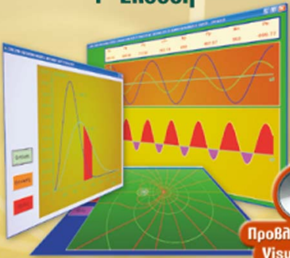
Δημήτριος Σ. Κυριάκος
Αναπληρωτής Καθηγητής • Τμήμα Φυσικής Α.Π.Θ.

Προβλήματα Γενικής Φυσικής

ΙΙ. ΘΕΡΜΟΤΗΤΑ - ΗΛΕΚΤΡΙΣΜΟΣ

Γ΄ Έκδοση



Προβλήματα Η/Υ
Visual Basic

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ Γ′ ΕΚΔΟΣΗΣ

Μετά την τρίτη έκδοση του βιβλίου μου με τα προβλήματα Μηχανικής για το μάθημα Γενική Φυσική Ι, ήταν επόμενο να ακολουθήσει η τρίτη έκδοση και του παρόντος βιβλίου με προβλήματα Θερμότητας και Ηλεκτρισμού, που καλύπτει πλήρως τη διδασκαλία του μαθήματος Γενική Φυσική ΙΙ στο Β′ Εξάμηνο του Τμήματος Φυσικής του Α.Π.Θ. Παρ' όλο που και εδώ χρησιμοποιούνται μαθηματικά από το διανυσματικό, διαφορικό και ολοκληρωτικό λογισμό, το βιβλίο δεν παύει να είναι χρήσιμο και στους μαθητές και στους καθηγητές της Μέσης Εκπαίδευσης.

Η διάρθρωση της ύλης και ο χωρισμός της σε κεφάλαια ακολουθεί πάλι το αντίστοιχο πανεπιστημιακό βιβλίο θεωρίας «ΦΥΣΙΚΗ, Θερμότητα – Ηλεκτρισμός», που έχω γράψει σε συνεργασία, και στο οποίο μπορεί να ανατρέξει όποιος θέλει για περισσότερες πληροφορίες, μελέτη και κατανόηση των αντιστοίχων θεμάτων. Στο βιβλίο υπάρχουν 147 λυμένα προβλήματα, χωρισμένα σε 12 κεφάλαια και 147 άλυτα προβλήματα. Υπάρχουν επίσης 21 λυμένα προβλήματα για ηλεκτρονικό υπολογιστή και 15 προτεινόμενα για λύση. Δεν θα μπω στη διαδικασία του χαρακτηρισμού των προβλημάτων, αν είναι δηλαδή πολλά ή λίγα, εύκολα ή δύσκολα. Η κυρίαρχη σκέψη κατά τη συγγραφή του παρόντος ήταν να δώσω στο μελετητή να καταλάβει τη φυσική που αντιπροσωπεύουν και να καλύψω κατά το εφικτό την ποικιλία των περιπτώσεων που μπορούν να παρουσιαστούν στο επίπεδο αυτό. Γι' αυτό και πολλά προβλήματα είναι συμπυκνωμένα στο περιεχόμενο τους. Επίσης τα άλυτα προβλήματα δεν είναι γενικώς μια επανάληψη παρομοίων προβλημάτων με τα λυμένα, αλλά απαιτούν και αυτά προσοχή και μελέτη. Στο σύνολο τους τα προβλήματα προσφέρουν μια καλή γενική αντίληψη και γνώση του τι συμβαίνει.

Θα επιμείνω λίγο στα προβλήματα του ηλεκτρονικού υπολογιστή. Θα μπορούσα να τα χαρακτηρίσω όλα πρωτότυπα, για να μη θεωρηθώ όμως υπερβολικός είναι σχεδόν όλα πρωτότυπα. Για παράδειγμα στη σχεδίαση του πεδίου ηλεκτρικού διπόλου, δεν σχεδιάζονται μόνον οι δυναμικές γραμμές αλλά και το ίχνος των ισοδυναμικών επιφανειών. Επίσης, δεν γίνεται χρήση μόνον της τετριμμένης αριθμητικής ολοκλήρωσης, αλλά υπάρχουν και παραδείγματα προσέγγισης της παραγώγισης. Πέρα όμως από το υπολογιστικό μέρος, έμφαση δίνεται και στη σχεδίαση και παρουσίαση διαγραμμάτων σε συνδυασμό πολλές φορές με λογιστικά αποτελέσματα. Πρέπει να καταλάβει ο φοιτητής ότι τα διαγράμματα αποτελούν ζωντανό μέρος της δουλειάς του ερευνητή και μερικές φορές «μιλούν» πολύ περισσότερο από τις εξισώσεις.

Το καινούργιο σ' αυτήν την έκδοση αφορά ακριβώς τα προβλήματα για ηλεκτρονικό υπολογιστή. Στις προηγούμενες εκδόσεις, για τη λύση τους είχε προτιμηθεί η γλώσσα προγραμματισμού η BASIC, η οποία είναι αρκετά εύκολη στη χρήση της είναι όμως παράλληλα ένα ευφυές προϊόν λογισμικού και όπως αναφερόταν σε αντίστοιχα ξένα βιβλία, εθεωρείτο ως μια γλώσσα υψηλού επιπέδου. Επειδή όμως όλα τα πράγματα εξελίσσονται, ιδιαίτερα δε στους υπολογιστές, στην παρούσα έκδοση γίνεται χρήση της VISUAL BASIC, την οποία θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε σαν προέκταση της BASIC, αν και αυτό δεν είναι απόλυτα αλήθεια. Εξακολουθούν όμως, οι εντολές της είναι περιγραφικές και η ίδια μια γλώσσα πολύ περισσότερο ευέλικτη. Και κάτι τελευταίο, σκοπός μας δεν είναι να φτιάξουμε το τέλειο πρόγραμμα, αλλά να λύσουμε το συγκεκριμένο πρόβλημα που έχουμε και να πάρουμε αμέσως αποτελέσματα. Όσο περισσότερο δουλεύετε τόσο θα βελτιώνονται και τα προγράμματα σας. Ο γράφων είναι αυτοδίδακτος, κατάφερε όμως να γράψει ολόκληρο το βιβλίο στον υπολογιστή δια ιδίας χειρός.

Θα επαναλάβω τις ευχαριστίες μου προς όλους τους φοιτητές μου, που είχα σε όλα αυτά τα χρόνια (δεκαετίες) και αυτούς που είχαν ενεργό παρουσία και συμμετοχή και αυτούς που δεν είχαν. Η ιδέα ότι πρέπει να τους αντιμετωπίσω εξακολουθεί να με τρομάζει, αποτελεί ταυτόχρονα όμως μια συνεχή ώθηση για προσωπική βελτίωση. Ευχαριστώ επίσης τους καλούς συναδέλφους με τους οποίους συζήτησα και προβληματιστήκαμε πολλές φορές μαζί. Τέλος ευχαριστώ τις εκδόσεις ΖΗΤΗ για την όπως πάντα επιμελημένη και άψογη εκδοτική εργασία.

Θεσσαλονίκη, Ιούνιος 2003 Δ.Σ. Κυριάκος

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΘΕΜΕΛΕΙΩΔΕΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΣΤΑΘΕΡΕΣ

Σταθερή	Σύμβολο	Τιμή (SI μονάδες)
Ταχύτητα του φωτός	c	$2{,}9979 \times 10^{8}$ m s^{-1}
Ηλεκτρική διαπερατότητα κενού	ε_o	$8{,}8544 \times 10^{-12}$ N^{-1} m^{-2} C^{2}
Μαγνητική διαπερατότητα κενού	μ_o	$4\pi \times 10^{-7}$ N A^{-2}
Στοιχειώδες ηλεκτρικό φορτίο	e	$1{,}6021 \times 10^{-19}$ C
Μονάδα ατομικής μάζας	u	$1{,}6606 \times 10^{-27}$ kg
Μάζα ηρεμίας ηλεκτρονίου	m_e	$9{,}1091 \times 10^{-31}$ kg
Μάζα ηρεμίας πρωτονίου	m_p	$1{,}6725 \times 10^{-27}$ kg
Μάζα ηρεμίας νετρονίου	m_n	$1{,}6748 \times 10^{-27}$ kg
Ειδικό φορτίο ηλεκτρονίου	$\frac{e}{m_e}$	$1{,}7588 \times 10^{11}$ kg^{-1} C
Σταθερή του Planck	h $\hbar = \frac{h}{2\pi}$	$6{,}6256 \times 10^{-34}$ J s $1{,}055 \times 10^{-34}$ J s
Σταθερή Faraday	F	$9{,}6487 \times 10^{4}$ C mol^{-1}
Πρώτη ακτίνα Bohr	$\alpha_o = \frac{h^2}{\pi m e^2}$	$5{,}2917 \times 10^{-11}$ m
Μήκος κύματος Compton του ηλεκτρονίου του πρωτονίου	 $\lambda_{c,e} = \frac{h}{m_e e}$ $\lambda_{c,p} = \frac{h}{m_p e}$	 $2{,}4262 \times 10^{-12}$ m $1{,}3214 \times 10^{-15}$ m
Σταθερή Rydberg	R	$1{,}0974 \times 10^{7}$ m^{-1}
Μαγνητόνη του Bohr	$\mu_B = \frac{eh}{4\pi m e_e}$	$9{,}2732 \times 10^{-24}$ J T^{-1}
Αριθμός Avogadro	N_A	$6{,}0225 \times 10^{23}$ mol^{-1}
Σταθερή Boltzmann	k	$1{,}3805 \times 10^{-23}$ J K^{-1}
Παγκόσμια σταθερή αερίων	R	$8{,}3143$ J K^{-1} mol^{-1}

Σταθερή	Σύμβολο	Τιμή (SI μονάδες)
Γραμμομοριακός όγκος ιδανικού αερίου σε κ.σ.	V_{mol}	$2{,}2414 \times 10^{-2}$ m^3 mol^{-1}
Σταθερή Stefan – Boltzmann	σ	$5{,}6697 \times 10^{-8}$ J K^{-4} m^{-2} s^{-1}
Νόμος Wien ακτινοβολίας	$\lambda_{max}T$	$2{,}8978 \times 10^{-3}$ m K
Τριπλό σημείο νερού	——	273,16 K
Σημείο πάγου	——	273,15 K
Μέγιστη πυκνότητα νερού (στους 3,98° C και 1 atm)	——	$9{,}9997 \times 10^{2}$ kg m^{-3}
Σταθερή παγκόσμιας έλξης	G	$6{,}670 \times 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}
Επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια της θάλασσας Στον Ισημερινό Σε πλάτος 45°	 g g	 9,7805 m s^{-2} 9,8067 m s^{-2}
Ατμοσφαίρικη πίεση (1 atm)	——	$1{,}013 \times 10^{5}$ N m^{-2}
Πυκνότητα αέρα	——	1,293 kg m^{-3}
Ταχύτητα ήχου σε κ.σ.	——	331,4 m s^{-1}
Ισημερινή ακτίνα γης	——	$6{,}378 \times 10^{6}$ m
Πολική ακτίνα γης	——	$6{,}357 \times 10^{6}$ m
Μέση πυκνότητα γης	——	5552 kg m^{-3}
Μάζα γης	——	$5{,}983 \times 10^{24}$ kg
Ογκος γης	——	$1{,}087 \times 10^{21}$ m^3
Απόσταση γης – ήλιου		$1{,}49 \times 10^{11}$ m
Μηχανικό ισοδύναμο θερμότητας	j	4,1855 J cal^{-1}

1. ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑ

1. Το μηδέν αυθαίρετης θερμομετρικής κλίμακας αντιστοιχεί στους $-150°$ C και το 100 στους $+200°$ C. Σε ποια θερμοκρασία είναι ίδιες οι ενδείξεις των δύο κλιμάκων και σε ποια ένδειξη της αυθαίρετης κλίμακας βράζει το νερό;

Λύση: Υποθέτουμε ότι και τα δύο θερμόμετρα λειτουργούν με την ίδια θερμομετρική ιδιότητα x και ότι υπάρχει γραμμική εξάρτηση της x από τη θερμοκρασία. Αν λοιπόν συμβολίσουμε με t τις μονάδες της αυθαίρετης κλίμακας και με θ τους βαθμούς της κλίμακας Κελσίου, ισχύουν οι γνωστές σχέσεις

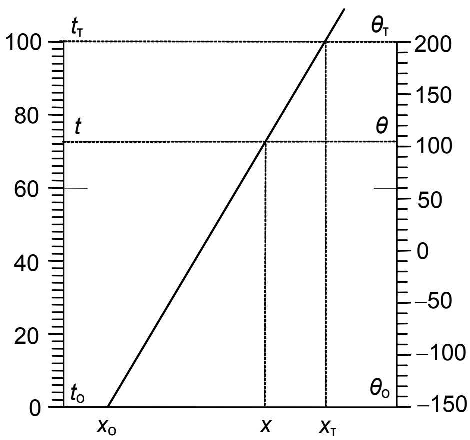
$$x = x_{\rm o}[1 + \alpha(\theta)(\theta - \theta_{\rm o})] \qquad \text{και} \qquad x = x_{\rm o}[1 + \alpha(t)(t - t_{\rm o})]. \qquad (\alpha)$$

Αντίστοιχα ο θερμικός συντελεστής της θερμομετρικής ιδιότητας εκφράζεται με τις σχέσεις

$$\alpha(\theta) = \frac{1}{x_{\rm o}}\frac{x_{\rm T} - x_{\rm o}}{\theta_{\rm T} - \theta_{\rm o}} \qquad \text{και} \qquad \alpha(t) = \frac{1}{x_{\rm o}}\frac{x_{\rm T} - x_{\rm o}}{t_{\rm T} - t_{\rm o}}. \qquad (\beta)$$

Από τις εξισώσεις (α) και (β) προκύπτει ότι

$$\frac{\theta - \theta_{\rm o}}{\theta_{\rm T} - \theta_{\rm o}} = \frac{t - t_{\rm o}}{t_{\rm T} - t_{\rm o}}. \qquad (\gamma)$$



Σχήμα 1

Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος είναι $t_{\rm o} = 0$, $t_{\rm T} = 100$ μονάδες, $\theta_{\rm o} = -150°$ C, $\theta_{\rm T} = 200°$ C. Αντικαθιστώντας στην (γ) βρίσκουμε τη σχέση ανάμεσα στις ενδείξεις των δύο κλιμάκων,

$$\theta + 150 = 3{,}5t. \qquad (\delta)$$

Στο σχήμα 1 εικονίζεται η γραμμική μεταβολή της ιδιότητας x με τη θερμοκρασία, που αντιπροσωπεύεται από τις δύο θερμομετρικές κλίμακες. Από τα σχηματιζόμενα όμοια τρίγωνα είναι προφανής η εξαγωγή της σχέσης αναλογίας (γ).

Αν $\theta_{\rm K}$ είναι η κοινή ένδειξη των δύο θερμομέτρων, τότε από τη (δ) βρίσκουμε

$$\theta_{\rm K} + 150 = 3{,}5\theta_{\rm K},$$

και συνεπώς $\theta_{\rm K} = 60$. Τέλος, από την ίδια σχέση βρίσκουμε τη θερμοκρασία βρασμού του νερού στην κλίμακα t, δηλαδή

$$100 + 150 = 3{,}5t \qquad \text{και} \qquad t = 71{,}5$$

μονάδες της αυθαίρετης κλίμακας.

2. Σε θερμόμετρο ιδανικού αερίου και στη θερμοκρασία του τριπλού σημείου του νερού η πίεση είναι p_o. Το θερμόμετρο θερμαίνεται μέχρι την άγνωστη θερμοκρασία T, που θέλουμε να μετρήσουμε και η νέα πίεση είναι p. Αραιώνοντας το αέριο, η μέτρηση επαναλαμβάνεται για διάφορες τιμές της p_o, οπότε παίρνουμε τον πίνακα:

p_o (Pa)	$1{,}333\times10^4$	$2{,}666\times10^4$	$3{,}999\times10^4$	$5{,}332\times10^4$	$6{,}664\times10^4$	$7{,}997\times10^4$
p (Pa)	$2{,}335\times10^4$	$4{,}678\times10^4$	$7{,}030\times10^4$	$9{,}389\times10^4$	$1{,}176\times10^5$	$1{,}413\times10^5$

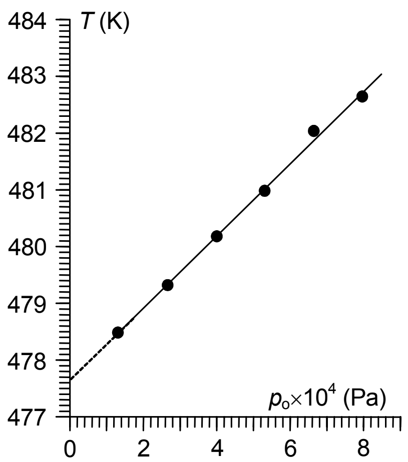
Να προσδιοριστεί η άγνωστη θερμοκρασία T.

Λύση: Με το θερμόμετρο του ιδανικού αερίου η θερμοκρασία μετρείται από τη σχέση

$$T = 273{,}16 \lim_{p_o \to 0} \frac{p}{p_o}\,, \qquad (\alpha)$$

όπου p η πίεση του αερίου, που αποτελεί τη θερμομετρική ιδιότητα και p_o η πίεση στη θερμοκρασία του τριπλού σημείου του νερού, δηλαδή η $T_o = 273{,}16$ K. Στην πράξη, η θερμοκρασία προσδιορίζεται με επανειλημμένες μετρήσεις από τη σχέση

$$T = 273{,}16 \frac{p}{p_o} \qquad (\beta)$$



Σχήμα 2

για διαρκώς μικρότερες τιμές της πίεσης. Επειδή ο όγκος παραμένει σταθερός, αυτό σημαίνει ότι αραιώνουμε το πραγματικό αέριο του θερμομέτρου λιγοστεύοντας τη μάζα του. Η κατάσταση του ιδανικού αερίου προσεγγίζεται με την προεκβολή της ευθείας του διαγράμματος (p_o,T) της εξίσωσης (β) σε μηδενική πίεση $(p_o = 0)$. Αυτή είναι και η σημασία του ορίου στην εξίσωση (α).

Από τα δεδομένα του πίνακα και την εξίσωση (β) βρίσκουμε τις ακόλουθες τιμές θερμοκρασίας σε Kelvin: 478,49, 479,31, 480,20, 481,00, 482,05, 482,65. Κατασκευάζουμε το διάγραμμα p_o, T (Σχ. 2). Η πραγματική τιμή της μετρούμενης θερμοκρασίας είναι το σημείο τομής της ευθείας του διαγράμματος και του άξονα των θερμοκρασιών, όπου η p_o είναι μηδέν. Όπως φαίνεται είναι $T = 477{,}65$ K περίπου.

3. Η αντίσταση ενός θερμομέτρου θερμίστορ (οι θερμίστορς έχουν αρνητικό θερμικό συντελεστή ηλεκτρικής αντίστασης) δίνεται σαν συνάρτηση της απόλυτης θερμοκρασίας από τη σχέση

$$R = R_{\mathrm{o}} e^{\alpha\left(\frac{1}{T}-\frac{1}{T_{\mathrm{o}}}\right)},$$

όπου R_{o} η αντίσταση στους T_{o} K και α μια σταθερή χαρακτηριστική του θερμίστορ. Να υπολογιστούν: α) Η σταθερή α, όταν $R = 48\ \Omega$ στους 100° C και $R_{\mathrm{o}} = 3980\ \Omega$ στους 0° C, β) ο θερμικός συντελεστής

$$k = \frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}T}$$

στη θερμοκρασία των 100° C και γ) η ευαισθησία του θερμομέτρου θερμίστορ στους 100° C, αν η ευαισθησία της μέτρησης της αντίστασης με τη γέφυρα Wheatstone είναι 10^{-3}.

Λύση: α) Λογαριθμίζοντας τη δοθείσα εξίσωση βρίσκουμε

$$\ln\frac{R}{R_{\mathrm{o}}} = \alpha\left(\frac{1}{T}-\frac{1}{T_{\mathrm{o}}}\right), \qquad (\alpha)$$

από την οποία προκύπτει ότι

$$\alpha = \frac{\ln\frac{R}{R_{\mathrm{o}}}}{\frac{1}{T}-\frac{1}{T_{\mathrm{o}}}} = \frac{\ln\frac{48}{3980}}{\frac{1}{373}-\frac{1}{273}} = \frac{-4{,}418}{-9{,}82\times10^{-4}} = 4498{,}64\ \text{K}.$$

β) Με παραγώγιση ως προς T της εξίσωσης (α) (ή και της δοθείσας) προσδιορίζεται ο θερμικός συντελεστής της αντίστασης. Έτσι παίρνουμε

$$\frac{R_{\mathrm{o}}}{R}\frac{1}{R_{\mathrm{o}}}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}T} = -\frac{\alpha}{T^2}$$

και συνεπώς

$$k = \frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}T} = -\frac{\alpha}{T^2}.$$

Στη θερμοκρασία των 100° C είναι

$$k = -\frac{4498{,}64}{373^2} = -3{,}23\times10^{-2}\ \text{K}^{-1}.$$

γ) Η δοθείσα ευαισθησία της γέφυρας είναι καθαρός αριθμός. Πρόκειται λοιπόν για το λόγο $\Delta R/R$. Ώστε έχουμε

$$\Delta T = \frac{1}{k}\frac{\Delta R}{R} = \frac{1}{-3{,}23\times10^{-2}}\times\left(-10^{-3}\right) = 0{,}031\ \text{K}.$$

Η ΔT είναι η μικρότερη διαφορά θερμοκρασίας που μπορεί να μετρηθεί και φυσικά αντιστοιχεί στη μικρότερη διαφορά αντίστασης ΔR που μετράει η γέφυρα. Επειδή η αντίσταση μειώνεται όταν αυξάνει η θερμοκρασία, τα ΔT και ΔR έχουν αντίθετα πρόσημα, όπως άλλωστε φαίνεται και στην τελευταία σχέση.

4. Στους 15° C μία χάλκινη και μία ξύλινη ράβδος μετρώνται με χαλύβδινη μετροταινία και βρίσκονται να έχουν το ίδιο μήκος ίσο με 2,5 m. Υποθέτοντας ότι η μετροταινία μετράει σωστά στους 15° C, τί θα δείχνει κατά τη μέτρηση των ιδίων ράβδων στους 35° C; Συντελεστές γραμμικής διαστολής χαλκού $\alpha_c = 1{,}7 \times 10^{-5}$ K^{-1}, χάλυβα $\alpha_s = 1{,}2 \times 10^{-5}$ K^{-1}.

Λύση: Το μήκος της μετροταινίας και της χάλκινης ράβδου μεταβάλλονται με τη θερμοκρασία σύμφωνα με τις ακόλουθες αντίστοιχα σχέσεις

$$l_s = l_{so}[1 + \alpha_s(\theta - \theta_o)] \qquad \text{και} \qquad l_c = l_{co}[1 + \alpha_c(\theta - \theta_o)].$$

Η φαινομένη διαστολή της χάλκινης ράβδου βρίσκεται από τη σχέση

$$(\Delta l_c)_\varphi = \Delta l_c - \Delta l_s = l_{co}\alpha_c(\theta - \theta_o) - l_{so}\alpha_s(\theta - \theta_o)$$

$$= 2{,}5 \times 1{,}7 \times 10^{-5}(35 - 15) - 2{,}5 \times 1{,}2 \times 10^{-5}(35 - 15) = 2{,}5 \times 10^{-4} \text{ m} = 0{,}025 \text{ cm}.$$

Συνεπώς το φαινόμενο μήκος της χάλκινης ράβδου είναι

$$l_{c\varphi} = l_{co} + (\Delta l_c)_\varphi = 2{,}5 + 2{,}5 \times 10^{-4} \text{ m} = 250{,}025 \text{ cm}.$$

Επειδή το πραγματικό μήκος της ξύλινης ράβδου παραμένει αμετάβλητο με τη θερμοκρασία, η ένδειξη της μετροταινίας κατά τη μέτρηση της στους 35° C είναι μικρότερη των 2,5 m. Όπως φαίνεται από τη σχέση

$$l_s = l_{so}[1 + \alpha_s(\theta - \theta_o)],$$

πραγματικό μήκος l_s στους θ° C αντιστοιχεί σε φαινόμενη ένδειξη l_{so}. Επομένως το πραγματικό μήκος $l_{\xi o}$ της ράβδου αντιστοιχεί σε φαινόμενη ένδειξη της μετροταινίας

$$l_{\xi\varphi} = \frac{l_{\xi o}}{1 + \alpha_s(\theta - \theta_o)} = \frac{2{,}5}{1 + 1{,}2 \times 10^{-5}(35 - 15)} = 2{,}4944 \text{ m} = 249{,}94 \text{ cm}.$$

5. Ένα γυάλινο δοχείο όγκου 500 cm^3 είναι γεμάτο με υδράργυρο στους 20° C. Στη συνέχεια το σύστημα θερμαίνεται στους 100° C. Πόση μάζα υδραργύρου θα εκρεύσει από το δοχείο; Συντελεστής γραμμικής διαστολής γυαλιού $\alpha_g = 9 \times 10^{-6}$ K^{-1}, συντελεστής κυβικής διαστολής υδραργύρου $\beta_H = 1{,}8 \times 10^{-4}$ K^{-1}, πυκνότητα υδραργύρου στους 0° C $\rho_o = 1{,}36 \times 10^4$ kg/m^3.

Λύση: Ο υδράργυρος έχει μεγαλύτερο συντελεστή κυβικής διαστολής από το γυαλί και γι’ αυτό κατά τη θέρμανση του συστήματος υπερχειλίζει. Ο όγκος που εκρέει (μετρούμενος στη θερμοκρασία θ_2) είναι ίσος με τη διαφορά κυβικής διαστολής των δύο υλικών. Ώστε

$$\begin{aligned} V_H = V_{H2} - V_{g2} &= V_{H1}[1 + \beta_H(\theta_2 - \theta_1)] - V_{g1}[1 + 3\alpha_g(\theta_2 - \theta_1)] \\ &= 500[1 + 1{,}8\times 10^{-4}(100 - 20)] - 500[1 + 3\times 9\times 10^{-6}(100 - 20)] \\ &= 500(1{,}8\times 10^{-4} - 3\times 9\times 10^{-6})(100 - 20) = 6{,}12\ \text{cm}^3. \end{aligned}$$

Βρίσκουμε τώρα την πυκνότητα του υδραργύρου στους 100° C. Επειδή για τη μάζα m του υδραργύρου που χύθηκε ισχύει η ισότητα

$$m = V_{Ho}\rho_o = V_H\rho_2$$

προκύπτει ότι

$$\rho_2 = \frac{V_{Ho}\rho_o}{V_H} = \frac{V_{Ho}\rho_o}{V_{Ho}\left[1+\beta_H(\theta_2-\theta_o)\right]} = \frac{1{,}36\times 10^4}{1+1{,}8\times 10^{-4}\times 100} = 1{,}336\times 10^4\ \ \text{kg/m}^3\ .$$

Συνεπώς

$$m = V_H\rho_2 = 6{,}12\times 10^{-6}\times 1{,}336\times 10^4 = 8{,}176\times 10^{-2}\ \text{kg} = 81{,}76\ \text{g}.$$

6. Σιδηροτροχιά κατασκευάζεται μια χειμωνιάτικη ημέρα με θερμοκρασία –5° C και αποτελείται από τμήματα που έχουν μήκος 10 m. Πόσο πρέπει να είναι το κενό διάστημα ανάμεσα τους, ώστε μία καλοκαιρινή ημέρα θερμοκρασίας 40° C να εφάπτονται χωρίς να αναπτύσσεται τάση συμπίεσης (θλίψης); Αν υποθέσουμε ότι κατά την ημέρα κατασκευής εφάπτονται ακριβώς, πόση είναι η θερμική τάση στους 40° C; Συντελεστής γραμμικής διαστολής $1{,}2\times 10^{-5}$ K^{-1}, μέτρο του Young $2{,}28\times 10^{11}$ N/m^2.

Λύση: Επειδή το πρόσθετο μήκος εξαιτίας της διαστολής κάθε τμήματος διαμοιράζεται στα εκατέρωθεν κενά, το κενό ανάμεσα σε δύο τμήματα της σιδηροτροχιάς πρέπει να είναι ίσο με την επιμήκυνση που υφίσταται κάθε τμήμα, δηλαδή ίσο με

$$\Delta l = l_2 - l_1 = l_1\alpha(\theta_2 - \theta_1) = 10\times 1{,}2\times 10^{-5}\times(40 + 5) = 5{,}4\times 10^{-3}\ \text{m} = 5{,}4\ \text{mm}.$$

Αν αρχικά τα τμήματα εφάπτονται, τότε η συμπιεστική τάση που αναπτύσσεται τις θερμές μέρες πρέπει να παρεμποδίζει την επιμήκυνση τους από τη θερμική διαστολή, δηλαδή να προκαλεί επιβράχυνση Δl. Συνεπώς η τάση είναι

$$\sigma = \frac{F}{S} = E\frac{\Delta l}{l_2} = 2{,}28\times 10^{11}\,\frac{5{,}4\times 10^{-3}}{10{,}0054} = 123{,}05\times 10^6\ \ \text{N/m}^2\ .$$

7. Το εκκρεμές ρολογιού είναι κατασκευασμένο από κράμα invar. Το ρολόι είναι ρυθμισμένο να δείχνει την ακριβή ώρα σε θερμοκρασία 20° C. Αν το ρολόι χρησιμοποιηθεί σε τόπο, όπου η μέση θερμοκρασία του είναι 30° C, πόση πρέπει να είναι η διόρθωση στο χρόνο που θα δείχνει το ρολόι ύστερα από 30 μέρες; Συντελεστής διαστολής $\alpha = 7\times 10^{-7}$ K^{-1}.

Λύση: Η αύξηση της θερμοκρασίας προκαλεί επιμήκυνση της ράβδου του εκκρεμούς και επομένως αύξηση της περιόδου του (με την προϋπόθεση ότι η επιτάχυνση g παραμένει ίδια). Στους δύο τόπους το εκκρεμές έχει περίοδο αντίστοιχα

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}} \qquad \text{και} \qquad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l_2}{g}} \qquad (T_2 > T_1).$$

Επιπλέον είναι

$$l_2 = l_1[1 + \alpha(\theta_2 - \theta_1)].$$

Επειδή σε κάθε πλήρη αιώρηση ο μηχανισμός του ρολογιού μετακινεί τους δείκτες κατά 2 s, είναι φανερό ότι το ρολόι στο θερμότερο τόπο καθυστερεί, δηλαδή μένει πίσω. Η καθυστέρηση στη μονάδα του χρόνου είναι

$$\tau = \frac{T_2 - T_1}{T_2} = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \sqrt{\frac{l_1}{l_2}} = 1 - \sqrt{\frac{1}{1+\alpha(\theta_2-\theta_1)}} = 1 - \left(1+\alpha\Delta\theta\right)^{-1/2}.$$

Αλλά το γινόμενο $\alpha\Delta\theta$ είναι πολύ μικρότερο της μονάδας, γι' αυτό αναπτύσσουμε το διώνυμο μέχρι την πρώτη δύναμη. Ώστε

$$\left(1+\alpha\Delta\theta\right)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}\alpha\Delta\theta$$

και συνεπώς

$$\tau = \frac{1}{2}\alpha\Delta\theta .$$

Μετά πάροδο τριάντα ημερών η καθυστέρηση στη μέτρηση του χρόνου είναι

$$\Delta t_{\text{ολ}} = t_{\text{ολ}}\tau = \left(30\times 24\times 60\times 60\right)\frac{1}{2}7\times 10^{-7}\times\left(30-20\right) = 9{,}072 \ \text{ s}.$$

8. Ομογενής ράβδος μάζας m, μήκους l_o και θερμοκρασίας θ_o, αιωρείται από τη μία άκρη της. Αν η θερμοκρασία της ράβδου ανεβεί στους θ βαθμούς, πόση είναι η μεταβολή στη ροπή αδράνειας της και στην περίοδο αιώρησης της; Ροπή αδράνειας $I = ml^2/3$.

Λύση: Η περίοδος και το ανηγμένο μήκος του φυσικού εκκρεμούς, σε οποιαδήποτε θερμοκρασία, είναι

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l_{\text{αν}}}{g}}, \qquad l_{\text{αν}} = \frac{I}{mr} = \frac{2I}{ml},$$

όπου $r = l/2$ η απόσταση του κέντρου μάζας από τον άξονα εξάρτησης. Επειδή η ροπή αδράνειας I είναι ανάλογη του τετραγώνου του μήκους της ράβδου, η αύξηση της θερμοκρασίας προκαλεί αύξηση της ροπής αδράνειας, του ανηγμένου μήκους και συνεπώς και της περιόδου του εκκρεμούς.

Από τη γραμμική διαστολή έχουμε

$$l = l_o(1 + \alpha\Delta\theta\ ),$$

$$I = \frac{1}{3}ml^2 = \frac{1}{3}ml_o^2\left(1+\alpha\Delta\theta\right)^2 = I_o\left(1+\alpha\Delta\theta\right)^2 = I_o\left(1+2\alpha\Delta\theta\right)$$

$$l_{\alpha\nu} = \frac{2I}{ml} = \frac{2\frac{1}{3}ml^2}{ml} = \frac{2l}{3} = \frac{2}{3}l_o\left(1+\alpha\Delta\theta\right) = l_{o\alpha\nu}\left(1+\alpha\Delta\theta\right),$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l_{\alpha\nu}}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{l_{o\alpha\nu}(1+\alpha\Delta\theta)}{g}} = T_o\left(1+\alpha\Delta\theta\right)^{1/2} = T_o\left(1+\frac{1}{2}\alpha\Delta\theta\right).$$

Επομένως, η μεταβολή της ροπής αδράνειας και της περιόδου είναι αντίστοιχα

$$\Delta I = I - I_o = 2I_o\alpha\Delta\theta, \qquad \Delta T = T - T_o = \frac{1}{2}T_o\alpha\Delta\theta\ .$$

2. ΘΕΡΜΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΑΕΡΙΩΝ

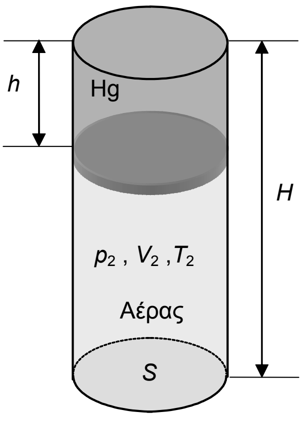
9. Κατακόρυφο κυλινδρικό δοχείο με ύψος $H = 1$ m και διατομή $S = 50$ cm^2, περιέχει αέρα και επάνω είναι κλεισμένο αεροστεγώς με έμβολο αμελητέας μάζας, το οποίο μπορεί να γλιστρά χωρίς τριβές. Η θερμοκρασία του αέρα είναι 22° C. Πάνω στο έμβολο ρίχνουμε με βραδύ ρυθμό υδράργυρο και το έμβολο αρχίζει να κατεβαίνει συμπιέζοντας τον αέρα στο δοχείο, ο οποίος και θερμαίνεται ελαφρά. Όταν ο υδράργυρος έχει ξεχειλίσει από το δοχείο, η θερμοκρασία του αέρα έχει γίνει 25° C. Πόσα γραμμομόρια αέρα περιέχονται στο δοχείο και πόσο έχει κατέβει το έμβολο; Πυκνότητα υδραργύρου 13600 kg/m^3, $g = 9{,}8$ m/s^2.

Λύση: Θεωρούμε τον αέρα σαν ιδανικό αέριο και εφαρμόζουμε την καταστατική εξίσωση για την αρχική του κατάσταση,

$$p_1 V_1 = nRT_1.$$

Επειδή το έμβολο είναι αβαρές, η αρχική πίεση είναι ίση με την εξωτερική, δηλαδή $p_1 = 1$ atm. Επομένως

$$n = \frac{p_1 V_1}{RT_1} = \frac{p_1 HS}{RT_1} = \frac{1{,}013\times10^5\times1\times50\times10^{-4}}{8{,}314\times295} = 0{,}206 \text{ mol}.$$



Σχήμα 3

Στην τελική κατάσταση η πίεση του αέρα p_2 πρέπει να ισορροπεί την εξωτερική ατμοσφαιρική και την υδροστατική στήλης Hg ύψους h. Ώστε, αν ρ είναι η πυκνότητα του Hg τότε

$$p_2 = p_1 + \rho g h, \qquad V_2 = V_1 - hS = (H-h)S.$$

Συνδυάζουμε τις δύο καταστάσεις,

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$$

ή

$$\frac{p_1 HS}{T_1} = \frac{(p_1+\rho g h)(H-h)S}{T_2}. \qquad (\alpha)$$

Για ευκολία μπορούμε να εκφράσουμε την πίεση σε cm Hg. Έτσι είναι

$$p_1 \text{ (cm Hg)} = \frac{p_1\text{(Pa)}}{\rho g}\times100 = \frac{1{,}013\times10^5}{13600\times9{,}8}100 = 76 \text{ cm Hg}.$$

Συνεπώς η σχέση (α) γράφεται

$$\frac{76\times 100}{295}=\frac{(76+h)(100-h)}{298}.$$

Αυτή είναι μια δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς h (σε cm). Δεκτές από φυσική άποψη είναι και οι δύο ρίζες, που έχουν τιμή 3,83 cm και 20,17 cm.

10. Η πυκνότητα του He είναι 0,179 kg/m^3 σε κανονικές συνθήκες πίεσης και θερμοκρασίας. Πόση είναι η πιο πιθανή ταχύτητα, η μέση ταχύτητα και η τετραγωνική ρίζα της μέσης τιμής του τετραγώνου της ταχύτητας των μορίων του He σε θερμοκρασία 0° C και 200° C; Πόση είναι η μέση κινητική ενέργεια των μορίων του;

Λύση: Η γραμμομοριακή μάζα του He είναι

$$M=\rho_o V_o=0{,}179\times 22{,}4\times 10^{-3}=4\times 10^{-3}\ \mathrm{kg}=4\ \mathrm{g}.$$

Οι ζητούμενες ταχύτητες προσδιορίζονται από τους ακόλουθους γνωστούς τύπους αντίστοιχα ($R=kN_A$, $M=mN_A$):

$$\upsilon_\pi=\sqrt{\frac{2kT}{m}}=\sqrt{\frac{2RT}{M}},\quad \langle\upsilon\rangle=\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}=\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}},\quad \langle\upsilon^2\rangle^{1/2}=\sqrt{\frac{3kT}{m}}=\sqrt{\frac{3RT}{M}}.$$

Θέτοντας $R=8{,}314$ J mol^{-1} K^{-1} , $T=\theta+273$ K βρίσκουμε ότι:

α) Στους 0° C:

$$\upsilon_\pi=1{,}065\times 10^3\ \mathrm{m/s},\quad \langle\upsilon\rangle=1{,}202\times 10^3\ \mathrm{m/s},\quad \langle\upsilon^2\rangle^{1/2}=1{,}305\times 10^3\ \mathrm{m/s}$$

και

$$E=\frac{3}{2}kT=\frac{1}{2}m\langle\upsilon^2\rangle=\frac{1}{2}\frac{M}{N_A}\langle\upsilon^2\rangle=\frac{1}{2}\frac{4\times 10^{-3}}{6{,}023\times 10^{23}}1{,}703\times 10^6$$

$$=3{,}321\times 10^{-27}\times 1{,}703\times 10^6=5{,}655\times 10^{-21}\ \mathrm{J}=3{,}534\times 10^{-2}\ \mathrm{eV}.$$

β) Στους 200° C:

$$\upsilon_\pi=1{,}402\times 10^3\ \mathrm{m/s},\quad \langle\upsilon\rangle=1{,}582\times 10^3\ \mathrm{m/s},\quad \langle\upsilon^2\rangle^{1/2}=1{,}717\times 10^3\ \mathrm{m/s}$$

και

$$E=3{,}321\times 10^{-27}\times 2{,}950\times 10^6=9{,}789\times 10^{-21}\ \mathrm{J}=6{,}118\times 10^{-2}\ \mathrm{eV}.$$

11. Δείξτε ότι ο συντελεστής κυβικής διαστολής ιδανικού αερίου είναι ίσος με $\beta=1/T$, όταν η πίεση του διατηρείται σταθερή. Τι τιμή έχει ο β στο σημείο πάγου;

Λύση: Όταν η πίεση του αερίου διατηρείται σταθερή, τότε η εξάρτηση του όγκου του από τη θερμοκρασία ακολουθεί τη γενική έκφραση της διαστολής, δηλαδή

$$V=V_o(1+\beta\theta),$$

όπου θ η θερμοκρασία σε βαθμούς C.

Σύμφωνα με τον ορισμό του θερμικού συντελεστή είναι

$$\beta = \frac{1}{V}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta} = \frac{1}{V}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}T}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\theta} = \frac{1}{V}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}T},$$

γιατί από την $T = \theta + 273{,}15$ προκύπτει ότι $\mathrm{d}T/\mathrm{d}\theta = 1$.

Από την καταστατική εξίσωση

$$pV = nRT$$

με παραγώγιση παίρνουμε

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}T} = \frac{nR}{p} = \frac{V}{T}.$$

Επομένως

$$\beta = \frac{1}{V}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}T} = \frac{1}{V}\frac{V}{T} = \frac{1}{T}.$$

Στο σημείο πάγου είναι $T = 273{,}15$ K, ώστε $\beta = 3{,}66 \times 10^{-3}$ K^{-1}.

12. Δοχείο περιέχει άζωτο σε θερμοκρασία 100 K. Εξαιτίας της θερμικής κίνησης των μορίων, σ' ένα τοίχωμα του δοχείου, εμβαδού επιφάνειας 10 cm^2, προσπίπτουν $n = 4 \times 10^{23}$ μόρια υπό γωνία 45° σε χρόνο $\Delta t = 1$ s. Υποθέτοντας ότι τα μόρια αυτά έχουν την ενεργό ταχύτητα, πόση δύναμη και πίεση ασκούν στο τοίχωμα; Υποθέστε επίσης ελαστικές κρούσεις των μορίων με το τοίχωμα. $M = 28$ g/mol.

Λύση: Βρίσκουμε την ενεργό ταχύτητα των μορίων

$$\upsilon = \langle \upsilon^2 \rangle^{1/2} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = \sqrt{\frac{3 \times 8{,}314 \times 100}{28 \times 10^{-3}}} = 298{,}5 \ \text{m/s}.$$

Για ελαστική κρούση το μέτρο της ταχύτητας παραμένει σταθερό, η γωνία πρόσπτωσης είναι ίση με τη γωνία ανάκλασης και επομένως μεταβολή της ορμής προκαλείται μόνο από την κάθετη προς το τοίχωμα συνιστώσα της ταχύτητας, μέτρου

$$\upsilon_\kappa = \upsilon\,\text{συν}45° = 211 \text{ m/s}.$$

Μετά την κρούση αποκτά αντίθετη φορά. Έτσι η συνολική μεταβολή της ορμής είναι

$$\Delta p_\kappa = 2nm\upsilon_\kappa = 2n\frac{M}{N_\text{A}}\upsilon_\kappa = 2 \times 4 \times 10^{23}\frac{28 \times 10^{-3}}{6{,}023 \times 10^{23}}211 = 7{,}85 \ \text{kg m/s}.$$

Η ασκούμενη ώση στο τοίχωμα είναι

$$J = F\Delta t = \Delta p_\kappa.$$

Επομένως

$$F = \frac{\Delta p_\kappa}{\Delta t} = \frac{7{,}85}{1} = 7{,}85 \text{ N} \qquad \text{και} \qquad p = \frac{F}{A} = \frac{7{,}85}{10 \times 10^{-4}} = 7850 \ \text{Pa}.$$

13. Η μέση ελεύθερη διαδρομή των μορίων αερίου, δηλαδή η μέση απόσταση που διανύουν μεταξύ των κρούσεων εκφράζεται με τη σχέση

$$l = \frac{V}{4\sqrt{2}\,\pi N r^2}\,,$$

όπου r η ακτίνα του μορίου, V ο όγκος του αερίου και N ο αριθμός των μορίων. Να βρείτε τη μέση ελεύθερη διαδρομή των μορίων του αέρα στην κορυφή του Ολύμπου ($h = 2918$ m), μια καλοκαιρινή μέρα με θερμοκρασία 22° C. Δίνεται η ακτίνα των μορίων του αέρα $r = 2\times10^{-10}$ m και η γραμμομοριακή του μάζα $M = 2{,}896\times10^{-2}$ kg, $g = 9{,}81$ m/s^2.

Λύση: Από το βαρομετρικό τύπο του Laplace υπολογίζουμε την ατμοσφαιρική πίεση στην κορυφή του Ολύμπου ($p_o = 1$ atm),

$$p = p_0 e^{-Mgh/RT} = e^{-2{,}896\times10^{-2}\times9{,}81\times2918/8{,}314\times295} = 0{,}713\ \text{atm}\,.$$

Εξ άλλου η καταστατική εξίσωση γράφεται

$$pV = nRT = \frac{N}{N_A}kN_AT = NkT\,.$$

Επομένως

$$l = \frac{V}{4\sqrt{2}\pi N r^2} = \frac{kT}{4\sqrt{2}\pi p r^2} = \frac{1{,}38\times10^{-23}\times295}{4\sqrt{2}\pi\times0{,}713\times1{,}013\times10^5\times4\times10^{-20}} = 7{,}93\times10^{-8}\ \text{m}\,.$$

14. Να βρεθεί η πιο πιθανή ταχύτητα, η μέση ταχύτητα και η μέση τιμή του τετραγώνου της ταχύτητας των μορίων ενός αερίου, με τη βοήθεια της εξίσωσης της κατανομής Maxwell. Δίνεται ότι $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Λύση: Η εξίσωση της κατανομής Maxwell γράφεται

$$f(\upsilon) = 4\pi\upsilon^2\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{m\upsilon^2}{2kT}} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\alpha^3\upsilon^2 e^{-\alpha^2\upsilon^2}\,,$$

όπου

$$\alpha = \left(\frac{m}{2kT}\right)^{1/2}.$$

Η πιο πιθανή ταχύτητα αντιστοιχεί στο μέγιστο της $f(\upsilon)$. Βρίσκουμε την πρώτη παράγωγο της,

$$f'(\upsilon) = \frac{8}{\sqrt{\pi}}\alpha^3\upsilon\, e^{-\alpha^2\upsilon^2}\left(1-\alpha^2\upsilon^2\right).$$

Η $f'(\upsilon)$ μηδενίζεται για $\upsilon = 0$, $\upsilon = \infty$ και $\upsilon = 1/\alpha$. Οι δύο πρώτες τιμές δεν έχουν φυσική σημασία γιατί μηδενίζουν την $f(\upsilon)$. Εξετάζουμε τώρα το πρόσημο της $f''(\upsilon)$ για την τιμή $\upsilon = 1/\alpha$. Είναι

$$f''(\upsilon) = \frac{8}{\sqrt{\pi}} \alpha^3 e^{-\alpha^2\upsilon^2}\left(1 - 5\alpha^2\upsilon^2 + 2\alpha^4\upsilon^4\right),$$

$$f''(1/\alpha) = -\frac{16}{\sqrt{\pi}} \alpha^3 e^{-1} < 0 .$$

Συνεπώς έχουμε μέγιστο και η πιο πιθανή ταχύτητα είναι

$$\upsilon_\pi = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} .$$

Επειδή η $f(\upsilon)$ είναι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, εξ ορισμού έχουμε

$$\langle \upsilon \rangle = \int_0^\infty \upsilon f(\upsilon)\,\mathrm{d}\upsilon = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \alpha^3 \upsilon^3 e^{-\alpha^2\upsilon^2}\,\mathrm{d}\upsilon .$$

Θέτουμε $x = \alpha\upsilon$ και ολοκληρώνουμε κατά παράγοντες. Προκύπτει λοιπόν

$$\langle \upsilon \rangle = \frac{4}{\alpha\sqrt{\pi}} \int_0^\infty x^3 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{\alpha\sqrt{\pi}} \int_0^\infty x^2\,\mathrm{d}e^{-x^2} = -\frac{2}{\alpha\sqrt{\pi}}\left[\left[\cancelto{0}{x^2 e^{-x^2}}\right]_0^\infty - \int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x^2\right]$$

$$= \frac{2}{\alpha\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x^2 = -\frac{2}{\alpha\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \mathrm{d}e^{-x^2} = -\frac{2}{\alpha\sqrt{\pi}}\left[e^{-x^2}\right]_0^\infty .$$

Ώστε

$$\langle \upsilon \rangle = \frac{2}{\alpha\sqrt{\pi}} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} .$$

Κατά τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε

$$\langle \upsilon^2 \rangle = \int_0^\infty \upsilon^2 f(\upsilon)\,\mathrm{d}\upsilon = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \alpha^3 \upsilon^4 e^{-\alpha^2\upsilon^2}\,\mathrm{d}\upsilon = \frac{4}{\alpha^2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty x^4 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{\alpha^2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty x^3\,\mathrm{d}e^{-x^2}$$

$$= -\frac{2}{\alpha^2\sqrt{\pi}}\left[\left[\cancelto{0}{x^3 e^{-x^2}}\right]_0^\infty - \int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x^3\right] = \frac{6}{\alpha^2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty x^2 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{3}{\alpha^2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty x\,\mathrm{d}e^{-x^2}$$

$$= -\frac{3}{\alpha^2\sqrt{\pi}}\left[\left[\cancelto{0}{x e^{-x^2}}\right]_0^\infty - \int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right] = \frac{3}{\alpha^2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{\alpha^2\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{3}{2\alpha^2} .$$

Ώστε είναι

$$\langle \upsilon^2 \rangle = \frac{3}{2}\frac{2kT}{m} = \frac{3kT}{m}.$$

15. Να υπολογιστεί ο αριθμός των μορίων που υπάρχουν σε $n = 1$ kmol υδρογόνου θερμοκρασίας 500 K, τα οποία έχουν ταχύτητα μικρότερη από $\upsilon_1 = 10^3$ m/s. Η μάζα του γραμμομορίου του υδρογόνου είναι $M = 2{,}02 \times 10^{-3}$ kg. Ποιος αριθμός μορίων έχει ταχύτητα μεγαλύτερη από υ_1; Αναζητείστε την τιμή της συνάρτησης σφάλματος $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-x^2}\mathrm{d}x$ σε κατάλληλους πίνακες.

Λύση: Το πλήθος των μορίων με ταχύτητα μέτρου υ εντός του εύρους υ και $\upsilon + \mathrm{d}\upsilon$ δίνεται από την κατανομή Maxwell,

$$\mathrm{d}N(\upsilon) = Nf(\upsilon)\mathrm{d}\upsilon = N\frac{4}{\sqrt{\pi}}\alpha^3\upsilon^2 e^{-\alpha^2\upsilon^2}\mathrm{d}\upsilon = N\frac{4}{\sqrt{\pi}}x^2 e^{-x^2}\mathrm{d}x,$$

όπου

$$\alpha = \left(\frac{m}{2kT}\right)^{1/2} \qquad \text{και} \qquad x = \alpha\upsilon.$$

Ο αριθμός των μορίων $N(\upsilon \le \upsilon_1)$ προκύπτει με ολοκλήρωση, δηλαδή

$$N(\upsilon \le \upsilon_1) = N\frac{4}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x_1} x^2 e^{-x^2}\mathrm{d}x = -\frac{4N}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{x_1} x\left(-2xe^{-x^2}\right)\mathrm{d}x = -\frac{2N}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x_1} x\,\mathrm{d}e^{-x^2}$$

$$= -\frac{2N}{\sqrt{\pi}}\left[\left[xe^{-x^2}\right]_0^{x_1} - \int_0^{x_1} e^{-x^2}\mathrm{d}x\right] = N\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x_1} e^{-x^2}\mathrm{d}x - \frac{2}{\sqrt{\pi}}x_1 e^{-x_1^2}\right].$$

Ο ολικός αριθμός των μορίων είναι

$$N = nN_A = 1000 \times 6{,}023 \times 10^{23} = 6{,}023 \times 10^{26} \text{ μόρια.}$$

Βρίσκουμε επίσης την τιμή x_1,

$$x_1 = \left(\frac{m}{2kT}\right)^{1/2}\upsilon_1 = \left(\frac{M}{2RT}\right)^{1/2}\upsilon_1 = \left[\frac{2{,}02 \times 10^{-3}}{2 \times 8{,}314 \times 500}\right]^{1/2} \times 10^3 = 0{,}493,$$

που είναι καθαρός αριθμός.

Από κατάλληλους πίνακες της συνάρτησης σφάλματος (ή με τη βοήθεια ηλεκτρονικού υπολογιστή) προκύπτει ότι

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x_1} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{0{,}493} e^{-x^2}\mathrm{d}x = 0{,}515.$$

Συνεπώς

$$N(\upsilon \le \upsilon_1) = 6{,}023 \times 10^{26} \times \left[0{,}515 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \times 0{,}493 \times e^{-0{,}493^2}\right] = 0{,}474 \times 10^{26} \text{ μόρια.}$$

Ο αριθμός των μορίων με ταχύτητα από υ_1 μέχρι ∞ είναι

$$N(\upsilon > \upsilon_1) = N - N(\upsilon \le \upsilon_1) = (6{,}023 - 0{,}474)10^{26} = 5{,}549 \times 10^{26} \text{ μόρια.}$$

16. Σύμφωνα με την κατανομή Maxwell – Boltzmann ο αριθμός πληθυσμού για ενεργειακή στάθμη E δίνεται από τη σχέση $n = Ae^{-E/kT}$. Να βρεθεί για τις θερμοκρασίες των 100 K, 300 K και 1000 K ο λόγος των αριθμών πληθυσμού αερίου για δύο ενεργειακές στάθμες με διαφορά ενέργειας α) 10^{-4} eV, που είναι ισοδύναμη με την ενέργεια περιστροφής πολλών μορίων, β) 5×10^{-2} eV, που αντιστοιχεί στην ενέργεια δόνησης των μορίων και γ) 3 eV, που είναι της τάξης μεγέθους της ενέργειας διέγερσης των ηλεκτρονίων των ατόμων. Τι συμπεράσματα βγαίνουν;

Λύση: Όπως φαίνεται από τη δοθείσα εκθετική εξίσωση της ενεργειακής κατανομής, όσο μεγαλύτερη είναι η ενέργεια τόσο μικρότερος είναι ο αριθμός πληθυσμού. Σε ορισμένη λοιπόν θερμοκρασία ο λόγος των αριθμών πληθυσμού δύο ενεργειακών σταθμών E_i, E_j $(E_\text{i} > E_\text{j})$ είναι

$$\frac{n_\text{i}}{n_\text{j}} = \frac{Ae^{-E_\text{i}/kT}}{Ae^{-E_\text{j}/kT}} = e^{-(E_\text{i}-E_\text{j})/kT} = e^{-\Delta E/kT}. \quad (\alpha)$$

Εκφράζουμε την ενεργειακή ποσότητα kT σε eV,

$$kT = 1{,}38 \times 10^{-23}T \text{ J} = 8{,}625 \times 10^{-5}T \text{ eV}.$$

Επομένως

$$\frac{\Delta E}{kT} = 1{,}159 \times 10^{4}\frac{\Delta E}{T}. \quad (\beta)$$

Χρησιμοποιώντας τα δεδομένα του προβλήματος και τις σχέσεις (α) και (β) φτιάχνουμε τον παρακάτω πίνακα.

	n_i / n_j		
ΔE (eV)	**100 K**	**300 K**	**1000 K**
10^{-4}	0,9885	0,9961	0,9988
5×10^{-2}	$3{,}036 \times 10^{-3}$	0,1448	0,5601
3	$8{,}731 \times 10^{-152}$	$4{,}436 \times 10^{-51}$	$7{,}836 \times 10^{-16}$

Όπως παρατηρούμε από τον πίνακα, όταν η διαφορά ενέργειας είναι $\Delta E = 10^{-4}$ eV, τότε πρακτικά σε όλο το εύρος θερμοκρασιών ο λόγος των αριθμών πληθυσμού είναι κοντά στη μονάδα, που δείχνει ότι στη θερμοκρασία δωματίου (300 K) τα μόρια είναι εξίσου κατανεμημένα στις διάφορες στάθμες της ενέργειας περιστροφής. Καθώς η διαφορά ενέργειας αυξάνεται και γίνεται $\Delta E = 5 \times 10^{-2}$ eV η πλήρωση της ανώτερης ενεργειακής στάθμης εξαρτάται από τη θερμοκρασία. Πάντως στη θερμοκρασία δωματίου υπάρχει αισθητός αριθμός μορίων που βρίσκονται σε κατάσταση δόνησης. Τέλος, όταν είναι $\Delta E = 3$ eV η ανώτερη ενεργειακή στάθμη είναι ουσιαστικά άδεια σε όλο το θερμοκρασιακό εύρος. Συνεπώς όλα σχεδόν τα άτομα και τα μόρια έχουν τα ηλεκτρόνια τους στη βασική ενεργειακή τους κατάσταση. Διεγερμένες ηλεκτρονικές καταστάσεις μπορούν να παρατηρηθούν σε άτομα και μόρια που βρίσκονται σε εξαιρετικά υψηλές θερμοκρασίες, σαν αυτές που επικρατούν σε πολύ θερμούς αστέρες.

17. Στα κολλοειδή διαλύματα τα στερεά σωματίδια δέχονται την επίδραση της βαρύτητας, μετέχουν όμως και στην άτακτη θερμική κίνηση με αποτέλεσμα να αιωρούνται μέσα στο διάλυμα αντί να πέφτουν στον πυθμένα του δοχείου. Να δειχθεί ότι ο αριθμός των σωματιδίων ανά μονάδα όγκου του υγρού δίνεται, σε συνάρτηση με το ύψος h, από τη σχέση

$$N(h) = N_o e^{-\frac{N_A}{RT} V(\rho - \rho')gh},$$

όπου N_A ο αριθμός του Avogadro, V ο όγκος ενός σωματιδίου ρ, ρ' οι πυκνότητες των σωματιδίων και του υγρού αντίστοιχα και h το ύψος.

Λύση: Τα στερεά σωματίδια αιωρούνται μέσα στο διάλυμα διότι δέχονται κρούσεις από τα μόρια του υγρού που εκτελούν την άτακτη θερμική κίνηση τους. Μετέχουν λοιπόν και αυτά στη θερμική κίνηση, η οποία όπως φαίνεται ανταγωνίζεται την βαρύτητα με αποτέλεσμα την καθ' ύψος στατιστική δυναμική κατανομή των σωματιδίων. Ώστε τα στερεά σωματίδια έχουν κατανομή ταχυτήτων ή το ίδιο ενεργειακή κατανομή Maxwell, διαμορφωμένη όμως από τη δυναμική ενέργεια του βαρυτικού πεδίου.

Αν δεν υπάρχει εξωτερικό πεδίο δυνάμεων, η ενεργειακή κατανομή Maxwell προκύπτει από την αντίστοιχη των μοριακών ταχυτήτων λαμβάνοντας υπόψη ότι

$$E_\kappa = \frac{1}{2}mu^2 \qquad \text{και} \qquad du = \frac{dE_\kappa}{\sqrt{2mE_\kappa}}.$$

Έτσι έχουμε τη σχέση

$$dN(E_\kappa) = N\frac{2}{\sqrt{\pi}(kT)^{3/2}} E_\kappa^{1/2} e^{-E_\kappa/kT} dE_\kappa,$$

που εκφράζει τον αριθμό των μορίων, σ' ένα σύνολο N μορίων, που έχουν κινητική ενέργεια στο διάστημα E_κ και $E_\kappa + dE_\kappa$.

Στην περίπτωση των σωματιδίων των κολλοειδών διαλυμάτων πρέπει να θεωρήσουμε τη συνολική τους μηχανική ενέργεια, να προσθέσουμε δηλαδή στην κινητική ενέργεια και τη δυναμική $mg'h$, όπου h το ύψος από τον πυθμένα και g' η επιτάχυνση της βαρύτητας μέσα στο υγρό (που αλλάζει εξαιτίας της άνωσης). Έτσι για ορισμένη θερμοκρασία ο αριθμός των σωματιδίων που αντιστοιχούν στη μονάδα όγκου του διαλύματος και έχουν κινητική ενέργεια μεταξύ E_κ και $E_\kappa + \mathrm{d}E_\kappa$, καθώς και ορισμένη σταθερή δυναμική ενέργεια $mg'h$ (δηλαδή βρίσκονται σε ορισμένο ύψος h) είναι ίσος με

$$\mathrm{d}N = NA(T)E_\kappa^{1/2}e^{-(E_\kappa + mg'h)/kT}\mathrm{d}(E_\kappa + mg'h) = NA(T)E_\kappa^{1/2}e^{-mg'h/kT}e^{-E_\kappa/kT}\mathrm{d}E_\kappa .$$

Με ολοκλήρωση της προηγούμενης σχέσης ως προς την κινητική ενέργεια E_κ, με όρια από 0 μέχρι ∞ βρίσκουμε τον αριθμό των σωματιδίων που βρίσκονται σε ύψος h, ανεξάρτητα από την τιμή της κινητικής τους ενέργειας. Για το σκοπό αυτό θέτουμε τώρα

$$\frac{E_\kappa}{kT} = x^2 , \qquad \mathrm{d}E_\kappa = 2xkT\,\mathrm{d}x , \qquad E_\kappa^{1/2} = x(kT)^{1/2} ,$$

οπότε

$$\mathrm{d}N = NB(T)e^{-mg'h/kT}x^2e^{-x^2}\mathrm{d}x \qquad \text{και} \qquad N(h) = NB(T)e^{-mg'h/kT}\int_0^\infty x^2e^{-x^2}\mathrm{d}x .$$

Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα (βλ. πρβλ. **14**). Είναι

$$\int_0^\infty x^2e^{-x^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_0^\infty x^2\mathrm{d}e^{-x^2} = -\frac{1}{2}\left[\overset{0}{\cancel{\left[xe^{-x^2}\right]_0^\infty}} - \int_0^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x\right] = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{4} .$$

Ώστε

$$N(h) = NB(T)\frac{\sqrt{\pi}}{4}e^{-mg'h/kT} = N_o e^{-mg'h/kT} .$$

Η σταθερή N_o αντιπροσωπεύει τον αριθμό των σωματιδίων στον πυθμένα ($h = 0$). Επιπλέον είναι

$$m = V\rho , \qquad g' = \frac{\rho - \rho'}{\rho}g \qquad \text{και} \qquad k = \frac{R}{N_A} .$$

Τελικά λοιπόν έχουμε

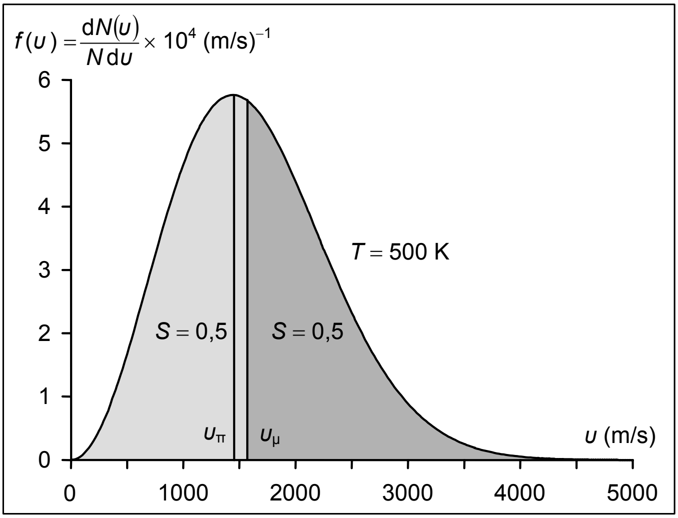
$$N(h) = N_o e^{-\frac{N_A}{RT}V(\rho-\rho')gh} .$$

Το αποτέλεσμα αυτό ελέγχθηκε και επαληθεύθηκε από τον Perrin με τις σχετικές του μετρήσεις κατά τη μελέτη της κίνησης Brown και αποτελεί πειραματική επιβεβαίωση της κινητικής θεωρίας των αερίων.

18. Σε κάθε κατανομή η αποκαλούμενη διάμεσος χωρίζει την επιφάνεια κάτω από την καμπύλη της συνάρτησης κατανομής στο μισό. Στην κατανομή Maxwell των μοριακών ταχυτήτων, η διάμεσος αντιστοιχεί σε μια τέτοια τιμή υ_μ της ταχύτητας, ώστε τα μισά μόρια να έχουν μικρότερη τιμή ταχύτητας από αυτήν και τα άλλα μισά μεγαλύτερη. Να επαληθεύστε ότι η ενδιάμεση ταχύτητα είναι $\upsilon_\mu = 1{,}09\upsilon_\pi$, όπου υ_π η πιο πιθανή ταχύτητα.

Λύση: Όπως είναι γνωστό, η κατανομή Maxwell των μοριακών ταχυτήτων παριστά στοιχειώδη πιθανότητα, ακριβέστερα διαφορικό πιθανότητας dP και γι' αυτό αντίστοιχα η παράγωγος $f(\upsilon)$ είναι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας. Ώστε έχουμε

$$\mathrm{d}P = \frac{\mathrm{d}N(\upsilon)}{N} = f(\upsilon)\mathrm{d}\upsilon \qquad \text{και} \qquad \int_0^1 \mathrm{d}P = \frac{1}{N}\int_0^N \mathrm{d}N(\upsilon) = \int_0^\infty f(\upsilon)\mathrm{d}\upsilon = 1.$$



Σχήμα 4

Έτσι το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη $\{f(\upsilon),\upsilon\}$ είναι πάντοτε ίσο με τη μονάδα, ανεξάρτητα από τη φύση του αερίου και τη θερμοκρασία. Στο σχήμα 4 εικονίζεται η συνάρτηση της κατανομής για το αέριο He στους 500 K. Η πιο πιθανή ταχύτητα σ' αυτή τη θερμοκρασία είναι (σύμφωνα με το πρόβλημα **10**) $\upsilon_\pi = 1442$ m/s και επομένως $\upsilon_\mu = 1571$ m/s.

Σύμφωνα με όσα αναφέρονται παραπάνω, το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη από μηδέν μέχρι την ταχύτητα υ_μ πρέπει να είναι ίσο με 0,5, καθώς επίσης 0,5 είναι και το εμβαδόν από υ_μ μέχρι ∞. Επομένως

$$\int_0^{\upsilon_\mu} f(\upsilon)\mathrm{d}\upsilon = 1 - \int_0^{\upsilon_\mu} f(\upsilon)\mathrm{d}\upsilon = \frac{1}{2}.$$

Από το πρόβλημα **15** προκύπτει ότι

$$\frac{N(\upsilon \le \upsilon_\mu)}{N} = \int_0^{\upsilon_\mu} f(\upsilon)\mathrm{d}\upsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x_\mu} e^{-x^2}\mathrm{d}x - \frac{2}{\sqrt{\pi}}x_\mu e^{-x_\mu^2},$$

όπου

$$x_\mu = \left(\frac{m}{2kT}\right)^{1/2} \upsilon_\mu = \left(\frac{m}{2kT}\right)^{1/2} \times 1{,}09\,\upsilon_\pi = \left(\frac{m}{2kT}\right)^{1/2} \times 1{,}09\left(\frac{2kT}{m}\right)^{1/2} = 1{,}09\ .$$

Από τους πίνακες του ολοκληρώματος πιθανότητας ή συνάρτησης σφάλματος, βρίσκουμε ότι

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x_\mu} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{1{,}09} e^{-x^2}\mathrm{d}x = 0{,}877\ .$$

Άρα

$$\int_0^{\upsilon_\mu} f(\upsilon)\mathrm{d}\upsilon = 0{,}877 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}1{,}09e^{-1{,}09^2} = 0{,}877 - 0{,}375 = 0{,}502\ ,$$

δηλαδή αυτό που έπρεπε να δείξουμε.