα, πάνω σε οποιαδήποτε σύνολα X, δηλαδή είναι συναρτήσεις της μορφής

$$d : X\times X \longrightarrow \mathbb{R}^+ = \{x\in\mathbb{R} : x\geq 0\}$$

που ικανοποιούν τα τρία αξιώματα $[M_1]$, $[M_2]$, $[M_3]$.

Π.χ. αν πάρουμε ως X το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων από το κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ στο $\mathbb{R}$, δηλαδή

$$X = C([\alpha, \beta], \mathbb{R}),$$

τότε σ' αυτό το σύνολο η συνάρτηση

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+,$$

όπου

$$d(x, y) = \int_\alpha^\beta |x(t)-y(t)|\,dt \ , \ \forall\, x, y \in X$$

ορίζει μια *μετρική* ή *απόσταση* επί του X.

Βέβαια , πάνω στο ίδιο σύνολο X μπορεί κανείς να ορίσει διάφορες μετρικές και κάποιες ιδιότητες θεωρημάτων ή προτάσεων επηρεάζονται από το ποια μετρική θεωρούμε στο χώρο X.

Ο χώρος X μαζί με μία μετρική d, γράφεται (X, d) και λέγεται *μετρικός χώρος.*

Στην περίπτωσή μας έχουμε την πραγματική ευθεία $\mathbb{R}$ ως μετρικό χώρο $(\mathbb{R}, d)$, με $d(x, y) = |x-y|$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

Σφαιρικές περιοχές στο $\mathbb{R}$

$$B(\alpha, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : |x-\alpha| < \varepsilon\} = (\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon) \ , \ \forall\, \varepsilon > 0,$$

ανοικτή σφαιρική περιοχή του α με ακτίνα $\varepsilon > 0$.

$$\overline{B}(\alpha, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : |x-\alpha| \leq \varepsilon\} = [\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon] \ , \ \forall\, \varepsilon > 0,$$

κλειστή σφαιρική περιοχή του α με ακτίνα $\varepsilon > 0$.

Το α λέγεται *κέντρο* της σφαιρικής περιοχής.

Περιοχή ενός σημείου στο $\mathbb{R}$

Ονομάζουμε *περιοχή* ενός σημείου $\alpha \in \mathbb{R}$, κάθε υποσύνολο $U \subset \mathbb{R}$ που περιέχει μια ανοικτή ε-σφαιρική περιοχή του α.

Περιοχές του $+\infty$ και $-\infty$

Το $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ είναι *η επεκτεταμένη* πραγματική ευθεία.

- *Περιοχή του* $+\infty$ είναι κάθε υποσύνολο του $\overline{\mathbb{R}}$ της μορφής $(M, +\infty]$ ή $[M, +\infty]$, όπου $M \in \mathbb{R}$.
  Συνήθως το M είναι πολύ μεγάλος θετικός αριθμός.
- *Περιοχή του* $-\infty$ είναι κάθε υποσύνολο του $\overline{\mathbb{R}}$ της μορφής $[-\infty, -M)$ ή $[-\infty, -M]$, όπου $M \in \mathbb{R}$.
  Συνήθως το M είναι πολύ μεγάλος θετικός αριθμός.
- Στην πράξη λέμε:

«Περιοχή» του $+\infty$ στο $\mathbb{R}$: το $(M, +\infty)$, $M>0$ μεγάλος θετικός αριθμός, $M\in\mathbb{R}$.

«Περιοχή» του $-\infty$ στο $\mathbb{R}$: το $(-\infty, -M)$, $M>0$ μεγάλος θετικός αριθμός, $M\in\mathbb{R}$.

(Θέτουμε «·» γιατί στην ουσία τα $+\infty$, $-\infty$ δεν ανήκουν στο $\mathbb{R}$, άρα δεν είναι περιοχές τους με την αυστηρή έννοια του όρου.)

Π.χ. αν έχουμε το διάστημα $(0, 3]$ αυτό είναι μια περιοχή του 1, του 2 αλλά δεν είναι περιοχή του 0 ούτε του 3.

Πράγματι, αυτό περιέχει τις σφαιρικές περιοχές

$$B\left(1, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right), \text{ ακτίνας } \varepsilon = \frac{1}{2},$$
$$B\left(2, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right), \text{ ακτίνας } \varepsilon = \frac{1}{2},$$

των σημείων 1 και 2, αντίστοιχα.

Αλλ' όμως οποιαδήποτε ε-σφαιρική περιοχή των σημείων 0 και 3 είναι

$$B(0, \varepsilon) = (-\varepsilon, +\varepsilon) \quad , \ \forall\, \varepsilon>0$$

$$B(3, \varepsilon) = (3-\varepsilon , 3+\varepsilon) \quad , \ \forall\, \varepsilon>0$$

και προφανώς δεν περιέχονται ολόκληρες μέσα στο σύνολο $(0, 3]$.

Γενικά, το διάστημα $(0, 3]$ είναι περιοχή κάθε σημείου του ανοικτού διαστήματος $(0,3)$.

Είδη σημείων ενός συνόλου $A\subset\mathbb{R}$

Εσωτερικό σημείο: Το σημείο $\alpha\in A$ λέγεται *εσωτερικό σημείο του A*

όταν ισχύει: $\exists\, \varepsilon>0$, $B(\alpha, \varepsilon)\subset A$.

Το σύνολο των εσωτερικών σημείων του A λέγεται *εσωτερικό του A* και συμβολίζεται $\mathring{A}$.

Σημείο συσσώρευσης: Το σημείο $\alpha\in\mathbb{R}$ λέγεται *σημείο συσσώρευσης* του A

όταν ισχύει: $\forall\, \varepsilon>0$, $(B(\alpha, \varepsilon)-\{\alpha\})\cap A\neq\varnothing$.

Μεμονωμένο σημείο: Το σημείο $\alpha\in A$ λέγεται *μεμονωμένο σημείο του A*

όταν ισχύει: $\exists\, \varepsilon>0$, $B(\alpha, \varepsilon)\cap A = \{\alpha\}$.

Σημείο περιβλήματος: Το σημείο $\alpha\in\mathbb{R}$ λέγεται *σημείο περιβλήματος* του A

$$\text{όταν ισχύει:} \quad \forall\, \varepsilon>0\ ,\ B(\alpha,\varepsilon)\cap A\neq\varnothing,$$

δηλαδή όταν το α είναι μεμονωμένο σημείο ή σημείο συσσώρευσης του A.

Το σύνολο των σημείων περιβλήματος του A λέγεται *περίβλημα* του A και συμβολίζεται $\overline{A}$.

Βασική σχέση: $\mathring{A}\subset A\subset\overline{A}$.

$$\begin{array}{ccc} & \text{Σημείο Περιβλήματος} & \\ \nearrow\!\!\!\!\nearrow & & \nwarrow\!\!\!\!\nwarrow \\ \text{Σημείο Συσσώρευσης} & & \text{Μεμονωμένο Σημείο} \\ \Uparrow & & \\ \text{Εσωτερικό Σημείο} & & \end{array}$$

Παρατηρήσεις 1

1) Τα εσωτερικά και τα μεμονωμένα σημεία ενός συνόλου A ανήκουν στο σύνολο, αλλά τα σημεία συσσώρευσης δεν ανήκουν αναγκαστικά στο σύνολο.
2) Το σύνολο των άρρητων αριθμών είναι σημεία συσσώρευσης του συνόλου $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών και αντίστροφα.

   Έτσι ισχύει η σχέση $\overline{\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$ και η σχέση $\overline{(\mathbb{R}-\mathbb{Q})}=\mathbb{R}$.

   Ακόμη κάθε ρητός είναι σημείο συσσώρευσης του συνόλου $\mathbb{Q}$ και κάθε άρρητος είναι σημείο συσσώρευσης του συνόλου $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$.

Ανοικτό σύνολο: $A=\mathring{A}$

Κλειστό σύνολο: $A=\overline{A}$

Το συμπλήρωμα $cA=\mathbb{R}-A$ ενός ανοικτού συνόλου είναι κλειστό σύνολο και ενός κλειστού συνόλου είναι ανοικτό σύνολο.

Πυκνά σύνολα

Αν $A\subset B\subset\mathbb{R}$ λέμε ότι το σύνολο A είναι *πυκνό* στο B όταν ισχύει $B\subset\overline{A}$.

Π.χ. το σύνολο των ρητών αριθμών $\mathbb{Q}$ είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$ δηλαδή $\overline{\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$, καθώς επίσης και το σύνολο των άρρητων αριθμών $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$, δηλαδή $\overline{(\mathbb{R}-\mathbb{Q})}=\mathbb{R}$.

Παράδειγμα Θεωρούμε τα σύνολα

$$A=(0,5]\cup\{7\},\qquad B=(-\infty,2],\qquad \Gamma=[1,3)\cup\{4\}\cup(7,9).$$

➡ Έχουμε

$$\overset{\circ}{A} = (0, 5) \quad , \quad \overline{A} = [0, 5] \cup \{7\}$$

$$\overset{\circ}{B} = (-\infty, 2) \quad , \quad \overline{B} = (-\infty, 2] = B$$

$$\overset{\circ}{\Gamma} = (1, 3) \cup (7, 9) \quad , \quad \overline{\Gamma} = [1, 3] \cup \{4\} \cup [7, 9].$$

Τα σύνολα A, Γ δεν είναι ούτε ανοικτά ούτε κλειστά σύνολα του $\mathbb{R}$, ενώ το B είναι κλειστό σύνολο του $\mathbb{R}$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1

i) Τα σύνολα $\mathbb{R}$ και $\varnothing$ είναι ανοικτά σύνολα.

ii) Η τομή πεπερασμένου πλήθους ανοικτών συνόλων είναι ανοικτό σύνολο.

iii) Η ένωση οσονδήποτε ανοικτών συνόλων είναι ανοικτό σύνολο.

Απόδειξη

Το $\mathbb{R}$ είναι ανοικτό σύνολο γιατί ισχύει:

$$\forall x \in \mathbb{R} \ , \ \forall \varepsilon > 0 \ , \ B(x, \varepsilon) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset \mathbb{R}.$$

Το κενό σύνολο είναι ανοικτό σύνολο.

Πράγματι, αν $x \in \varnothing$ τότε και $B(x, \varepsilon) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset \varnothing$

Τα άλλα αποδεικνύονται εύκολα. ■

Όταν μια οικογένεια τ ανοικτών συνόλων του $\mathbb{R}$ ικανοποιεί την Πρόταση 1, λέμε ότι αυτή ορίζει μια *τοπολογία πάνω στο* $\mathbb{R}$.

Έτσι *το σύνολο των ανοικτών διαστημάτων του* $\mathbb{R}$ *ορίζει μια τοπολογία στο* $\mathbb{R}$.

Από τον ορισμό του κλειστού συνόλου προκύπτει η πρόταση:

ΠΡΟΤΑΣΗ 2

i) Τα σύνολα $\mathbb{R}$ και $\varnothing$ είναι κλειστά.

ii) Η ένωση πεπερασμένου πλήθους κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο.

iii) Η τομή οσονδήποτε κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο.

Σημειώσεις 1

1) Τα σύνολα $\mathbb{R}$ και $\varnothing$ είναι συγχρόνως ανοικτά και κλειστά και είναι τα μοναδικά σύνολα μ' αυτήν την ιδιότητα.

2) Κάθε πεπερασμένο σύνολο $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k\}$ του R είναι κλειστό σύνολο, γιατί η ένωση των κλειστών συνόλων $\{\alpha_1\}$, $\{\alpha_2\}$, ..., $\{\alpha_k\}$ είναι πεπερασμένη.

3) Η τομή (αντ. ένωση) άπειρου πλήθους ανοικτών (αντ. κλειστών) συνόλων δεν είναι κατ' ανάγκη ανοικτό (αντ. κλειστό) σύνολο.
Π.χ.

$$\bigcap_{\nu=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{\nu}, \frac{1}{\nu}\right) = \{0\} \text{ κλειστό σύνολο,}$$

$$\bigcap_{\nu=1}^{\infty}\left[-\frac{1}{\nu}, \nu\right] = (0\ , +\infty) \text{ ανοικτό σύνολο,}$$

$$\bigcap_{\nu=1}^{\infty}\left[-\frac{1}{\nu}, 1\right] = (0, 1] \text{ ούτε ανοικτό ούτε κλειστό σύνολο.}$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 3: *Αν $\alpha\in\mathbb{R}$ είναι σημείο συσσώρευσης του $A\in\mathbb{R}$ τότε σε κάθε περιοχή του α υπάρχουν άπειρα στοιχεία του A.*

Απόδειξη

Έστω ότι στην ε-σφαιρική περιοχή $B(\alpha, \varepsilon) = (\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon)$ του α υπάρχουν πεπερασμένου πλήθους στοιχεία $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\nu$ του A (με $\alpha\neq\alpha_i$).

Αν εκλέξουμε $\varrho = min\{\,|\alpha-\alpha_i| : i = 1, 2, ..., \nu\} > 0$ τότε θα έχουμε $0 < \varrho < \varepsilon$ και $(B(\alpha, \varrho)-\{\alpha\})\cap A=\varnothing$, οπότε το α δεν θα είναι σημείο συσσώρευσης του A.

Άρα, ισχύει η πρόταση. ■

Από την Πρόταση 3 προκύπτει ότι τα *πεπερασμένα σύνολα δεν έχουν σημεία συσσώρευσης.*

ΘΕΩΡΗΜΑ BOLZANO - WEIERSTRASS (*στο* $\mathbb{R}$)

Κάθε άπειρο και φραγμένο υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ έχει ένα τουλάχιστον σημείο συσσώρευσης.

Απόδειξη

Θεωρούμε ότι m_1 και M_1 είναι ένα κάτω φράγμα και ένα πάνω φράγμα του συνόλου $A\subset\mathbb{R}$. Τότε $\forall\, x\in A$ έχουμε

$$m_1 \le x \le M_1\,.$$

Χωρίζουμε το διάστημα $[m_1, M_1]$ σε δύο ίσα διαστήματα και σ' ένα τουλάχιστον απ' αυτά, το συμβολίζουμε $[m_2, M_2]$, υπάρχουν άπειρα στοιχεία του A.

Χωρίζουμε και πάλι το $[m_2, M_2]$ σε δύο ίσα διαστήματα και πάλι σ' ένα τουλάχιστον απ' αυτά, έστω $[m_3, M_3]$, υπάρχουν άπειρα στοιχεία του A.

Συνεχίζοντας μ' αυτόν τον τρόπο σχηματίζουμε την ακολουθία των διαστημάτων

$$[m_1, M_1] \supset [m_2, M_2] \supset \dots \supset [m_n, M_n] \supset \dots$$

για την οποία έχουμε

$$m_1 \le m_n \le m_{n+1} < M_{n+1} \le M_n \le M_1,$$

ενώ συγχρόνως ισχύει

$$M_n - m_n = \frac{M_1 - m_1}{2^{n-1}}.$$

Το σύνολο $\{m_n : n \in N\}$ δεν είναι κενό και είναι πάνω φραγμένο από κάθε M_n, οπότε υπάρχει το $\sup m_n = \xi$ (αξίωμα συνεχούς).

Επομένως $\forall\, n \in N$ ισχύει $m_n \le \xi \le M_n$, δηλαδή $\bigcap_{n \in N} [m_n, M_n] \ne \varnothing$.

Θα δείξουμε ότι το ξ είναι σημείο συσσώρευσης του A.

Πράγματι, έστω $B(\xi, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, μια τυχαία σφαιρική περιοχή του ξ.

Για τον αριθμό $\dfrac{\varepsilon}{M_1 - m_1} > 0$ υπάρχει φυσικός αριθμός n_0 τέτοιος ώστε: $\forall\, n > n_0$ να ισχύει

$$\frac{1}{2^{n-1}} < \frac{\varepsilon}{M_1 - m_1} \quad \Rightarrow \quad \frac{M_1 - m_1}{2^{n-1}} < \varepsilon.$$

Επομένως, $\forall\, n > n_0$ ισχύει $[m_n, M_n] \subset B(\xi, \varepsilon)$, αφού $\forall\, x \in [m_n, M_n]$ έχουμε

$$|x - \xi| < M_n - m_n = \frac{M_1 - m_1}{2^{n-1}} < \varepsilon.$$

Επειδή λοιπόν κάθε ένα από τα διαστήματα $[m_n, M_n]$ περιέχει απείρου πλήθους στοιχεία του A, η σφαιρική περιοχή $B(\xi, \varepsilon)$ περιέχει επίσης απείρου πλήθους στοιχεία του A (αφού περιέχει το διάστημα $[m_n, M_n]$, $\forall\, n > n_0$).

Άρα, το ξ είναι σημείο συσσώρευσης του A. ■

Σημείωση 2

Αν στο θεώρημα σε μια διαίρεση και τα δύο διαστήματα περιέχουν απείρου πλήθους στοιχεία του A και εφαρμόσουμε την ίδια διαδικασία σ' αυτά, τότε θα προκύψει και άλλο σημείο συσσώρευσης του απείρου και φραγμένου συνόλου $A \subset \mathbb{R}$.

> ΠΡΟΤΑΣΗ 4 *Αν το σύνολο* $A\subset\mathbb{R}$ *είναι κλειστό και πάνω (αντ. κάτω) φραγμένο, τότε το σύνολο* A *έχει μέγιστο (αντ. ελάχιστο) στοιχείο.*

Απόδειξη

Αφού το σύνολο A είναι πάνω φραγμένο υπάρχει το $supA=\alpha$ (αξίωμα του συνεχούς, §3).

Αν είναι $\alpha\notin A$ τότε το α είναι σημείο συσσώρευσης του A. Επειδή όμως το σύνολο A είναι κλειστό $(A=\overline{A})$ πρέπει $\alpha\in A$ πράγμα που έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση $\alpha\notin A$.

Επομένως είναι $supA=\alpha\in A$, δηλαδή το α είναι μέγιστο του A.

Ανάλογη είναι η απόδειξη για το $infA$. ■

Ένα *κλειστό και φραγμένο* σύνολο A του $\mathbb{R}$ ονομάζεται *συμπαγές* και σύμφωνα με την Πρόταση 4 έχει ελάχιστο στοιχείο και μέγιστο στοιχείο (περιέχει το $supA$ και το $infA$).

Τα $supA$, $infA$, όταν υπάρχουν:

- αν δεν ανήκουν στο A είναι σημεία συσσώρευσης του A,
- αν ανήκουν στο A είναι σημεία περιβλήματος του A (μεμονωμένα ή σημεία συσσώρευσης του A), *αλλά δεν είναι εσωτερικά σημεία του A.*
- Κάθε κλειστό σύνολο $A\subset\mathbb{R}$ περιέχει το $supA$ και $infA$ *όταν αυτά υπάρχουν στο* $\mathbb{R}$.
  Π.χ. αν $A=(-\infty,1]$ τότε $supA=1\in A$, ενώ $infA=-\infty$.
- Κάθε *κλειστό και φραγμένο σύνολο* A έχει $supA\in A$, $infA\in A$, δηλαδή έχει μέγιστο και ελάχιστο στοιχείο.
- Αν το σύνολο A δεν είναι φραγμένο τότε έχουμε

$$supA=+\infty \text{ ή (και) } infA=-\infty.$$

Ερώτημα:

Το $supA$, $infA$ ενός συνόλου A μπορεί να είναι εσωτερικά σημεία του A, δηλαδή $supA\in\overset{\circ}{A}$, $infA\in\overset{\circ}{A}$;

(*Απάντηση:* ΟΧΙ)

Προβλήματα

1 Έστω $A\subset R$ και $-A=\{-x : x\in A\}$, δείξτε ότι:

α) αν το A είναι άνω φραγμένο τότε $supA=-inf(-A)$, β) αν το A είναι κάτω φραγμένο τότε $inf A = -sup(-A)$.

➡ α) Για κάθε πάνω φράγμα M του A το $-M$ είναι κάτω φράγμα του $-A$ γιατί για κάθε $x \in A$ ισχύει $x \leq M$, που είναι ισοδύναμο με το $-x \geq -M$.

Επομένως, το $-A$ είναι κάτω φραγμένο και έστω $\alpha = inf(-A)$ θα δείξουμε ότι $-\alpha = supA$.

Πράγματι, αν υπήρχε ένα πάνω φράγμα $-\alpha'$, με $-\alpha' < -\alpha$ τότε θα ήταν $\alpha' > \alpha$, και θα υπήρχε $-x \in (-A)$ τέτοιο ώστε $\alpha \leq -x < \alpha'$ (από τον ορισμό του *infimum*) $\Rightarrow -\alpha \geq x > -\alpha'$, $x \in A$.

Άρα το $-\alpha'$ δεν θα ήταν πάνω φράγμα του A.

β) Η απόδειξη είναι ανάλογη της α) περίπτωσης

2 Αν $\alpha < \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ τότε υπάρχουν άπειροι ρητοί αριθμοί ϱ στο διάστημα (α, β).

➡ Επειδή είναι $\beta - \alpha > 0$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε

$$n(\beta-\alpha) > 1 \quad \Rightarrow \quad n\beta > n\alpha + 1 \quad \text{(Αρχιμήδεια ιδιότητα).}$$

Για τον αριθμό $n\alpha$ υπάρχει ακέραιος αριθμός μ τέτοιος ώστε

$$\mu - 1 \leq n\alpha < \mu \quad \Rightarrow \quad \mu \leq n\alpha + 1 \quad \text{και} \quad n\alpha < \mu$$
$$\Rightarrow \quad n\alpha < \mu \leq n\alpha + 1,$$

οπότε έχουμε

$$n\beta > (\mu - 1) + 1 = \mu > n\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha < \frac{\mu}{n} < \beta.$$

Έτσι στο (α, β) υπάρχει ο ρητός $\varrho = \dfrac{\mu}{n}$ δηλ. $\alpha < \varrho < \beta$.

Με την ίδια απόδειξη στο (ϱ, β) και στο (α, ϱ) υπάρχει επίσης ρητός κ.τ.λ.

Επομένως, στο διάστημα (α, β) υπάρχουν άπειροι ρητοί αριθμοί.

3 Αν $\alpha < \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ τότε υπάρχουν άπειροι άρρητοι αριθμοί τ στο διάστημα (α, β).

➡ Αρκεί ν' αποδείξουμε ότι υπάρχει ένας και όπως στο πρόβλημα 2 αποδεικνύεται ότι υπάρχουν άπειροι άρρητοι στο (α, β).

Γνωρίζουμε (πρόβλημα 2) ότι υπάρχει ρητός αριθμός ϱ τέτοιος ώστε $\alpha < \varrho < \beta$.

Αρκεί λοιπόν να βρούμε έναν άρρητο αριθμό τ τέτοιο ώστε $0 < \tau < \beta - \varrho$, οπότε $\alpha < \varrho < \varrho + \tau < \beta$ και ο ζητούμενος άρρητος αριθμός θα είναι ο $\varrho + \tau$.

Για τους θετικούς αριθμούς $\beta - \varrho > 0$ και $\sqrt{2}$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε

$$n(\beta-\varrho) > \sqrt{2} \quad \text{(Αρχιμήδεια ιδιότητα).}$$

Έχουμε λοιπόν

$$\beta-\varrho > \frac{\sqrt{2}}{n} > 0 \ , \quad \text{όπου ο} \ \frac{\sqrt{2}}{n} \ \text{είναι άρρητος αριθμός.}$$

Επομένως, ο ζητούμενος άρρητος αριθμός στο (α, β) είναι ο $\varrho + \dfrac{\sqrt{2}}{n}$, γιατί ισχύει

$$\alpha < \varrho + \frac{\sqrt{2}}{n} < \beta.$$

Παρατήρηση 2 Είναι φανερό ότι αν $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, δηλαδή ο α είναι άρρητος αριθμός τότε και οι $-\alpha$, $\alpha^{-1} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, είναι άρρητοι αριθμοί.

Επίσης το γινόμενο και το άθροισμα ρητού με άρρητο αριθμό είναι άρρητος αριθμός.

Αλλά δεν ισχύει το ίδιο για το γινόμενο άρρητου αριθμού με άρρητο, όπως π.χ. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$, όπου $\sqrt{2}$ άρρητος αριθμός και 2 ρητός αριθμός.

6. Ασκήσεις

1. Δίνονται τα σύνολα $A = [2, 5) \cup \{7\}$, $B = \{1\} \cup (4, 9)$. Να βρεθούν τα $\sup A$, $\inf A$, $\sup B$, $\inf B$.

2. Δίνεται το σύνολο $A = \{ |\alpha\beta| : -2 < \alpha \leq 5 \ , \ -4 \leq \beta \leq 3\}$.

Βρείτε, αν υπάρχουν, το $\sup A$, $\inf A$ και εξετάστε αν ανήκουν ή όχι στο A.

3. Αν A, B είναι υποσύνολα του $\mathbb{R}$, δείξτε ότι ισχύουν:

i) A κλειστό σύνολο $\Leftrightarrow A = \overline{A}$, ii) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$,

iii) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$, , iv) $(A \cap B)^\circ = \mathring{A} \cap \mathring{B}$,

v) $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset (A \cup B)^\circ$.

4. Αν $\mathring{A}$ είναι το εσωτερικό του συνόλου A, δείξτε ότι

i) το $\mathring{A}$ περιέχει κάθε ανοικτό υποσύνολο του A,

ii) το $\mathring{A}$ είναι ίσο με την ένωση όλων των ανοικτών υποσυνόλων του A.

5. Αν τα σύνολα A, B είναι φραγμένα του $\mathbb{R}$, τότε και το σύνολο

$$A+B = \{x+y : x \in A\,,\, y \in B\}$$

είναι φραγμένο και μάλιστα

$$sup(A+B) = supA+supB \quad , \quad inf(A+B) = infA+infB\,.$$

Αν επί πλέον τα A, B έχουν μόνον θετικούς αριθμούς, το

$$AB = \{xy : x \in A\,,\, y \in B\}$$

είναι φραγμένο και είναι

$$supAB = supA\, supB \;\;,\;\; infAB = infA\, infB.$$

6. Αν τα μη κενά σύνολα A, B του $\mathbb{R}$ είναι φραγμένα τότε ισχύουν

$$sup(A \cup B) = max\,\{supA\,,\, supB\}\,,\; inf(A \cup B) = min\{infA\,,\, infB\}$$

και $sup(A \cap B) \le min\{supA\,,\, supB\}\,,\;\; inf(A \cap B) \ge max\{infA\,,\, infB\}.$

7. Αν $A, B \subset \mathbb{R}$ είναι μη κενά σύνολα $A \subset B$ και το B είναι φραγμένο προς τα πάνω (αντ. προς τα κάτω) τότε το σύνολο, A είναι επίσης φραγμένο προς τα πάνω (αντ. προς τα κάτω) και ισχύει

$$supA \le supB \;\; (\text{αντ. } infA \ge infB).$$

8. Αν είναι $x_1>0,\; x_2>0, \dots x_n>0$ και $x_1 x_2 \dots x_n=1$ τότε ισχύει

$$x_1+x_2+ \dots + x_n \ge n.$$

Στη συνέχεια δείξτε ότι

$$\frac{x_1+x_2+ \dots +x_n}{n} \ge \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \dots \cdot x_n} \ge \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+ \dots + \frac{1}{x_n}}\,.$$

(Σημειώνουμε ότι οι αριθμοί

$$\frac{x_1+x_2 + \dots x_n}{n}\;,\quad \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}\,,\quad \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+ \dots + \frac{1}{x_n}}$$

λέγονται *αριθμητικός*, *γεωμετρικός* και *αρμονικός μέσος* των $x_1, x_2, \dots, x_n$, αντίστοιχα.)

9. Αν είναι $0<\alpha<\beta$ και $0<\gamma<\delta$, τότε $\alpha\gamma<\beta\delta$ και

$$\forall \in \mathbb{N} \;\; \text{ισχύει} \;\; \alpha^n < \beta^n.$$

Δείξτε ότι, για κάθε πραγματικό αριθμό $\alpha>0$ και φυσικό αριθμό n, υπάρχουν $\alpha_1>0$, $\alpha_2>0$ τέτοιοι ώστε $\alpha_2^n<\alpha<\alpha_1^n$.

10. Αν $\alpha>0$ και $s>0$ άρρητος αριθμός τότε το σύνολο

$$A=\{\alpha^x/x\in\mathbb{Q}^+ \text{ (θετικοί ρητοί) και } x<s\}$$

είναι φραγμένο.

Αν $\alpha>1$ *το* $supA$ λέγεται *δύναμη του* α *με εκθέτη* s και γράφεται

$$\alpha^s=supA.$$

Αντίστοιχα, αν $0<\alpha<1$ το $infA$ λέγεται *δύναμη του* α *με εκθέτη* s και γράφεται $\alpha^s=infA$.

Όταν είναι $s<0$ άρρητος αριθμός τότε *η δύναμη του* α *με εκθέτη τον* s είναι $\alpha^s=\dfrac{1}{\alpha^{-s}}$.