ΘΩΜΑ ΚΥΒΕΝΤΙΔΗ

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

ΤΟΜΟΣ ΤΡΙΤΟΣ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Οι γενικές ιδέες αυτού του συγγράμματος έχουν παρουσιαστεί στην εισαγωγή του πρώτου τόμου. Εδώ θα περιοριστώ στην ύλη που παρουσιάζεται σ' αυτόν τον τρίτο τόμο.

Στο κεφάλαιο 1 περιέχεται η θεωρία των διανυσματικών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων που είναι χρήσιμη για την ανάπτυξη του κεφαλαίου 2 το οποίο αναφέρεται στην ευστάθεια των λύσεων διαφορικών εξισώσεων.

Αναπτύσσονται ποιοτικές μέθοδοι που επιτρέπουν να ερευνήσουμε μερικές ιδιότητες των λύσεων, και κυρίως τις ιδιότητες της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς, χωρίς νάχουν υπολογιστεί αυτές οι λύσεις. Η απ' ευθείας μέθοδος του **Liapunov** *αναφέρεται στο κεφάλαιο 2, καθώς επίσης και τα κυριότερα θεωρήματα πάνω στην ευστάθεια σε πρώτη γραμμική προσέγγιση.*

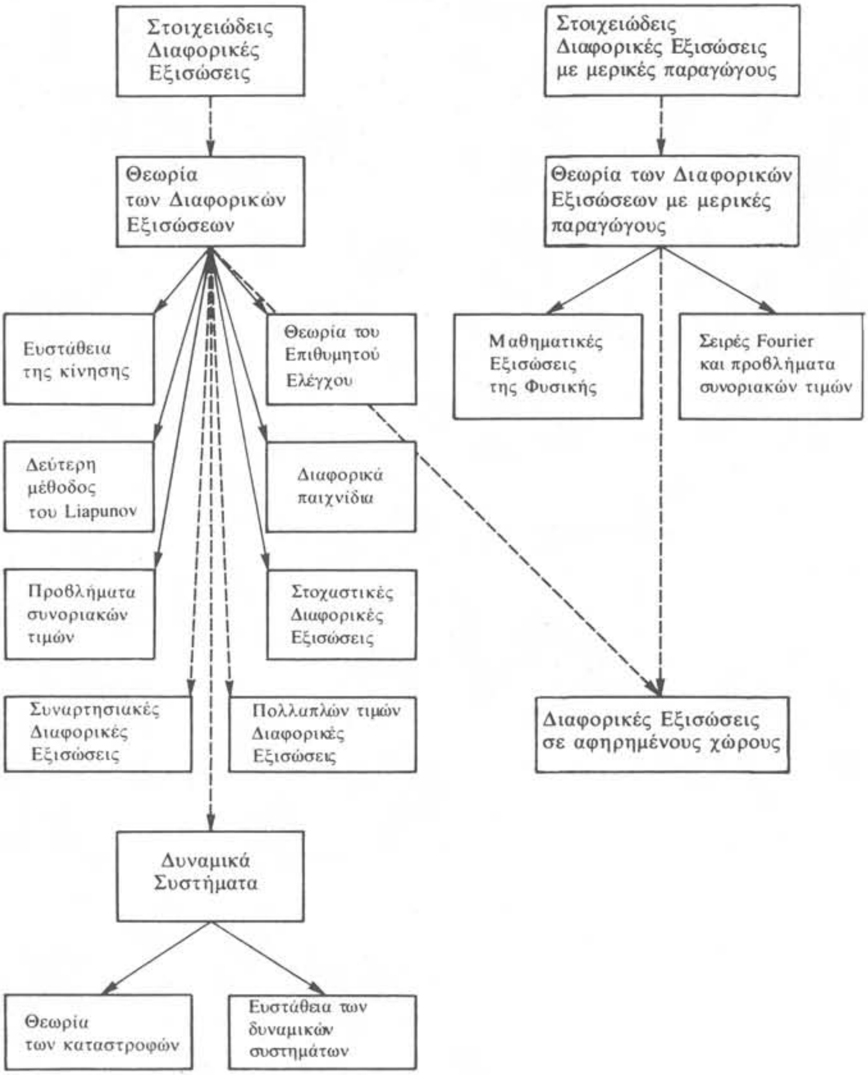
Στο κεφάλαιο 3 παρουσιάζεται το καθαρά θεωρητικό μέρος των διαφορικών εξισώσεων (θεωρήματα ύπαρξης και επέκτασης των λύσεων, σύγκριση των λύσεων, προσεγγιστικές μέθοδοι) που για ένα μη μαθηματικό φαίνεται δύσκολο και από πρακτική άποψη τον ενδιαφέρουν λίγο οι αποδείξεις των θεωρημάτων. Γι' αυτόν εξάλλου το λόγο τοποθέτησα το κεφάλαιο 3 μετά την ευστάθεια των λύσεων, κι' όχι στη θέση του κεφαλαίου 1 όπου είναι η ορθόδοξη θέση του.

Στα παραρτήματα περιέχονται όλες οι βασικές έννοιες της τοπολογίας και της γραμμικής άλγεβρας που χρησιμοποιούνται για την ανάπτυξη της θεωρίας αυτού του τόμου.

Ελπίζω ο τόμος αυτός να βοηθήσει αυτούς που θέλουν να εφαρμόσουν, με κάποια αυστηρότητα, τη σύγχρονη θεωρία των διαφορικών εξισώσεων, χωρίς να επεκταθούν πολύ σε θεωρητικές διαδικασίες, και αυτούς που θέλουν να συνεχίσουν τη μελέτη της. Οι τελευταίοι μπορούν να συμβουλευτούν την παράγραφο των υποδείξεων για παραπέρα μελέτη.

Θεσσαλονίκη, 1985 *Θ. ΚΥΒΕΝΤΙΔΗΣ*

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΤΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ



ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΤΡΙΤΟΥ ΤΟΜΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΤΩΝ ΛΥΣΕΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ
ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ LIAPUNOV

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΥΠΑΡΞΗΣ ΚΑΙ ΜΟΝΑΔΙΚΟΤΗΤΑΣ ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΤΩΝ ΛΥΣΕΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

1. Εισαγωγή

Για την ανάπτυξη της θεωρίας των γραμμικών δ.ε. θα χρειαστούμε τον εκθετικό πίνακα e^A, όπου A τετραγωνικός πίνακας διάστασης $n \times n$, και στοιχεία λογισμού πινάκων, γι' αυτό και θα τ' αναφέρουμε σύντομα.

(Βλέπε και τα Παραρτήματα *IV, V*).

I. Εκθετικός πίνακας e^A.

Είναι γνωστό ότι οι πίνακες A, διάστασης $n \times n$ (τετραγωνικοί), με τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού με αριθμό των πινάκων (Παράρτημα *V*) αποτελούν *διανυσματικό χώρο διάστασης* n^2.

Ορίζουμε μια *νορμική* (μήκος) *πίνακα A* ως εξής:

$$\| A \| = \sup_{|x| \leq 1} \frac{|Ax|}{|x|} = \sup_{|x| = 1} |Ax| \qquad \text{ή} \qquad \|A\| = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

όπου $A = [a_{ij}]$ και $|x|$ μια νορμική στο R^n.

Τα στοιχεία a_{ij} του πίνακα A είναι πραγματικοί ή μιγαδικοί αριθμοί. Εύκολα αποδείχνονται οι σχέσεις:

$$(i) \ \|A+B\| \leq \|A\| + \|B\| \,, \qquad (ii) \ \|AB\| \leq \|A\| \, \|B\| \,.$$

Επομένως, έχουμε $\|A^m\| \leq \|A\|^m$, όπου $A^m = A \cdot A^{m-1}$ και $m \in N$.

Ο νορμικός χώρος των πινάκων, όπως ορίστηκε παραπάνω, είναι πλήρης χώρος (δηλ. κάθε ακολουθία Cauchy του χώρου αυτού συγκλίνει).

Η σειρά πινάκων $\sum_{m=1}^{\infty} A_m$ *συγκλίνει, κατά νορμική, όταν η σειρά* $\sum_{m=1}^{\infty} u_m$, *όπου* $u_m = \|A_m\|$, *συγκλίνει (Κριτήριο του Weirstrass).*

Επομένως, η σειρά $M_n + A + \frac{1}{2!}A^2 + \dots + \frac{1}{m!}A^m + \dots$ συγκλίνει, κατά νορμική, για κάθε πίνακα A με $\|A\| < a$, $a \in R^+$, και το άθροισμά της, που το σημειώνουμε e^A ή $exp\, A$, λέγεται *εκθετικός πίνακας*.

Ακόμη, επειδή εδώ έχουμε πλήρη χώρο, μια ακολουθία (A_k) πινάκων συγκλίνει, αν και μόνον αν ισχύει

$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in N$ τέτοιος, ώστε $\forall\ p, q > n_0$: $\|A_p - A_q\| < \varepsilon$.

Έχουμε $e^{M_n} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{M_n{}^m}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{M_n}{m!} = M_n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} = M_n e$, όπου M_n είναι ο μοναδιαίος πίνακας διάστασης $n \times n$.

Προσοχή! Η σχέση $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$ ισχύει μόνον όταν $AB = BA$.

Πραγματικά, λόγω της αντιμεταθετικότητας $AB = BA$, ισχύει ο τύπος του δυωνύμου

$$(A+B)^p = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{p}{m} A^m B^{p-m},$$

οπότε έχουμε

$$e^A \cdot e^B = \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m}{m!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B^n}{n!} \right) = \sum_{m,\, n=0}^{\infty} \frac{A^m B^n}{m!\, n!} =$$

$$= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \sum_{m=0}^{p} \binom{p}{m} A^m B^{p-m} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(A+B)^p}{p!} = e^{A+B}.$$

Η αναδιάταξη των σειρών επιτρέπεται επειδή οι σειρές e^A και e^B συγκλίνουν απόλυτα.

Επίσης, ισχύουν οι σχέσεις:

α) $e^{t_1 A + t_2 A} = e^{t_1 A} \cdot e^{t_2 A}$, $t_1, t_2 \in R$ ή $\mathbb{C}$

β) $(e^{tA})^{-1} = e^{-tA}$, $t \in R$ ή $\mathbb{C}$

γ) $(e^{tA})^m = e^{mtA}$, $m = 1, 2, 3, \dots$, $t \in R$ ή $\mathbb{C}$

δ) $e^{\Theta} = M_n$, όπου Θ ο μηδενικός πίνακας διάστασης $n \times n$.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η σειρά $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m A^m}{m!}$ συγκλίνει κατά νορμική, για κάθε $|t| < +\infty$, $\|A\| < a$, $a \in R^+$, γιατί είναι

$$\left\| \frac{t^m A^m}{m!} \right\| \le \frac{|t|^m \|A\|^m}{m!} \quad \text{και} \quad \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|t|^m \|A\|^m}{m!} = e^{|t|\, \|A\|}.$$

Το άθροισμα αυτής της σειράς το σημειώνουμε e^{tA} δηλ. έχουμε

$$e^{tA} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m A^m}{m!}$$

για κάθε $|t|<+\infty$, $\|A\| < a$, $a \in R^+$.

Παράδειγμα 1. Όταν ο πίνακας A είναι διαγώνιος

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

τότε έχουμε

$$A^2 = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^2 \end{bmatrix}, \dots, A^m = \begin{bmatrix} \lambda_1^m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^m & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^m \end{bmatrix}, \dots$$

Επομένως, είναι

$$e^{tA} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m A^m}{m!} = \begin{bmatrix} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m \lambda_1^m}{m!} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m \lambda_2^m}{m!} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m \lambda_n^m}{m!} \end{bmatrix}$$

ή ακόμη

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} e^{t\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{t\lambda_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{t\lambda_n} \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα 2. Όπως στο παραπάνω παράδειγμα 1, αποδείχνεται ότι, αν ο πίνακας A έχει την κανονική μορφή του *Jordan* (βλέπε Παράρτημα *V*), τότε έχουμε

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} e^{tM_1} & & & \\ & e^{tM_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{tM_r} \end{bmatrix}$$

όπου

$$e^{tM_i} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_i t} & te^{\lambda_i t} & \frac{t^2}{2!} e^{\lambda_i t} & \dots & \frac{t^{q_i - 1}}{(q_i - 1)!} e^{\lambda_i t} \\ 0 & e^{\lambda_i t} & te^{\lambda_i t} & \dots & \frac{t^{q_i - 2}}{(q_i - 2)!} e^{\lambda_i t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_i t} \end{bmatrix}.$$

ΙΙ. Παραγώγιση και ολοκλήρωση πινάκων.

Αν είναι $A(t) = [a_{ij}(t)]_{n \times n}$, $t \in I \subset R$, ορίζουμε την παράγωγο του πίνακα $A(t)$ ως εξής:

$$\frac{d}{dt} A(t) = \left[\frac{da_{ij}(t)}{dt} \right]_{n \times n}.$$

Επομένως, έχουμε

$$\frac{d}{dt} [A(t) + B(t)] = \frac{d}{dt} A(t) + \frac{d}{dt} B(t)$$

$$\frac{d}{dt} [A(t)\, B(t)] = \left[\frac{d}{dt} A(t) \right] B(t) + A(t) \left[\frac{d}{dt} B(t) \right].$$

Όταν ο πίνακας $A(t) = [a_{ij}(t)]_{n \times n}$ είναι αντιστρέψιμος και υπάρχει η παράγωγός του ως προς t, τότε ο αντίστροφος πίνακας $A^{-1}(t)$ είναι, επίσης, παραγωγίσιμος ως προς t και επειδή

$$A(t)\, A^{-1}(t) = M_n$$

έχουμε

$$\left(A^{-1}(t)\right)' = -A^{-1}(t)\, A'(t)\, A^{-1}(t).$$

($A'(t)$ εδώ σημαίνει παράγωγο ως προς t).

Ορίζουμε την ολοκλήρωση του πίνακα $A(t)$ ως εξής:

$$\int A(t)\,dt = \left[\int a_{ij}(t)\,dt\right]_{n\times n}, \qquad \int_{t_0}^{t} A(s)\,ds = \left[\int_{t_0}^{t} a_{ij}(s)\,ds\right]_{n\times n}.$$

III. Παραγώγιση ορίζουσας.

Έστω ο πίνακας $\Phi(t) = [\varphi_{ij}(t)]_{n\times n}$ και $W(t) = |\Phi(t)|$ η ορίζουσά του. Η παράγωγος της ορίζουσας $W(t)$ δίνεται από τον τύπο

$$W'(t) = W_1(t) + W_2(t) + \dots + W_n(t)$$

όπου $W_i(t)$ είναι η ορίζουσα που έχει την i-γραμμή (ή i-στήλη) παραγωγισμένη ως προς t, ενώ οι άλλες γραμμές (ή στήλες) παραμένουν όπως είναι.

Θεωρούμε την ορίζουσα $W(t) = |\Phi(t)| = |[\varphi_{ij}(t)]_{n\times n}|$ ως συνάρτηση όλων των n^2 στοιχείων της $\varphi_{ij}(t)$, $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Επειδή όμως είναι

$$W(t) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij}(t)\,\Phi_{ij}(t),$$

όπου $\Phi_{ij}(t)$ το αλγεβρικό συμπλήρωμα του στοιχείου $\varphi_{ij}(t)$, προκύπτει

$$\frac{\partial W(t)}{\partial \varphi_{ij}} = \Phi_{ij}.$$

Παραγωγίζοντας λοιπόν την $W(t)$ ως προς t, θεωρώντας την ως σύνθετη συνάρτηση, παίρνουμε

$$W'(t) = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial W(t)}{\partial \varphi_{ij}}\,\varphi'_{ij}(t)\Big) = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} \Phi_{ij}\,\varphi'_{ij}\Big) = \sum_{i=1}^{n} W_i(t).$$

ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΩΝ ABEL-LIOUVILLE: *Δίνονται οι πίνακες* $A(t) = [a_{ij}(t)]$, $\Phi(t) = [\varphi_{ij}(t)]$, *διάστασης* $n\times n$, *των οποίων τα στοιχεία* $a_{ij}(t)$, $\varphi_{ij}(t)$ *είναι συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα* I *και οι οποίοι επαληθεύουν την εξίσωση*

$$\Phi'(t) = A(t)\,\Phi(t), \quad \text{για όλα τα } t \in I. \tag{1}$$

Τότε, η ορίζουσα $W(t) = |\Phi(t)|$ *ικανοποιεί τη δ.ε.*

$$W'(t) = \Big(\sum_{i=1}^{n} a_{ii}(t)\Big)\,W(t), \qquad \forall t \in I \tag{2}$$

και, για t_0, $t \in I$, *έχουμε*

$$W(t) = W(t_0)\, e^{\int_{t_0}^{t} tr\, A(s)\, ds} \tag{3}$$

όπου $tr\, A(s) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(s)$, *το ίχνος του πίνακα* $A(s)$.

Απόδειξη. Από την εξίσωση (1) έχουμε $\varphi'_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)\, \varphi_{kj}(t)$, οπότε η σχέση

$$W_i(t) = \sum_{j=1}^{n} \varphi'_{ij}(t)\, \Phi_{ij}(t)$$

γίνεται

$$W_i(t) = \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)\, \varphi_{kj}(t)\Big)\, \Phi_{ij}(t) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t) \Big(\sum_{j=1}^{n} \varphi_{kj}(t)\, \Phi_{ij}(t)\Big) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)\, \delta_{ki}\, W(t) = a_{ii}(t)\, W(t)\,.$$

(δ_{ki} είναι το δέλτα του *Kronecker* δηλ. $\delta_{ki}=0$, όταν $k \neq i$ και $\delta_{ki}=1$, όταν $k=i$).

Επομένως, έχουμε $W'(t) = \Big(\sum_{i=1}^{n} a_{ii}(t)\Big)\, W(t)$, $\forall\, t \in I$ (2), οπότε, με ολοκλήρωση από t_0 έως t, προκύπτει η σχέση (3). □

Παρατήρηση. Από τη σχέση (3) προκύπτει πώς, όταν η ορίζουσα $W(t)$, $t \in I$, είναι διάφορη του μηδενός σ' *ένα* σημείο $t_0 \in I$, τότε είναι διάφορη του μηδενός *σ' όλα* τα σημεία του I, πράγμα που έχει μεγάλη πρακτική αξία. □

Παραγωγίζοντας τον πίνακα e^{tA} ως προς t, όπου A είναι σταθερός πίνακας, παίρνουμε

$$\frac{d}{dt}\, e^{tA} = \frac{d}{dt} \Big(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m A^m}{m!} \Big) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m t^{m-1} A^m}{m!} = A \sum_{m=1}^{\infty} \frac{t^{m-1} A^{m-1}}{(m-1)!} = A e^{tA}$$

δηλ. ο πίνακας e^{tA} ικανοποιεί την εξίσωση $(e^{tA})' = Ae^{tA}$, οπότε, σύμφωνα με το θεώρημα των *Abel-Liouville*, έχουμε

$$|\, e^{(t-t_0)A} \,| = e^{(t-t_0)\, tr A}$$

και, για $t - t_0 = 1$, προκύπτει

$$|\, e^{A} \,| = e^{tr A}\,.$$

Όταν όμως ο πίνακας A δεν είναι σταθερός, τότε

$$\left(e^{\int_{t_0}^{t} A(s)\,ds}\right)' = (e^{\upsilon(t)})'_t = (e^{\upsilon(t)})'_\upsilon \left(\int_{t_0}^{t} A(s)\,ds\right)'_t = e^{\int_{t_0}^{t} A(s)\,ds}\,A(t)$$

που, γενικά, είναι διάφορο του $A(t)\,exp\int_{t_0}^{t} A(s)\,ds$.

Επομένως, μόνο όταν οι πίνακες $A(t)$ και $exp\int_{t_0}^{t} A(s)\,ds$ είναι αντιμεταθετοί, ο πίνακας $exp\int_{t_0}^{t} A(s)\,ds$ επαληθεύει τη δ.ε. $\dot{x} = A(t)\,x$.

Γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος των Abel-Liouville.

ΟΡΙΣΜΟΣ: *Λέμε* ορίζουσα της γραμμικής συνάρτησης $L: R^n \to R^n$ *την ορίζουσα του πίνακα A της L ως προς την ορθομοναδιαία βάση $e_1, \ldots, e_n$, και τη σημειώνουμε $det\,A$ ή $|A|$.*

Η ορίζουσα του πίνακα A της συνάρτησης L δεν εξαρτάται από τη βάση.

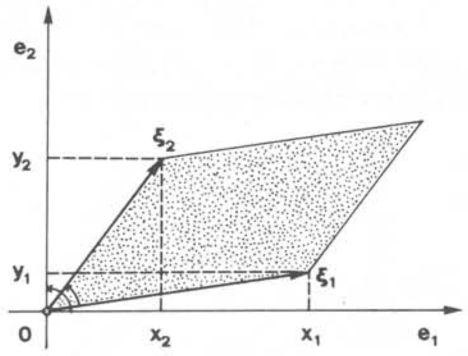
Πραγματικά, ο πίνακας της L ως προς μια άλλη βάση, είναι γνωστό, ότι είναι της μορφής $T^{-1}AT$, οπότε $|T^{-1}AT| = |A|$.

Η ορίζουσα ενός πίνακα είναι ο προσανατολισμένος όγκος του παραλληλεπιπέδου που οι ακμές του είναι οι στήλες του πίνακα.

Π.χ. για $n=2$, η ορίζουσα $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$ είναι το εμβαδό του παραλληλογράμμου που δημιουργείται από τα διανύσματα

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix},$$

με πρόσημο σύν, όταν η διάταξη (ξ_1, ξ_2) είναι ίδια με τη διάταξη της βάσης (e_1, e_2), αλλιώς με το πρόσημο μείον.



Η i-στήλη του πίνακα A της γραμμικής συνάρτησης L ως προς τη βάση $e_1, e_2, \ldots, e_n$ είναι οι συντεταγμένες της εικόνας $L(e_i)$ του e_i διανύσματος της βάσης.

Επομένως, η ορίζουσα της γραμμικής συνάρτησης L είναι ο προσανατολισμένος όγκος της εικόνας του μοναδιαίου κύβου (παραλληλεπιπέδου με ακμές $e_1, e_2, \ldots, e_n$*) με την απεικόνιση L.*

Έστω η δ.ε. $\dot{x}=Ax$ (1), όπου $x \in R^n$ και A σταθερός πίνακας $n \times n$.

Σύμφωνα με τα προηγούμενα και το θεώρημα των *Abel-Liouville* έχουμε

$$|e^{tA}| = e^{t \cdot tr A}. \quad (\text{Θέσαμε } t_0=0)$$

Γεωμετρικά αυτό σημαίνει πώς, *με την επίδραση της δ.ε. (1) (δηλ. της απεικόνισης* $x \to e^{tA}x$*) ο όγκος οποιουδήποτε σχήματος πολλαπλασιάζεται με το συντελεστή* e^{at}, *όπου* $a = tr\, A$.

Π.χ. ας θεωρήσουμε τη δ.ε.

$$\ddot{x} = -x+k\dot{x}, \quad x \in R$$

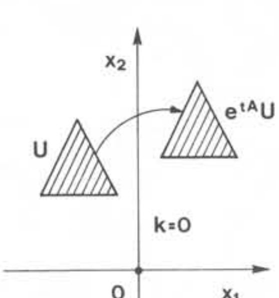
του εκκρεμούς, με συντελεστή τριβής $-k$, που είναι ισοδύναμη με το σύστημα δ.ε.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1+kx_2, \end{aligned} \qquad (2)$$

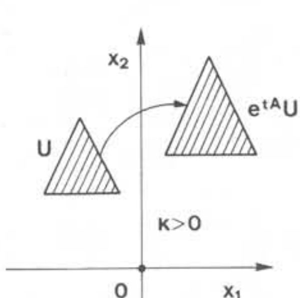
με πίνακα
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & k \end{bmatrix}.$$

Εδώ έχουμε $tr\, A=k$, οπότε, με την επίδραση της δ.ε.(1), το εμβαδό οποιουδήποτε σχήματος πολλαπλασιάζεται με το συντελεστή e^{kt}.

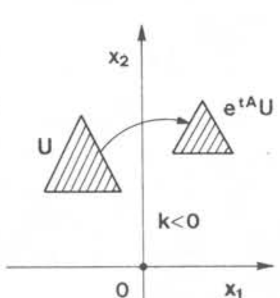
Επομένως, όταν είναι $k=0$ το εμβαδό διατηρείται (σχήμα 1) ενώ, όταν είναι $k>0$ το εμβαδόν αυξάνει (σχήμα 2) και όταν είναι $k<0$ το εμβαδόν ελαττώνεται (σχήμα 3).



Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3