ΘΩΜΑ ΚΥΒΕΝΤΙΔΗ

ΑΝΩΤΕΡΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΤΟΜΟΣ ΠΡΩΤΟΣ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

Κάθε γνήσιο αντίτυπο φέρει τη σφραγίδα του εκδότη

ΘΩΜΑΣ Α. ΚΥΒΕΝΤΙΔΗΣ

- Γεννήθηκε το 1947 στο Νέο Πετρίτσι του Ν. Σερρών.
- Το 1965 αποφοίτησε από το εξατάξιο Γυμνάσιο Σιδηροκάστρου του Ν. Σερρών και εγγράφηκε στο Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης.
- Πήρε το πτυχίο των Μαθηματικών το 1969.
- Αναγορεύτηκε διδάκτορας στο τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης το 1979 και από το 1972 μέχρι σήμερα εργάζεται σ' αυτό.

ISBN set 960-431-951-5
ISBN T.1 960-431-978-7

Ανατύπωση διορθωμένη 2009

www.ziti.gr

Φωτοστοιχειοθεσία Εκτύπωση
Π. ΖΗΤΗ & Σια ΟΕ
18ο χλμ Θεσσαλονίκης - Περαίας
Τ.Θ. 4171 • Περαία Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19
Τηλ.: 23920 72222 (10 γραμ.) - Fax: 23920 72229
e-mail: info@ziti.gr

Βιβλιοπωλείο
ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
Αρμενοπούλου 27 • 546 35 Θεσσαλονίκη
Τηλ. 2310 203720, Fax 2310 211305
e-mail: sales@ziti.gr

«Γνώμης δὲ δύο εἰσίν ἰδέαι, ἡ μὲν γνησίη, ἡ δὲ σκοτίη· και σκοτίης μὲν τάδε σύμπαντα, ὄψις, ἀκοή, ὀδμή, γεῦσις, ψαῦσις. Ἡ δὲ γνησίη, ἀποκεκριμένη δὲ ταύτης ... ὅταν ἡ σκοτίη μηκέτι δύνηται μήτε ὁρῆν ἐπ᾽ ἔλαττον μήτε ἀκούειν μήτε ὀδμᾶσθαι μήτε γεύεσθαι μήτε ἐν τῇ ψαύσει αἰσθάνεσθαι, ἀλλ᾽ ἐπὶ λεπτότερον δέῃ ζητεῖν, τότε ἐπιγίνεται ἡ γνησίη ἅτε ὄργανον ἔχουσα τοῦ νῶσαι λεπτότερον.»

[Υπάρχουν δύο είδη γνώσης, η γνήσια και η σκοτεινή. Στη σκοτεινή ανήκουν όλα αυτά: η όραση, η ακοή, η όσφρηση, η γεύση, η αφή. Το άλλο είδος γνώσης είναι η γνήσια, που διαφέρει τελείως από τη σκοτεινή ... Όταν η σκοτεινή γνώση δεν μπορεί πιά ούτε να βλέπει το πολύ μικρό, ούτε ν᾽ ακούει, ούτε να οσφραίνεται, ούτε να γεύεται, ούτε να αισθάνεται με την αφή, αλλά χρειάζεται ν᾽ αναζητηθεί κάτι λεπτότερο, τότε ακολουθεί η γνήσια γνώση γιατί το όργανό της, ο νούς, είναι λεπτότερο.]

ΔΗΜΟΚΡΙΤΟΣ (460 - 360 π.Χ.)

Αφιερώνεται
στους γονείς μου
Αναστάσιο και Σοφία

Πρόλογος

Η σειρά με τον τίτλο «Ανώτερα Μαθηματικά», που αποτελείται από τρεις τόμους, γράφηκε για να προσφέρει σε Μαθηματικούς και μη Μαθηματικούς, μια αξιόπιστη και σχετικά συνοπτική παρουσίαση βασικών θεμάτων των Μαθηματικών, και κυρίως της Μαθηματικής Ανάλυσης.

Τα θέματα που αναπτύσσονται αφορούν την Άλγεβρα, την Αναλυτική Γεωμετρία, τις Ακολουθίες και Σειρές πραγματικών αριθμών, το Διαφορικό και Ολοκληρωτικό Λογισμό συναρτήσεων μίας ή περισσοτέρων μεταβλητών, τη Διανυσματική Ανάλυση, τις Σειρές Fourier, τις Μιγαδικές Συναρτήσεις, τις Διαφορικές Εξισώσεις και τις Εξισώσεις Διαφορών.

Η παρουσίαση αυτών των θεμάτων γίνεται με απλό, κατανοητό και πρακτικό τρόπο, χωρίς όμως να βλάπτεται η μαθηματική αυστηρότητα.

Βέβαια ο απαιτητικός αναγνώστης θα πρέπει να ανατρέξει σε άλλα πιο ειδικά βιβλία πάνω στα θέματα αυτά, όπου υπάρχουν περισσότερες λεπτομέρειες και άλλη επιπλέον ύλη.

Ο πρώτος τόμος αποτελείται από πέντε κεφάλαια.

Στο πρώτο κεφάλαιο περιέχονται στοιχεία άλγεβρας από συνδυαστική ανάλυση, ορίζουσες, γραμμικά συστήματα και θεωρία πινάκων.

Στο δεύτερο κεφάλαιο περιέχονται στοιχεία αναλυτικής γεωμετρίας από συστήματα συντεταγμένων, διανυσματικό λογισμό, το επίπεδο $\mathbb{R}^2$, *το χώρο* $\mathbb{R}^3$, *κυλινδρικές και κωνικές επιφάνειες.*

Στο τρίτο κεφάλαιο περιέχονται βασικές έννοιες και κριτήρια σύγκλισης των ακολουθιών και σειρών πραγματικών αριθμών.

Στο τέταρτο Κεφάλαιο αναπτύσσονται βασικά θέματα του διαφορικού λογισμού συναρτήσεων μιας πραγματικής μεταβλητής, όπως το όριο, η συνέχεια, η παράγωγος, τα βασικά θεωρήματα του διαφορικού λογισμού, ο κανόνας του l' Hospital, οι σειρές του Taylor, τα μέγιστα και ελάχιστα συνάρτησης και η γραφική παράσταση συνάρτησης.

Στο πέμπτο κεφάλαιο αναπτύσσονται βασικά θέματα του ολοκληρωτικού λογισμού συναρτήσεων μιας πραγματικής μεταβλητής, όπως το ορισμένο και το αόριστο ολοκλήρωμα, οι βασικές τεχνικές της ολοκλήρωσης, ο κανόνας του Simpson (αριθμητική μέθοδος), η παραγώγιση και ολοκλήρωση ακολουθιών και σειρών συναρτήσεων, τα γενικευμένα ολοκληρώματα και οι εφαρμογές του ολοκληρώματος.

Στο Παράρτημα παρουσιάζονται συνοπτικά οι μερικές παράγωγοι, τα ακρότατα συνάρτησης δύο μεταβλητών, το διπλό και τριπλό ολοκλήρωμα, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα και ο τύπος του Green, το επιεπιφάνειο ολοκλήρωμα και οι τύποι του Stokes και του Gauss.

Κάθε κεφάλαιο περιέχει ασκήσεις των οποίων οι απαντήσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου.

Θεσσαλονίκη, 2005 Θ. ΚΥΒΕΝΤΙΔΗΣ

Περιεχόμενα

ΤΟΜΟΣ ΠΡΩΤΟΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1
ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ ΚΑΙ ΣΕΙΡΕΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΜΙΑΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΜΙΑΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ – ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ
ΔΙΠΛΟ ΚΑΙ ΤΡΙΠΛΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ
ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ – ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ GREEN
ΕΠΙΕΠΙΦΑΝΕΙΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ – ΤΥΠΟΣ STOKES –
ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ GAUSS

ΑΝΩΤΕΡΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΤΟΜΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6
ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ
ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7
ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ
ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8
ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

ΤΟΜΟΣ ΤΡΙΤΟΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9
I. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ
II. ΣΕΙΡΕΣ *FOURIER*

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10
ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11
ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 12
ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ

Βιβλία του συγγραφέα ΘΩΜΑ ΚΥΒΕΝΤΙΔΗ

Α. ***Διακριτά Μαθηματικά***

1. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΚΑΙ ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ, (σελ. 552, 2001).
2. ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΠΛΗΘΥΣΜΩΝ (*Διακριτά Μοντέλα*), (σελ. 164, 2001).

Β. ***Διαφορικές Εξισώσεις***

1. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ, *Τόμος Πρώτος*, (σελ. 480, 1987).
2. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ, *Τόμος Δεύτερος*, (σελ. 400, 1988).
3. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ, *Τόμος Τρίτος*, (σελ. 478, 1991), (*Ποιοτική Θεωρία Διαφορικών Εξισώσεων*).
4. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ (*Ασκήσεις*), (σελ. 560, 1998).
5. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ, (σελ. 512, 2007).
6. ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΠΛΗΘΥΣΜΩΝ (*Συνεχή Μοντέλα*), (σελ. 128, 1993).
7. ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ, (σελ. 320, 1994).
8. ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ *(υπό έκδοση, 2009)*.

Γ. ***Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός***

1. ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ
   Συναρτήσεων Μιας Πραγματικής Μεταβλητής,
   (*Τεύχος Πρώτο*, σελ. 640, 2001 – *Τεύχος Δεύτερο*, σελ. 312, 2001).
2. ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ
   Συναρτήσεων Μιας Πραγματικής Μεταβλητής, (σελ. 624, 2005).
3. ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ
   Συναρτήσεων Πολλών Μεταβλητών, (σελ. 240, 2007).

Δ. ***Σειρά Μαθηματικών***

1. ΑΝΩΤΕΡΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ, Τόμος Πρώτος, (σελ. 628, 2005).
   (Άλγεβρα, Αναλυτική Γεωμετρία, Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός)
2. ΑΝΩΤΕΡΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ, Τόμος Δεύτερος, (σελ. 616, 2006).
   (Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός Συναρτήσεων Πολλών Μεταβλητών)
3. ΑΝΩΤΕΡΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ, Τόμος Τρίτος, (σελ. 504, 2005).
   (Διανυσματική Ανάλυση, Σειρές Fourier, Μιγαδικές Συναρτήσεις, Διαφορικές Εξισώσεις, Εξισώσεις Διαφορών)

Ε. ***Τοπολογία***

1. ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ (*Ασκήσεις*), (σελ. 400, 1977).
2. ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ ΜΕΤΡΙΚΩΝ ΧΩΡΩΝ (*υπό έκδοση, 2009*).

1

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

1. Συνδυαστική ανάλυση

Η συνδυαστική ανάλυση είναι οι διάφοροι μέθοδοι και τύποι που χρησιμοποιούνται στη λύση προβλημάτων εκτίμησης του πλήθους των στοιχείων ενός πεπερασμένου συνόλου.

Κάθε στοιχείο του συνόλου παριστά μια από τις δυνατότητες με τις οποίες, κάτω από προϋποθέσεις, ένα ορισμένο έργο ή πείραμα μπορεί να ολοκληρωθεί. Χρησιμοποιούμε το σύμβολο $v!$ (v παραγοντικό) για v φυσικό αριθμό, που ορίζεται ως εξής $v! = 1 \cdot 1 \cdot 3 \ldots v$.

Ορίζουμε ως $0! = 1$.

1.1. Μεταθέσεις

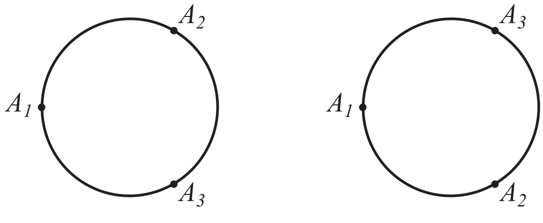
Αν θεωρήσουμε τρία στοιχεία $A_1, A_2, A_3,$ μπορούμε να τα τοποθετήσουμε σε ευθεία γραμμή με έξι τρόπους:

$$A_1 A_2 A_3 , \quad A_2 A_3 A_1 , \quad A_3 A_1 A_3 , \quad A_1 A_3 A_2 , \quad A_3 A_2 A_1 , \quad A_2 A_1 A_3 .$$

Οι έξι αυτοί τρόποι λέγονται *μεταθέσεις* των στοιχείων $A_1 A_2 A_3$.

Αλλά πάνω σε κύκλο τα τρία στοιχεία τοποθετούνται κατά δύο τρόπους.

Μεταθέσεις των v (διαφορετικών ή μερικών ίσων) στοιχείων $A_1, A_2, \ldots, A_v$ λέγονται οι διάφοροι τρόποι που μπορούμε να τοποθετήσουμε τα v αυτά στοιχεία σε ευθεία γραμμή ή σε κλειστή καμπύλη.



1.1α Απλές μεταθέσεις

Το πλήθος των μεταθέσεων των ν διαφορετικών στοιχείων σε ευθεία γραμμή το λέμε *απλές μεταθέσεις* και δίνεται από τον τύπο $M_\nu = \nu!$.

Πράγματι, δύο διαφορετικά στοιχεία A_1 και A_2 έχουν δύο δυνατές μεταθέσεις τις A_1A_2 και A_2A_1, δηλαδή είναι $M_\nu = 2 = 2!$.

Αν $M_{\nu-1}$ είναι οι απλές μεταθέσεις των $\nu-1$ στοιχείων, για κάθε μία απ αυτές, ένα νιοστό στοιχείο μπορεί να τοποθετηθεί σε σειρά μαζί με τα άλλα κατά ν διαφορετικούς τρόπους (μπροστά από το πρώτο στοιχείο, μεταξύ του πρώτου και του δεύτερου στοιχείου, κ.τ.λ.…).

Επομένως, είναι $M_\nu = \nu M_{\nu-1} = \nu\cdot(\nu-1)! = \nu!$ απλές μεταθέσεις.

Π.χ. επτά άνθρωποι είναι δυνατό να περιμένουν μπροστά σε μια θυρίδα με $7! = 5.040$ τρόπους.

1.1β Κυκλικές μεταθέσεις

Το πλήθος των μεταθέσεων ν διαφορετικών στοιχείων πάνω σε περιφέρεια κύκλου το λέμε *κυκλικές μεταθέσεις* των ν στοιχείων και δίνεται από τον τύπο $K_\nu = (\nu-1)!$.

Προφανώς, πάνω σε περιφέρεια κύκλου υπάρχουν ένας τρόπος τοποθέτησης δύο στοιχείων $K_2 = 1$ και δύο τρόποι τοποθέτησης τριών στοιχείων $K_3 = 2$.

Αν $K_{\nu-1}$ είναι οι κυκλικές μεταθέσεις των $\nu-1$ διαφορετικών στοιχείων, σε κάθε μία απ’ αυτές ένα νιοστό στοιχείο μπορεί να τοποθετηθεί κατά $\nu-1$ διάφορους τρόπους πάνω στην περιφέρεια του κύκλου, μαζί με τ’ άλλα στοιχεία, δηλαδή σ’ ένα από τα $\nu-1$ τόξου που χωρίζουν την περιφέρεια τα $\nu-1$ υπάρχοντα στοιχεία.

Άρα, είναι $K_\nu = (\nu-1)K_{\nu-1} = (\nu-1)(\nu-2)! = (\nu-1)!$

Π.χ. επτά άνθρωποι μπορούν να καθήσουν σ’ ένα στρογγυλό τραπέζι κατά $(7-1)! = 6! = 720$ τρόπους.

1.1γ Μεταθέσεις με επανάληψη

Το πλήθος των μεταθέσεων των ν στοιχείων, από τα οποία k_1 είναι όμοια μεταξύ τους, k_2 είναι όμοια μεταξύ τους$,\dots,k_m$ είναι όμοια μεταξύ τους (προφανώς είναι $k_1 + k_2 + \dots + k_m = \nu$), το λέμε *μεταθέσεις με επανάληψη* των ν στοιχείων, και δίνεται από τον τύπο

$$M_\nu^{k_1,k_2,\dots,k_m} = \frac{\nu!}{k_1!\,k_2!\dots k_m!}.$$

Πράγματι, είναι $M_{k_1} = k_1!,\ M_{k_2} = k_2!, \ldots, M_{k_m} = k_m!$ οπότε έχουμε

$$M_{\nu}^{k_1, k_2, \ldots, k_m} \cdot M_{k_1} \cdot M_{k_2} \ldots M_{k_m} = M_{\nu}.$$

Π.χ. το πλήθος των εξαψήφιων αριθμών που έχουν τα ίδια ψηφία με τον αριθμό 235653 είναι

$$M_6^{2,2} = \frac{6!}{2!2!} = \frac{720}{4} = 180,$$

αφού στον αριθμό έχουμε δύο φορές το 3 και δύο φορές το 5.

1.2. Συνδυασμοί – Διώνυμο του Νεύτωνα

Θεωρούμε τέσσερα διαφορετικά στοιχεία $A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4$ και ζητάμε να βρούμε όλους τους τρόπους με τους οποίους μπορούμε να πάρουμε τρία διαφορετικά στοιχεία απ' αυτά, χωρίς όμως να ενδιαφέρει η σειρά με την οποία παίρνουμε τα τρία αυτά στοιχεία.

Οι τρόποι είναι τέσσερις:

$$A_1A_2A_3\ ,\quad A_1A_2A_4\ ,\quad A_1A_3A_4\ ,\quad A_2A_3A_4$$

ενώ π.χ. ο συνδυασμός $A_1A_2A_3$ έχει άλλες πέντε μεταθέσεις

$$A_2A_3A_1\ ,\quad A_3A_1A_2\ ,\quad A_1A_3A_2\ ,\quad A_3A_2A_1\ ,\quad A_2A_1A_3\ ,$$

αφού δεν ενδιαφέρει η σειρά με την οποία παίρνουμε τα τρία στοιχεία σε κάθε συνδυασμό.

Με ανάλογο τρόπο προκύπτουν οι συνδυασμοί $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ στοιχείων.

1.2α Απλοί συνδυασμοί

Απλοί συνδυασμοί των ν διαφορετικών στοιχείων ανά $\mu\ (\mu \le \nu)$ λέγονται οι διάφοροι τρόποι που μπορούμε να πάρουμε μ διαφορετικά στοιχεία από τα ν στοιχεία που δόθηκαν, χωρίς να ενδιαφέρει η σειρά με την οποία είναι τοποθετημένα σε σειρά τα μ στοιχεία σε κάθε συνδυασμό.

Το πλήθος των απλών συνδυασμών των ν στοιχείων ανά μ συμβολίζεται

$$\binom{\nu}{\mu}\ , \quad \text{και ισούται με} \quad \binom{\nu}{\mu} = \frac{\nu!}{\mu!(\nu-\mu)!},$$

όπως αποδεικνύεται στη συνέχεια.

Παίρνουμε έναν από τους συνδυασμούς $\binom{\nu}{\mu}$.

Από τα ν στοιχεία μένουν τότε τα υπόλοιπα $\nu-\mu \geq 0$ στοιχεία.

Τα $\nu-\mu$ στοιχεία μπορούν να μετατεθούν κατά $M_{\nu-\mu}=(\nu-\mu)!$ τρόπους.

Κάθε τέτοια μετάθεση, μαζί με το συνδυασμό που πήραμε, δημιουργεί μια δυνατή μετάθεση των ν στοιχείων. Δεν έχουν όμως εξαντληθεί όλες οι μεταθέσεις των ν στοιχείων. Για να γίνει αυτό πρέπει να πάρουμε υπόψη πως και τα μ στοιχεία του συνδυασμού που πήραμε μπορούν να μετατεθούν κατά $M_\mu=\mu!$ τρόπους.

Έχουμε λοιπόν

$$\binom{\nu}{\mu} M_{\nu-\mu} M_\mu = M_\nu \quad \Rightarrow \quad \binom{\nu}{\mu} = \frac{\nu!}{\mu!(\nu-\mu)!}.$$

Προφανώς $\binom{\nu}{\nu}=1$ και ορίζουμε $\binom{\nu}{0}=1$, αφού $0!=1$.

Π.χ. το πλήθος των εξαμελών επιτροπών, που είναι δυνατό να σχηματισθούν από μια ομάδα 15 ατόμων, είναι

$$\binom{15}{6} = \frac{15!}{6!9!} = 4.455\ .$$

Αποδεικνύονται εύκολα οι παρακάτω ιδιότητες:

i) $\binom{\nu}{\mu} = \binom{\nu}{\nu-\mu}$, ii) $\binom{\nu}{\mu} + \binom{\nu}{\mu+1} = \binom{\nu+1}{\mu+1}$,

iii) $\binom{\nu}{\mu+1} = \frac{\nu-\mu}{\mu+1}\binom{\nu}{\mu}$.

1.2β Συνδυασμοί με επανάληψη

Όταν επιτρέπεται στους συνδυασμούς των ν στοιχείων ανά μ, ένα δοσμένο στοιχείο από τα ν, να επαναλαμβάνεται μία ή δύο ή μέχρι το πολύ μ φορές, τότε έχουμε *συνδυασμούς με επανάληψη.*

Αποδεικνύεται ότι, το πλήθος των συνδυασμών με επανάληψη των ν στοιχείων ανά μ, δίνεται από τον τύπο

$$\binom{\nu+\mu-1}{\mu}=\frac{(\nu+\mu-1)!}{\mu!(\nu-1)!}.$$

Π.χ. το πλήθος των όρων ομογενούς πολυωνύμου ως προς x, y, z πέμπτου βαθμού, δηλαδή οι όροι του είναι της μορφής

$$A_{\kappa\lambda\mu}x^{\kappa}y^{\lambda}z^{\mu}, \quad \mu\varepsilon \quad \kappa+\lambda+\mu=5,$$

είναι

$$\binom{3+5-1}{5}=\binom{7}{5}=\frac{7!}{5!2!}=21.$$

1.2γ Διώνυμο του Νεύτωνα

Αν α, β είναι πραγματικοί ή μιγαδικοί αριθμοί και $\nu\in\mathbb{N}$, ισχύει ο τύπος *του διωνύμου του Νεύτωνα*

$$(\alpha+\beta)^{\nu}=\sum_{k=0}^{\nu}\binom{\nu}{k}\alpha^{\nu-k}\beta^{k}=$$

$$=\binom{\nu}{0}\alpha^{\nu}+\binom{\nu}{1}\alpha^{\nu-1}\beta+\ldots+\binom{\nu}{k-1}\alpha^{\nu+1-k}\beta^{k-1}+\binom{\nu}{k}\alpha^{\nu-k}\beta^{k}+\ldots+\binom{\nu}{\nu}\beta^{\nu}. \quad (1)$$

Προφανώς ο τύπος ισχύει για $\nu=1$.

'Εστω ότι ισχύει για ν, θα δείξουμε πως ισχύει και για $\nu+1$, δηλαδή

$$(\alpha+\beta)^{\nu+1}=\binom{\nu+1}{0}\alpha^{\nu+1}+\binom{\nu+1}{1}\alpha^{\nu}\beta+\ldots$$

$$\ldots+\binom{\nu+1}{k}\alpha^{\nu+1-k}\beta^{k}+\ldots+\binom{\nu+1}{\nu+1}\beta^{\nu+1}. \quad (2)$$

Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της (1) επί $\alpha+\beta$ και παίρνουμε

$$(\alpha+\beta)^{\nu+1}=\alpha^{\nu+1}+\ldots+\left[\binom{\nu}{k}+\binom{\nu}{k-1}\right]\alpha^{\nu+1-k}\beta^{k}+\ldots+\beta^{\nu+1}, \quad (3)$$

αλλά οι συντελεστές του όρου $\alpha^{\nu+1-k}\beta^{k}$ στους δύο τύπους (2) και (3) είναι ίσοι, επειδή ισχύει

$$\binom{\nu}{k}+\binom{\nu}{k-1}=\binom{\nu+1}{k}.$$

Αποδεικνύεται, ανάλογα, ότι ισχύει ο τύπος

$$(\alpha-\beta)^{\nu}=\sum_{k=0}^{\nu}(-1)^{k}\binom{\nu}{k}\alpha^{\nu-k}\beta^{k}\ . \qquad (4)$$

Εφαρμογή

Το πλήθος των υποσυνόλων δοσμένου συνόλου, με ν στοιχεία, είναι

$$\binom{\nu}{0}+\binom{\nu}{1}+\ldots+\binom{\nu}{k}+\ldots+\binom{\nu}{\nu}=2^{\nu}\ .$$

Αρκεί να θέσουμε $\alpha=\beta=1$ στον τύπο (1).

Επίσης έχουμε

$$\binom{\nu}{0}-\binom{\nu}{1}+\ldots+(-1)^{k}\binom{\nu}{k}+\ldots+(-1)^{\nu}\binom{\nu}{\nu}=0\ ,$$

αρκεί να θέσουμε $\alpha=\beta$ στον τύπο (4).

Παραδείγματα

1. Να βρεθεί το πλήθος των διαγωνίων ενός κυρτού πολυγώνου με $n\geq 4$ πλευρές.

➠ Οι συνδυασμοί των n πλευρών ανά δύο, μείον τις πλευρές n του κυρτού πολυγώνου, δίνουν το πλήθος των διαγωνίων.

Άρα, το πλήθος των διαγωνίων είναι

$$\binom{n}{2}-n=\frac{n!}{2!(n-2)!}-n=\frac{(n-3)n}{2}\ .$$

Π.χ. για $n=4$ έχουμε 2 διαγωνίους.

2. Να βρεθεί ο συντελεστής του x^{6} στα διώνυμα $(x+5)^{8},\ (3x+2)^{7}$.

➠ Ο τύπος του διωνύμου του Νεύτωνα είναι

$$(\alpha+\beta)^{\nu}=\sum_{k=0}^{\nu}\binom{\nu}{k}\alpha^{\nu-k}\beta^{k}\ .$$

Επομένως έχουμε:

α) στο διώνυμο $(x+5)^8$ ο ζητούμενος συντελεστής βρίσκεται από τον όρο

$$\binom{8}{2}x^{8-2}5^2 ,$$

οπότε είναι $\quad 5^2\binom{8}{2}=5^2\dfrac{8!}{2!6!}=700$.

β) στο διώνυμο $(3x+2)^7$ ο ζητούμενος συντελεστής βρίσκεται από τον όρο

$$\binom{7}{1}(3x)^{7-1}\cdot 2 ,$$

οπότε είναι $\quad 2\cdot 3^6\binom{7}{1}=14\cdot 3^6=14\cdot 729=10.206$.

3. Να δειχθεί η ταυτότητα $(m\le n)$.

$$\binom{n+m}{m}=1+\binom{n}{1}\binom{m}{1}+\binom{n}{2}\binom{m}{2}+\ldots+\binom{n}{m}\binom{m}{m}.$$

➠ Από το διώνυμο του Νεύτωνα έχουμε

$$(1+x)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\ldots+\binom{n}{m-1}x^{m-1}+\ldots$$

$$\ldots+\binom{n}{m}x^m+\binom{n}{m+1}x^{m+1}+\ldots+\binom{n}{n}x^n \qquad (1)$$

και

$$(1+x)^m=\binom{m}{0}+\binom{m}{1}x+\ldots+\binom{m}{m-1}x^{m-1}+\binom{m}{m}x^m . \qquad (2)$$

Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2), και παίρνουμε

$$(1+x)^{n+m}=1+\ldots+\left[\binom{n}{0}\binom{m}{m}+\binom{n}{1}\binom{m}{m-1}+\binom{n}{2}\binom{m}{m-2}+\ldots+\binom{n}{m}\binom{m}{0}\right]x^m+$$

$$\ldots+\binom{n}{n}\binom{m}{m}x^{n+m}.$$

Αλλά ισχύει

$$\binom{m}{m-k}=\binom{m}{k},$$

οπότε ο m–στός συντελεστής της δύναμης x^m στο ανάπτυγμα $(1+x)^{n+m}$ είναι ο συνδυασμός

$$\binom{n+m}{m}$$

και προκύπτει η ζητούμενη ισότητα.

1.3. Διατάξεις

Αν έχουμε τρία διαφορετικά στοιχεία A_1, A_2, A_3 ενός συνόλου οι διατάξεις τους ανά δύο είναι

$$A_1A_2\ ,\quad A_1A_3\ ,\quad A_2A_3\ ,\quad A_2A_1\ ,\quad A_3A_1\ ,\quad A_3A_2\ .$$

Η διάταξη γενικότερα καθορίζεται από τις δύο αρχές:

i) καθορίζεται ποιό στοιχείο προηγείται (άρα και ποιό έπεται),

ii) αν το στοιχείο A_1 προηγείται του A_2, και το A_2 προηγείται του A_3, τότε το A_1 προηγείται του A_3.

1.3α Απλές διατάξεις

Απλές διατάξεις των ν διαφορετικών στοιχείων ν ανά $\mu\ (\mu \le \nu)$ λέγονται οι μεταθέσεις των συνδυασμών των ν στοιχείων ανά μ, δηλαδή το πλήθος των διατάξεων είναι

$$\Delta^{\nu}_{\mu}=\binom{\nu}{\mu}\mu! = \frac{\nu!}{(\nu-\mu)!} = \nu(\nu-1)\dots(\nu-\mu+1)\ .$$

Π.χ. οι τριψήφιοι αριθμοί που μπορούν να σχηματισθούν, με τρία διαφορετικά ψηφία, από τους αριθμούς $1, 2, 3, 4, 5$ είναι

$$\Delta^{5}_{3}=\frac{5!}{2!}=3\cdot 4\cdot 5=60\ .$$

1.3β Διατάξεις με επανάληψη

Το πλήθος των διατάξεων με επανάληψη των ν στοιχείων ανά μ (μ οποιοσδήποτε, $\mu \le \nu$ ή $\mu > \nu$) δίνονται από τον τύπο

$$\nu^{\mu}\ .$$

Π.χ. το πλήθος των τριψήφιων αριθμών στους οποίους δεν υπάρχει το μηδέν, άρα έχει στοιχεία με επανάληψη από τους αριθμούς *1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,* είναι $9^3 = 729$.

1.4. Εφαρμογή στις Πιθανότητες

Υποθέτουμε ότι ένα νόμισμα είναι ομογενές και ότι έχει απόλυτη συμμετρία, ώστε σε ρίψη του νομίσματος να μην ευνοείται καμία από τις όψεις του:

A «γράμματα» ή B «πρόσωπο».

Όταν ρίξουμε ένα τέτοιο νόμισμα, τότε οι δύο όψεις του A και B, είναι εξίσου «πιθανές» να εμφανισθούν.

Γι' αυτό λέμε ότι η «πιθανότητα» να εμφανισθεί η όψη A (ή B) είναι $\frac{1}{2}$, όπου οι δυνατές περιπτώσεις είναι *2* (εμφάνιση της όψης A, εμφάνιση της όψης B) και η ευνοϊκή περίπτωση για να εμφανισθεί η όψη A (ή B) είναι μία, σε μία ρίψη του νομίσματος.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1: Πιθανότητα $P(E)$ *ενός ενδεχομένου* E *λέγεται ο λόγος του αριθμού που παριστάνει τις ευνοϊκές περιπτώσεις να συμβεί το ενδεχόμενο* E *προς τον αριθμό που παριστάνει όλες τις δυνατές περιπτώσεις, όταν όλες οι δυνατές περιπτώσεις, ευνοϊκές ή δυσμενείς, είναι εξίσου πιθανές.*

Προφανώς ισχύει $0 \le P(E) \le 1$, με $P(E) = 0$ όταν το ενδεχόμενο E δεν είναι δυνατό να συμβεί και με $P(E) = 1$ όταν το ενδεχόμενο συμβαίνει πάντα, είναι δηλαδή «βέβαιο» ενδεχόμενο.

Π.χ. αν ρίξουμε ένα νόμισμα (με δύο όψεις A και B) τρεις φορές, τότε η πιθανότητα να έχουμε και στις τρεις ρίψεις την ίδια όψη A (ή B) είναι $\frac{1}{8}$, επειδή η ευνοϊκή περίπτωση είναι μία και όλες οι δυνατές περιπτώσεις είναι $2^3 = 8$ (διατάξεις με επανάληψη).

Γενικότερα, η πιθανότητα να εμφανισθεί (ανεξάρτητα από τη σειρά εμφάνισης) k φορές η όψη A και $n-k$ φορές η όψη B , σε n ρίψεις του νομίσματος (ή που είναι το ίδιο: k φορές η όψη B και $n-k$ φορές η όψη A), ισούται με

$$P(A^k B^{n-k}) = P(A^{n-k} B^k) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{k}.$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 2: *Δύο ενδεχόμενα* E_1 *και* E_2 *λέγονται* ανεξάρτητα, *όταν η πραγματοποίηση του ενός δεν επηρεάζει την πραγματοποίηση του άλλου.*

Σ' αυτήν την περίπτωση έχουμε $P(E_1E_2) = P(E_1)P(E_2)$.

Π.χ. ένα ζάρι έχει έξι πλευρές, άρα έξι ενδεχόμενα εμφάνισης σε μία ρίψη.

Αν λοιπόν ρίξουμε δύο ζάρια η πιθανότητα το ένα να δείξει *2* και το άλλο *5* είναι

$$P(E_1)P(E_2) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{36}.$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 3: *Η πιθανότητα πραγματοποίησης ενός ενδεχομένου* E_2*, αφού έχει πραγματοποιηθεί κάποιο άλλο ενδεχόμενο* E_1*, λέγεται* δεσμευμένη *πιθανότητα και γράφεται* $P(E_2/E_1)$.

Αν N είναι όλες οι δυνατές περιπτώσεις και N_E οι ευνοϊκές περιπτώσεις του ενδεχομένου E, τότε έχουμε

$$P(E_2/E_1) = \frac{P(E_1E_2)}{P(E_1)}.$$

Πράγματι, έχουμε

$$P(E_1E_2) = \frac{N_{E_1E_2}}{N} = \frac{N_{E_1}}{N}\cdot\frac{N_{E_1E_2}}{N_{E_1}} = P(E_1)P(E_2/E_1).$$

Π.χ. αν από ένα κιβώτιο, το οποίο έχει *4* λευκές και *3* μαύρες σφαίρες, πάρουμε διαδοχικά δύο σφαίρες και δούμε πως το πρώτο είναι λευκό, η πιθανότητα να είναι και το δεύτερο λευκό είναι

$$P(E_1E_2) = P(E_1)P(E_2/E_1) = \frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6} = \frac{2}{7}.$$

Παραδείγματα

1. Η πιθανότητα ενός παίκτη του ΠΡΟ–ΠΟ, να κερδίσει *13*-άρι όταν παίζει *16* στήλες είναι

$$\frac{16}{3^{13}},$$

όπου 3^{13} είναι όλες οι δυνατές περιπτώσεις στηλών.

➠ Αν ο παίκτης παίζει 6 «στάνταρ» που επαληθεύονται, τότε η πιθανότητα να κερδίσει 13-άρι, με 16 στήλες, είναι $16/3^7$.

Στο παιχνίδι του Τζόκερ όλοι οι δυνατοί συνδυασμοί των 5 αριθμών από τους 45 του πρώτου πεδίου είναι

$$\binom{45}{5} = \frac{45!}{5!40!} = \frac{41 \cdot 42 \cdot 43 \cdot 44 \cdot 45}{5!} = 41 \cdot 7 \cdot 43 \cdot 11 \cdot 9 = 1.221.759\,,$$

ενώ του δεύτερου πεδίου, από τους 20 αριθμούς να βγεί το Τζόκερ, είναι

$$\binom{20}{1} = 20\,.$$

Άρα, η πιθανότητα, η μία στήλη του Τζόκερ να κερδίσει είναι

$$\frac{1}{\binom{45}{5} \cdot \binom{20}{1}} = \frac{1}{(1.221.759) \cdot 20} = \frac{1}{24 \cdot 435.180}\,.$$

2. Μια κάλπη περιέχει 4 σφαίρες λευκές και 3 σφαίρες μαύρες. Εξάγουμε 3 σφαίρες. Ποιά η πιθανότητα:
α) να βγάλουμε 3 σφαίρες λευκές;
β) 1 σφαίρα λευκή και 2 μαύρες;

➠ Όλες οι δυνατές περιπτώσεις, όταν εξάγουμε 3 σφαίρες από τις $4+3=7$ σφαίρες της κάλπης, χωρίς να ενδιαφέρει η σειρά που βγαίνουν, είναι οι συνδυασμοί

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!4!} = 35\,.$$

α) Οι ευνοϊκές περιπτώσεις είναι

$$\binom{4}{3} = 4\,,$$

άρα η πιθανότητα είναι $\frac{4}{35}$.

β) Οι ευνοϊκές περιπτώσεις είναι

$$\binom{4}{1}\binom{3}{2} = 4 \cdot 3 = 12\,,$$

άρα η πιθανότητα είναι $\dfrac{12}{35}$.

1.5. Αρχή της απαρίθμησης – Δενδροδιάγραμμα

Όταν ζητάμε ν' απαριθμήσουμε τα στοιχεία ενός συνόλου σε n-άδες $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$, με την πρώτη συνιστώσα α_1 να έχει k_1 δυνατότητες (δηλαδή το α_1 γίνεται κατά k_1 διαφορετικούς τρόπους), η δεύτερη συνιστώσα α_2 να έχει k_2 δυνατότητες, τότε *κατά την αρχή της απαρίθμησης* το πλήθος αυτών των n-άδων είναι $k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \ldots k_n$.

Η απαρίθμηση γίνεται σε n διαδοχικά στάδια.

Μια αναλυτική μελέτη της αρχής της απαρίθμησης γίνεται στο βιβλίο:
Χ. ΜΩΫΣΙΑΔΗ, *«Συνδυαστική Απαρίθμηση»*, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη, 2002.

Παράδειγμα 1

Πόσους τετραψήφιους αριθμούς, περιττούς και μικρότερους του 5000 μπορούμε να σχηματίσουμε με τα ψηφία

$$0, 2, 4, 5, 6, 9$$

όταν η επανάληψη των στοιχείων δεν επιτρέπεται.

➠ Τα τέσσερα ψηφία δεν μπορούν αν εκλεγούν ανεξάρτητα με τη σειρά 1^o, 2^o, 3^o, 4^o.

Πράγματι, αν στα τρία πρώτα ψηφία εκλεγεί ένα 5 ή ένα 9 τότε το 4^o ψηφίο έχει δύο δυνατότητες (οι περιττοί αριθμοί *5*, *9*).

Αν όμως τα ψηφία εκλεγούν με τη σειρά 1^o, 4^o, 2^o, 3^o τότε η εκλογή κάποιων ψηφίων στα πρώτα στάδια δεν επηρεάζει τα επόμενα.

Έτσι, σύμφωνα με την αρχή της απαρίθμησης, βρίσκουμε:

1^o ψηφίο: *2* δυνατότητες, (οι αριθμοί *2*, *4*),
4^o ψηφίο: *2* δυνατότητες, (οι αριθμοί *5*, *9*),
2^o ψηφίο: *4* δυνατότητες,
3^o ψηφίο: *3* δυνατότητες,

δηλαδή, μπορούν να σχηματισθούν $2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 = 48$ τετραψήφιοι περιττοί αριθμοί χωρίς επανάληψη φηφίων.

Παράδειγμα 2

Πόσες πινακίδες αυτοκινήτων σχηματίζονται με πρώτα στοιχεία δύο διαφορετικά γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου (εκτός του γράμματος όμικρον) και