

Θανάση Π. Ξένου

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Απαραίτητο βοήθημα για κάθε μαθητή Λυκείου

- ◆ Ορισμοί των εννοιών
- ◆ Τύποι και ιδιότητες
- ◆ Βασική μεθοδολογία

Πρόλογος

Το βιβλιαράκι που κρατάς στα χέρια σου, μοναδικό στην ελληνική βιβλιογραφία, θα σου φανεί χρήσιμο στη διάρκεια των σπουδών σου στο Λύκειο, αλλά και στην προετοιμασία σου για τις πανελλαδικές εξετάσεις.

Περιέχει εκείνες τις *θεωρητικές γνώσεις* (ορισμούς εννοιών, τύπους και ιδιότητες), που έχεις διδαχθεί σε προηγούμενες τάξεις και θα πρέπει να γνωρίζεις για τη συνέχεια των σπουδών σου.

Περιέχει, ακόμη, τη *βασική μεθοδολογία* για την επίλυση ασκήσεων και προβλημάτων, με *αντιπροσωπευτικά παραδείγματα*.

Η πολύχρονη εμπειρία μου, ως δάσκαλος των Μαθηματικών και συγγραφέας, με κάνει να ελπίζω πως το εγχειρίδιο αυτό θα συμβάλλει, έστω και ελάχιστα, στην επιτυχημένη ενασχόλησή σου με τα Μαθηματικά.

Ιούνιος 2008

Θανάσης Ξένος

Περιεχόμενα

1^ο

ΑΛΓΕΒΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Κεφάλαιο

1.1	Σύνολα αριθμών	13
1.2	Οι πράξεις στο \mathbb{R} και οι ιδιότητές τους	14
1.3	Δυνάμεις πραγματικών αριθμών	15
1.4	Αναλογίες.....	16
1.5	Ταυτότητες	16
1.6	Ανισότητες πραγματικών αριθμών	17
1.7	Παραγοντοποίηση πολυωνύμων.....	19
1.8	Πράξεις κλασματικών παραστάσεων.....	21
1.9	Διαίρεση πολυωνύμων	22
1.10	Ρίζες πραγματικών αριθμών.....	22
1.11	Απόλυτη τιμή πραγματικών αριθμών.....	23
1.12	Εξισώσεις.....	24
1.13	Ανισώσεις.....	26
1.14	Συστήματα εξισώσεων	29
1.15	Αριθμητική και γεωμετρική πρόοδος	32
1.16	Εκθετική συνάρτηση	34
1.17	Λογάριθμοι	35
1.18	Μαθηματική επαγωγή.....	37
1.19	Πολυώνυμα.....	38

2^ο

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

Κεφάλαιο

2.1	Τριγωνομετρικοί αριθμοί οποιασδήποτε γωνίας.....	41
2.2	Τριγωνομετρικές ταυτότητες.....	44
2.3	Αναγωγή στο πρώτο τεταρτημόριο.....	45
2.4	Τριγωνομετρικές συναρτήσεις.....	46
2.5	Τριγωνομετρικές εξισώσεις.....	48
2.6	Τριγωνομετρικοί αριθμοί αθροίσματος γωνιών.....	50
2.7	Τριγωνομετρικοί αριθμοί διπλάσιας γωνίας.....	50
2.8	Μετασχηματισμοί τριγωνομετρικών παραστάσεων.....	51
2.9	Η συνάρτηση $f(x) = a\eta\mu x + \beta\sigma\upsilon\nu x$	52
2.10	Νόμοι ημιτόνων και συνημιτόνων.....	53

3^ο

ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Κεφάλαιο

3.1	Πολύγωνα.....	55
3.2	Κριτήρια ισότητας τριγώνων.....	56
3.3	Ανισοτικές σχέσεις.....	56
3.4	Κέντρα τριγώνου.....	57
3.5	Παραλληλόγραμμα.....	58
3.6	Τραπεζία.....	59
3.7	Κύκλος.....	60
3.8	Εγγράψιμα τετράπλευρα.....	62
3.9	Θεώρημα του Θαλή.....	64
3.10	Ομοιότητα πολυγώνων.....	65
3.11	Μετρικές σχέσεις σε ορθογώνιο τρίγωνο.....	65

3.12	Μετρικές σχέσεις σε τυχαίο τρίγωνο	66
3.13	Μετρικές σχέσεις σε κύκλο.....	67
3.14	Εμβαδόν γνωστών σχημάτων	68
3.15	Κανονικά πολύγωνα.....	70
3.16	Μέτρηση κύκλου.....	72
3.17	Βασικές γνώσεις Στερεομετρίας	72
3.18	Μέτρηση στερεών.....	74

4^ο

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Κεφάλαιο

4.1	Πράξεις διανυσμάτων	77
4.2	Συντεταγμένες στο επίπεδο	78
4.3	Εξίσωση ευθείας	78
4.4	Ο κύκλος	81
4.5	Η παραβολή.....	81
4.6	Η έλλειψη.....	82
4.7	Η υπερβολή	83

5^ο

ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

Κεφάλαιο

5.1	Η ευκλείδεια διαίρεση στο σύνολο των ακεραίων.....	85
5.2	Διαιρετότητα ακέραιων αριθμών	85
5.3	Πρώτοι και σύνθετοι αριθμοί.....	86
5.4	Μ.Κ.Δ. και Ε.Κ.Π.	87



ΑΝΑΛΥΣΗ

Κεφάλαιο

6.1	Βασικές έννοιες στις συναρτήσεις.....	89
6.2	Γραφική παράσταση συνάρτησης	92
6.3	Μονοτονία και ακρότατα συνάρτησης	96
6.4	Αντίστροφη συνάρτηση	97
6.5	Πεπερασμένο όριο συνάρτησης σε σημείο	98
6.6	Άπειρο όριο συνάρτησης σε σημείο	100
6.7	Όριο συνάρτησης στο άπειρο	101
6.8	Ιδιότητες συνεχών συναρτήσεων.....	103
6.9	Παραγωγίσιμες συναρτήσεις – Εφαπτομένη καμπύλης	104
6.10	Παράγωγος βασικών συναρτήσεων	106
6.11	Κανόνες παραγωγίσιμης.....	106
6.12	Η παράγωγος ως ρυθμός μεταβολής.....	107
6.13	Τα θεωρήματα Rolle και μέσης τιμής.....	108
6.14	Σταθερή συνάρτηση και ισότητα παραγώγων.....	109
6.15	Μονοτονία και τοπικά ακρότατα συνάρτησης.....	109
6.16	Κυρτότητα και σημεία καμπής	111
6.17	Απροσδιόριστες μορφές	113
6.18	Ασύμπτωτες γραφικής παράστασης.....	115
6.19	Χάραξη γραφικής παράστασης.....	116
6.20	Αόριστο ολοκλήρωμα	117
6.21	Το ορισμένο ολοκλήρωμα	126
6.22	Η συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t)dt$	127
6.23	Εμβαδόν χωρίου.....	128

7^ο**ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ**

Κεφάλαιο

7.1 Οι μιγαδικοί αριθμοί και οι πράξεις τους.....	129
7.2 Μέτρο μιγαδικού αριθμού.....	131
7.3 Τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού αριθμού.....	132
7.4 Πολυωνυμικές εξισώσεις στο \mathbb{C}	133

8^ο**ΠΕΡΙΓΡΑΦΙΚΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ**

Κεφάλαιο

8.1 Βασικές έννοιες.....	135
8.2 Γραφικές παραστάσεις.....	136
8.3 Ομαδοποίηση παρατηρήσεων.....	138
8.4 Καμπύλη συχνοτήτων.....	140
8.5 Μέτρα θέσης και διασποράς.....	141

9^ο**ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ**

Κεφάλαιο

9.1 Δειγματικός χώρος – Ενδεχόμενα.....	145
9.2 Πράξεις ενδεχομένων.....	146
9.3 Ασυμβίβαστα ενδεχόμενα.....	147
9.4 Η έννοια της πιθανότητας.....	148
9.5 Κανόνες ορισμού των πιθανοτήτων.....	149

1^ο

ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Αλγεβρικός Λογισμός

1.1 Σύνολα αριθμών

- Σύνολο φυσικών αριθμών $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.
- Σύνολο ακέραιων αριθμών $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$.
- **Ρητοί** αριθμοί ονομάζονται οι αριθμοί που γράφονται ως κλάσματα ακεραίων και το σύνολό τους συμβολίζεται με \mathbb{Q} .

Οι ρητοί αριθμοί είναι απλοί δεκαδικοί ή περιοδικοί δεκαδικοί ή ακέραιοι.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{\alpha}{\beta} / \alpha, \beta \in \mathbb{Z}, \beta \neq 0 \right\}$$

(γράφοντας $\alpha \in \mathbb{Z}$, εννοούμε ότι ο αριθμός α ανήκει στο σύνολο \mathbb{Z} των ακεραίων).

- Οι αριθμοί που δε γράφονται ως κλάσματα ακεραίων, οπότε είναι μη περιοδικοί δεκαδικοί, ονομάζονται **άρρητοι**. Οι ρητοί και οι άρρητοι μαζί δίνουν τους πραγματικούς αριθμούς, που το σύνολό τους συμβολίζεται με \mathbb{R} . Επομένως, το σύνολο των άρρητων αριθμών μπορούμε να το γράψουμε $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Π.χ. άρρητοι είναι οι αριθμοί $\sqrt{2}$, $2 + \sqrt{5}$ και π . Ο αριθμός $\pi \approx 3,14159$ είναι ο λόγος του μήκους ενός κύκλου προς τη διάμετρό του.

Προφανώς, ισχύει

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

όπου το σύμβολο \subset σημαίνει γνήσιο υποσύνολο.

- Αν από ένα σύνολο A εξαιρέσουμε τον αριθμό 0, τότε συμβολίζεται με A^* .
Έτσι, π.χ. με \mathbb{N}^* συμβολίζουμε το σύνολο των θετικών ακεραίων.

1.2 Οι πράξεις στο \mathbb{R} και οι ιδιότητές τους

- Η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός πραγματικών αριθμών είναι αντιμεταθετικές και προσεταιριστικές πράξεις
 $\alpha + \beta = \beta + \alpha$, $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$
 $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$, $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$
- Ο πολλαπλασιασμός είναι επιμεριστική πράξη ως προς την πρόσθεση και την αφαίρεση
 $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$, $\alpha \cdot (\beta - \gamma) = \alpha \cdot \beta - \alpha \cdot \gamma$
- Δύο αριθμοί με άθροισμα 0 λέγονται αντίθετοι, ενώ δύο αριθμοί με γινόμενο 1 λέγονται αντίστροφοι
 $x + (-x) = 0$, $x \cdot \frac{1}{x} = 1$ ($x \neq 0$)
- Η διαγραφή ισχύει πάντα στην πρόσθεση, ενώ στον πολλαπλασιασμό διαγράφεται μη μηδενικός παράγοντας
 - 1) $\alpha + \beta = \alpha + \gamma \Leftrightarrow \beta = \gamma$
 - 2) Αν $\alpha \neq 0$, τότε: $\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \gamma \Leftrightarrow \beta = \gamma$
- Ισχύουν οι ισοδυναμίες:
 - 1) $\alpha \cdot \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ ή $\beta = 0$
 - 2) $\alpha \cdot \beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0$ και $\beta \neq 0$
 - 3) $\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ και $\beta = 0$

1.3 Δυνάμεις πραγματικών αριθμών

Έστω πραγματικός αριθμός a .

■ Αν $v \in \mathbb{N}^*$, τότε $a^v = a \cdot a \cdots a$ (v το πλήθος των παραγόντων).

■ Αν $v=0$ και $a \neq 0$, τότε $a^0 = 1$.

■ Αν $a \neq 0$, τότε $a^{-v} = \frac{1}{a^v}$, όπου v θετικός ακέραιος.

■ Αν $\mu, v \in \mathbb{N}^*$ και $a \geq 0$, τότε $a^{\frac{\mu}{v}} = \sqrt[v]{a^\mu}$,

ενώ για $a > 0$ ισχύει $a^{-\frac{\mu}{v}} = \frac{1}{\sqrt[v]{a^\mu}}$.

Π.χ. $81^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{81^3} = (\sqrt[4]{81})^3 = 3^3 = 27$ ή $81^{\frac{3}{4}} = (3^4)^{\frac{3}{4}} = 3^3 = 27$.

■ Έστω $a > 0$ και x άρρητος. Αν P_n είναι η δεκαδική προσέγγιση του x με n δεκαδικά ψηφία, καθώς το n αυξάνει απερίοριστα ($n \rightarrow +\infty$), ο αριθμός a^{P_n} προσεγγίζει ολοένα και περισσότερο έναν συγκεκριμένο θετικό αριθμό, που τον συμβολίζουμε με a^x .

Αν $x > 0$, τότε ορίζουμε $0^x = 0$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $1^x = 1$ και $a^x > 0$.

■ Αν $a, \beta > 0$ και $x, y \in \mathbb{R}$, τότε

1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ 2) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

3) $(a^x)^y = a^{xy}$ 4) $(a\beta)^x = a^x \beta^x$ 5) $\left(\frac{a}{\beta}\right)^x = \frac{a^x}{\beta^x}$

■ Αν $a > 0$ και $a \neq 1$, τότε: $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$.

Αν $a > 1$, τότε: $a^x > a^y \Leftrightarrow x > y$.

Αν $0 < a < 1$, τότε: $a^x > a^y \Leftrightarrow x < y$.

- Αν $\alpha, \beta > 0$ και $x, y \in \mathbb{R}^*$, τότε: $\alpha^x = \beta^y \Leftrightarrow \alpha = \beta^{\frac{y}{x}} \Leftrightarrow \beta = \alpha^{\frac{x}{y}}$.
- Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και n θετικός ακέραιος, τότε:
 - 1) για n περιττό ισχύει: $\alpha^n = \beta^n \Leftrightarrow \alpha = \beta$
 - 2) για n άρτιο ισχύει: $\alpha^n = \beta^n \Leftrightarrow \alpha = \beta$ ή $\alpha = -\beta$.

1.4 Αναλογίες

- Κάθε ισότητα λόγων, όπως η $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, ονομάζεται αναλογία και ισχύει:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha\delta = \beta\gamma \quad (\text{«χιαστή» ιδιότητα}).$$
- Σε μια αναλογία μπορεί να γίνει εναλλαγή των άκρων ή των μέσων όρων.
 - 1) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\delta}{\beta} = \frac{\gamma}{\alpha}$
 - 2) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$
- Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \dots = \frac{\mu}{\nu} = \lambda$, τότε και $\frac{\alpha + \gamma + \dots + \mu}{\beta + \delta + \dots + \nu} = \lambda$.

1.5 Ταυτότητες

- $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ και $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$
- $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$
- $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$
- $(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma$