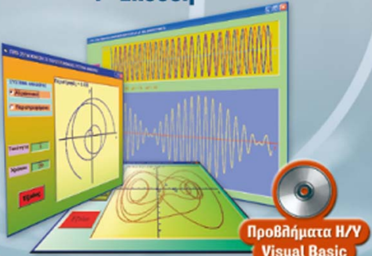
Δημήτριος Σ. Κυριάκος

Αναπληρωτής Καθηγητής • Τμήμα Φυσικής Α.Π.Θ.

Προβλήματα Γενικής Φυσικής

Ι. ΜΗΧΑΝΙΚΗ

Γ΄ Έκδοση



Προβλήματα Η/Υ
Visual Basic

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ Γ′ ΕΚΔΟΣΗΣ

Όπως έγραφα και στον πρόλογο της α′ έκδοσης, το βιβλίο αυτό περιέχει προβλήματα Γενικής Φυσικής και ιδιαίτερα της Μηχανικής στο επίπεδο της διδασκαλίας του αντίστοιχου μαθήματος του Α′ εξαμήνου του Τμήματος Φυσικής του Α.Π.Θ. Αποτελεί λοιπόν ένα βοήθημα για τους φοιτητές των Θετικών Επιστημών των Πανεπιστημίων, μπορούν όμως να προστρέξουν σ’ αυτό και οι συνάδελφοι διδάσκοντες, αλλά και μαθητές των Λυκείων και καθηγητές της Μέσης Εκπαίδευσης. Άλλωστε, η φυσική νομοτέλεια είναι ορισμένη, η φυσική σκέψη πρέπει να ακολουθεί με λογική και συνέπεια αυτή τη νομοτέλεια, την οποία στο τέλος πρέπει να εκφράζουμε με διατυπώσεις νοημάτων, μαθηματικές εξισώσεις ή οποιοδήποτε πρόσφορο μέσο και τρόπο, ώστε να γίνεται αντιληπτή και κατανοητή. Το μαθηματικό επίπεδο που χρησιμοποιείται εδώ δεν είναι ιδιαίτερα υψηλό, μερικές βασικές γνώσεις από διανυσματικό, διαφορικό και ολοκληρωτικό λογισμό είναι αρκετές. Αυτό προκύπτει από την ανάγκη χειρισμού των διανυσματικών φυσικών μεγεθών και από το ότι η περιγραφή καταστάσεων απαιτεί στιγμιαίες τιμές, που επιτρέπουν να προβλέψουμε συμπεριφορές για μεγάλα διαστήματα, ή αντίστροφα συνάγονται από τη γνώση του τί συμβαίνει σε μεγάλα χρονικά διαστήματα. Επίσης, ο συνήθης κανόνας είναι τα φυσικά μεγέθη να εξελίσσονται και να μεταβάλλονται συνεχώς και η σταθερότητα μπορεί να προσεγγιστεί με στοιχειώδεις (απειροστές) μεταβολές.

Σε ότι αφορά το περιεχόμενο του βιβλίου, η διάρθρωση του και ο χωρισμός της ύλης σε κεφάλαια ακολουθεί σε γενικές γραμμές το πανεπιστημιακό μας βιβλίο θεωρίας «ΦΥΣΙΚΗ – Εισαγωγή στη Μηχανική». Στην προηγούμενη Β′ έκδοση προστέθηκε και το κεφάλαιο της Σχετικότητας. Γι’ αυτό το λόγο δεν υπάρχει εδώ συνοπτική θεωρία ή τυπολόγιο. Πιστεύω άλλωστε, ότι είναι καλύτερα να ανατρέχουμε, όταν χρειάζεται, στην αναλυτική παρουσίαση ενός θέματος ώστε η κατανόηση και η εμπέδωση να έχουν πιο μόνιμο χαρακτήρα. Υπάρχουν δώδεκα κεφάλαια λυμένων προβλημάτων, συνολικού αριθμού 153 και ακολουθούν 169 προβλήματα προτεινόμενα για λύση. Η ύλη συμπληρώνεται με 41 προβλήματα για ηλεκτρονικό υπολογιστή, από τα οποία τα 22 είναι λυμένα και τα υπόλοιπα 19 προσφέρονται για λύση.

Θα ήθελα να εκθέσω μερικές σκέψεις μου, για τη χρήση και σκοπιμότητα των προβλημάτων στη διδασκαλία και εκμάθηση της φυσικής. Συνηθίζεται σε διάφορα βιβλία φυσικής, ελληνικά και ξένα, να υπάρχει πληθώρα προβλημάτων σε κάθε τόμο. Άλλα απ’ αυτά είναι απλές εφαρμογές, άλλα «εύκολα» και άλλα δυσκολότερα. Επίσης, παρατηρείται μερικές φορές στις εξετάσεις του μαθήματος σε διάφορα πανεπιστημιακά τμήματα, να θέτονται για λύση προβλήματα σύνθετα, δυσεπίλυτα ενίοτε και ίσως με απαιτούμενες γνώσεις που ξεπερνούν το βασικό επίπεδο του μαθήματος. Το αποτέλεσμα είναι ο φοιτητής ή ο μαθητής να βομβαρδίζεται με όγκο προβλημάτων και να καταφεύγει στην «εύκολη λύση», δηλαδή στην απομνημόνευση.

Ο σκοπός των προβλημάτων όμως είναι άλλος. Δεν είναι να μπορούμε να λύσουμε οποιοδήποτε πρόβλημα, ακόμη και το πιο δύσκολο και σύνθετο και πολύ περισσότερο δεν είναι αυτοσκοπός. Ο γράφων δεν διεκδικεί τέτοια ικανότητα και το προνόμιο του παντογνώστη. Άλλωστε για κάθε θέμα ή ενότητα ή αντίστοιχο πεδίο έρευνας υπάρχουν οι εξειδικευμένοι επιστήμονες που έχουν και τον τελευταίο λόγο. Γι' αυτό και στο παρόν βιβλίο ο αριθμός των προβλημάτων δεν είναι πολύ μεγάλος και μερικά θα μπορούσαν να χαρακτηριστούν σαν στοιχειώδη. Η εκπαιδευτική μου εμπειρία από διδασκαλία και εξετάσεις μου επιτρέπει να πω στο σημείο αυτό ότι τα στοιχειώδη χρειαζόμαστε γιατί εκεί χωλαίνουμε. Το πρόβλημα πρέπει να βοηθήσει ώστε να κατανοήσουμε τη λειτουργία της φυσικής νομοτέλειας κατά την εξέλιξη των φαινομένων, ποια είναι η σημασία των φυσικών μεγεθών και των φυσικών νόμων που τα συνδέουν και πώς μπορούμε να τους εφαρμόσουμε ώστε να καταλήξουμε σε ασφαλή συμπεράσματα. Για παράδειγμα πρέπει να καταλάβουμε ότι η τριβή δεν είναι πάντοτε μια δύναμη επιζήμια που εμποδίζει την κίνηση, αλλά αντίθετα πολλές φορές είναι μια χρήσιμη δύναμη (ωφέλιμη για μας) που υποβοηθά και διατηρεί κίνηση. Το πρόβλημα είναι, ποιος παρατηρεί και ποιος υφίσταται! Θα μπορούσε κανείς να γράψει ολόκληρο βιβλίο με τις παράδοξες (κατά ήπιο χαρακτηρισμό) απορίες και απαντήσεις που κατά καιρούς έχει συναντήσει. Ακόμη και όταν οι φοιτητές, μπροστά στη δυσκολία που αντιμετωπίζουν, ανακαλούν, ύστερα από ένα χρόνο, τις γνώσεις τους από το Λύκειο, προβάλλει τραγικά η αποτυχία της απομνημόνευσης και της μη εμπέδωσης. Βέβαια πολλά ερωτηματικά γεννώνται και για το εκπαιδευτικό μας σύστημα και στο τέλος – τέλος για το τι κάνουμε όλοι εμείς οι δάσκαλοι μέσα στις αίθουσες.

Το καινούργιο σ' αυτήν την έκδοση αφορά τα προβλήματα για ηλεκτρονικό υπολογιστή. Στις προηγούμενες εκδόσεις, για τη λύση τους είχε προτιμηθεί η γλώσσα προγραμματισμού BASIC, η οποία είναι αρκετά εύκολη στη χρήση της είναι όμως παράλληλα ένα ευφυές προϊόν λογισμικού και όπως αναφερόταν σε αντίστοιχα ξένα βιβλία, εθεωρείτο ως μια γλώσσα υψηλού επιπέδου. Επειδή όμως όλα τα πράγματα εξελίσσονται, ιδιαίτερα δε στους υπολογιστές, στην παρούσα έκδοση γίνεται χρήση της VISUAL BASIC, την οποία θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε σαν προέκταση της BASIC, αν και αυτό δεν είναι απόλυτα αλήθεια.

Πιστεύω ότι η παρουσίαση των προβλημάτων υπολογιστή είναι αρκετά συγκροτημένη και η επιλογή και λύση τους έγινε έτσι ώστε να κεντρίζουν την προσοχή και το ενδιαφέρον του αναγνώστη. Είναι βέβαια γνωστό ότι σήμερα υπάρχουν έτοιμα προγράμματα για οποιοδήποτε είδος εργασίας με τυποποιημένη και σχεδόν αυτόματη την πορεία επεξεργασίας. Ο σκοπός μας όμως εδώ είναι να προγραμματίσουμε οι ίδιοι δημιουργικά, να διασκεδάσουμε, να κατανοήσουμε και λίγο περισσότερο τη φυσική και ακόμη να νοιώσουμε και το συναίσθημα της επιτυχίας.

Το περιεχόμενο της εκφώνησης μερικών προβλημάτων μπορεί να το συναντήσει κανείς με παραλλαγές και αλλού, αφού αναφέρονται σε συγκεκριμένα προβλήματα φυσικής. Επίσης πολλά από τα προβλήματα είναι καινούργια, η λύση όμως όλων των προτεινομένων προβλημάτων είναι πρωτότυπη. Γι' αυτό και ένας έμπειρος προγραμματιστής, ιδιαίτερα με την VISUAL BASIC, ίσως είχε καλύτερες προτάσεις λύσης τους. Παράλληλα με τη λογική λύσης τους και το πρόγραμμα που προτείνεται γίνεται και επαρκής ανάλυση και επεξήγηση της φυσικής κάθε προβλήματος και όπου χρειάζεται και των αποτελεσμάτων που προκύπτουν.

Θεσσαλονίκη, Ιούνιος 2003 — Δ.Σ. Κυριάκος

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΘΕΜΕΛΕΙΩΔΕΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΣΤΑΘΕΡΕΣ

Σταθερή	Σύμβολο	Τιμή (SI μονάδες)
Ταχύτητα του φωτός	c	$2{,}9979 \times 10^{8}$ m s^{-1}
Ηλεκτρική διαπερατότητα κενού	ε_o	$8{,}8544 \times 10^{-12}$ N^{-1} m^{-2} C^{2}
Μαγνητική διαπερατότητα κενού	μ_o	$4\pi \times 10^{-7}$ N A^{-2}
Στοιχειώδες ηλεκτρικό φορτίο	e	$1{,}6021 \times 10^{-19}$ C
Μονάδα ατομικής μάζας	u	$1{,}6606 \times 10^{-27}$ kg
Μάζα ηρεμίας ηλεκτρονίου	m_e	$9{,}1091 \times 10^{-31}$ kg
Μάζα ηρεμίας πρωτονίου	m_p	$1{,}6725 \times 10^{-27}$ kg
Μάζα ηρεμίας νετρονίου	m_n	$1{,}6748 \times 10^{-27}$ kg
Ειδικό φορτίο ηλεκτρονίου	$\frac{e}{m_e}$	$1{,}7588 \times 10^{11}$ kg^{-1} C
Σταθερή του Planck	h $\hbar = \frac{h}{2\pi}$	$6{,}6256 \times 10^{-34}$ J s $1{,}055 \times 10^{-34}$ J s
Σταθερή Faraday	F	$9{,}6487 \times 10^{4}$ C mol^{-1}
Πρώτη ακτίνα Bohr	$\alpha_o = \frac{h^2}{\pi m e^2}$	$5{,}2917 \times 10^{-11}$ m
Μήκος κύματος Compton του ηλεκτρονίου του πρωτονίου	 $\lambda_{c,e} = \frac{h}{m_e e}$ $\lambda_{c,p} = \frac{h}{m_p e}$	 $2{,}4262 \times 10^{-12}$ m $1{,}3214 \times 10^{-15}$ m
Σταθερή Rydberg	R	$1{,}0974 \times 10^{7}$ m^{-1}
Μαγνητόνη του Bohr	$\mu_B = \frac{eh}{4\pi m e_e}$	$9{,}2732 \times 10^{-24}$ J T^{-1}
Αριθμός Avogadro	N_A	$6{,}0225 \times 10^{23}$ mol^{-1}
Σταθερή Boltzmann	k	$1{,}3805 \times 10^{-23}$ J K^{-1}
Παγκόσμια σταθερή αερίων	R	$8{,}3143$ J K^{-1} mol^{-1}

Σταθερή	Σύμβολο	Τιμή (SI μονάδες)
Γραμμομοριακός όγκος ιδανικού αερίου σε κ.σ.	V_{mol}	$2{,}2414 \times 10^{-2}$ m^3 mol^{-1}
Σταθερή Stefan – Boltzmann	σ	$5{,}6697 \times 10^{-8}$ J K^{-4} m^{-2} s^{-1}
Νόμος Wien ακτινοβολίας	$\lambda_{max}T$	$2{,}8978 \times 10^{-3}$ m K
Τριπλό σημείο νερού	——	273,16 K
Σημείο πάγου	——	273,15 K
Μέγιστη πυκνότητα νερού (στους 3,98° C και 1 atm)	——	$9{,}9997 \times 10^{2}$ kg m^{-3}
Σταθερή παγκόσμιας έλξης	G	$6{,}670 \times 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}
Επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια της θάλασσας Στον Ισημερινό Σε πλάτος 45°	 g g	 9,7805 m s^{-2} 9,8067 m s^{-2}
Ατμοσφαίρικη πίεση (1 atm)	——	$1{,}013 \times 10^{5}$ N m^{-2}
Πυκνότητα αέρα	——	1,293 kg m^{-3}
Ταχύτητα ήχου σε κ.σ.	——	331,4 m s^{-1}
Ισημερινή ακτίνα γης	——	$6{,}378 \times 10^{6}$ m
Πολική ακτίνα γης	——	$6{,}357 \times 10^{6}$ m
Μέση πυκνότητα γης	——	5552 kg m^{-3}
Μάζα γης	——	$5{,}983 \times 10^{24}$ kg
Ογκος γης	——	$1{,}087 \times 10^{21}$ m^3
Απόσταση γης – ήλιου		$1{,}49 \times 10^{11}$ m
Μηχανικό ισοδύναμο θερμότητας	j	4,1855 J cal^{-1}

1. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

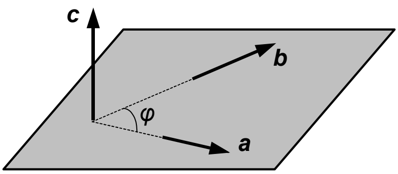
1. Δίνονται τα διανύσματα $\boldsymbol{a}(3,4,-5)$ και $\boldsymbol{b}(-1,2,0)$. Υπολογίστε το μέτρο του καθενός, το αριθμητικό τους γινόμενο, τη γωνία τους και το διανυσματικό τους γινόμενο.

Λύση: Το μέτρο των διανυσμάτων είναι

$$a = \sqrt{3^2 + 4^2 + (-5)^2} = \sqrt{50} = 7{,}07, \qquad b = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = 2{,}24 .$$

Επίσης είναι

$$\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b} = \left(3\hat{\boldsymbol{x}} + 4\hat{\boldsymbol{y}} - 5\hat{\boldsymbol{z}}\right) \bullet \left(-\hat{\boldsymbol{x}} + 2\hat{\boldsymbol{y}}\right) = -3 + 8 = 5 .$$



Σχήμα 1

Αλλά

$$\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b} = ab\,\text{συν}\varphi \quad \text{και} \quad \text{συν}\varphi = \frac{\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b}}{ab} .$$

Από όλες τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι

$$\text{συν}\varphi = \frac{5}{7{,}07 \times 2{,}24} = 0{,}316 \quad \text{και} \quad \varphi = 71{,}6^\circ .$$

Τέλος, το διανυσματικό γινόμενο δίνει ως αποτέλεσμα το διάνυσμα

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \left(3\hat{\boldsymbol{x}} + 4\hat{\boldsymbol{y}} - 5\hat{\boldsymbol{z}}\right) \times \left(-\hat{\boldsymbol{x}} + 2\hat{\boldsymbol{y}}\right) = 6\hat{\boldsymbol{z}} + 4\hat{\boldsymbol{z}} + 5\hat{\boldsymbol{y}} + 10\hat{\boldsymbol{x}}$$

$$\text{ή} \qquad \boldsymbol{c} = 10\hat{\boldsymbol{x}} + 5\hat{\boldsymbol{y}} + 10\hat{\boldsymbol{z}} \qquad \text{ή} \qquad \boldsymbol{c}(10{,}5{,}10) .$$

2. Δίνονται τα διανύσματα $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ πάνω στο επίπεδο xy με μέτρα 30 και 40, αρχή την αρχή των συντεταγμένων και αντίστοιχες γωνίες 30° και 60° με τον άξονα x. Ποιο είναι το μέτρο και η διεύθυνση του αθροίσματος τους;

Λύση: Το άθροισμα των δύο διανυσμάτων βρίσκεται και αυτό στο επίπεδο xy, δηλαδή

$$\boldsymbol{c} = c_x \hat{\boldsymbol{x}} + c_y \hat{\boldsymbol{y}} .$$

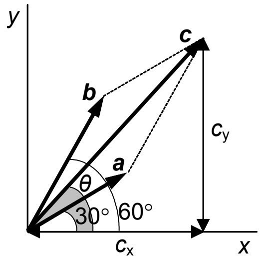
Επίσης η αναλυτική έκφραση των διανυσμάτων $\boldsymbol{a}$ και $\boldsymbol{b}$ είναι

$$\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a} \bullet \hat{\boldsymbol{x}})\hat{\boldsymbol{x}} + (\boldsymbol{a} \bullet \hat{\boldsymbol{y}})\hat{\boldsymbol{y}} = a\,\text{συν}30^\circ \hat{\boldsymbol{x}} + a\,\text{ημ}30^\circ \hat{\boldsymbol{y}} = 15\sqrt{3}\hat{\boldsymbol{x}} + 15\hat{\boldsymbol{y}} ,$$

$$\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b} \bullet \hat{\boldsymbol{x}})\hat{\boldsymbol{x}} + (\boldsymbol{b} \bullet \hat{\boldsymbol{y}})\hat{\boldsymbol{y}} = b\,\text{συν}60^\circ \hat{\boldsymbol{x}} + b\,\text{ημ}60^\circ \hat{\boldsymbol{y}} = 20\hat{\boldsymbol{x}} + 20\sqrt{3}\hat{\boldsymbol{y}} .$$

Συνεπώς

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \left(15\sqrt{3}\hat{\boldsymbol{x}} + 15\hat{\boldsymbol{y}}\right) + \left(20\hat{\boldsymbol{x}} + 20\sqrt{3}\hat{\boldsymbol{y}}\right) = \left(15\sqrt{3} + 20\right)\hat{\boldsymbol{x}} + \left(15 + 20\sqrt{3}\right)\hat{\boldsymbol{y}}\,.$$



Σχήμα 2

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι

$$c_x = 15\sqrt{3} + 20 = 45{,}98\,, \qquad c_y = 15 + 20\sqrt{3} = 49{,}64\,.$$

Ώστε το μέτρο του ***c*** είναι

$$c = \sqrt{c_x^2 + c_y^2} = \sqrt{4578{,}46} = 67{,}66\,,$$

ενώ η γωνία θ που σχηματίζει με τον άξονα x βρίσκεται από την

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{c_y}{c_x} = \frac{15 + 20\sqrt{3}}{15\sqrt{3} + 20} = 1{,}08 \quad \text{και} \quad \theta = 47{,}19^\circ\,.$$

3. Τα διανύσματα ***a***(1,2,3) και ***b***(–1,1,2) βρίσκονται πάνω στο ίδιο επίπεδο. Να βρεθεί η ορθή προβολή του πρώτου πάνω στο δεύτερο καθώς και τα συνημίτονα κατεύθυνσης του ***b***. Επίσης να βρεθεί ένα διάνυσμα κάθετο πάνω στο επίπεδο τους, το οποίο να έχει μέτρο ίσο με την επιφάνεια του τριγώνου που ορίζεται από τα ***a***,***b***.

Λύση: Η ορθή προβολή του ***a*** πάνω στο ***b*** είναι το διάνυσμα

$$\boldsymbol{c} = \frac{(\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b})\boldsymbol{b}}{b^2} = \frac{7}{6}\left(-\hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{y}} + 2\hat{\boldsymbol{z}}\right).$$

Το ***b*** γράφεται

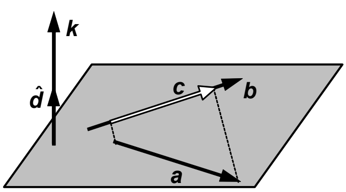
$$\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b} \bullet \hat{\boldsymbol{x}})\hat{\boldsymbol{x}} + (\boldsymbol{b} \bullet \hat{\boldsymbol{y}})\hat{\boldsymbol{y}} + (\boldsymbol{b} \bullet \hat{\boldsymbol{z}})\hat{\boldsymbol{z}} = -\hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{y}} + 2\hat{\boldsymbol{z}}$$

και επομένως

$$\boldsymbol{b} \bullet \hat{\boldsymbol{x}} = -1, \qquad \boldsymbol{b} \bullet \hat{\boldsymbol{y}} = 1 \qquad \text{και} \qquad \boldsymbol{b} \bullet \hat{\boldsymbol{z}} = 2.$$

Από τα τελευταία εσωτερικά γινόμενα προκύπτουν τα συνημίτονα κατεύθυνσης του ***b***,

$$\text{συν}(\boldsymbol{b}, \hat{\boldsymbol{x}}) = -\frac{1}{b} = -\frac{1}{\sqrt{6}}, \quad \text{συν}(\boldsymbol{b}, \hat{\boldsymbol{y}}) = \frac{1}{b} = \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad \text{συν}(\boldsymbol{b}, \hat{\boldsymbol{z}}) = \frac{2}{b} = \frac{2}{\sqrt{6}}\,.$$



Σχήμα 3

Το μοναδιαίο διάνυσμα που είναι κάθετο πάνω στο επίπεδο των ***a***,***b*** ορίζεται από την

$$\hat{\boldsymbol{d}} = \frac{\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|}\,.$$

Συνεπώς το ζητούμενο διάνυσμα ***k*** θα έχει την ακόλουθη μορφή

$$\boldsymbol{k} = k\hat{\boldsymbol{d}} = \frac{1}{2}E(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\hat{\boldsymbol{d}} = \frac{1}{2}|\,\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\,|\frac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{|\,\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\,|} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}).$$

Δηλαδή
$$\boldsymbol{k} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}} \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left[(4-3)\hat{\boldsymbol{x}} - (2+3)\hat{\boldsymbol{y}} + (1+2)\hat{\boldsymbol{z}}\right]$$

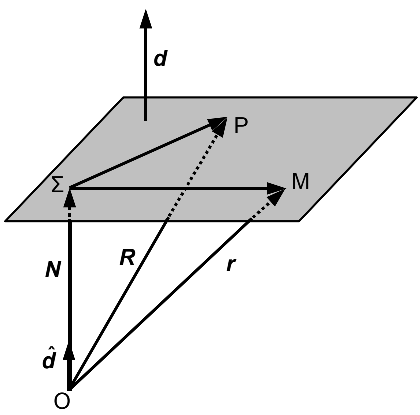
και τελικά
$$\boldsymbol{k} = \frac{\hat{\boldsymbol{x}} - 5\hat{\boldsymbol{y}} + 3\hat{\boldsymbol{z}}}{2}.$$

4. Το διάνυσμα επίπεδης επιφάνειας είναι $\boldsymbol{d}(1,2,1)$. Να βρεθεί το εμβαδόν της επιφάνειας και η εξίσωση της, αν το σημείο Μ(1,2,0) βρίσκεται πάνω στην επιφάνεια.

Λύση: Σύμφωνα με τον ορισμό του διανύσματος επιφάνειας, το εμβαδόν της επιφάνειας είναι $E = |\boldsymbol{d}| = d = \sqrt{6}$. Έστω Ο η αρχή των διανυσμάτων και $\boldsymbol{N}$ ένα διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια. Είναι φανερό ότι, η ορθή προβολή του διανύσματος $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{OM}$ στη διανυσματική μονάδα $\hat{\boldsymbol{d}}$ είναι το διάνυσμα $\boldsymbol{N}$, δηλαδή

$$\boldsymbol{N} = (\boldsymbol{r} \bullet \hat{\boldsymbol{d}})\hat{\boldsymbol{d}} \qquad \text{ή} \qquad \boldsymbol{N} = \frac{\boldsymbol{r} \bullet \boldsymbol{d}}{d^2}\boldsymbol{d}$$

και
$$\boldsymbol{N} = \frac{5}{6}(\hat{\boldsymbol{x}} + 2\hat{\boldsymbol{y}} + \hat{\boldsymbol{z}}).$$



Σχήμα 4

Αν τώρα, $\boldsymbol{R}(x,y,z)$ είναι το διάνυσμα θέσης ενός τυχαίου σημείου Ρ της επιφάνειας, έχουμε (Σχ. 4)

$$\boldsymbol{N} \bullet \boldsymbol{\Sigma P} = 0 \quad \text{ή} \quad \boldsymbol{N} \bullet (\boldsymbol{R} - \boldsymbol{N}) = 0$$

και
$$\boldsymbol{N} \bullet \boldsymbol{R} = N^2.$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι

$$\frac{5}{6}x + \frac{10}{6}y + \frac{5}{6}z = \left[\frac{5}{6}\sqrt{1+4+1}\right]^2 = \frac{25}{6}.$$

Συνεπώς η εξίσωση της επιφάνειας είναι

$$x + 2y + z = 5.$$

2. ΚΙΝΗΣΗ

5. Σώμα κινείται με επιτάχυνση που έχει συντεταγμένες $a_x = 10t$ και $a_y = 5t^2$. Να βρεθεί η διανυσματική εξίσωση της κίνησής του, αν για $t = 0$ είναι $\boldsymbol{u}_o = 0$ και $\boldsymbol{r}_o = 0$.

Λύση: Η επιτάχυνση του σώματος είναι

$$\boldsymbol{a} = a_x\hat{\boldsymbol{x}} + a_y\hat{\boldsymbol{y}} = 10t\,\hat{\boldsymbol{x}} + 5t^2\hat{\boldsymbol{y}}\ .$$

Από την $\quad \boldsymbol{a} = \dfrac{d\boldsymbol{u}}{dt} \quad$ προκύπτει ότι

$$\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_o = \int_0^t \boldsymbol{a}\,dt \qquad \text{ή} \qquad \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_o = \frac{1}{2}10t^2\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{1}{3}5t^3\hat{\boldsymbol{y}}\ .$$

Επίσης, από τις αρχικές συνθήκες έχουμε ότι $\boldsymbol{u}_o = 0$ και η ταχύτητα είναι

$$\boldsymbol{u} = 5t^2\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{5}{3}t^3\hat{\boldsymbol{y}}\ .$$

Κατά τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε το διάνυσμα θέσης, δηλαδή

$$\boldsymbol{u} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}, \qquad \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_o = \int_0^t \boldsymbol{u}\,dt\ , \qquad \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_o = \frac{5}{3}t^3\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{5}{12}t^4\hat{\boldsymbol{y}}$$

και επειδή $\boldsymbol{r}_o = 0$, καταλήγουμε στην

$$\boldsymbol{r} = \frac{5}{3}t^3\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{5}{12}t^4\hat{\boldsymbol{y}}\ .$$

6. Σωματίδιο κινείται ομαλά πάνω σε κυκλική τροχιά με κέντρο το σημείο (0,3), ακτίνα 3 m και περίοδο 20 s. Στην αρχή του χρόνου $t = 0$, βρίσκεται στην αρχή των συντεταγμένων. Να υπολογιστούν: α) Το μέτρο και η γωνία κλίσης του διανύσματος θέσης με το χρόνο t. β) Το διάνυσμα της μετατόπισης, όπως επίσης το μέτρο και η διεύθυνση του στο χρονικό διάστημα από 5 s μέχρι 10 s. γ) Το μέτρο και η διεύθυνση της ταχύτητας και της επιτάχυνσης με το χρόνο t.

Λύση: **α)** Σε τυχαία χρονική στιγμή το διάνυσμα θέσης του υλικού σημείου Μ δίνεται από τη σχέση

$$\boldsymbol{r} = \rho\hat{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{R}\ .$$

Αυτή γράφεται

$$\boldsymbol{r} = \rho\hat{\boldsymbol{y}} + (\rho\eta\mu\omega t\,\hat{\boldsymbol{x}} - \rho\sigma\upsilon\nu\omega t\,\hat{\boldsymbol{y}}) = \rho\eta\mu\omega t\,\hat{\boldsymbol{x}} + \rho(1-\sigma\upsilon\nu\omega t)\hat{\boldsymbol{y}}\ ,$$

όπου $\rho = 3$ m η ακτίνα του κύκλου και $\omega = 2\pi/T = 2\pi/20 = 0{,}1\pi$ rad/s η κυκλική συχνότητα. Συνεπώς το μέτρο του διανύσματος θέσης είναι

$$r = \sqrt{\rho^2\eta\mu^2\omega t + \rho^2(1-\sigma\upsilon\nu\omega t)^2} = \rho\sqrt{2(1-\sigma\upsilon\nu\omega t)}$$

Επίσης είναι

$$r_x = \boldsymbol{r}\bullet\hat{\boldsymbol{x}} \qquad \text{ή} \qquad \rho\eta\mu\omega t = \rho\sqrt{2(1-\sigma\upsilon\nu\omega t)}\,\sigma\upsilon\nu\varphi\ .$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{\eta\mu\omega t}{\sqrt{2(1-\sigma\upsilon\nu\omega t)}} = \frac{2\eta\mu\dfrac{\omega t}{2}\sigma\upsilon\nu\dfrac{\omega t}{2}}{\sqrt{2\times 2\eta\mu^2\dfrac{\omega t}{2}}} = \sigma\upsilon\nu\frac{\omega t}{2}\ .$$

Ώστε

$$\varphi = \frac{\omega t}{2}\ .$$

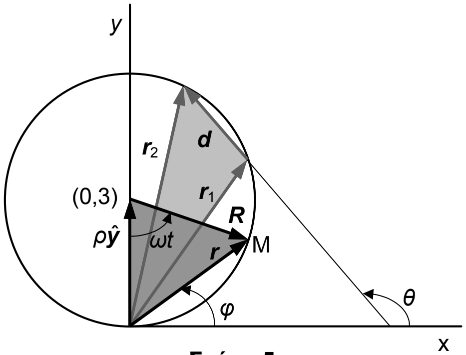
β) Το διάνυσμα της μετατόπισης στο χρονικό διάστημα $t_2 - t_1$ είναι $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$, δηλαδή

$$\boldsymbol{d} = \rho(\eta\mu\omega t_2 - \eta\mu\omega t_1)\hat{\boldsymbol{x}} + \rho(\sigma\upsilon\nu\omega t_1 - \sigma\upsilon\nu\omega t_2)\hat{\boldsymbol{y}}\ .$$

Θέτοντας $t_1 = 5$ s και $t_2 = 10$ s, έχουμε

$$\boldsymbol{d} = 3(-1)\hat{\boldsymbol{x}} + 3(+1)\hat{\boldsymbol{y}} = -3\hat{\boldsymbol{x}} + 3\hat{\boldsymbol{y}}$$

και φυσικά $d = 3\sqrt{2}$ m.



Σχήμα 5

Η γωνία κλίσης θ προσδιορίζεται από την

$$d_x = \boldsymbol{d}\bullet\hat{\boldsymbol{x}} \qquad \text{ή} \qquad -3 = 3\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu\theta\ ,$$

οπότε

$$\sigma\upsilon\nu\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{και} \qquad \theta = 135^\circ.$$

γ) Η ταχύτητα του υλικού σημείου είναι

$$\boldsymbol{\upsilon} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \rho\omega\sigma\upsilon\nu\omega t\,\hat{\boldsymbol{x}} + \rho\omega\eta\mu\omega t\,\hat{\boldsymbol{y}}\ .$$

Αρα $\upsilon = \rho\omega = 0{,}3\pi$ m/s.

Από το γινόμενο

$$\boldsymbol{\upsilon}\bullet\boldsymbol{R} = \rho\omega\sigma\upsilon\nu\omega t\,\rho\eta\mu\omega t - \rho\omega\eta\mu\omega t\,\rho\sigma\upsilon\nu\omega t = 0$$

προκύπτει ότι το διάνυσμα της ταχύτητας $\boldsymbol{u}$ είναι κάθετο στο ακτινικό διάνυσμα $\boldsymbol{R}$, δηλαδή έχει τη διεύθυνση της εφαπτομένης στο Μ. Τέλος η επιτάχυνση είναι

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} = \rho\omega^2 \eta\mu\omega t\, \hat{\boldsymbol{x}} + \rho\omega^2 \sigma\upsilon\nu\omega t\, \hat{\boldsymbol{y}} = -\omega^2 \boldsymbol{R}\,.$$

Απ' αυτήν φαίνεται ότι η διεύθυνση του $\boldsymbol{a}$ είναι αντίθετη της διεύθυνσης του $\boldsymbol{R}$. Το μέτρο της επιτάχυνσης είναι $a = \omega^2 \rho = 0{,}03\pi^2$ m/s^2.

7. Οι παραμετρικές εξισώσεις της κίνησης ενός υλικού σημείου είναι

$$x = t^2\,, \qquad y = t^4 - 2t^2 - 3\,.$$

Να γραφεί η εξίσωση της τροχιάς και να βρεθεί η ταχύτητα και η επιτάχυνση του στη χρονική στιγμή $t = 1{,}5$ s. Επίσης η εφαπτομενική και η κεντρομόλος επιτάχυνση στον ίδιο χρόνο. Τα x,y μετρούνται σε μέτρα.

Λύση: Όπως φαίνεται από την πρώτη των παραμετρικών εξισώσεων, η τετμημένη x του σώματος δεν μπορεί να πάρει αρνητικές τιμές, ενώ αντίθετα μπορούμε να θεωρήσουμε χρονικές στιγμές πρίν από την αυθαίρετη στιγμή $t = 0$. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, υπό ορισμένες προϋποθέσεις, παλίνδρομη κίνηση του υλικού σημείου στην τροχιά του, όπως δείχνεται και στο σχήμα 6.

Με απαλοιφή του χρόνου t ανάμεσα στις παραμετρικές εξισώσεις κίνησης βρίσκεται η εξίσωση της τροχιάς.

$$y = x^2 - 2x - 3\,,$$

που είναι παραβολή. Η θέση του υλικού σημείου Μ καθορίζεται από το διάνυσμα

$$\boldsymbol{r} = t^2 \hat{\boldsymbol{x}} + \left(t^4 - 2t^2 - 3\right)\hat{\boldsymbol{y}}\,.$$

Συνεπώς, η ταχύτητα και η επιτάχυνση του εκφράζονται από τις ακόλουθες σχέσεις,

$$\boldsymbol{u} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = 2t\, \hat{\boldsymbol{x}} + 4\left(t^3 - t\right)\hat{\boldsymbol{y}}\,, \qquad \boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} = 2\, \hat{\boldsymbol{x}} + 4\left(3t^2 - 1\right)\hat{\boldsymbol{y}}\,.$$

Για $t = 1{,}5$ s τα αντίστοιχα διανύσματα και τα μέτρα τους είναι

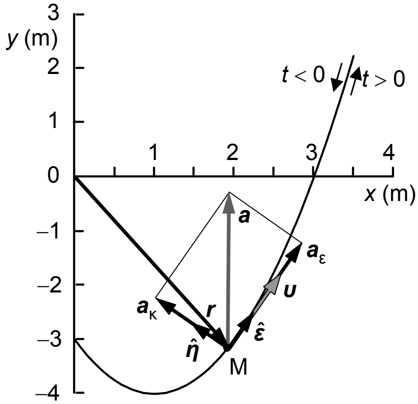
$$\boldsymbol{r} = 2{,}25\hat{\boldsymbol{x}} - 2{,}44\hat{\boldsymbol{y}}\,, \qquad r = \sqrt{2{,}25^2 + 2{,}44^2} = 3{,}32\,\mathrm{m}\,,$$

$$\boldsymbol{u} = 3\hat{\boldsymbol{x}} + 7{,}5\hat{\boldsymbol{y}}\,, \qquad u = \sqrt{3^2 + 7{,}5^2} = 8{,}08\,\mathrm{m/s}\,,$$

$$\boldsymbol{a} = 2\hat{\boldsymbol{x}} + 23\hat{\boldsymbol{y}}\,, \qquad a = \sqrt{2^2 + 23^2} = 23{,}09\,\mathrm{m/s^2}\,.$$

Η εφαπτομενική συνιστώσα $\boldsymbol{a}_\varepsilon$ της επιτάχυνσης είναι η ορθή προβολή του διανύσματος $\boldsymbol{a}$ πάνω στο διάνυσμα $\boldsymbol{u}$,

$$\boldsymbol{a}_\varepsilon = \frac{\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{u}}{u^2}\boldsymbol{u} = \frac{6 + 172{,}5}{65{,}25}\left(3\hat{\boldsymbol{x}} + 7{,}5\hat{\boldsymbol{y}}\right) = 8{,}2\hat{\boldsymbol{x}} + 20{,}51\hat{\boldsymbol{y}}$$



Σχήμα 6

και έχει μέτρο

$$|\boldsymbol{a}_\varepsilon| = \sqrt{8{,}2^2 + 20{,}51^2} = 22{,}08\ \text{m/s}^2.$$

Η κεντρομόλος επιτάχυνση $\boldsymbol{a}_\kappa$ βρίσκεται από τη διαφορά

$$\boldsymbol{a}_\kappa = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}_\varepsilon = -6{,}2\hat{\boldsymbol{x}} + 2{,}49\hat{\boldsymbol{y}}$$

και έχει μέτρο

$$|\boldsymbol{a}_\kappa| = \sqrt{(-6{,}2)^2 + 2{,}49^2} = 6{,}68\ \text{m/s}^2.$$

Μία άλλη λύση είναι η ακόλουθη:

Το μέτρο της εφαπτομενικής επιτάχυνσης, σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή, δίνεται από τη σχέση

$$a_\varepsilon = \frac{\mathrm{d}\upsilon(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\sqrt{(2t)^2 + \left(4t^3 - 4t\right)^2}\right] = \left[t^2 + 4\left(t^3 - t\right)^2\right]^{-1/2}\left[2t + 8\left(t^3 - t\right)\left(3t^2 - 1\right)\right].$$

Έτσι στη χρονική στιγμή $t = 1{,}5$ s είναι $a_\varepsilon = 22{,}10$ m/s^2, ενώ η διανυσματική μονάδα της εφαπτομένης

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\boldsymbol{\upsilon}}{|\boldsymbol{\upsilon}|} = \frac{3\hat{\boldsymbol{x}} + 7{,}5\hat{\boldsymbol{y}}}{8{,}08} = 0{,}37\hat{\boldsymbol{x}} + 0{,}93\hat{\boldsymbol{y}}\ .$$

Άρα

$$\boldsymbol{a}_\varepsilon = a_\varepsilon\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = 8{,}21\hat{\boldsymbol{x}} + 20{,}52\hat{\boldsymbol{y}}\ .$$

Το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης είναι

$$a_\kappa = \sqrt{a^2 - a_\varepsilon^2} = 6{,}69\,\text{m/s}^2\ .$$

Η διανυσματική της μονάδα $\hat{\boldsymbol{\eta}}$ βρίσκεται από τη σχέση της δεξιόστροφης ορθογωνιότητας

$$\hat{\boldsymbol{\eta}} = \hat{\boldsymbol{z}} \times \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \hat{\boldsymbol{z}} \times \left(0{,}37\hat{\boldsymbol{x}} + 0{,}93\hat{\boldsymbol{y}}\right) = -0{,}93\hat{\boldsymbol{x}} + 0{,}37\hat{\boldsymbol{y}}\ .$$

Ώστε

$$\boldsymbol{a}_\kappa = a_\kappa\hat{\boldsymbol{\eta}} = -6{,}22\hat{\boldsymbol{x}} + 2{,}47\hat{\boldsymbol{y}}\ .$$

8. Η κίνηση σώματος περιγράφεται από την εξίσωση

$$\boldsymbol{r} = 2{,}5t^2\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{1}{45}\sqrt{(30t + 9)^3}\,\hat{\boldsymbol{y}}\ .$$

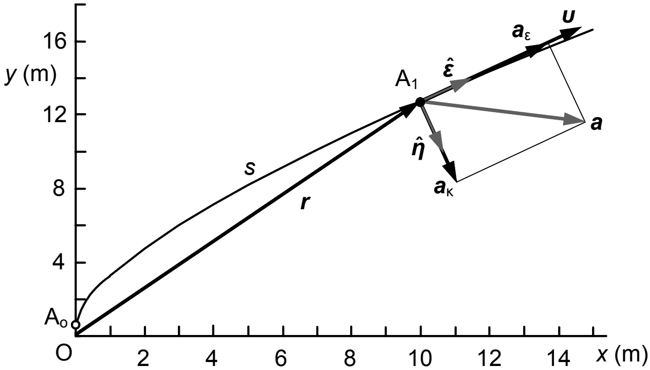
Αν για $t = 0$ είναι $s_o = 0$, να βρεθεί το διάστημα που έχει διαγράψει πάνω στην τροχιά του ύστερα από χρόνο $t = 2$ s. Πόση είναι η επιτάχυνση του τότε; Επίσης, να βρεθούν η επιτρόχια και η κεντρομόλος επιτάχυνση την ίδια χρονική στιγμή (διανύσματα και μέτρο), καθώς και η ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς σ' εκείνο το σημείο.

Λύση: Από το διάνυσμα θέσης του σώματος, με δύο διαδοχικές παραγωγίσεις βρίσκουμε την ταχύτητα και την επιτάχυνση του,

$$\boldsymbol{u} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = 5t\hat{\boldsymbol{x}} + (30t+9)^{1/2}\hat{\boldsymbol{y}}\ , \qquad \boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} = 5\hat{\boldsymbol{x}} + 15(30t+9)^{-1/2}\hat{\boldsymbol{y}}\ .$$

Επίσης το μέτρο της ταχύτητας είναι

$$u = |\boldsymbol{u}| = \sqrt{25t^2 + 30t + 9} = \sqrt{(5t+3)^2} = 5t + 3\,.$$



Σχήμα 7

Το μέτρο όμως της ταχύτητας δίνει την αριθμητική ταχύτητα $u = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$.

Συνεπώς

$$\mathrm{d}s = u\,\mathrm{d}t \qquad \text{και} \qquad \int_0^s \mathrm{d}s = \int_0^2 (5t+3)\mathrm{d}t\,.$$

Αν λοιπόν λάβουμε ως αρχή των διαστημάτων το σημείο A_o της τροχιάς (Σχ. 7), όπου το σώμα βρίσκεται για $t = 0$ ($OA_o = 0{,}6$ m), το διάστημα $A_oA_1 = s$, που διέγραψε στο χρόνο $t = 2$ s είναι

$$s = \left[\frac{5t^2}{2} + 3t\right]_0^2 = 16\ \text{ m.}$$

Κατά την ίδια χρονική στιγμή, η επιτάχυνση του σώματος και το μέτρο της είναι αντίστοιχα

$$\boldsymbol{a} = 5\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{15}{\sqrt{69}}\hat{\boldsymbol{y}}\ , \qquad a = |\boldsymbol{a}| = \sqrt{25 + \frac{225}{69}} = 5{,}316\ \text{ m/s}^2.$$

Η εφαπτομενική συντεταγμένη της επιτάχυνσης είναι σταθερή ανεξάρτητη του χρόνου,

$$a_\varepsilon = \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} = 5\ \text{m/s}^2,$$

ενώ η διανυσματική μονάδα της εφαπτομένης της τροχιάς εκφράζεται από την

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\boldsymbol{\upsilon}}{|\boldsymbol{\upsilon}|} = \frac{5t\,\hat{\boldsymbol{x}} + (30t+9)^{1/2}\,\hat{\boldsymbol{y}}}{5t+3}\ .$$

Για $t = 2$ s είναι

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{10\hat{\boldsymbol{x}} + \sqrt{69}\hat{\boldsymbol{y}}}{13} \qquad \text{και συνεπώς} \qquad \boldsymbol{a}_\varepsilon = a_\varepsilon \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = 5\frac{10\hat{\boldsymbol{x}} + \sqrt{69}\hat{\boldsymbol{y}}}{13}\ .$$

Η κεντρομόλος συνιστώσα προσδιορίζεται από τη σχέση

$$\boldsymbol{a}_\kappa = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}_\varepsilon = \frac{5}{13}\left(3\hat{\boldsymbol{x}} - \frac{30}{\sqrt{69}}\hat{\boldsymbol{y}}\right)$$

και το μέτρο της είναι

$$a_\kappa = \frac{5}{13}\sqrt{3^2 + \frac{30^2}{69}} = 1{,}806\ \text{m/s}^2.$$

Επειδή η κεντρομόλος επιτάχυνση εκφράζεται και με τη σχέση

$$a_\kappa = \frac{\upsilon^2}{R}\ ,$$

η ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς στο θεωρούμενο σημείο A_1 είναι

$$R = \frac{\upsilon^2}{a_\kappa} = \frac{13^2}{1{,}806} = 93{,}59\ \text{m}.$$

Σημειώνεται, ότι οι μονάδες $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$, $\hat{\boldsymbol{\eta}}$, $\hat{\boldsymbol{z}}$ συνδέονται με τη σχέση $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \times \hat{\boldsymbol{\eta}} = -\hat{\boldsymbol{z}}$.

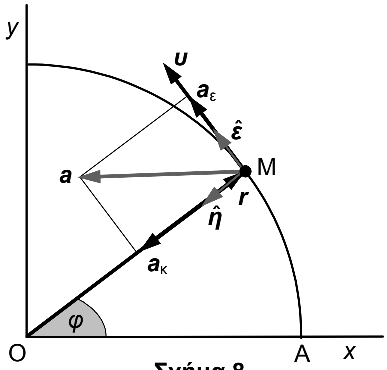
9. Δίσκος ακτίνας r = 4 m περιστρέφεται γύρω από τον κάθετο άξονα του με γωνιακή ταχύτητα $\boldsymbol{\omega} = (6t+5)\hat{\boldsymbol{z}}$ rad/s. Να βρεθούν η ταχύτητα, η εφαπτομενική και η κάθετη επιτάχυνση ενός σημείου της περιφέρειας του δίσκου, για το οποίο οι αρχικές συνθήκες είναι $t = 0$ και $\varphi = 0$, όπου φ η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα θέσης με τον άξονα x.

Λύση: Η γωνιακή ταχύτητα είναι συνάρτηση του χρόνου. Υπάρχει λοιπόν γωνιακή επιτάχυνση

$$\boldsymbol{\omega}' = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} = 6\hat{\boldsymbol{z}}\ ,$$

η οποία είναι σταθερή ανεξάρτητη του χρόνου. Η αρχική γωνιακή ταχύτητα (για $t =$ 0) είναι

$$\boldsymbol{\omega}_o = 5\hat{\boldsymbol{z}} ,$$



Σχήμα 8

ενώ το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας δίνεται από την παράγωγο της γωνίας περιστροφής

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} .$$

Ώστε

$$d\varphi = \omega dt \quad \text{και} \quad \int_0^{\varphi} d\varphi = \int_0^{t} (6t+5)dt .$$

Με την ολοκλήρωση προκύπτει

$$\varphi = 3t^2 + 5t .$$

Το αποτέλεσμα αυτό είναι αναμενόμενο, αφού όταν η επιτάχυνση $\boldsymbol{\omega}'$ είναι σταθερή, τότε

$$\varphi = \varphi_o + \omega_o t + \frac{1}{2}\omega' t^2 .$$

Εδώ φυσικά είναι $\varphi_o = 0$. Το διάνυσμα θέσης του M είναι

$$\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{r} \bullet \hat{\boldsymbol{x}})\hat{\boldsymbol{x}} + (\boldsymbol{r} \bullet \hat{\boldsymbol{y}})\hat{\boldsymbol{y}} = r\,\text{συν}\varphi\,\hat{\boldsymbol{x}} + r\,\text{ημ}\varphi\,\hat{\boldsymbol{y}}$$

ή

$$\boldsymbol{r} = 4\text{συν}(3t^2+5t)\hat{\boldsymbol{x}} + 4\text{ημ}(3t^2+5t)\hat{\boldsymbol{y}} \ \text{m}.$$

Η ταχύτητα προκύπτει από την

$$\boldsymbol{υ} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} ,$$

ή επειδή έχουμε κυκλική κίνηση από την

$$\boldsymbol{υ} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} = (6t+5)\hat{\boldsymbol{z}} \times 4\left[\text{συν}(3t^2+5t)\hat{\boldsymbol{x}} + \text{ημ}(3t^2+5t)\hat{\boldsymbol{y}}\right]$$

$$= -4(6t+5)\left[\text{ημ}(3t^2+5t)\hat{\boldsymbol{x}} - \text{συν}(3t^2+5t)\hat{\boldsymbol{y}}\right] \text{ m/s}.$$

Τέλος το μέτρο της ταχύτητας είναι

$$υ = \omega r = 4(6t+5) \text{ m/s}.$$

Η εφαπτομενική επιτάχυνση βρίσκεται από την

$$\boldsymbol{a}_ε = a_ε \hat{\boldsymbol{ε}} = \frac{dυ}{dt}\frac{\boldsymbol{υ}}{|\boldsymbol{υ}|}$$

και επειδή

$$\frac{dυ}{dt} = 24 \ \text{m/s}^2$$

βρίσκουμε ότι

$$\boldsymbol{a}_{\varepsilon} = -24\left[\eta\mu\left(3t^2+5t\right)\hat{\boldsymbol{x}} - \sigma\upsilon\nu\left(3t^2+5t\right)\hat{\boldsymbol{y}}\right] \text{ m/s}^2.$$

Η κεντρομόλος επιτάχυνση είναι

$$\boldsymbol{a}_{\kappa} = \frac{\upsilon^2}{r}\hat{\boldsymbol{\eta}} = \frac{\omega^2 r^2}{r}\hat{\boldsymbol{\eta}} = \omega^2\left(r\hat{\boldsymbol{\eta}}\right) = -\omega^2 \boldsymbol{r} \ ,$$

ή

$$\boldsymbol{a}_{\kappa} = -4(6t+5)^2\left[\sigma\upsilon\nu\left(3t^2+5t\right)\hat{\boldsymbol{x}} + \eta\mu\left(3t^2+5t\right)\hat{\boldsymbol{y}}\right] \text{ m/s}^2.$$

Η συνολική επιτάχυνση βρίσκεται ή από την παράγωγο

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\upsilon}}{\mathrm{d}t}, \qquad \text{ή από την} \qquad \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_{\varepsilon} + \boldsymbol{a}_{\kappa},$$

δηλαδή

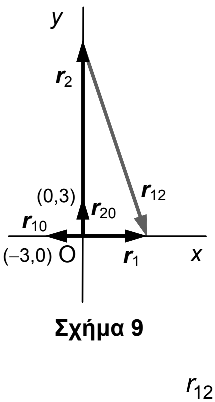
$$\boldsymbol{a} = -4\Big\{\left[6\eta\mu\left(3t^2+5t\right) + (6t+5)^2\sigma\upsilon\nu\left(3t^2+5t\right)\right]\hat{\boldsymbol{x}}$$

$$-\left[6\sigma\upsilon\nu\left(3t^2+5t\right) - (6t+5)^2\eta\mu\left(3t^2+5t\right)\right]\hat{\boldsymbol{y}}\Big\} \text{ m/s}^2.$$

10. Ενα σωματίδιο κινείται με ταχύτητα $2\hat{\boldsymbol{x}}$ m/s και ένα άλλο με ταχύτητα $3\hat{\boldsymbol{y}}$ m/s. Για $t = 0$ οι θέσεις των σωματιδίων είναι αντίστοιχα (–3,0,0) και (0,3,0). Να προσδιοριστεί το διάνυσμα θέσης του πρώτου ως προς το δεύτερο σωματίδιο σε συνάρτηση με το χρόνο, καθώς επίσης η χρονική στιγμή για την οποία τα δύο σωματίδια βρίσκονται στην ελάχιστη μεταξύ τους απόσταση.

Λύση: Και στο πρόβλημα αυτό, η εκλογή της αρχής μέτρησης του χρόνου είναι αυθαίρετη. Μπορούμε λοιπόν να θεωρήσουμε κίνηση και για αρνητικές τιμές του χρόνου.

Επειδή οι ταχύτητες των δύο σωματιδίων είναι σταθερές, οι διανυσματικές εξισώσεις της κίνησής τους, με αρχή το Ο, είναι οι ακόλουθες αντίστοιχα,



Σχήμα 9

$$\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_{10} + \boldsymbol{\upsilon}_1 t = -3\hat{\boldsymbol{x}} + 2t\hat{\boldsymbol{x}} = \left(-3+2t\right)\hat{\boldsymbol{x}} \ ,$$

$$\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_{20} + \boldsymbol{\upsilon}_2 t = 3\hat{\boldsymbol{y}} + 3t\hat{\boldsymbol{y}} = 3\left(1+t\right)\hat{\boldsymbol{y}} \ ,$$

όπου με το δείκτη μηδέν χαρακτηρίζονται τα αρχικά (για $t = 0$) διανύσματα.

Το διάνυσμα θέσης του πρώτου σωματιδίου ως προς το δεύτερο, όπως φαίνεται και στο σχήμα 9, είναι

$$\boldsymbol{r}_{12} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2 = \left(-3+2t\right)\hat{\boldsymbol{x}} - 3\left(1+t\right)\hat{\boldsymbol{y}} \ ,$$

με μέτρο

$$r_{12} = \left|\boldsymbol{r}_{12}\right| = \sqrt{(-3+2t)^2 + 3^2(1+t)^2} = \sqrt{13t^2+6t+18} \text{ m}.$$

Το μέτρο αυτό δίνει και την απόσταση μεταξύ των σωματιδίων ως συνάρτηση του χρόνου. Επομένως, η χρονική στιγμή για την οποία η απόσταση των δύο σωματιδίων είναι ελάχιστη, βρίσκεται από τη συνθήκη ελαχίστου της συνάρτησης

$$f(t) = 13t^2 + 6t + 18.$$

Παραγωγίζοντας διαδοχικά, βρίσκουμε

$$f'(t) = 26t + 6, \qquad f''(t) = 26 > 0.$$

Η πρώτη παράγωγος μηδενίζεται για

$$t = -6/26 = -0{,}231 \text{ s}.$$

Επειδή η δεύτερη παράγωγος είναι πάντα θετική, η συνάρτηση γίνεται ελάχιστη για $t = -0{,}231$ s. Σ' αυτή τη χρονική στιγμή λοιπόν, τα δύο σωματίδια απέχουν την ελάχιστη μεταξύ τους απόσταση.

11. Οι παραμετρικές εξισώσεις της κίνησης σώματος είναι

$$x = 2t^3 - 3t^2, \qquad y = t^2 - 2t + 1, \quad (x,y \text{ σε m και } t \text{ σε s}).$$

Να βρεθούν: α) Η ταχύτητα και η επιτάχυνση. β) Ο χρόνος μηδενισμού της ταχύτητας. γ) Ο χρόνος κατά τον οποίο η επιτάχυνση είναι παράλληλη προς τον άξονα y. δ) Η ταχύτητα και η επιτάχυνση για $t = 0$.

Λύση: α) Παραγωγίζοντας διαδοχικά τις δοθείσες εξισώσεις κίνησης, βρίσκουμε τις συντεταγμένες της ταχύτητας και της επιτάχυνσης,

$$\upsilon_{\mathrm{x}} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 6t^2 - 6t, \qquad \upsilon_{\mathrm{y}} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2t - 2 \text{ m/s},$$

$$a_{\mathrm{x}} = \frac{\mathrm{d}\upsilon_{\mathrm{x}}}{\mathrm{d}t} = 12t - 6, \qquad a_{\mathrm{y}} = \frac{\mathrm{d}\upsilon_{\mathrm{y}}}{\mathrm{d}t} = 2 \qquad \text{m/s}^2.$$

Συνεπώς

$$\boldsymbol{\upsilon} = \left(6t^2 - 6t\right)\hat{\boldsymbol{x}} + (2t - 2)\hat{\boldsymbol{y}} \text{ m/s}, \qquad \boldsymbol{a} = (12t - 6)\hat{\boldsymbol{x}} + 2\hat{\boldsymbol{y}} \text{ m/s}^2.$$

β) Για να μηδενιστεί η ταχύτητα πρέπει να μηδενιστούν ταυτόχρονα και οι δύο συντεταγμένες της, δηλαδή πρέπει να συναληθεύουν οι εξισώσεις

$$6t^2 - 6t = 0 \qquad \text{και} \qquad 2t - 2 = 0.$$

Αυτό συμβαίνει για $t = 1$ s, οπότε η ταχύτητα του σώματος είναι μηδέν.

γ) Η επιτάχυνση είναι παράλληλη στον άξονα y, οταν η τετμημένη a_{x} είναι μηδέν, δηλαδή όταν

$$12t - 6 = 0 \qquad \text{και} \qquad t = 0{,}5 \text{ s}.$$

δ) Για $t = 0$ είναι

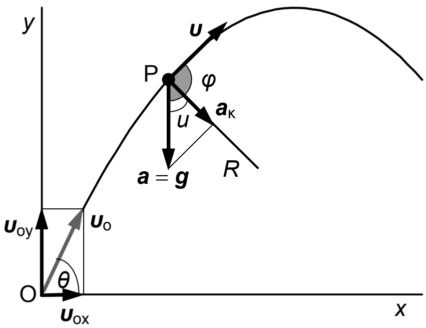
$$\boldsymbol{\upsilon} = -2\hat{\boldsymbol{y}} \text{ m/s} \qquad \text{και} \qquad \boldsymbol{a} = -6\hat{\boldsymbol{x}} + 2\hat{\boldsymbol{y}} \text{ m/s}^2.$$

12. Σώμα βάλλεται πλάγια υπό γωνία θ με αρχική ταχύτητα $\boldsymbol{\upsilon}_o$. Να βρεθούν για ένα τυχαίο σημείο της τροχιάς του, η ταχύτητα και η επιτάχυνση του. Επίσης, η διεύθυνση της επιτάχυνσης ως προς τη διεύθυνση της ταχύτητας, καθώς και η ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς σ' εκείνο το σημείο. <u>Εφαρμογή</u>: $\upsilon_o = 200$ m/s, $\theta = 30°$, $t = 5$ s, $g = 10$ m/s^2.

Λύση: Αν αναλύσουμε την αρχική ταχύτητα σε δύο συνιστώσες υ_oσυνθ και υ_oημθ κατά τις διευθύνσεις των αξόνων x και y αντίστοιχα, μπορούμε να θεωρήσουμε δύο ανεξάρτητες κινήσεις του σώματος. Μία οριζόντια με σταθερή ταχύτητα και μία κατακόρυφη με αρχική ταχύτητα προς τα πάνω και σταθερή επιτάχυνση (επιβράδυνση) προς τα κάτω. Οι ταχύτητες των κινήσεων είναι

$$\upsilon_x = \upsilon_{ox} = \upsilon_o \text{συν}\theta , \qquad \upsilon_y = \upsilon_{oy} - gt = \upsilon_o \text{ημ}\theta - gt .$$

Οπως είναι γνωστό,το αποτέλεσμα της επαλληλίας των δύο κινήσεων είναι κίνηση σε παραβολική τροχιά, που το επίπεδο της είναι το κατακόρυφο. Η ταχύτητα και η επιτάχυνση του σώματος στη σύνθετη αυτή κίνηση είναι



Σχήμα 10

$$\boldsymbol{\upsilon} = \upsilon_o \text{συν}\theta \hat{\boldsymbol{x}} + \left(\upsilon_o \text{ημ}\theta - gt\right)\hat{\boldsymbol{y}} ,$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{\upsilon}}{dt} = -g\hat{\boldsymbol{y}} .$$

Θέτοντας τα δεδομένα του προβλήματος, βρίσκουμε ότι για $t = 5$ s είναι

$$\boldsymbol{\upsilon} = 173{,}2\hat{\boldsymbol{x}} + 50\hat{\boldsymbol{y}}$$

και

$$\upsilon = \sqrt{173{,}2^2 + 50^2} = 180{,}28 \text{ m/s},$$

ενώ η επιτάχυνση είναι η σταθερή επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10$ m/s^2.

Η γωνία ανάμεσα στα διανύσματα ταχύτητας και επιτάχυνσης προσδιορίζεται από το αριθμητικό τους γινόμενο. Έτσι για τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή έχουμε

$$\text{συν}\varphi = \frac{\boldsymbol{\upsilon} \bullet \boldsymbol{a}}{\upsilon a} = \frac{50(-10)}{180{,}2 \times 10} = -0{,}277 , \qquad \varphi = 106{,}1°.$$

Από το σχήμα φαίνεται ότι η επιτάχυνση $\boldsymbol{a}$ σχηματίζει με την πρώτη κάθετη της καμπύλης της τροχιάς γωνία $u = \varphi - 90° = 16{,}1°$. Ώστε η κεντρομόλος επιτάχυνση έχει τιμή

$$a_\kappa = a\,\text{συν}u = 10 \times 0{,}961 = 9{,}61 \text{ m/s}^2.$$

Βρίσκουμε λοιπόν ότι η ακτίνα καμπυλότητας στο θεωρούμενο σημείο της τροχιάς είναι

$$R = \frac{\upsilon^2}{a_\kappa} = 3382 \text{ m} = 3{,}382 \text{ km}.$$

13. Σώμα μάζας $m = 2$ kg κινείται στο επίπεδο xy. Το διάστημα που διανύει πάνω στην τροχιά του δίνεται ως συνάρτηση του χρόνου από τη σχέση

$$s = 2t^2 + 3t + 4 \ \text{ m}.$$

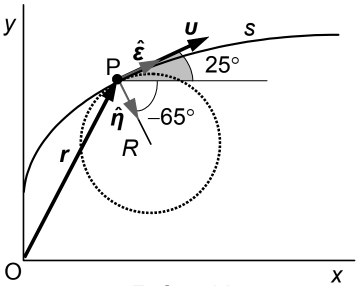
Κατά τη χρονική στιγμή $t = 5$ s το διάνυσμα της ταχύτητας του σχηματίζει γωνία 25° με τον άξονα x, ενώ η ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς είναι $R = 60$ m. Να βρεθούν για τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή η ταχύτητα του σώματος, η εφαπτομενική και η κεντρομόλος επιτάχυνση, καθώς και η διεύθυνση της ολικής επιτάχυνσης που ενεργεί στο σώμα. Για τα ζητούμενα μεγέθη να δοθούν τα διανύσματα και τα μέτρα τους.

Λύση: Η τιμή της ταχύτητας βρίσκεται από την παράγωγο του διαστήματος ως προς το χρόνο, δηλαδή για $t = 5$ s είναι

$$\upsilon = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 4t + 3 = 23 \ \text{ m/s}.$$

Το διάνυσμα της ταχύτητας $\boldsymbol{\upsilon}$ σχηματίζει γωνία 25° με τον άξονα x και συνεπώς το μοναδιαίο διάνυσμα της εφαπτομένης της τροχιάς τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή εκφράζεται από τη σχέση

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \text{συν}25°\hat{\boldsymbol{x}} + \text{ημ}25°\hat{\boldsymbol{y}} = 0{,}906\hat{\boldsymbol{x}} + 0{,}423\hat{\boldsymbol{y}} \ .$$



Σχήμα 11

Ώστε

$$\boldsymbol{\upsilon} = \upsilon\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = 20{,}84\hat{\boldsymbol{x}} + 9{,}72\hat{\boldsymbol{y}} \text{ m/s} \ .$$

Η τιμή της εφαπτομενικής (επιτρόχιας) επιτάχυνσης είναι

$$a_\varepsilon = \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} = 4 \ \text{ m/s}^2,$$

δηλαδή σταθερή, ανεξάρτητη του χρόνου. Το αντίστοιχο διάνυσμα είναι

$$\boldsymbol{a}_\varepsilon = a_\varepsilon\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = 3{,}62\hat{\boldsymbol{x}} + 1{,}69\hat{\boldsymbol{y}} \text{ m/s}^2 \ .$$

Η κεντρομόλος επιτάχυνση έχει μέτρο

$$a_\kappa = \frac{\upsilon^2}{R} = \frac{23^2}{60} = 8{,}82 \ \text{ m/s}^2.$$

Η διανυσματική της μονάδα $\hat{\boldsymbol{\eta}}$ είναι η πρώτη κάθετη και όπως φαίνεται από το σχήμα, η $\hat{\boldsymbol{\eta}}$ σχηματίζει γωνιά –65° με τον άξονα x. Οι μονάδες $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$, $\hat{\boldsymbol{\eta}}$ είναι κάθετες μεταξύ τους $\left(\hat{\boldsymbol{\eta}} = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \times \hat{\boldsymbol{z}}\right)$, αλλά η $\hat{\boldsymbol{\eta}}$ έχει πάντοτε φορά προς το κέντρο καμπυλότητας της καμπύλης τροχιάς. Επομένως

$$\hat{\boldsymbol{\eta}} = \text{συν}(-65^\circ)\hat{\boldsymbol{x}} + \text{ημ}(-65^\circ)\hat{\boldsymbol{y}} = 0{,}423\hat{\boldsymbol{x}} - 0{,}906\hat{\boldsymbol{y}}\ .$$

και

$$\boldsymbol{a}_\kappa = a_\kappa \hat{\boldsymbol{\eta}} = 3{,}73\hat{\boldsymbol{x}} - 7{,}99\hat{\boldsymbol{y}}\ \text{m/s}^2\ .$$

Η συνολική επιτάχυνση είναι

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_\varepsilon + \boldsymbol{a}_\kappa = 7{,}35\hat{\boldsymbol{x}} - 6{,}30\hat{\boldsymbol{y}}\ \text{m/s}^2\ .$$

Το μέτρο της ισούται με

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 9{,}68\ \ \text{m/s}^2$$

και σχηματίζει με τον άξονα *x* γωνία *θ*, που προσδιορίζεται από την

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{a_y}{a_x} = \frac{-6{,}30}{7{,}35} = -0{,}857\ .$$

Ώστε

$$\theta = -40{,}60^\circ.$$

Παρατήρηση: *Η μορφή της εξίσωσης του διαστήματος δεν πρέπει να μας παρασύρει σε βιαστικά και λανθασμένα συμπεράσματα, όπως π.χ. ότι η κίνηση είναι ευθύγραμμη με σταθερή επιτάχυνση. Πράγματι, η δευτεροβάθμια ως προς το χρόνο εξίσωση του διαστήματος συνεπάγεται σταθερή επιτάχυνση, αλλά αυτή είναι πάντοτε η επιτρόχια, όπως είδαμε και στη λύση. Οταν υπάρχει και κεντρομόλος επιτάχυνση τότε η τροχιά είναι καμπυλόγραμμη, που είναι η περίπτωση του προβλήματος. Ένα ανάλογο παράδειγμα έχουμε στην ομαλή κυκλική κίνηση όπου η εξίσωση του διαστήματος είναι $s = \upsilon t$ με σταθερό το μέτρο της ταχύτητας. Η κίνηση δεν είναι ευθύγραμμη ομαλή γιατί υπάρχει η κεντρομόλος επιτάχυνση.*