Θ. Καρακώστας
Καθηγητής
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ Α.Π.Θ.

Δ. Σ. Κυριάκος
Αν. Καθηγητής
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ Α.Π.Θ.

ΦΥΣΙΚΗ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ

Κάθε γνήσιο αντίτυπο υπογράφεται από τους συγγραφείς

ISBN 960-431-492-0

Φωτοστοιχειοθεσία
Εκτύπωση

Π. ΖΗΤΗ & Σια ΟΕ
18ο χλμ Θεσ/νίκης-Περαίας
Τ.Θ. 4171 • Περαία Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19
Τηλ.: 23920 72.222 (5 γραμ.) - Fax: 23920 72.229
e-mail: info@ziti.gr

Βιβλιοπωλείο

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
Αρμενοπούλου 27 • 546 35 Θεσσαλονίκη
Τηλ. 2310 203.720, Fax 2310 211.305
e-mail: sales@ziti.gr

www.ziti.gr

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΚΊΝΗΣΗ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΔΥΝΆΜΕΙς

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΣΥΣΤΉΜΑΤΑ ΑΝΑΦΟΡΆς

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΟΙ ΝΌΜΟΙ ΤΗς ΔΙΑΤΉΡΗΣΗς

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6: ΣΥΣΤΉΜΑΤΑ ΥΛΙΚΏΝ ΣΩΜΑΤΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7: ΣΤΑΤΙΚΉ ΤΟΥ ΣΤΕΡΕΟΎ ΣΏΜΑΤΟς

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8: ΔΥΝΑΜΙΚΉ ΤΟΥ ΣΤΕΡΕΟΎ ΣΏΜΑΤΟς

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9: ΤΑΛΑΝΤΏΣΕΙς

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10: ΚΎΜΑΤΑ ΣΕ ΕΛΑΣΤΙΚΆ ΜΈΣΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11: ΜΗΧΑΝΙΚΉ ΤΩΝ ΣΥΝΕΧΏΝ ΜΈΣΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 12: ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΤΡΙΤΗΣ ΕΚΔΟΣΗΣ

Η παρούσα τρίτη έκδοση του βιβλίου «**Φυσική – Εισαγωγή στη Μηχανική**» συμπίπτει με τη συμπλήρωση σχεδόν δεκατεσσάρων ετών από την πρώτη έκδοση του τον Ιανουάριο του 1985. Όπως και οι προηγούμενες εκδόσεις, το βιβλίο απευθύνεται κατά κύριο λόγο στους φοιτητές των Θετικών και Πολυτεχνικών σχολών των Πανεπιστημίων και το περιεχόμενο του ανταποκρίνεται σ' αυτό που σήμερα ονομάζεται **Γενική Φυσική**. Το βιβλίο αρχίζει με ένα εισαγωγικό κεφάλαιο στο οποίο γίνεται προσπάθεια ορισμού της Φυσικής και του αντικειμένου της, των βασικών μεγεθών και μονάδων καθώς και μια αναλυτική περιγραφή των ιδιοτήτων των διανυσμάτων και των μεταξύ τους πράξεων. Στη συνέχεια εξετάζεται η κίνηση των σωμάτων (κινηματική) και ακολουθούν οι νόμοι του Newton, οι δυνάμεις και τα πεδία, δηλαδή οι βασικές έννοιες της δυναμικής. Εισάγονται οι έννοιες των ολοκληρωμάτων της κίνησης και μελετώνται οι νόμοι της διατήρησης για την περίπτωση ενός σώματος (υλικού σημείου) αλλά και για την περίπτωση ενός μηχανικού συστήματος σωμάτων. Ακολουθεί η στατική και η δυναμική του στερεού σώματος, όπου μελετώνται τα διάφορα συστήματα δυνάμεων και οι συνθήκες ισορροπίας τους καθώς και η επίπεδη κίνηση του στερεού σώματος. Τα επόμενα δύο κεφάλαια αναφέρονται σε φαινόμενα πιο πολύπλοκα, αλλά πολύ σημαντικά, τα οποία δεν θα μπορούσαμε να μελετήσουμε χωρίς τις προηγούμενες γνώσεις. Αυτά είναι οι ταλαντώσεις, αρμονικές, φθίνουσες και εξαναγκασμένες και η διάδοση των κυμάτων εντός ελαστικών μέσων. Στη μηχανική των συνεχών μέσων που ακολουθεί παρατίθενται στοιχεία της ελαστικότητας των στερεών καθώς και ισορροπίας και δυναμικής των ρευστών.

Τα μαθηματικά που χρησιμοποιούνται είναι η απλή άλγεβρα, τα διανύσματα και ο στοιχειώδης διαφορικός και ολοκληρωτικός λογισμός. Εδώ δεν υπάρχει καμιά πρωτοτυπία, ούτε εισάγονται καινοφανείς μέθοδοι, αφού η χρήση του διαφορικού λογισμού στη Φυσική αναπτύχθηκε και καθιερώθηκε από τους Newton και Leibnitz επιτρέποντας την προσέγγιση μεγεθών με βάση τις μεταβολές τους σε πολύ μικρά χρονικά διαστήματα. Οι ολικές μεταβολές βρίσκονται από την ολοκλήρωση των απειροστών μεταβολών. Άλλωστε, αυτή είναι και η διεθνής πρακτική σήμερα.

Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι το περιεχόμενο του βιβλίου είναι αυτό που παραδοσιακά ονομάζεται (κλασική) Μηχανική και που στην πράξη μελετά τους νόμους της κίνησης και τις ιδιότητες σωμάτων με διαστάσεις μεγαλύτερες από τις μοριακές και τα οποία κινούνται με ταχύτητες πολύ μικρότερες από την ταχύτητα του φωτός.

Στην καινούργια αυτή έκδοση καταβλήθηκε προσπάθεια να διορθωθούν λάθη και αβλεψίες των προηγουμένων εκδόσεων. Κάποια σημεία ξαναγράφηκαν, αναμορφώθηκαν και συμπληρώθηκαν για την καλύτερη κατανόηση. Ουσιαστικές προσθήκες υπάρχουν στο κεφάλαιο των κυμάτων, το οποίο συμπληρώθηκε με τα σχετικά του ήχου. Επίσης στο κεφάλαιο των συνεχών μέσων έγινε πλήρης αναμόρφωση, αναδιάταξη και επέκταση της ύλης. Τέλος, επειδή ένα σύγχρονο βιβλίο μηχανικής (έστω και κλασικής) δεν μπορεί να αγνοεί τη σχετικότητα, προστέθηκε ένα ολόκληρο κεφάλαιο που πραγματεύεται την ειδική σχετικότητα. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι όλα τα σχήματα, διαγράμματα και καμπύλες έγιναν με τη βοήθεια του ηλεκτρονικού υπολογιστή, βελτιώνοντας έτσι την αισθητική του βιβλίου. Θα μπορούσε να πει κανείς ότι αυτή είναι η οριστική μορφή του βιβλίου. Αλλά ποτέ δεν μπορούμε να ξέρουμε.

Βέβαια η προαναφερθείσα ύλη δεν μπορεί να διδαχθεί μέσα σ' ένα πανεπιστημιακό εξάμηνο και δεν διδάσκεται. Ένα βιβλίο όμως, που πραγματεύεται κάποια ύλη και στο επίπεδο που την πραγματεύεται πρέπει να είναι πλήρες. Κατ' αυτόν τον τρόπο είναι χρήσιμο όχι μόνον στους φοιτητές αλλά και σε όλους τους άλλους, καθηγητές, μαθητές, επιστήμονες άλλων ειδικοτήτων, που θέλουν να ανατρέξουν και να βρουν στην ελληνική βιβλιογραφία τη βασική γνώση της φυσικής. Γι' αυτό και από την αρχή η επιδίωξη ήταν η αυστηρή παράθεση των εννοιών, η εμμονή στην ακρίβεια των ορισμών καθώς και η σαφής, ακριβής και πλήρης περιγραφή των φαινομένων και της ερμηνείας τους. Και επειδή κάποια λάθη ίσως είναι αναπόφευκτα, με ευχαρίστηση θα δεχόμασταν σχετικές υποδείξεις.

Η έκδοση του βιβλίου συμπίπτει με την εργώδη προσπάθεια που γίνεται από την Πολιτεία, τους εκπαιδευτικούς και άλλους φορείς για τη συγγραφή και παρουσίαση καινούργιων (με όλη τη σημασία της λέξης) βιβλίων φυσικής για τη μέση εκπαίδευση. Αυτό βέβαια δεν είναι κάτι νέο στην Ελλάδα! Παρά τις βάσιμες επιφυλάξεις που μπορεί να έχει κάποιος για την πορεία και τον τρόπο εκτέλεσης της όλης διαδικασίας, η ευχή είναι το όλο έργο να ευοδοθεί και να αποτελέσει μια καλή αρχή, ώστε να σπάσει επιτέλους αυτός ο φαύλος κύκλος που υπάρχει περί τη Φυσική στην Ελλάδα.

Η Γενική Φυσική, έτσι όπως έχει διαμορφωθεί σήμερα, αποτελεί τη διάδοχη κατάσταση στη λεγόμενη Πειραματική Φυσική. Χρησιμοποιεί περισσότερο το εργαλείο των μαθηματικών, τους τύπους, τις σχέσεις και τις εξισώσεις που εκφράζουν τους φυσικούς νόμους και δια μέσου των οποίων γίνεται ο συσχετισμός των πειραματικών αποτελεσμάτων. Το πείραμα εξακολουθεί να είναι η πρωταρχική και κορυφαία πράξη της φυσικής επιστήμης και μαζί με τη γλώσσα των μαθηματικών οδηγούν στην κατανόηση των φυσικών φαινομένων και του τρόπου λειτουργίας της Φύσης. Θα αναφέρουμε ένα απλό παράδειγμα. Όλοι ξέρουμε ότι, για τον προσδιορισμό του κέντρου βαρους λεπτών επιπέδων σωμάτων χρησιμοποιείται η μέθοδος της διπλής εξάρτησης. Το σημείο τομής των δύο κατακορύφων ευθειών είναι το κέντρο βάρους. Αυτό στη συνέχεια πιστοποιείται με απλή στήριξη του σώματος από το σημείο που προσδιορίσθηκε με το πείραμα. Εκτός από την προφανή εξήγηση του, το πείραμα επιβεβαιώνει και την γενική ιδιότητα του κέντρου των παραλλήλων δυνάμεων, ότι δηλαδή αυτό είναι ένα σταθερό σημείο ανεξάρτητο από στροφή των παραλλήλων δυνάμεων κατά την ίδια γωνία και κατά την ίδια φορά (σχετικά βλ. κεφ. 7). Η διαδοχική εξάρτηση του σώματος από διαφορετικά σημεία ισοδυναμεί με περιστροφή των δυνάμεων. Με βάση αυτή την ιδιότητα προσδιορίζονται οι συντεταγμένες του κέντρου βάρους και το ίδιο του κέντρου μάζας. Βέβαια δεν χρειάζεται να πούμε τίποτε για τη χρησιμότητα του κέντρου μάζας, επισημαίνεται όμως ότι δεν είναι ένα σημείο που ορίζεται κατά τυχαίο τρόπο. Η Φύση παρουσιάζει συνέχεια και μας οδηγεί σταδιακά η ίδια για να τη γνωρίσουμε καλύτερα.

Σήμερα, όπως ήταν φυσικό να γίνει, στην ελληνική αγορά υπάρχει πλήθος ξενόγλωσσων βιβλίων φυσικής καθώς και έγκυρων μεταφράσεων. Ολα αυτά τα βιβλία δελεάζουν πράγματι και με το καλό περιεχόμενο τους αλλά και με την εμφάνιση τους και βέβαια είναι καλό και χρήσιμο να υπάρχουν. Υπήρξαν όμως καιροί που δεν υπήρχε αυτή η δυνατότητα πρόσβασης στο ξένο βιβλίο. Στο διάστημα αυτό Έλληνες συγγραφείς διατήρησαν και πρόσφεραν τη γνώση της Φυσικής με τα πονήματα τους τόσο σε γυμνασιακό – λυκειακό επίπεδο, όσο και πανεπιστημιακό. Σε αναγνώριση του έργου τους και της προσφοράς τους και σε απόδοση τιμής, αναφέρουμε τα ονόματα μερικών εξ’ αυτών, καθώς και κάποιες φράσεις από τους προλόγους ή τις εισαγωγές των βιβλίων τους. Αυτό βέβαια δεν σημαίνει ότι οι μνημονευόμενοι είναι και οι μόνοι.

Αρχίζουμε από την τέταρτη και πέμπτη έκδοση της **Επίτομης Φυσικής** (1944) του καθηγητή **Γεωργίου Κ. Αθανασιάδη**, ένα βιβλίο αναφοράς, μοναδικό για τον πλούτο των αναφερομένων πειραματικών μεθόδων, στον πρόλογο του οποίου διαβάζουμε: *«Το βιβλίον τούτο επιζητεί να θεμελιώση την ερμηνεία της Φυσικής και να οδηγήση τους σπουδαστάς, ευθύς εξ αρχής, εις την ασφαλή αντίληψιν του φυσικού κόσμου δια της* ***παρατηρήσεως*** *και του* ***πειράματος*** *....... Όπως οι διδάσκοντες, ούτω και οι νεοφώτιστοι σπουδασταί ουδέποτε πρέπει να λησμονούν ότι η Φυσική είναι καθ’ αυτό* ***επιστήμη του πειράματος. Εκ του πειράματος αύτη απέρρευσεν, επ’ αυτού θεμελιούται και δι’ αυτού ασφαλώς εξελίσσεται****.»*

Ακολουθεί η τέταρτη έκδοση του βιβλίου **Μαθήματα Φυσικής** (1949) του καθηγητή **Δ. Χόνδρου**, ο οποίος διακρινόταν για τη σαφήνεια και κομψότητα των φράσεών του. Στην εισαγωγή του πρώτου τόμου (Μηχανική) αναγράφεται: *«Η* ***Φυσική*** *, ... ως θετική επιστήμη, επιστήμη εκ των υστέρων, βασίζεται επί της παρατηρήσεως, και μάλιστα επί της παρατηρήσεως κυρίως φαινομένων, των οποίων τους όρους κατά το ενόν αυτός ο παρατηρητής ρυθμίζει, δηλαδή επί του πειράματος. Όπως δε κάθε επιστήμη αξία του ονόματος, ούτω και η Φυσική ......*

προσπαθεί να υπαγάγη τα αποτελέσματα των καθ' έκαστα πειραμάτων εις νόμους επί μάλλον και μάλλον γενικούς ....»

Εξαιρετική επιτυχία είχαν σε γυμνασιακό – υποψηφιακό επίπεδο και τα βιβλία υπό τον τίτλο **Στοιχεία Φυσικής**, τα οποία συνέγραψε ο επιμελητής **Σ. Γ. Περιστεράκης** με τους καθηγητές **Κ. Δ. Παλαιολόγο** και **Θ. Γ. Κουγιουμζέλη**. Στην πέμπτη έκδοση (1961) του δεύτερου τόμου της Κυματικής αναφέρονται: *«Τα κυματικά φαινόμενα πρέπει, κατά την νεωτέραν άποψιν, να μελετώνται εις ιδιαίτερον κεφάλαιον, ανεξαρτήτως του κυμαινομένου μεγέθους. Ούτω, απεχωρίσθησαν της Μηχανικής αι ταλαντώσεις και εισήχθη ο όρος Κ υ μ α τ ι κ ή ...... Εκτός της διαρθρώσεως της ύλης του βιβλίου συμφώνως προς τας συστάσεις των ξένων Ειδικών Επιτροπών και Συνεδρίων, ... αλλά και συμφώνως προς την πείραν ημών .... κατεβλήθη επί πλέον ιδιαιτέρα φροντίς δια την προσαρμογήν της ύλης εις την Ελληνικήν πραγματικότητα.»*

Στον ίδιο χώρο εκινείτο, υπό το γενικό τίτλο **Φυσική**, το τρίτομο βιβλίο του άλλοτε διευθυντού της Βαρβακείου Προτύπου Σχολής **Αλκινόου Ε. Μάζη** ένα έργο αξιομνημόνευτο για την εποχή του (αλλά και για σήμερα ακόμη). Στην έκτη έκδοση (1966) του πρώτου τόμου (Μηχανική) και στον αντίστοιχο πρόλογο περιέχονται και τα εξής: *«Η νέα έκδοσις του παρόντος βιβλίου συμπίπτει με την προσπάθεια εκσυχρονισμού της Μέσης Παιδείας .... Η διαπραγμάτευσις της ύλης ...... είναι ανάλογος προς τας πνευματικάς ικανότητας των μαθητών του Πρακτικού Τμήματος ...... Ο επαρκής μαθηματικός εξοπλισμός των μαθητών τούτων επιβάλλει, όπως η διδασκαλία της Φυσικής έχη ταχύν ρυθμόν και συνδυάζη την σύντομον πειραματικήν έρευναν των φαινομένων με μίαν απλήν θεωρητικήν μελέτην τούτων.»*

Θα πρέπει να αναφερθεί επίσης και ο καθηγητής **Καίσαρας Αλεξόπουλος** ο οποίος με τους συνεργάτες του, κυρίως τους **Γεώργιο Μπίλλη** και **Διονύσιο Μαρίνο**, συνέγραψε πολύτομο βιβλίο με τίτλο **Γενική Φυσική**, το οποίο εδέσποζε παλαιότερα και εξακολουθεί να είναι εξ ίσου σημαντικό και σήμερα. Από την έκδοση του Ηλεκτρισμού του 1973 αντιγράφουμε: *«..... απεφασίσθη και η συμμόρφωσις προς την διεθνώς θεσπισθείσαν χρησιμοποίησιν του «διεθνούς συστήματος μονάδων» S.I., ... Ούτως ο αναγνώστης θα παρατηρήσει ότι, δια την περιγραφήν του μαγνητικού πεδίου, εγκαταλείπεται το μέγεθος **H** (καλούμενον μέχρι τούδε «έντασις μαγνητικού πεδίου») και χρησιμοποιείται το μέγεθος **B** (καλούμενον μέχρι τούδε «μαγνητική επαγωγή»). ..... Άλλη μεταβολή επέρχεται εις την ονομασίαν των ανυσμάτων **D** και **H**. Ως έδειξεν ο Sommerfeld, τα μεγέθη ταύτα αποτελούν αίτιον της δημιουργίας των πεδίων **E** και **B** και, συνεπώς, λογικώς, καλούνται ηλεκτρική και, αντιστοίχως, μαγνητική διέγερσις.»*

Τελευταίο αναφέρουμε το βιβλίο **Εισαγωγή στη Φυσική** του καθηγητή **Νικόλαου Α. Οικονόμου**, ο οποίος έκανε εντονώτερη τη στροφή προς τη Γενική Φυσική. Από τον πρόλογο της πρώτης έκδοσης (1975) αναφέρουμε τη σχετική αιτιολόγιση: *«Ένα εισαγωγικό βιβλίο Φυσικής έχει σαν σκοπό να διδάξη τις βασικές* *έννοιες και τον τρόπο συσχετισμού τους ...... Πρέπει γι' αυτόν το σκοπό να περιλάβη σε γενικές γραμμές όλη τη συσσωρευμένη εμπειρία, χωρίς όμως να χαθή σε λεπτομέρειες. ...... Ως ένα βαθμό ο παραδοσιακός χαρακτήρας διατηρείται. «Εν αρχή ήν η δύναμις και η φύσις της δυνάμεως». Ο κόσμος του Νεύτωνα ζει, μόνο που σήμερα είμαστε εκφραστικώτεροι. Ο μαθηματικός συμβολισμός, πούναι η γλώσσα της Φυσικής, επέτρεψε την απλούστευση της έκφρασης και την κατανόηση της εσωτερικής δομής των εννοιών.»*

Ελπίζουμε ότι, το παρόν βιβλίο όπως και το άλλο «**Φυσική – Θερμότητα, Ηλεκτρισμός**» (των Δ. Σ. Κυριάκου και Γ. Λ. Μπλέρη) θα τύχουν και αυτά ευμενούς αποδοχής.

Απευθυνόμενοι στους φοιτητές και κυρίως τους Φυσικούς τους καλούμε να ενσκήψουν με επιμέλεια και πρωτίστως με αγάπη στα βασικά μαθήματα. Κανείς δεν γεννήθηκε φυσικός, ή ανάποδα όσοι έγιναν φυσικοί ξεκίνησαν τυχαία. Πράγματι, η Φυσική με τη σημερινή μορφή της άρχισε να εδραιώνεται από την εποχή του Γαλιλαίου και του διαδόχου του Νεύτωνα, ο οποίος κατά σημαδιακό τρόπο ή πιο ρεαλιστικά συμπτωματικό γεννήθηκε το έτος που πέθανε ο Γαλιλαίος, το 1642. Οι πρώτες όμως επιστημονικές ιδέες έχουν τις ρίζες τους βαθειά πίσω στην αρχή της ανθρώπινης ιστορίας. Ηταν τότε που ο άνθρωπος απέβαλε τους φόβους του και το μυστηριακό πέπλο που κάλυπτε τον περιβάλλοντα κόσμο και κατάλαβε ότι κάτι το θείο υπάρχει στη φύση, όχι με την έννοια του υπερφυσικού, αλλά με την αρμονία και την ενυπάρχουσα νομοτέλεια που παρουσιάζει. Κάποιοι άρχισαν να κάνουν πιο συστηματικές παρατηρήσεις και κατέγραφαν τα αποτελέσματα. Ετσι γεννήθηκαν η Φυσική και οι Φυσικοί. Οπως αναφέρουν στο βιβλίο τους **University Physics** οι **W. P. Grummett** και **A. B. Western**, *«η Φυσική είναι ένα όμορφο παιχνίδι στο οποίο μπορεί να παίξει ο καθένας που θέλει. Το πεδίο – το γήπεδο – είναι το όλο σύμπαν. Το παιχνίδι είναι ιδιόμορφο, γιατί μπορείς να κερδίζεις αλλά ποτέ δεν νικάς αφού το ίδιο το παιχνίδι ποτέ δεν τελειώνει. Σε όλη όμως τη μέχρι τώρα διάρκεια του ένα πλήθος φυσικών νόμων έχει ανακαλυφθεί.»*

Η πρόοδος που συντελέσθη στο διάβα των αιώνων είναι μεγάλη. Τα πεδία ανάπτυξης της φυσικής μαρτυρούν περί τούτου. Η Φυσική του μικροκόσμου, ατομική, πυρηνική και στοιχειωδών σωματιδίων, η Φυσική του μακροκόσμου, αστρονομία, αστροφυσική και κοσμολογία μαζί με τη Φυσική των πολυπλόκων συστημάτων των πολλών σωμάτων και σωματίων, η στερεά κατάσταση, τα υγρά, και το χάος αποτελούν σήμερα τα μεγάλα πεδία της φυσικής έρευνας. Οι φυσικοί επιστήμονες εργάζονταν, εργάζονται και θα εργάζονται αδιάκοπα αποκαλύπτοντας τα μυστήρια της Φύσης, ανοίγοντας έτσι το δρόμο και στην τεχνολογία, τα επιτεύγματα της οποίας κυριαρχούν στο σημερινό κόσμο μας.

Θεσσαλονίκη, Οκτώβριος 1998

Οι συγγραφείς

ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΕΚΔΟΣΗΣ

Η δεύτερη έκδοση του βιβλίου μας Φυσική (Εισαγωγή στη Μηχανική) έγινε με στόχο την αρτιότερη παρουσίαση των θεμάτων που περιλαμβάνονται στον αντίστοιχο τόμο της πρώτης έκδοσης. Ιδιαίτερη προσπάθεια καταβλήθηκε για την ελαχιστοποίηση των λαθών (τυπογραφικών ή και άλλων) και των ασαφειών. Σε όλα αυτά καθώς και στις βελτιώσεις και αλλαγές που έγιναν σημαντική ήταν η συμβολή των παρατηρήσεων και υποδείξεων των φοιτητών που παρακολούθησαν το μάθημα Γενική Φυσική Ι τα τελευταία χρόνια.

Στο πνεύμα αυτό, τα περισσότερα κεφάλαια αναδιορθρώθηκαν και συμπληρώθηκαν και η ύλη τους προσαρμόστηκε καλύτερα στις ανάγκες και το επίπεδο των πρωτοετών φοιτητών ενός Τμήματος Φυσικής, ύστερα μάλιστα και από την αναπροσαρμογή που έχει υποστεί η ύλη των μαθημάτων Φυσικής στα Λύκεια. Παράλληλα με την προσθήκη καινούργιων θεμάτων έγινε και ανάλογη προσθήκη νέων παραδειγμάτων για την πληρέστερη κατανόηση του συνόλου της ύλης. Η διαπραγμάτευση της ύλης γίνεται πάντα με απλές γνώσεις διανυσματικού, διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού. Σε ελάχιστα σημεία βέβαια γίνονται ορισμένες νύξεις για περαιτέρω ανακίνηση του ενδιαφέροντος των φοιτητών, όπως επίσης για να δειχθεί η συνέχεια των αρχικών γνώσεων με όσα στο μέλλον θα γνωρίσουν. Για παράδειγμα αναφέρεται ότι η ροπή αδράνειας είναι ένα τανυστικό μέγεθος και ότι το έργο δύναμης υπολογίζεται από ένα επικαμπύλιο ολοκλήρωμα.

Ελπίζουμε ότι η δεύτερη έκδοση θα καταφέρει να παρουσιάσει με περισσότερη σαφήνεια, ακρίβεια και πληρότητα τις έννοιες της Μηχανικής που είναι απαραίτητες σε ένα μάθημα εισαγωγικής Φυσικής. Τέλος ευχαριστούμε θερμά όλους εκείνους, που απ’ την αρχική προσπάθειά μας μέχρι τώρα, συνέβαλαν με οποιοδήποτε τρόπο στην αρτιότερη εμφάνιση αυτού του βιβλίου.

Θεσσαλονίκη, Δεκέμβριος 1989

Θ. Καρακώστας
Δ.Σ. Κυριάκος

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το βιβλίο αυτό περιλαμβάνει την ύλη του μαθήματος Φυσική Ι που περιέχεται στο πρώτο εξάμηνο του Φυσικού τμήματος της Σχολής Θετικών Επιστημών του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης. Η Φυσική Ι διδάσκεται στα πλαίσια του νέου προγράμματος σπουδών που έχει αρχίσει να εφαρμόζεται μετά από τη θέσπιση του νόμου πλαίσιου 1268/82 για τα Ανώτατα Εκπαιδευτικά Ιδρύματα. Το νέο πρόγραμμα περιλαμβάνει δύο εισαγωγικά μαθήματα Φυσικής. Στο πρώτο εισαγωγικό μάθημα περιέχονται οι βασικές αρχές της μηχανικής του υλικού σημείου, στοιχεία μηχανικής του στερεού σώματος, οι ταλαντώσεις, οι κυμάνσεις και η μηχανική των συνεχών μέσων.

*Η μελέτη των φαινομένων γίνεται με τη βοήθεια στοιχειωδών γνώσεων διανυσματικού και διαφορικού λογισμού. Για τη μέτρηση των μεγεθών χρησιμοποιείται το σύστημα **SI**. Οι βασικές έννοιες της επιστήμης που παρουσιάζονται στη Φυσική Ι μαζί με τις έννοιες της Φυσικής ΙΙ που αφορούν τη Θερμοδυναμική και τον Ηλεκτρισμό έχουν ως στόχο την προσφορά ενός βασικού υπόβαθρου γνώσης, που να δημιουργεί τις προϋποθέσεις για την πληρέστερη κατανόηση της Φυσικής που ακολουθεί στα επόμενα εξάμηνα.*

Θεσσαλονίκη, Ιανουάριος 1985

Θ. Καρακώστας
Δ.Σ. Κυριάκος

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

1.1. Η ΦΥΣΙΚΗ ΚΑΙ ΤΟ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ ΤΗΣ

Ένα από τα βασικότερα προβλήματα που έχουν απασχολήσει τον άνθρωπο είναι η κατανόηση των φαινομένων που παρατηρούνται στη φύση. Η μελέτη της φύσης άρχισε από την εποχή των πρώτων πολιτισμών, θεμελιώθηκε από τους αρχαίους Έλληνες, συνεχίστηκε από τους Ρωμαίους και διασώθηκε και ενισχύθηκε από το Ισλάμ. Το σύνολο σχεδόν των γνώσεων συγκεντρώθηκε κατά τα τελευταία χρόνια του μεσαίωνα στην Ευρώπη όπου, με ένα καινούργιο ξεκίνημα κατά την περίοδο της Αναγεννήσεως, άρχισε η διαμόρφωση αυτών που σήμερα ονομάζονται **Φυσικές Επιστήμες**. Το πλέγμα αυτό των επιστημών αναπτύχθηκε κατα τον 17ο, 18ο και 19ο αιώνα και πήρε τη σημερινή του μορφή μέσα από τα μεγάλα επιτεύγματα του 20ου αιώνα.

Οι θεμελιώδεις Φυσικές Επιστήμες είναι η **Φυσική**, η **Χημεία** και η **Βιολογία**. Από αυτές θα μελετήσουμε τη Φυσική.

Η απάντηση στο ερώτημα «τι είναι Φυσική;» είναι το ίδιο δύσκολη με την απάντηση στο ερώτημα «τι είναι επιστήμη;». Θα παραθέσουμε δύο ορισμούς, έναν συνθετικό και έναν αφαιρετικό.

Κατά το συνθετικό ορισμό, *Φυσική είναι η επιστήμη που περιλαμβάνει τα αποτελέσματα της εργασίας των Φυσικών*.

Τα αποτελέσματα αυτά στη σημερινή εποχή έχουν συγκεντρωθεί στα θέματα: Ηλεκτρομαγνητισμός, Ατομική και Μοριακή Φυσική, Φυσική της Στερεάς Κατάστασης, Ιατρική Φυσική, Πυρηνική Φυσική, Φυσική των Στοιχειωδών Σωματιδίων, Αστροφυσική, Οπτική, Ακουστική, Φυσικοχημεία, Φυσική του Πλάσματος. Άλλα θέματα που σχετίζονται με τα παραπάνω είναι η Μηχανική, η Εκπαίδευση, η Φυσική των Υπολογιστών, η Φυσική των Χαμηλών Θερμοκρασιών, η Επιστήμη των Υλικών και άλλα. Γενικότερα η Φυσική ασχολείται, με τη μελέτη εννοιών όπως **ύλη, ενέργεια, αλληλοεπιδράσεις, πεδία, χώρος, χρόνος**.

Σύμφωνα με τον αφαιρετικό ορισμό, *Φυσική είναι η επιστήμη που ασχολείται με τις πιο γενικές ιδιότητες, νόμους και μορφές της κίνησης της ύλης.*

Με τον όρο ύλη εννοούμε, αφενός τα **σώματα**, δηλαδή τα σωματίδια όπως τα πρωτόνια, νετρόνια, άτομα και ό,τι οικοδομείται απ' αυτά και αφετέρου το **φυσικό πεδίο**. *Η ύλη έχει ως βασική ιδιότητα την κίνηση και υπάρχει μέσα στο χώρο και το χρόνο*. Πρέπει όμως να γίνει αντιληπτό ότι η εμβάθυνση σε έννοιες όπως η φύση, η ύλη, ο χώρος, ο χρόνος αποτελούν αντικείμενο γενικότερης φιλοσοφικής μελέτης που ξεφεύγει από τους στόχους του βιβλίου αυτού και τις ειδικές γνώσεις των συγγραφέων.

Οι κύριες μέθοδοι έρευνας σε όλες τις επιστήμες είναι η **παρατήρηση**, το **πείραμα** και ο **στοχασμός**. Με τη βοήθεια των διεργασιών αυτών οι επιστήμονες ανακαλύπτουν και διατυπώνουν τους νόμους της φύσης. Η διατύπωση των νόμων συμπληρώνεται με την εύρεση μαθηματικών σχέσεων που κάνουν τα διάφορα μεγέθη μετρήσιμα. Τα μαθηματικά αποτελούν για τους Φυσικούς ειδική γλώσσα και η ανάπτυξή τους υπήρξε αλληλένδετη με την ανάπτυξη της σημερινής Φυσικής. *Οι παρατηρήσεις και τα πειράματα χρειάζονται μετρήσεις*. Οι μετρήσεις γίνονται με τη βοήθεια οργάνων αφού καθοριστούν οι μονάδες μέτρησης των μεγεθών.

Για την ενοποίηση των μονάδων έχει αναπτυχθεί τα τελευταία χρόνια το **διεθνές σύστημα** (SI, Systeme International) κάτω από την επίβλεψη της UNESCO. Με το SI όλα τα φυσικά μεγέθη είναι παράγωγα επτά βασικών μεγεθών, που είναι τα μεγέθη που μετρούν το **χώρο**, τη **μάζα** και το **χρόνο** καθώς και τα βασικά μεγέθη του **ηλεκτρισμού**, της **θερμοδυναμικής**, της **φωτομετρίας** και της **ποσότητας ουσίας**. Το σύστημα SI είναι η κατάληξη της προσπάθειας για ένα ενιαίο σύστημα μονάδων βασισμένο στη δεκαδική μετρική που άρχισε να υλοποιείται μετά τη Γαλλική Επανάσταση, δηλαδή κατά το πέρασμα από την τοπική αγροτική κοινωνία στη διεθνή βιομηχανική οικονομία. Οι βασικές μονάδες του SI συνοψίζονται στον πίνακα 1.1.

Παρόλη τους όμως την πρόοδο και την ανάπτυξη, οι φυσικές επιστήμες δεν κατάφεραν ακόμα να ολοκληρώσουν τη μελέτη της φύσης και δεν είναι βέβαιο αν θα το πετύχουν ποτέ. Η αδυναμία αυτή οφείλεται εκτός των άλλων και σε δύο βασικούς παράγοντες. Ο πρώτος αφορά το γεγονός ότι, όπως φαίνεται, η φύση λειτουργεί με τρόπο που δε γίνεται εύκολα αντιληπτός από την ανθρώπινη λο-

ΠΙΝΑΚΑΣ 1.1. *Βασικές μονάδες του SI*

Μέγεθος	Ελληνική ονομασία μονάδας	Διεθνής ονομασία μονάδας	Σύμβολο μονάδας
Μήκος	Μέτρο	Metre	m
Μάζα	Χιλιόγραμμο	Kilogram	kg
Χρόνος	Δευτερόλεπτο	Second	s
Ηλεκτρικό ρεύμα	Αμπέρ	Ampere	A
Θερμοδυναμική θερμοκρασία	Κέλβιν	Kelvin	K
Φωτεινή ένταση	Καντέλα	Candela	cd
Ποσό ουσίας	Γραμμομόριο	Mole	mol

γική που βασίζεται στις αισθήσεις. Για παράδειγμα αναφέρεται η δυσχέρεια του νου να αντιληφθεί έννοιες όπως η κυματοσυνάρτηση σωματιδίου, η καμπύλωση του χώρου και άλλες που θα γίνουν καλύτερα αντιληπτές με την εμβάθυνση του σπουδαστή στην επιστήμη.

Ο δεύτερος παράγοντας είναι η περιορισμένη ακρίβεια των παρατηρήσεων. Για να γίνει καλύτερα κατανοητή η δεύτερη αυτή αιτία θα αναλύσουμε στην επόμενη παράγραφο το σκεπτικό της μέτρησης των φυσικών ποσοτήτων.

1.2. ΜΕΤΡΗΣΗ ΦΥΣΙΚΩΝ ΠΟΣΟΤΗΤΩΝ

Όπως αναφέρθηκε για να μετρηθεί ένα μέγεθος χρειάζεται ένα όργανο ή μια διάταξη που να μπορεί να συγκρίνει αυτό που θα μετρηθεί με μια σταθερή μονάδα της ίδιας φύσης. Είναι σημαντικό να υπάρχει ένα πρότυπο μονάδας το οποίο να χρησιμεύει για σύγκριση με το μέγεθος που θέλουμε να μετρήσουμε. Το ιδανικό πρότυπο μιας μονάδας πρέπει να διατίθεται για καθημερινή χρήση και να μη μεταβάλλεται με τον καιρό. Για καθημερινές εφαρμογές κατασκευάζουμε αντίγραφα του πρότυπου που τα ελέγχουμε συνεχώς. Ένας τρόπος μέτρησης είναι η απευθείας σύγκριση του μετρουμένου μεγέθους με το πρότυπο. Από τη σύγκριση αυτή βρίσκεται η τιμή του μετρουμένου μεγέθους και η μέτρηση αυτή χαρακτηρίζεται ως **απευθείας μέτρηση**.

Η απευθείας μέτρηση δεν είναι πάντα δυνατή. Π.χ. η απόσταση ενός δορυφόρου από τη Γη δε μπορεί να μετρηθεί απευθείας. Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιείται η **έμμεση μέθοδος μέτρησης**, όπου το μετρούμενο μέγεθος προκύπτει από τη μέτρηση άλλων μεγεθών. Στο παράδειγμα του δορυφόρου ένας τρόπος μέτρησης της απόστασής του από τη Γη είναι να εκπέμψουμε ένα ηλεκτρομαγνητικό σήμα που θα ανακλαστεί στο δορυφόρο και θα επιστρέψει στη Γη. Γνωρίζοντας την ταχύτητα του σήματος και μετρώντας το χρονικό διάστημα εκπομπής - λήψης βρίσκεται υπολογιστικά η απόσταση.

Τα όργανα μέτρησης πρέπει να έχουν την κατάλληλη **ευαισθησία** ώστε να επιτευχθεί η απαιτούμενη **ακρίβεια**. Πρέπει να είναι δυνατό να εκτιμηθούν τα **συστηματικά σφάλματα**, ώστε τελικώς η ακρίβεια να περιορίζεται μόνο από τα **τυχαία σφάλματα** που θα εισάγονται από το όργανο και το πρότυπο της μονάδας.

1.3. ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΣΤΑΘΕΡΕΣ

Πολλές από τις μετρήσεις που γίνονται στις φυσικές επιστήμες έχουν ως σκοπό τον έλεγχο θεωριών. Μια θεωρία προβλέπει σχέσεις μεταξύ μεγεθών που μετριούνται, όπως π.χ. η συχνότητα, το μαγνητικό πεδίο, ή η θερμοκρασία. Πολλές φορές χρειάζεται να εισαχθούν στους τύπους σταθερές που χαρακτηρίζονται ως θεμελιώδεις. Οι κυριότερες **θεμελιώδεις σταθερές** είναι η σταθερή της παγκόσμιας έλξης G, η ταχύτητα του φωτός c, η σταθερή του Planck h, το φορτίο του ηλεκτρονίου e, η μάζα του ηλεκτρονίου m_e, η μάζα του πρωτονίου m_p και η σταθερή του Boltzmann k. Υπάρχουν και αυτές που προέρχονται από την ανάπτυξη της Φυσικής των στοιχειωδών σωματιδίων και δεν μπορούν να οριστούν από τις παραπάνω, όπως π.χ. η σταθερή σύζευξης των ασθενικών πυρηνικών αλληλοεπιδράσεων και οι μάζες διάφορες μεσονίων. Ο αριθμός των θεμελιωδών σταθερών τείνει να αυξηθεί καθώς τα πειράματα και οι θεωρίες γίνονται πιο πολύπλοκες. Υπάρχει όμως η ελπίδα ότι με την ανάπτυξη των λεγομένων *θεωριών ενοποίησης των βασικών αλληλοεπιδράσεων* θα καταστεί δυνατή η ελάττωση του αριθμού των σταθερών με την εύρεση σχέσεων μεταξύ τους.

Ως παράδειγμα αναφέρεται η μαγνητική ροπή του πρωτονίου, η οποία θεωρείται ανεξάρτητη σταθερή επειδή δεν υπάρχει ακριβής θεωρία για την έκφρασή της. Σε σχέση με άλλες σταθερές μπορεί να μετρηθεί με την ακρίβεια μέτρησης μαγνητικού πεδίου. Αντίθετα η μαγνητική ροπή του ηλεκτρονίου προσδιορίζεται με ακρίβεια από τις σταθερές e, h, m_e και c, από τη θεωρία του ηλεκτρονίου του Dirac και τη θεωρία της κβαντικής ηλεκτροδυναμικής.

Οι ανεπτυγμένες επιστημονικά χώρες έχουν αναπτύξει ειδικά εργαστήρια υπολογισμού σταθερών, στα οποία εργάζονται ειδικοί **«μετρολόγοι».** Οι πιο παραδεκτές τιμές των σταθερών συγκεντρώνονται και εκδίδονται από τη *Διεθνή Επιτροπή Δεδομένων για την Επιστήμη και την Τεχνολογία* (CODATA).

Η φυσική χρειάζεται καταλόγους με τις καλύτερες τιμές των θεμελιωδών σταθερών. Πέρα όμως από αυτό χρειάζεται και τις μονάδες των βασικών μεγεθών που αναφέρονται στον πίνακα 1.1. Οι μονάδες αυτές ορίζονται με τέτοιο τρόπο ώστε να είναι δυνατή η αναπαραγωγή τους ακόμα και αν καταστραφεί το αρχικό πρότυπο της μονάδας. Στην επόμενη παράγραφο θα ασχοληθούμε με τις βασικές μονάδες μήκους, μάζας, χρόνου.

1.4. ΤΟ ΜΕΤΡΟ (m), ΤΟ ΧΙΛΙΟΓΡΑΜΜΟ (kg) ΚΑΙ ΤΟ ΔΕΥΤΕΡΟΛΕΠΤΟ (s)

Όπως αναφέρθηκε η προσπάθεια για ένα συστηματικό ορισμό των προτύπων των βασικών μεγεθών άρχισε μετά τη Γαλλική Επανάσταση οπότε και ιδρύθηκε το *Διεθνές Γραφείο Μέτρων και Σταθμών των Σεβρών* (προάστειο του Παρισιού). Είναι γνωστό ότι η μονάδα μήκους **μέτρο** (m) είχε οριστεί σε σχέση με την απόσταση του Βορείου Πόλου από τον Ισημερινό κατά μήκος του μεσημβρινού του Παρισιού. Η μονάδα μάζας **χιλιόγραμμο** (kg) είχε οριστεί σε σχέση με την πυκνότητα του νερού στους $4\,^{o}C$. Τέλος η μονάδα χρόνου **δευτερόλεπτο** (s) είχε οριστεί σε σχέση με τη διάρκεια περιστροφής της Γης. Στη συνέχεια έγιναν και γίνονται πολλά διεθνή συνέδρια που έχουν ως στόχο τον καλύτερο ορισμό των μονάδων των βασικών μεγεθών.

Ο Planck το 1899 πρότεινε να οριστούν οι μονάδες σε σχέση με τις θεμελιώδεις σταθερές της φύσης. Με βάση την παραπάνω ιδέα έχουμε μια συνεχή εναλλαγή των προτύπων και οι τελευταίοι ορισμοί που ισχύουν σήμερα είναι οι ακόλουθοι:

Μονάδα μήκους είναι το μέτρο (m) που ορίζεται ως το διάστημα μήκους της τροχιάς που διανύεται από το φως στο κενό σε χρόνο 1/299792458 του δευτερόλεπτου (1983) (10^{-10} αβεβαιότητα).

Μονάδα μάζας είναι το χιλιόγραμμο (kg) που ορίζεται ως η μάζα του διεθνούς πρότυπου του χιλιογράμμου (1889) (μηδέν αβεβαιότητα).

Μονάδα χρόνου είναι το δευτερόλεπτο (s) που ορίζεται ως η διάρκεια 9.192.631.770 περιόδων της ακτινοβολίας που προκύπτει από τη μετάπτωση μεταξύ δύο υπέρλεπτων σταθμών της βασικής κατάστασης του ατόμου Cs^{133} (1967) (10^{-14} αβεβαιότητα).

Οι βασικές μονάδες μαζί με τις θεμελιώδεις σταθερές μπορούν να αποτελέσουν τη βάση για τις μετρήσεις στις παρατηρήσεις και τα πειράματα. Για την επεξεργασία των αποτελεσμάτων οι φυσικοί χρησιμοποιούν συγκεκριμένες μεθόδους, μερικές από τις οποίες θα αναφερθούν παρακάτω.

1.5. ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΔΙΑΣΤΑΣΙΑΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Στην εισαγωγή του κεφαλαίου αυτού είδαμε ότι στη φυσική χρησιμοποιούμε επτά θεμελιώδη μεγέθη. Στην πρώτη στήλη του πίνακα 1.1. αναφέρεται η **διάσταση** του μεγέθους με την οποία χαρακτηρίζεται η φυσική υφή, το είδος του μεγέθους. Η διάσταση ενός μεγέθους παραμένει αναλλοίωτη ανεξάρτητη από τον τύπο που εκφράζει το μέγεθος, ενώ η τιμή του εξαρτάται από το σύστημα μονά-

Παράδειγμα 1.

Στη φθίνουσα ταλάντωση η απομάκρυνση δίνεται από την εξίσωση

$$x = A_0 e^{-\gamma t/2m}\,\text{συν}(\omega t + \varphi).$$

Βρείτε τις διαστάσεις των μεγεθών γ και ω.

Η απομάκρυνση x και το αρχικό πλάτος A_0 έχουν διαστάσεις μήκους $[L]$. Οι άλλοι δύο παράγοντες, όπως ήδη έχουμε πει, έχουν μηδενική διάσταση δηλαδή είναι καθαροί αριθμοί. Επομένως

$$[\omega][T] + [\varphi] = \text{Αριθμ.},\quad [\omega][T] + \text{Αριθμ.} = \text{Αριθμ.}\quad \text{και}\quad [\omega][T] = \text{Αριθμ.}$$

Συνεπώς

$$[\omega] = \frac{1}{[T]} = [T^{-1}].$$

Ώστε το μέγεθος ω, η κυκλική συχνότητα, έχει διαστάσεις αντίστροφου χρόνου, ή ακριβέστερα οι διαστάσεις του είναι 0, 0, –1.
Κατά τον ίδιο τρόπο έχουμε

$$\frac{[\gamma][T]}{2[M]} = \text{Αριθμ.}\quad \text{και}\quad [\gamma] = [MT^{-1}],$$

δηλαδή ο παράγοντας αντίστασης τριβης γ έχει διαστάσεις 0, 1, –1.

Παράδειγμα 2.

Υποθέτουμε ότι η περίοδος απλού εκκρεμούς εξαρτάται από τους εξής παράγοντες, το μήκος του l, τη μάζα του m, τη γωνία αιώρησης θ και την επιτάχυνση της βαρύτητας g. Να βρεθεί μια έκφραση για την περίοδο T.

Μια τέτοια έκφραση για να είναι σωστή πρέπει να είναι ομοιογενής ως προς τις διαστάσεις των μεγεθών. Εκφράζουμε την περίοδο ως γινόμενο δυνάμεων των υπολοίπων μεγεθών,

$$T = c\,l^x m^y g^z \theta^w,$$

όπου c αδιάστατη σταθερή αναλογίας. Αδιάστατο μέγεθος είναι επίσης και η γωνία θ. Επειδή η περίοδος έχει διαστάσεις χρόνου, τις ίδιες διαστάσεις πρέπει να έχει και το γινόμενο των δυνάμεων που την εκφράζουν. Έχουμε λοιπόν

$$[T] = [L]^x[M]^y\left[\frac{L}{T^2}\right]^z \quad \text{ή} \quad [T] = [L^{x+z}][M^y][T^{-2z}].$$

Προκύπτει το σύστημα των εξισώσεων $x+z=0$, $y=0$, $-2z=1$. Με επίλυση βρίσκουμε $x=1/2$, $y=0$ και $z=-1/2$. Επομένως η εξίσωση που θέλουμε έχει τη μορφή

$$T = c\, l^{1/2} m^0 g^{-1/2} f(\theta) = c\sqrt{\frac{l}{g}}\, f(\theta).$$

Η διαστασιακή ανάλυση μας έδωσε τη μορφή της εξίσωσης, δεν μπορούμε βέβαια να ξέρουμε την τιμή της σταθερής c αλλά ούτε και τη συνάρτηση f(θ), η επίδραση της οποίας είναι αμελητέα για αιωρήσεις μικρού πλάτους (πόσο μικρό;).

1.6. ΜΕΘΟΔΟΙ ΜΕΛΕΤΗΣ ΤΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

Μετά τη συγκέντρωση δεδομένων από τις παρατηρήσεις των φαινομένων οι φυσικοί διατυπώνουν μια υπόθεση που να ερμηνεύει τα αποτελέσματα και να μπορεί να οδηγήσει σε κάποιο **φυσικό νόμο**. Στη συνέχεια προσπαθούν με πειράματα να επαληθεύσουν την υπόθεση και να βρουν τα όρια των μεγεθών μέσα στα οποία ισχύει. Μια υπόθεση που έχει περάσει από τέτοια επαλήθευση και έχει αποδειχθεί πειραματικά γίνεται πλέον ένας φυσικός νόμος ή μια **θεωρία της Φυσικής**.

Μια θεωρία της Φυσικής είναι ένα σύνολο από βασικές ιδέες που συνοψίζει πειραματικά δεδομένα και προσδιορίζει την αντικειμενική συμπεριφορά της φύσης.

Για να αναπτύξουν τις θεωρίες οι φυσικοί χρησιμοποιούν ορισμένες λογικές διεργασίες με βάση τη μαθηματική σκέψη που διευκολύνουν σημαντικά την οργάνωση της Φυσικής. Η κύρια γλώσσα είναι τα μαθηματικά με τα οποία εκφράζονται συμπυκνωμένοι συλλογισμοί. Ένας από τους βασικούς τρόπους φυσικής σκέψης προκύπτει από τη μελέτη της συμμετρίας.

1.7. Η ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ ΣΤΗ ΦΥΣΙΚΗ

Η μελέτη της συμμετρίας είναι μια μέθοδος αφαίρεσης που εφαρμόζεται με επιτυχία σε πολλούς κλάδους της Φυσικής όπως στη Μηχανική, στη Φυσική Στοιχειωδών Σωματιδίων, στη Φυσική της Στερεάς Κατάστασης κλπ.

Συνήθως χρησιμοποιούμε τον όρο συμμετρία για να εκφράσουμε μια αντιστοιχία στο μέγεθος, στο σχήμα και στη σχετική θέση των τμημάτων ενός σώματος ή σχήματος που βρίσκονται εκατέρωθεν μιας γραμμής ή ενός επιπέδου ή κατανέμονται γύρω από κάποιο κέντρο ή άξονα.

Στην πράξη δηλαδή με τις λεγόμενες συμμετρικές ιδιότητες εκφράζουμε την ομοιομορφία του χώρου, αλλά στη φυσική η έννοια της συμμετρίας επεκτείνεται και σε γενικότερες ιδιότητες.

Ένας άλλος γενικότερος ορισμός της συμμετρίας αναφέρει ότι *αναγνωρίζουμε μια ιδιότητα ως συμμετρική ως προς μια άλλη όταν αλλάζοντας τη δεύτερη ιδιότητα η συμμετρική ιδιότητα μένει αμετάβλητη*.

Για παράδειγμα αναφέρεται η στροφή ενός κύβου κατά 90^{o} γύρω από άξονα που περνάει από τα κέντρα δύο απέναντι εδρών. Ένα άλλο παράδειγμα που βασίζεται στη Νευτώνεια μηχανική είναι η **αρχή της σχετικότητας** σύμφωνα με την οποία οι νόμοι της μηχανικής είναι αμετάβλητοι για αδρανειακούς παρατηρητές δηλαδή για παρατηρητές που είναι ακίνητοι ή κινούνται με σταθερή ταχύτητα μεταξύ τους.

Όταν η μορφή ενός βασικού νόμου της Φυσικής μένει η ίδια με την αλλαγή του συστήματος αναφοράς υπάρχει κάποια συμμετρία που το επιβάλλει. Έτσι στη Νευτώνεια Μηχανική *ο νόμος διατήρησης της ορμής* είναι συνέπεια της συμμετρίας ότι: οι βασικοί νόμοι της φυσικής είναι συμμετρικοί ως προς το χώρο, δηλαδή έχουν την ίδια μορφή σε κάθε σημείο του χώρου. Ο *νόμος της διατήρησης γωνιακής ορμής* είναι συνέπεια της συμμετρίας ότι: οι βασικοί νόμοι της φυσικής έχουν την ίδια μορφή σε κάθε στροφή του συστήματος συντεταγμένων. Τέλος *ο νόμος διατήρησης της ενέργειας* είναι συνέπεια της συμμετρίας του χρόνου δηλαδή ότι: οι βασικοί νόμοι της φυσικής δε μεταβάλλονται με το χρόνο.

Εκτός από τις παραπάνω συμμετρίες υπάρχουν και άλλες, ιδιαίτερα στη θεωρία της σχετικότητας και στη θεωρία των στοιχειωδών σωματιδίων που θα ήταν δύσκολο να εξηγηθούν στο σημείο αυτό.

Η συμμετρία του χώρου επέτρεψε τη μελέτη των φυσικών μεγεθών με τη βοήθεια των **διανυσμάτων**. Ορισμένα βασικά στοιχεία για τα διανύσματα παρουσιάζονται στις επόμενες παραγράφους.

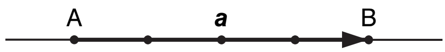
1.8. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Υπάρχουν στη φυσική μεγέθη που ορίζονται μόνο με την αριθμητική τους τιμή και τη μονάδα μέτρησής τους. Τα μεγέθη αυτά ονομάζονται **αριθμητικά**. Όταν έχουν την προσθετική ιδιότητα ονομάζονται **βαθμωτά**. Ως παραδείγματα βαθμωτών μεγεθών αναφέρονται η μάζα και ο χρόνος. Αν όμως εξετάσουμε μια μετατόπιση 1 m, για να οριστεί αυτή πλήρως χρειάζεται να ορίσουμε και τη διεύθυνση και τη φορά της. Τα φυσικά μεγέθη που ορίζονται με τη διεύθυνσή τους, τη φορά τους και το μέτρο τους (αριθμητική τιμή) και προστίθενται με τον κανόνα του παραλληλογράμμου ονομάζονται **διανυσματικά μεγέθη**. Τα αντίστοιχα στοιχεία ενός μαθηματικού χώρου ονομάζονται **διανύσματα** ή **ανύσματα**.

Στα παρακάτω δε θα κάνουμε διάκριση μεταξύ διανυσματικών μεγεθών και διανυσμάτων αλλά θα αναφερόμαστε απλώς σε διανύσματα.

Σύμφωνα μ' ένα πιο αυστηρό ορισμό, ένα διανυσματικό μέγεθος είναι ένας συνδυασμός τριών ποσοτήτων που μετασχηματίζονται σύμφωνα μ' ένα ορισμένο νόμο όταν περιστρέφονται οι άξονες του συστήματος συντεταγμένων που περιγράφει το χώρο.

Το διάνυσμα παριστάνεται με ένα βέλος πάνω σε ευθεία που ονομάζεται **φορέας** του διανύσματος και που ορίζει και τη διεύθυνση του διανύσματος. Η φορά του βέλους δείχνει τη φορά του διανύσματος ενώ το μήκος του λαμβάνεται με κατάλληλη εκλογή της μονάδας μέτρησης, ίσο με το μέτρο του (Εικ. 1.1). Στο γραπτό λόγο το διάνυσμα διακρίνεται από μια επιγραμμή στο σύμβολό του π.χ. $\overline{AB}$ ή $\bar{a}$ ενώ στον έντυπο λόγο δηλώνεται με έντονο παχύ σύμβολο π.χ. $\boldsymbol{AB}$ ή $\boldsymbol{a}$.



$$|\boldsymbol{AB}| = AB = 4$$

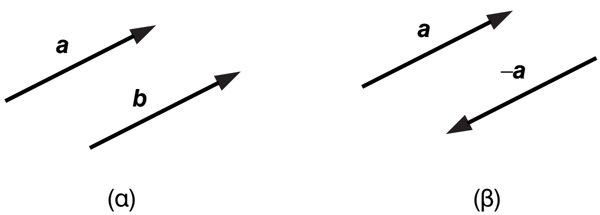
Εικόνα 1.1. *Το διάνυσμα έχει διεύθυνση φορά και μέτρο*

Όταν ήδη έχει εκλεγεί η μονάδα μέτρησης του διανυσματικού μεγέθους το απόλυτο μήκος του διανύσματος $\boldsymbol{AB}$ αποτελεί το μέτρο του και παριστάνεται με $|\boldsymbol{AB}|$ ή απλώς AB. Το μέτρο διανύσματος είναι πάντοτε θετική ποσότητα.

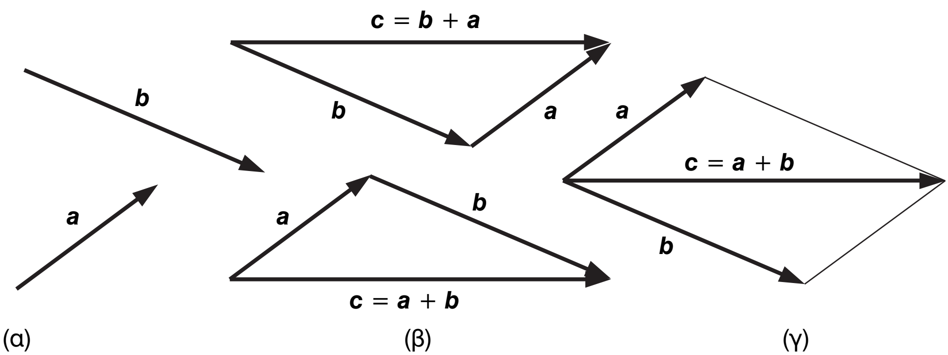
Δύο διανύσματα $\boldsymbol{a}$ και $\boldsymbol{b}$ είναι ίσα αν έχουν το ίδιο μέτρο, διεύθυνση και φορά (Εικ. 1.2α) και συμβολίζουμε $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$.

Το διάνυσμα $-\boldsymbol{a}$ έχει το ίδιο μέτρο και διεύθυνση με το διάνυσμα $\boldsymbol{a}$ αλλά αντίθετη φορά (Εικ. 1.2β) και ονομάζεται αντίθετο του $\boldsymbol{a}$.

Δύο διανύσματα $\boldsymbol{a}$ και $\boldsymbol{b}$ (Εικ. 1.3α) προστίθεται μετατοπίζοντας το $\boldsymbol{b}$ ώστε η αρχή του να συμπέσει με το πέρας του $\boldsymbol{a}$ (Εικ. 1.3β). Το διάνυσμα $\boldsymbol{c}$ που έχει ως αρχή την αρχή του $\boldsymbol{a}$ και πέρας το πέρας του $\boldsymbol{b}$ είναι το άθροισμα των διανυσμάτων $\boldsymbol{a}$ και $\boldsymbol{b}$ και γράφεται $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$. Στην πρόσθεση των διανυσμάτων ισχύει η αντιμετάθεση ώστε $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$. Ο ορισμός αυτός της πρόσθεσης εξηγεί τον κανόνα του παραλληλογράμμου για την πρόσθεση των διανυσμάτων (Εικ. 1.3γ). Η



Εικόνα 1.2. *Στο **(α)** τα διανύσματα **a, b** είναι ίσα ενώ στο **(β)** το −**a** είναι αντίθετο του **a**.*



Εικόνα 1.3. ***(α)*** *Τα διανύσματα* ***a, b*** *προστίθενται* ***(β)*** *αφού με παράλληλη μετατόπιση τα κάνουμε διαδοχικά* ***(γ)*** *ή με τον κανόνα του παραλληλογράμμου.*

ίδια μέθοδος πρόσθεσης των διανυσμάτων γενικεύεται για περισσότερα από δύο διανύσματα, οπότε σχηματίζεται ένα πολύγωνο, το πολύγωνο των διανυσμάτων.

Η διαφορά των διανυσμάτων $\boldsymbol{a}$ και $\boldsymbol{b}$ συμβολίζεται με $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ και είναι ένα διάνυσμα $\boldsymbol{c}(\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$ τέτοιο ώστε $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}$. Η διαφορά των διανυσμάτων μπορεί να γραφεί και ως άθροισμα αν γράψουμε $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$.

Ο πολλαπλασιασμός διανύσματος $\boldsymbol{a}$ με αριθμό k έχει ως αποτέλεσμα το διάνυσμα $k\boldsymbol{a}$ με μέτρο το γινόμενο του μέτρου του αριθμού επί το μέτρο του διανύσματος, διεύθυνση ίδια και φορά την ίδια ή αντίθετη από τη φορά του $\boldsymbol{a}$, αν ο αριθμός k είναι θετικός ή αρνητικός αντίστοιχα.

Διανυσματική μονάδα ή **μοναδιαίο διάνυσμα** είναι ένα διάνυσμα με μέτρο ίσο με τη μονάδα. Η διανυσματική μονάδα διανύσματος ορίζεται από τη σχέση

$$\hat{\boldsymbol{a}} = \frac{\boldsymbol{a}}{a} \tag{1.1}$$

και επομένως, κάθε διάνυσμα ισούται με το γινόμενο του μέτρου του επί τη διανυσματική του μονάδα

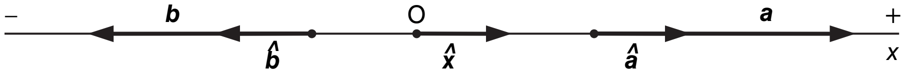
$$\boldsymbol{a} = a\hat{\boldsymbol{a}}. \tag{1.2}$$

Να παρατηρήσουμε εδώ ότι μία σχέση της μορφής

$$a = \frac{\boldsymbol{a}}{\hat{\boldsymbol{a}}}$$

είναι λανθασμένη και ποτέ δεν ισχύει, διότι πράξη διαίρεσης διανυσμάτων δεν ορίζεται.

Μια προσανατολισμένη ευθεία ονομάζεται **άξονας**. Η διανυσματική μονάδα του άξονα έχει τη θετική του φορά και αρχή την αρχή των θετικών και αρνητικών ημιευθείων του άξονα (Εικ. 1.4). Επειδή η διανυσματική μονάδα του άξονα δηλώνει κατεύθυνση (διεύθυνση και φορά) στο χώρο είναι αδιάστατο διάνυσμα και



Εικόνα 1.4. *Η διανυσματική μονάδα* $\hat{\boldsymbol{x}}$ *του άξονα x έχει τη θετική φορά του.*

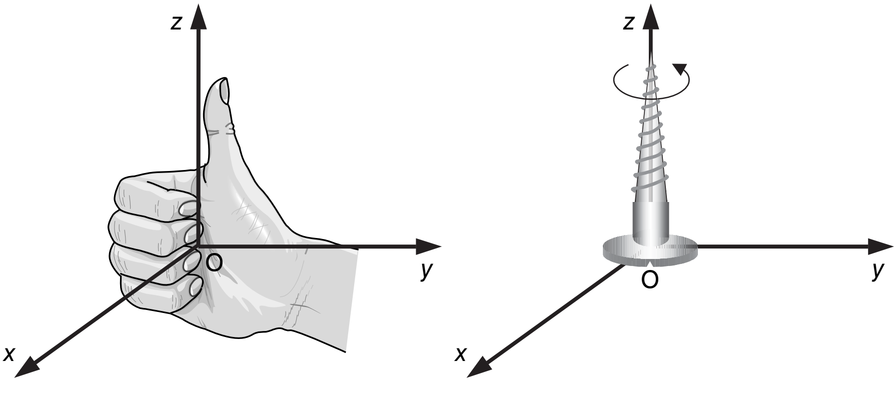
μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την έκφραση διανυσμάτων παραλλήλων προς τον άξονα και γενικώς προς κάποια διεύθυνση. Έτσι η διανυσματική μονάδα διανυσμάτων που είναι παράλληλη προς τον άξονα είναι ίση ή αντίθετη με τη διανυσματική μονάδα του άξονα. Π.χ. στην εικόνα 1.4 είναι $\hat{\boldsymbol{a}} = \hat{\boldsymbol{x}}$ και $\boldsymbol{b} = -\hat{\boldsymbol{x}}$. Ώστε έχουμε

$$\boldsymbol{a} = a\hat{\boldsymbol{a}} = a\hat{\boldsymbol{x}} \qquad \text{και} \qquad \boldsymbol{b} = b\hat{\boldsymbol{b}} = -b\hat{\boldsymbol{x}}. \tag{1.3}$$

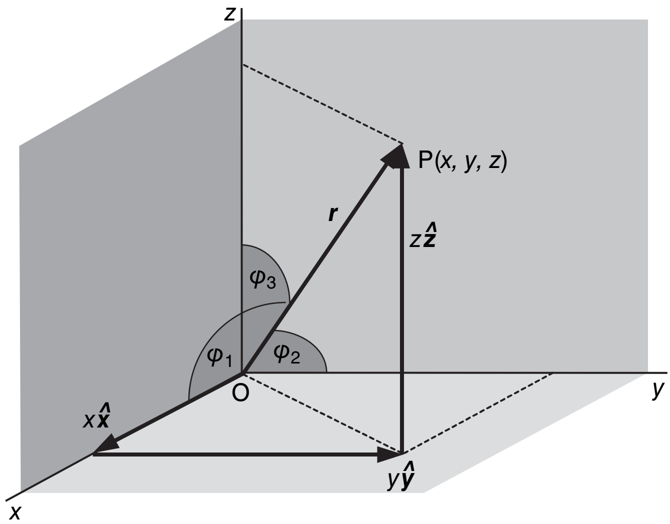
Ώστε κάθε διάνυσμα παράλληλο προς ένα άξονα μπορεί, να γραφεί ως το γινόμενο του προσημασμένου μήκους του επί τη διανυσματική μονάδα του άξονα. Το προσημασμένο μήκος διανύσματος λέγεται **αλγεβρική τιμή** του διανύσματος και αποτελεί τη **συντεταγμένη** του ως προς τον άξονα.

Ένα τρισορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων O*xyz* ορίζεται από τρεις άξονες *x, y, z* που έχουν κοινή αρχή O και είναι ανά δύο κάθετοι μεταξύ τους. Στο εξής θα χρησιμοποιούμε δεξιόστροφο σύστημα (Εικ. 1.5) εκτός και αν αναφέρεται διαφορετικά. Το σύστημα είναι δεξιόστροφο όταν προκύπτει με εφαρμογή του κανόνα του δεξιού χεριού ή τον κανόνα του δεξιόστροφου κοχλία (βίδας), όπως εικονίζεται στην εικόνα 1.5. Αντίστοιχος ορισμός με το αριστερό χέρι ή την αριστερόστροφη βίδα οδηγεί σε αριστερόστροφο σύστημα.

Σε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων (που λέγεται και καρτεσιανό) η θέση ενός σημείου P ορίζεται από τις συντεταγμένες του *x, y, z.* Η θέση του P καθορίζεται και από το **διάνυσμα θέσης** ή τη **διανυσματική ακτίνα *r*** που είναι ένα διάνυσμα που έχει ως αρχή το O και πέρας το P. Όπως φαίνεται από την εικόνα 1.6 το διάνυσμα ***r*** γράφεται



Εικόνα 1.5. *Ορισμός δεξιόστροφου συστήματος αξόνων.*



Εικόνα 1.6. *Το διάνυσμα θέσης σημείου και οι συνιστώσες του.*

$$\boldsymbol{r} = x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}} + z\hat{\boldsymbol{z}}\,. \tag{1.4}$$

Τα διανύσματα $x\hat{\boldsymbol{x}}$, $y\hat{\boldsymbol{y}}$, $z\hat{\boldsymbol{z}}$ αποτελούν τις **συνιστώσες** του διανύσματος $\boldsymbol{r}$ στις διευθύνσεις $\hat{\boldsymbol{x}}$, $\hat{\boldsymbol{y}}$, $\hat{\boldsymbol{z}}$ αντίστοιχα, ενώ οι συντεταγμένες του P είναι και οι συντεταγμένες του $\boldsymbol{r}$. Γι’ αυτό συνήθως γράφουμε το διάνυσμα με τις συντεταγμένες του, $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(x, y, z)$. Το μέτρο του διανύσματος θέσης ισούται με

$$r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}. \tag{1.5}$$

Το διάνυσμα $\boldsymbol{r}$ σχηματίζει με τις $\hat{\boldsymbol{x}}$, $\hat{\boldsymbol{y}}$, $\hat{\boldsymbol{z}}$ τις γωνίες φ_1, φ_2, φ_3 αντίστοιχα. Όταν οι γωνίες αυτές είναι γνωστές, η κατεύθυνση του $\boldsymbol{r}$ είναι πλήρως καθορισμένη. Για το λόγο αυτό τα συνημίτονα των γωνιών αυτών ονομάζονται **συνημίτονα κατεύθυνσης** του $\boldsymbol{r}$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι

$$\text{συν}^2\varphi_1 + \text{συν}^2\varphi_2 + \text{συν}^2\varphi_3 = 1.$$

Με τη βοήθεια των συντεταγμένων, το άθροισμα διανυσμάτων βρίσκεται προσθέτοντας τις ομώνυμες συντεταγμένες τους. Πράγματι αν $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(a_x, a_y, a_z)$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}(b_x, b_y, b_z)$, ... τότε

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \ldots = (a_x\hat{\boldsymbol{x}} + a_y\hat{\boldsymbol{y}} + a_z\hat{\boldsymbol{z}}) + (b_x\hat{\boldsymbol{x}} + b_y\hat{\boldsymbol{y}} + b_z\hat{\boldsymbol{z}}) + \ldots =$$

$$= (a_x+b_x+\ldots)\hat{\boldsymbol{x}} + (a_y+b_y+\ldots)\hat{\boldsymbol{y}} + (a_z+b_z+\ldots)\hat{\boldsymbol{z}} \tag{1.6}$$

και

$$\boldsymbol{R} = R_x\hat{\boldsymbol{x}} + R_y\hat{\boldsymbol{y}} + R_z\hat{\boldsymbol{z}}\,.$$

1.9. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟ Ή ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Ως **αριθμητικό** ή **εσωτερικό γινόμενο** δύο διανυσμάτων $\boldsymbol{a}$ και $\boldsymbol{b}$ ορίζεται το αριθμητικό μέγεθος που είναι ίσο με το γινόμενο των μέτρων των δύο διανυσμάτων επί το συνημίτονο της μεταξύ τους γωνίας θ (Εικ. 1.7), δηλαδή

$$\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b} = a\, b\, \text{συν}\theta. \tag{1.7}$$

Για το αριθμητικό γινόμενο ισχύει η αντιμεταθετική (συμμετρική) ιδιότητα καθώς και η επιμεριστική, δηλαδή

$$\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \bullet \boldsymbol{a} \qquad \text{και} \qquad \boldsymbol{a} \bullet (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{c}. \tag{1.8}$$

Μεταξύ των διανυσματικών μονάδων του συστήματος Oxyz (Εικ. 1.5) ισχύουν οι σχέσεις

$$\hat{\boldsymbol{x}} \bullet \hat{\boldsymbol{x}} = \hat{\boldsymbol{y}} \bullet \hat{\boldsymbol{y}} = \hat{\boldsymbol{z}} \bullet \hat{\boldsymbol{z}} = 1 \qquad \text{και} \qquad \hat{\boldsymbol{x}} \bullet \hat{\boldsymbol{y}} = \hat{\boldsymbol{y}} \bullet \hat{\boldsymbol{z}} = \hat{\boldsymbol{z}} \bullet \hat{\boldsymbol{x}} = 0. \tag{1.9}$$

Αν οι συντεταγμένες των διανυσμάτων $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ είναι οι a_x, a_y, a_z και οι b_x, b_y, b_z αντίστοιχα, τότε

$$\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b} = (a_\mathrm{x}\hat{\boldsymbol{x}} + a_\mathrm{y}\hat{\boldsymbol{y}} + a_\mathrm{z}\hat{\boldsymbol{z}}) \bullet (b_\mathrm{x}\hat{\boldsymbol{x}} + b_\mathrm{y}\hat{\boldsymbol{y}} + b_\mathrm{z}\hat{\boldsymbol{z}}) = a_\mathrm{x}b_\mathrm{x} + a_\mathrm{y}b_\mathrm{y} + a_\mathrm{z}b_\mathrm{z}, \tag{1.10}$$

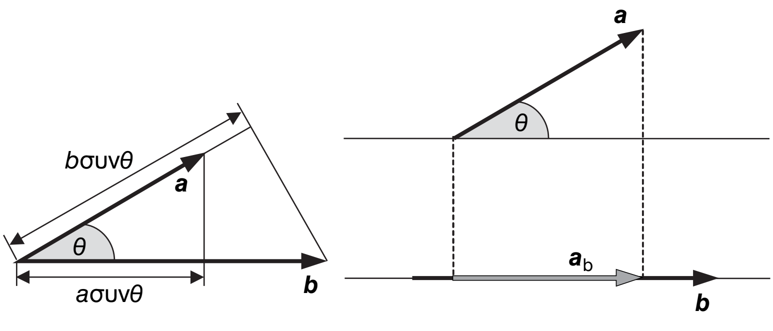
δηλαδή το αριθμητικό γινόμενο ισούται με το άθροισμα των γινομένων των ομωνύμων συντεταγμένων των διανυσμάτων.

Επομένως το μέτρο ενός διανύσματος ορίζεται από τη σχέση

$$|\boldsymbol{a}| = (\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{a})^{1/2} = (a_\mathrm{x}^2 + a_\mathrm{y}^2 + a_\mathrm{z}^2)^{1/2}. \tag{1.11}$$

Αν το εσωτερικό γινόμενο $\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b} = 0$ και τα $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ είναι μη μηδενικά διανύσματα, τότε τα διανύσματα $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ είναι κάθετα και αντιστρόφως.

Με τη βοήθεια του αριθμητικού γινομένου προσδιορίζεται η ορθή προβολή ενός διανύσματος στη διεύθυνση ενός άλλου. Π.χ. η προβολή του διανύσματος



Εικόνα 1.7. *Αριθμητικό γινόμενο των **a** και **b** και η ορθή προβολή του διανύσματος **a** στη διεύθυνση του διανύσματος **b**.*

$\boldsymbol{a}$ της εικόνας 1.7 πάνω στο $\boldsymbol{b}$ είναι

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{b}} = (\boldsymbol{a} \bullet \hat{\boldsymbol{b}})\hat{\boldsymbol{b}} = \frac{\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b}}{b^2}\,\boldsymbol{b}. \tag{1.12}$$

Γενικά κάθε διάνυσμα μπορεί να γραφεί ως το άθροισμα των συνιστωσών του στους άξονες x, y, z που είναι οι ορθές προβολές του πάνω στις διευθύνσεις $\hat{\boldsymbol{x}}$, $\hat{\boldsymbol{y}}$, $\hat{\boldsymbol{z}}$. Έτσι για διάνυσμα $\boldsymbol{a}(a_{\mathrm{x}}, a_{\mathrm{y}}, a_{\mathrm{z}})$ θα έχουμε

$$\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a} \bullet \hat{\boldsymbol{x}})\hat{\boldsymbol{x}} + (\boldsymbol{a} \bullet \hat{\boldsymbol{y}})\hat{\boldsymbol{y}} + (\boldsymbol{a} \bullet \hat{\boldsymbol{z}})\hat{\boldsymbol{z}} = a_{\mathrm{x}}\hat{\boldsymbol{x}} + a_{\mathrm{y}}\hat{\boldsymbol{y}} + a_{\mathrm{z}}\hat{\boldsymbol{z}}.$$

1.10. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟ Ή ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

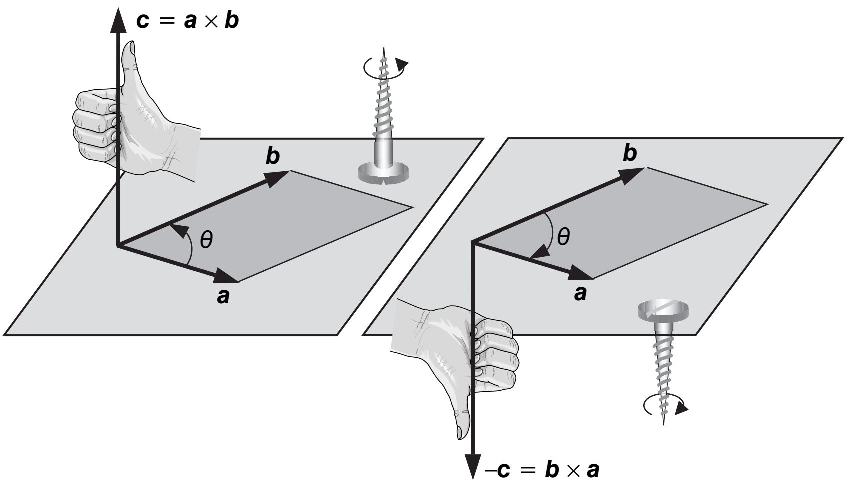
Ως **διανυσματικό** ή **εξωτερικό γινόμενο** δύο διανυσμάτων $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ ορίζεται το διάνυσμα $\boldsymbol{c}$ που έχει ως μέτρο το γινόμενο των μέτρων των δύο διανυσμάτων επί το ημίτονο της μεταξύ τους γωνίας, διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο των δύο διανυσμάτων και φορά τέτοια ώστε τα $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ και $\boldsymbol{c}$ να σχηματίζουν δεξιόστροφο σύστημα (Εικ. 1.8).

Το διανυσματικό γινόμενο συμβολίζεται ως

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \tag{1.13}$$

και γράφεται

$$\boldsymbol{c} = ab\,\text{ημ}\theta\,\hat{\boldsymbol{c}}. \tag{1.14}$$



Εικόνα 1.8. *Διανυσματικό γινόμενο των **a** και **b**. Το εμβαδό του παραλληλόγραμμού τους έχει μέτρο ίσο με το μέτρο του διανυσματικού γινομένου.*

1.11. ΤΑ ΔΙΠΛΑ ΓΙΝΟΜΕΝΑ

Εκτός από τα προηγούμενα γινόμενα είναι δυνατόν να υπολογιστούν και διπλά γινόμενα αφού κάθε διανυσματικό γινόμενο ισούται με κάποιο διάνυσμα. Δύο τέτοια γινόμενα είναι το μικτό και το διπλό διανυσματικό.

1. Το μικτό γινόμενο.

Το μικτό γινόμενο είναι το αριθμητικό γινόμενο ενός διανυσματικού γινομένου επί ένα διάνυσμα. Η παράσταση

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\bullet\boldsymbol{c}, \tag{1.20}$$

εκφράζει το αριθμητικό γινόμενο του διανύσματος $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ επί το $\boldsymbol{c}$. Το $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ έχει μέτρο το εμβαδό E του παραλληλογράμμου με πλευρές τα $\boldsymbol{a}$ και $\boldsymbol{b}$ και διεύθυνση $\hat{\boldsymbol{d}}$ κάθετη στο επίπεδο των $\boldsymbol{a}$ και $\boldsymbol{b}$ (Εικ. 1.9).

Το γινόμενο $\boldsymbol{c}\bullet\hat{\boldsymbol{d}}$ είναι ίσο με το μέτρο της ορθής προβολής του $\boldsymbol{c}$ πάνω στο $\hat{\boldsymbol{d}}$ δηλαδή είναι ίσο με το ύψος h του παραλληλεπιπέδου που σχηματίζουν τα διανύσματα $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$. Το γινόμενο όμως του εμβαδού της βάσης επί το ύψος ισούται με τον όγκο V του παραλληλεπιπέδου. Ώστε είναι

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\bullet\boldsymbol{c} = \left(|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\hat{\boldsymbol{d}}\right)\bullet\boldsymbol{c} = |\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\,(\hat{\boldsymbol{d}}\bullet\boldsymbol{c}) = |\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\,h = Eh = V.$$

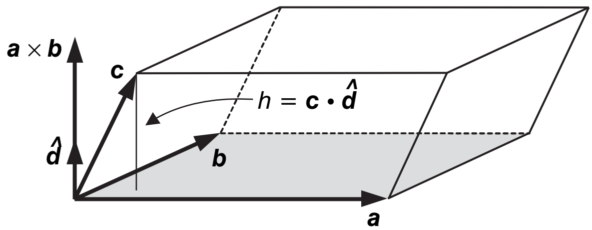
Αλλά ο όγκος του παραλληλεπιπέδου είναι ανεξάρτητος της έδρας που χρησιμοποιήσαμε για βάση. Εύκολα λοιπόν προκύπτει ότι μπορούμε να εναλλάσσουμε τις θέσεις των συμβόλων εσωτερικού και εξωτερικού πολλαπλασιασμού,

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\bullet\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\bullet(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}). \tag{1.21}$$

Επίσης είναι

$$\boldsymbol{a}\bullet(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}\bullet(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{c}\bullet(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}), \tag{1.22}$$

γι’ αυτό και το μικτό γινόμενο συμβολίζεται γενικά ως $[\boldsymbol{abc}]$.



Εικόνα 1.9. *Το μικτό γινόμενο των διανυσμάτων **a, b, c,** ισούται με τον όγκο του παραλληλεπιπέδου τους.*

Τα διανύσματα που είναι παράλληλα σ' ένα επίπεδο ονομάζονται **συνεπίπεδα**. Είναι φανερό ότι τρία μη μηδενικά διανύσματα είναι συνεπίπεδα, όταν το μικτό τους γινόμενο είναι μηδέν και αντιστρόφως.

Το μικτό γινόμενο γράφεται και με τη μορφή ορίζουσας, δηλαδή

$$\boldsymbol{a} \bullet (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} . \tag{1.23}$$

Οι ιδιότητες (1.21) και (1.22) προκύπτουν εύκολα από τις ιδιότητες των οριζουσών.

2. Το διπλό διανυσματικό ή δισεξωτερικό γινόμενο.

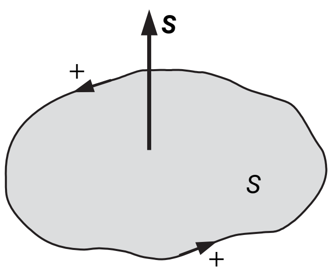
Το διπλό διανυσματικό ή δισεξωτερικό γινόμενο είναι το διανυσματικό γινόμενο ενός διανύσματος με ένα διανυσματικό γινόμενο. Αποδεικνύεται ότι για το γινόμενο αυτό ισχύουν οι σχέσεις

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) &= (\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b})\boldsymbol{c} \\ (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} &= (\boldsymbol{c} \bullet \boldsymbol{a})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{c} \bullet \boldsymbol{b})\boldsymbol{a} . \end{aligned} \tag{1.24}$$

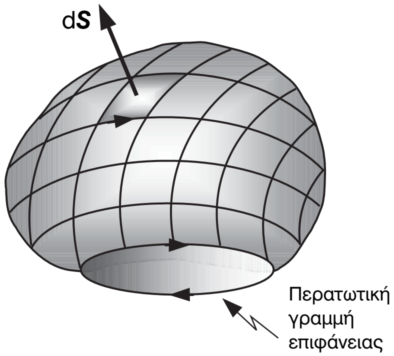
1.12. ΔΙΑΝΥΣΜΑ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ

Έστω ότι έχουμε μια επίπεδη επιφάνεια της οποίας το εμβαδόν είναι S (Εικ. 1.10). Στην επιφάνεια αυτή διαλέγουμε αυθαίρετα μια φορά διαγραφής της περιμέτρου της την οποία και θεωρούμε θετική. Τότε ως διάνυσμα της επιφάνειας ορίζεται το διάνυσμα **S** που είναι κάθετο στην επιφάνεια και έχει μέτρο ίσο με το εμβαδό της επιφάνειας.

Η φορά του διανύσματος **S** βρίσκεται με τον δεξιόστροφο κοχλία, ο οποίος θεωρείται ότι στρέφεται κατά τη θετική φορά διαγραφής που έχουμε ορίσει για



Εικόνα 1.10. *Το διάνυσμα **S** που περιγράφει την επίπεδη επιφάνεια εμβαδού S.*



Εικόνα 1.11. *Διαίρεση καμπύλης επιφάνειας σε στοιχειώδη τμήματα.*

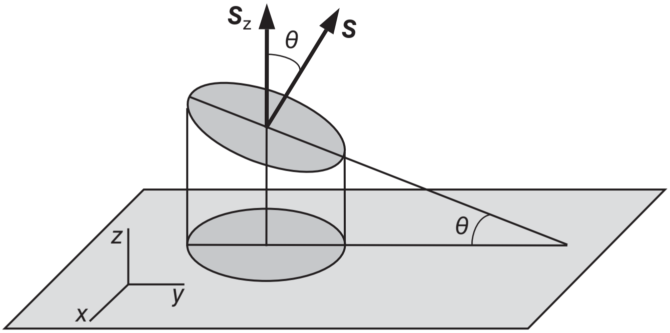
την περίμετρο.

Όταν η επιφάνεια δεν είναι επίπεδη (Εικ. 1.11), τη διαιρούμε σε μεγάλο πλήθος στοιχειωδών επιφανειών ώστε πρακτικά καθεμιά απ' αυτές να θεωρείται επίπεδη. Τότε σε κάθε στοιχειώδη επιφάνεια εμβαδού dS αντιστοιχούμε, με τον παραπάνω τρόπο που περιγράψαμε, το διάνυσμα επιφάνειας d$\boldsymbol{S}$.

Είναι ενδιαφέρον να πούμε εδώ ότι η προβολή του διανύσματος επιφάνειας πάνω σ' ένα άξονα τρισορθογώνιου συστήματος έχει μέτρο ίσο με το εμβαδό της προβολής της επιφάνειας πάνω στο επίπεδο που ορίζουν οι δύο άλλοι άξονες (Εικ. 1.12).

Το διάνυσμα επιφάνειας είναι χρήσιμο σε πολλές περιπτώσεις όπου έχει σημασία και ο προσανατολισμός της επιφάνειας. Για παράδειγμα η ροή πεδίου δυνάμεων ορίζεται ως το αριθμητικό γινόμενο της έντασης του πεδίου επί το διάνυσμα της επιφάνειας από την οποία περνάει η ροή

$$\mathrm{d}\Phi = \boldsymbol{E} \bullet \mathrm{d}\boldsymbol{S}. \tag{1.25}$$



Εικόνα 1.12. *Η προβολή διανύσματος επιφάνειας στον άξονα των z είναι ίση με την προβολή της επιφάνειας στο επίπεδο x, y.*

1.13. ΕΙΔΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Όπως τονίσαμε, οι ιδιότητες της συμμετρίας του χώρου επέτρεψαν την περιγραφή των φυσικών μεγεθών με τη βοήθεια των διανυσμάτων. Ένα διάνυσμα είναι μια ποσότητα που χρειάζεται τρεις συνιστώσες για τον προσδιορισμό της. Είδαμε ακόμη ότι οι άξονες ενός συστήματος, συντεταγμενων ορίζονται από τρία μοναδιαία, συνήθως κάθετα, διανύσματα που σχηματίζουν δεξιόστροφο σύστημα αξόνων. Εύκολα μπορεί να αποδειχθεί ότι σε ένα δεξιόστροφο σύστημα ισχύει η σχέση

$$(\hat{\boldsymbol{x}} \times \hat{\boldsymbol{y}}) \bullet \hat{\boldsymbol{z}} = 1. \tag{1.26}$$

Η επιλογή του δεξιόστροφου συστήματος είναι αυθαίρετη.

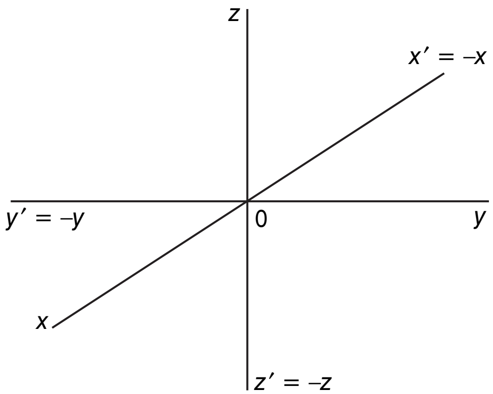
Αν το σύστημα συνεταγμένων είναι αριστερόστροφο και τα μοναδιαία του διανύσματα $\hat{\boldsymbol{x}}'$, $\hat{\boldsymbol{y}}'$, $\hat{\boldsymbol{z}}'$ εκφράζονται ως προς το αρχικό σύστημα, τότε θα ισχύει η σχέση (Εικ. 1.13)

$$(\hat{\boldsymbol{x}}' \times \hat{\boldsymbol{y}}') \bullet \hat{\boldsymbol{z}}' = -(\hat{\boldsymbol{x}} \times \hat{\boldsymbol{y}}) \bullet \hat{\boldsymbol{z}} = -1. \tag{1.27}$$

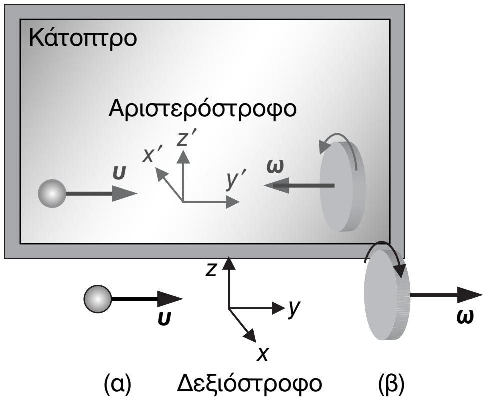
Φυσικά όταν θα περιγράφονται στο αριστερόστροφο σύστημα το μικτό τους γινόμενο θα ισούται με τη μονάδα.

Η περιγραφή ενός χώρου διαφοροποιείται αν στρέψουμε το σύστημα συντεταγμένων ή αν το αναστρέψουμε ως προς το κέντρο. Αναστροφή ως προς κέντρο σημαίνει να αντικαταστήσουμε κάθε μοναδιαίο διάνυσμα με το αντίθετό του (Εικ. 1.13). Ένα τέτοιο αντεστραμμένο σύστημα θα είναι αριστερόστροφο και θα υπακούει στη σχέση (1.27).

Η πράξη απέδειξε ότι στη φυσική υπάρχουν μεγέθη που είναι συμμετρικά σε έναν ή και τους δύο από τους παραπάνω μετασχηματισμούς, δηλαδή τη στροφή και την αναστροφή ως προς κέντρο. Ας εξετάσουμε αρχικά τα αριθμητικά μεγέθη.



Εικόνα 1.13. *Αναστροφή ως προς κέντρο των αξόνων ενός καρτεσιανού συστήματος.*



***Εικόνα 1.14**. **(α)** Η ταχύτητα της σφαίρας είναι αληθές διάνυσμα αφού το κατοπτρικό της είδωλο έχει την ίδια φορά. **(β)** Η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου είναι ψευδοδιάνυσμα γιατί το είδωλο του δίσκου περιστρέφεται κατά αντίθετη φορά με συνέπεια την αναστροφή της φοράς της γωνιακής ταχύτητας.*

Κατά την περιγραφή των φυσικών μεγεθών θα πρέπει στις εξισώσεις να εξισώνονται αριθμητικά με αριθμητικά μεγέθη, πολικά διανύσματα με πολικά και αξονικά με αξονικά. Για παράδειγμα αναφέρουμε τη σχέση που δίνει την ταχύτητα στην κυκλική κίνηση σε συνάρτηση με τη γωνιακή ταχύτητα $\boldsymbol{\omega}$ και το διάνυσμα θέσης $\boldsymbol{r}$. Όπως θα δούμε στο κεφάλαιο 2 η ταχύτητα δίνεται από τη σχέση $\boldsymbol{\upsilon} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$. Επειδή το διάνυσμα θέσης και η ταχύτητα είναι πολικά διανύσματα, θα πρέπει το $\boldsymbol{\omega}$ να είναι αξονικό διάνυσμα ώστε το διανυσματικό του γινόμενο με ένα πολικό διάνυσμα να έχει ως αποτέλεσμα ένα πολικό διάνυσμα. Διότι κατά την αναστροφή αλλάζει το σημείο του $\boldsymbol{r}$ και επομένως για να αλλάξει το σημείο της $\boldsymbol{\upsilon}$, που είναι πολικό διάνυσμα, πρέπει να μην αλλάξει το σημείο της $\boldsymbol{\omega}$.

Αναφέραμε σε γενικές γραμμές τι είναι τα διανύσματα και πώς συσχετίζονται μεταξύ τους. Υπάρχει και κάποιος άλλος συσχετισμός μεταξύ δύο διανυσμάτων που γίνεται με τη βοήθεια ενός μεγέθους που ονομάζεται **τανυστής**. Έτσι, όταν δύο διανύσματα εξαρτώνται γραμμικά το ένα με το άλλο, έχουν όμως διαφορετική διεύθυνση σχετίζονται με κάποιο τανυστή. Ως παράδειγμα αναφέρεται η εξάρτηση μεταξύ της τάσης και της παραμόρφωσης ενος υλικού που δεν έχουν την ίδια διεύθυνση και σχετίζονται με τον τανυστή της τάσης. Η Φυσική του βιβλίου αυτού θα γίνει χωρίς τη χρήση των τανυστών.

1.14. ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Ας εξετάσουμε ένα διάνυσμα που μεταβάλλεται με το χρόνο σύμφωνα με κάποιο νόμο, $\boldsymbol{a}(t)$. Θεωρούμε ένα σταθερό σύστημα συντεταγμένων *x, y, z*. Το διάνυσμα $\boldsymbol{a}(t)$ μπορεί να εκφραστεί στο σύστημα συντεταγμένων από μία σχέση της μορφής

$$\boldsymbol{a}(t) = a_x(t)\,\hat{\boldsymbol{x}} + a_y(t)\,\hat{\boldsymbol{y}} + a_z(t)\,\hat{\boldsymbol{z}}, \tag{1.31}$$

όπου οι συντεταγμένες του διανύσματος είναι και αυτές συναρτήσεις του χρόνου.

Αποδεικνύεται ότι, όταν η $\boldsymbol{a}(t)$ είναι συνεχής συνάρτηση του χρόνου, η παράγωγος του διανύσματος δίνεται από τη σχέση

$$\frac{d\boldsymbol{a}}{dt} = \frac{da_x}{dt}\,\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{da_y}{dt}\,\hat{\boldsymbol{y}} + \frac{da_z}{dt}\,\hat{\boldsymbol{z}}. \tag{1.32}$$

Για το διάνυσμα θέσης η παραπάνω σχέση μετατρέπεται στην

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\,\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{dy}{dt}\,\hat{\boldsymbol{y}} + \frac{dz}{dt}\,\hat{\boldsymbol{z}}. \tag{1.33}$$

Για τις παραγώγους των γινομένων ισχύουν οι σχέσεις

$$\frac{d(\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b})}{dt} = \frac{d\boldsymbol{a}}{dt} \bullet \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \bullet \frac{d\boldsymbol{b}}{dt}\,, \tag{1.34}$$

$$\frac{d(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})}{dt} = \frac{d\boldsymbol{a}}{dt} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \frac{d\boldsymbol{b}}{dt}\,. \tag{1.35}$$

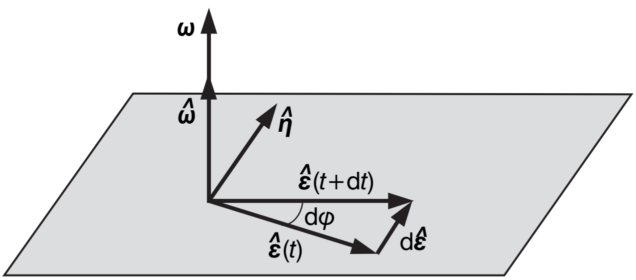
Ας υπολογίσουμε τώρα την παράγωγο ενός μοναδιαίου διανύσματος. Το μοναδιαίο διάνυσμα αλλάζει μόνο διεύθυνση και όχι μέτρο (Εικ. 1.15).

Έστω λοιπόν το διάνυσμα $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)$ με μέτρο μονάδα, του οποίου ζητείται να υπολογιστεί η παράγωγος. Επειδή

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \bullet \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = 1 \tag{1.36}$$

προκύπτει

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}{dt} \bullet \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} + \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \bullet \frac{d\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}{dt} = 0 \tag{1.37}$$



***Εικόνα 1.15**. Μικρή στροφή ενός μοναδιαίου διανύσματος $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)$. Το $\hat{\boldsymbol{\eta}}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα που είναι κάθετο στο $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)$ και βρίσκεται στο επίπεδο της στροφής.*