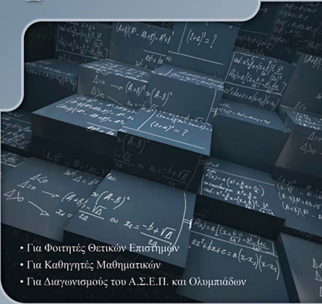
ΘΑΝΑΣΗ Π. ΞΕΝΟΥ

ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ



- Για Φοιτητές Θετικών Επιστημών
- Για Καθηγητές Μαθηματικών
- Για Διαγωνισμούς του Α.Σ.Ε.Π. και Ολυμπιάδων

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

Με το συγγραφέα επικοινωνείτε:
Τηλ. 2310.348.086, e-mail: thanasisxenos@yahoo.gr

ISBN 978-960-456-208-4

Φωτοστοιχειοθεσία
Εκτύπωση
Βιβλιοδεσία

Π. ΖΗΤΗ & Σια ΟΕ
18ο χλμ Θεσσαλονίκης - Περαίας
Τ.Θ. 4171 • Περαία Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19
Τηλ.: 2392 072.222 - Fax: 2392 072.229 • e-mail: info@ziti.gr

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
www.ziti.gr

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ - ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΔΙΑΘΕΣΗ:
Αρμενοπούλου 27 - 546 35 Θεσσαλονίκη • Τηλ.: 2310 203.720 • Fax 2310 211.305
e-mail: sales@ziti.gr

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΑΘΗΝΩΝ - ΕΝΩΣΗ ΕΚΔΟΤΩΝ ΒΙΒΛΙΟΥ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ:
Στοά του Βιβλίου (Πεσμαζόγλου 5) - 105 64 ΑΘΗΝΑ • Τηλ.-Fax: 210 3211.097

ΑΠΟΘΗΚΗ ΑΘΗΝΩΝ - ΠΩΛΗΣΗ ΧΟΝΔΡΙΚΗ:
Ασκληπιού 60 - Εξάρχεια 114 71, Αθήνα • Τηλ.-Fax: 210 3816.650 • e-mail: athina@ziti.gr

ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ: www.ziti.gr

Πρόλογος

Το βιβλίο αυτό απευθύνεται σε φοιτητές θετικών επιστημών, σε καθηγητές μαθηματικών και σε συμμετέχοντες σε διαγωνισμούς ΑΣΕΠ και Ολυμπιάδων.

Είναι ένα πλήρες σύγγραμμα της κλασικής Θεωρίας Αριθμών. Η θεωρία αναπτύσσεται διεξοδικά και πλαισιώνεται με πλήθος παραδειγμάτων και εφαρμογών, που αποσαφηνίζουν με κάθε λεπτομέρεια όλες τις έννοιες.

Περιέχει τα παρακάτω οκτώ κεφάλαια.

1) Ευκλείδεια διαίρεση ακεραίων
2) Διαιρετότητα ακεραίων
3) Μέγιστος κοινός διαιρέτης - Ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο
4) Πρώτοι αριθμοί
5) Ισοτιμίες
6) Αριθμητικές και πολλαπλασιαστικές συναρτήσεις
7) Πολυωνυμικές ισοτιμίες και τετραγωνικά υπόλοιπα
8) Διοφαντικές εξισώσεις.

Σε κάθε κεφάλαιο προτείνεται για λύση ένας μεγάλος αριθμός ασκήσεων κλιμακούμενης δυσκολίας, για τις οποίες, στο τέλος του βιβλίου, δίνονται σύντομες λύσεις ή υποδείξεις για τη λύση τους.

Απρίλιος 2010 *Θανάσης Ξένος*

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Θεωρία Αριθμών είναι ο κλάδος των Μαθηματικών που μελετά τις ιδιότητες και κυρίως τη διαιρετότητα των θετικών ακέραιων αριθμών.

Πολλά προβλήματα της Θεωρίας Αριθμών μελετήθηκαν από τους αρχαίους Έλληνες.

Οι Πυθαγόρειοι (γύρω στο 500 π.Χ.) μελέτησαν τους πρώτους αριθμούς, ανέλυσαν σύνθετους αριθμούς σε γινόμενο πρώτων παραγόντων και ανέπτυξαν αλγόριθμους για την εύρεση του ΜΚΔ και του ΕΚΠ δύο ακέραιων αριθμών.

Το πρώτο μαθηματικό βιβλίο στην αρχαία Ελλάδα είναι τα "Στοιχεία" του Ευκλείδη (γύρω στο 300 π.Χ.), που αποτελείται από 13 βιβλία. Στο 7^{ο}, 8^{ο}, και 9^{ο} βιβλίο αναπτύσσεται η Θεωρία Αριθμών. Μεταξύ των άλλων, περιέχονται προτάσεις για την εύρεση του Μ.Κ.Δ., το μονοσήμαντο της ανάλυσης φυσικού αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων, απόδειξη της ύπαρξης άπειρων πρώτων αριθμών (ένα αριστούργημα της μαθηματικής σκέψης) και μια μέθοδος προσδιορισμού τέλειων αριθμών. Ένας αριθμός ονομάζεται τέλειος, αν ισούται με το άθροισμα των γνήσιων διαιρετών του, όπως π.χ. ο $6 = 1+2+3$).

Ο Ερατοσθένης (γύρω στο 230 π.Χ.) επινόησε μέθοδο κατασκευής πρώτων αριθμών (κόσκινο του Ερατοσθένη).

Ο Διόφαντος ο Αλεξανδρινός (γύρω στο 250 μ.Χ.) στο έργο του "Αριθμητικά" μελέτησε την εύρεση των ακέραιων λύσεων μιας εξίσωσης (Διοφαντική εξίσωση).

Μέχρι το Μεσαίωνα, οι αριθμοθεωρητικές γνώσεις των αρχαίων Ελλήνων διαφυλάχτηκαν από τους Άραβες, αφού πολλά έργα μεταφράστηκαν στην αραβική γλώσσα.

Ιδρυτής της σύγχρονης Θεωρίας Αριθμών θεωρείται ο Fermat (1601-1665), Γάλλος νομικός και μαθηματικός. Χαρακτηριστικά αναφέρουμε:

i) Το Θεώρημα Fermat, $\alpha^{p-1} \equiv 1 (\bmod p)$, όπου p πρώτος και α μη διαιρετός με το p και

ii) την εικασία Fermat (που αποδείχθηκε το 1995), ότι η διοφαντική εξίσωση $x^n + y^n = z^n$ με $n \geq 3$ δεν έχει θετικές ακέραιες λύσεις.

Μεγάλη συνεισφορά στην ανάπτυξη της Θεωρίας Αριθμών είχαν ο Euler (1707 - 1783) και ο Gauss (1777 - 1855) που χαρακτήρισε τη Θεωρία Αριθμών ως τη "βασίλισσα των Μαθηματικών".

Αναφέρουμε μερικά από τα άλυτα προβλήματα (εικασίες) της Θεωρίας Αριθμών.

α) Η εικασία Goldbach

Κάθε άρτιος αριθμός μεγαλύτερος του 2 μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δύο πρώτων αριθμών.

β) Η εικασία των δίδυμων πρώτων αριθμών

Υπάρχουν άπειρα ζεύγη δίδυμων πρώτων αριθμών.
(Δύο πρώτοι αριθμοί που διαφέρουν κατά 2 ονομάζονται δίδυμοι πρώτοι αριθμοί).

γ) Οι αριθμοί του Mersenne

Υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί της μορφής $2^p - 1$, όπου P πρώτος.
Οι αριθμοί αυτοί ονομάζονται αριθμοί του Mersenne, αφού ο Γάλλος μοναχός και μαθηματικός Μερσέν (1588 - 1648) ήταν ο πρώτος που ασχολήθηκε με τους αριθμούς αυτούς.

Σημειώνουμε εδώ ότι, αν ο $2^n - 1$ είναι πρώτος, τότε και ο n είναι πρώτος.

Το αντίστροφο δεν αληθεύει, αφού για $n = 11$ είναι $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89$.

Ο μεγαλύτερος γνωστός αριθμός Mersenne είναι ο $2^p - 1$ με $p = 43.112.609$ που έχει 12.978.189 ψηφία και ανακαλύφθηκε τον Αύγουστο του 2008).

δ) Οι αριθμοί Fermat

Υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί της μορφής $2^{2^n} + 1$, $n \in \mathbb{N}$.
Οι πρώτοι αριθμοί της μορφής $2^{2^n} + 1$ ονομάζονται αριθμοί του Fermat. Ο Fermat, που ασχολήθηκε με τους αριθμούς αυτούς, πίστευε ότι για κάθε n ο αριθμός $2^{2^n} + 1$ είναι πρώτος. Για $n = 0, 1, 2, 3, 4$ προκύπτουν πρώτοι αριθμοί. Για $n = 5$, όμως, όπως απέδειξε ο Euler, ο αριθμός $2^{32} + 1$ είναι σύνθετος, αφού έχει διαιρέτη τον αριθμό 641.

Σημειώνουμε, ακόμη ότι αν ο $2^k + 1$ είναι πρώτος, τότε ο k είναι δύναμη του 2.

ε) Η εικασία των τέλειων αριθμών

Όλοι οι τέλειοι αριθμοί είναι άρτιοι.

Οι τέλειοι αριθμοί είναι εξαιρετικά σπάνιοι. Μέχρι σήμερα έχουν ανακαλυφθεί 43 τέλειοι αριθμοί. Η τελευταία πρόταση στο 9ο βιβλίο των "Στοιχείων" του Ευκλείδη αναφέρει ότι:

Αν ο αριθμός $2^n - 1$ είναι πρώτος, τότε ο αριθμός $2^{n-1} \cdot (2^n - 1)$ είναι τέλειος.

Έτσι, π.χ. από τους πρώτους αριθμούς $3 = 2^2 - 1$, $7 = 2^3 - 1$, $31 = 2^5 - 1$, $127 = 2^7 - 1$ και $8191 = 2^{13} - 1$ προκύπτουν οι τέλειοι αριθμοί 6, 28, 496, 8128 και 33550336.

Ο 10ος τέλειος αριθμός είναι ο τεράστιος αριθμός

$191\,561\,942\,608\,236\,107\,294\,793\,378\,084\,303\,638\,130\,997\,321\,548\,169\,216$.

Κεφάλαιο $1^{\text{ο}}$

Ευκλείδεια Διαίρεση Ακεραίων

- Οποιοδήποτε μη κενό υποσύνολο του συνόλου $\mathbb{N}=\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ των φυσικών αριθμών έχει ελάχιστο στοιχείο. Η πρόταση αυτή είναι γνωστή ως "**αρχή της καλής διάταξης**" και ενώ δείχνει απλοϊκή, έχει δύσκολη απόδειξη.

Θεώρημα 1.1

Κάθε μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{N}$ έχει ελάχιστο στοιχείο.

Απόδειξη

Υποθέτουμε ότι υπάρχει μη κενό υποσύνολο A του $\mathbb{N}$, το οποίο δεν έχει ελάχιστο στοιχείο.

Θα αποδείξουμε ότι για οποιοδήποτε στοιχείο α του A ισχύει $\alpha \geq n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Για $n=0$ έχουμε $\alpha \geq 0$ για κάθε $\alpha \in A$. Υποθέτουμε ότι για κάποιον φυσικό $n=m$ ισχύει $\alpha \geq m$ για κάθε $\alpha \in A$.

Αν $m \in A$, τότε το m θα ήταν ελάχιστο στοιχείο του A, που είναι άτοπο.

Επομένως, $m \notin A$ και αφού $\alpha > m$, θα είναι $\alpha \geq m+1$.

Σύμφωνα, λοιπόν, με την αρχή της μαθηματικής επαγωγής ισχύει

$$\alpha \geq n, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}. \qquad (1)$$

Αν τώρα στην (1) θέσουμε όπου n το φυσικό $\alpha+1$, θα έχουμε $\alpha \geq \alpha+1$, που είναι άτοπο.

Άρα, κάθε μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{N}$ έχει ελάχιστο στοιχείο.

Σχόλιο: Για φυσικούς αριθμούς m και n ισχύει:

$$m > n \Rightarrow m \geq n+1$$

- Θα αποδείξουμε το παρακάτω θεώρημα, που είναι γνωστό ως "**Θεώρημα της Ευκλείδειας διαίρεσης**".

Θεώρημα 1.2

Αν δοθούν δύο ακέραιοι α και β με $\beta \neq 0$, τότε υπάρχουν μοναδικοί ακέραιοι κ και υ έτσι, ώστε να ισχύει

$$\alpha = \kappa\beta + \upsilon \quad \text{με} \quad 0 \leq \upsilon < |\beta|$$

Απόδειξη

i) Θεωρούμε το σύνολο των ακεραίων της μορφής $\alpha - \beta x$ με $x \in \mathbb{Z}$, δηλαδή το σύνολο $A = \{\alpha - \beta x \mid x \in \mathbb{Z}\}$.

Για $x = |\alpha|$ και $\beta < 0$, ο αριθμός $\alpha - \beta|\alpha|$ είναι φυσικός. Επίσης, για $x = -|\alpha|$ και $\beta > 0$, ο αριθμός $\alpha + \beta|\alpha|$ είναι φυσικός. Έτσι, το σύνολο A περιέχει φυσικούς αριθμούς. Έστω υ ο ελάχιστος φυσικός αριθμός του A. Υπάρχει ακέραιος κ με $\upsilon = \alpha - \beta\kappa$, δηλαδή $\alpha = \beta\kappa + \upsilon$ με $\upsilon \geq 0$.

Θα αποδείξουμε, τώρα, ότι $\upsilon < |\beta|$, δηλαδή $\upsilon - |\beta| < 0$.

Για $\beta > 0$ είναι $\upsilon - |\beta| = \upsilon - \beta = \alpha - \beta\kappa - \beta = \alpha - (\kappa+1)\beta = \alpha - x\beta$, με $x = \kappa + 1$.

Για $\beta < 0$ είναι $\upsilon - |\beta| = \upsilon + \beta = \alpha - \beta\kappa + \beta = \alpha - (\kappa-1)\beta = \alpha - x\beta$, με $x = \kappa - 1$.

Επομένως, $\upsilon - |\beta| \in A$. Αν $\upsilon - |\beta| \geq 0$, τότε $\upsilon - |\beta| \geq \upsilon$ (αφού υ το ελάχιστο στοιχείο του Α), δηλαδή $|\beta| \leq 0$, που είναι άτοπο (αφού $\beta \neq 0$). Άρα, $\upsilon - |\beta| < 0$.

ii) Θα αποδείξουμε ότι οι ακέραιοι κ και υ είναι μοναδικοί.

Υποθέτουμε ότι και για τους ακέραιους κ' και υ' ισχύει

$$\alpha = \beta\kappa' + \upsilon' \quad \text{με} \quad 0 \leq \upsilon' < |\beta|.$$

Τότε $\beta\kappa + \upsilon = \beta\kappa' + \upsilon'$ ή $\beta(\kappa - \kappa') = \upsilon' - \upsilon$.

Αν $\kappa \neq \kappa'$, τότε $|\kappa - \kappa'| \geq 1$, οπότε $|\upsilon' - \upsilon| = |\beta| \cdot |\kappa - \kappa'| \geq |\beta|$.

Από τις ανισότητες $0 \leq \upsilon < |\beta|$ και $0 \leq \upsilon' < |\beta|$, έχουμε

$$-|\beta| < -\upsilon \leq 0 \quad \text{και} \quad 0 \leq \upsilon' < |\beta|.$$

Με πρόσθεση αυτών έχουμε $-|\beta| < \upsilon' - \upsilon < |\beta|$, δηλαδή $|\upsilon' - \upsilon| < |\beta|$ και η ανισότητα $|\upsilon' - \upsilon| \geq |\beta|$ που βρήκαμε παραπάνω δεν ισχύει.

Άρα, $\kappa = \kappa'$ και η ισότητα $\beta(\kappa - \kappa') = \upsilon' - \upsilon$ δίνει $\upsilon' = \upsilon$.

- Η διαδικασία εύρεσης των ακεραίων κ και υ ονομάζεται **ευκλείδεια ή αλγοριθμική διαίρεση** του α με τον β. Ο κ ονομάζεται **πηλίκο** και ο υ **υπόλοιπο** της διαίρεσης $\alpha : \beta$. Αν $\upsilon = 0$, τότε η διαίρεση $\alpha : \beta$ ονομάζεται **τέλεια**.

  Έστω ότι οι α, β είναι θετικοί ακέραιοι και ισχύει

$\alpha = \kappa\beta + \upsilon$, $\kappa \in \mathbb{N}^*$ και $0 < \upsilon < \beta$.

i) Επειδή $\alpha = (-\kappa)\cdot(-\beta) + \upsilon$, η διαίρεση $\alpha : (-\beta)$ δίνει πηλίκο $-\kappa$ και υπόλοιπο υ.

ii) Ισχύει

$$-\alpha = -\kappa\beta - \upsilon = -\kappa\beta - \beta + \beta - \upsilon = \beta\cdot(-\kappa - 1) + (\beta - \upsilon) \quad \text{και} \quad 0 < \beta - \upsilon < \beta.$$

Άρα, η διαίρεση $(-\alpha) : \beta$ δίνει πηλίκο $-\kappa - 1$ και υπόλοιπο $\beta - \upsilon$.

iii) Ομοίως, επειδή $-\alpha = (-\beta)(\kappa + 1) + (\beta - \upsilon)$, η διαίρεση $(-\alpha) : (-\beta)$ δίνει πηλίκο $\kappa + 1$ και υπόλοιπο $\beta - \upsilon$.

iv) Αν $\alpha < \beta$, επειδή $\alpha = 0\cdot\beta + \alpha$ και $0 < \alpha < \beta$, η διαίρεση $\alpha : \beta$ δίνει πηλίκο 0 και υπόλοιπο α.

- Αν διαιρέσουμε τον ακέραιο α με το φυσικό αριθμό $\beta \neq 0$, τότε ισχύει

$$\alpha = \kappa\beta + \upsilon \quad \text{με} \quad \kappa \in \mathbb{Z} \quad \text{και} \quad \upsilon = 0, 1, 2, \ldots, \beta - 1.$$

Επομένως, ο α παίρνει μία από τις μορφές

$$\kappa\beta, \quad \kappa\beta + 1, \quad \kappa\beta + 2, \ldots, \kappa\beta + (\beta - 1).$$

Στην ειδική περίπτωση $\beta = 2$, οι μορφές του α είναι $\alpha = 2\kappa$ (**άρτιος**) και $\alpha = 2\kappa + 1$ (**περιττός**).
Επίσης, αν θεωρήσουμε τη διαίρεση $\alpha : 3$, τότε ο α παίρνει μία από της μορφές 3κ, $3\kappa + 1$, $3\kappa + 2$ $(\kappa \in \mathbb{Z})$.

- Σχετικά με τους άρτιους και τους περιττούς ακέραιους, αναφέρουμε ορισμένες βασικές ιδιότητες.

α) Το άθροισμα, η διαφορά και το γινόμενο δύο άρτιων αριθμών είναι άρτιος. Το άθροισμα και η διαφορά δύο περιττών είναι άρτιος, ενώ το γινόμενο δύο περιττών είναι περιττός. Το γινόμενο ενός άρτιου και ενός περιττού είναι περιττός.
Για παράδειγμα, αν οι α, β είναι περιττοί, τότε $\alpha = 2\kappa + 1$ και $\beta = 2\lambda + 1$, όπου $\kappa, \lambda \in \mathbb{Z}$ και ισχύει

$$\alpha + \beta = (2\kappa + 1) + (2\lambda + 1) = 2\kappa + 2\lambda + 2 = 2(\kappa + \lambda + 1) = \text{άρτιος}$$
$$\alpha\cdot\beta = (2\kappa + 1)\cdot(2\lambda + 1) = 4\kappa\lambda + 2\kappa + 2\lambda + 1 = 2\cdot(2\kappa\lambda + \kappa + \lambda) + 1 = \text{περιττός}.$$

β) Το γινόμενο δύο διαδοχικών ακεραίων είναι άρτιος αριθμός, επειδή ο ένας από τους δύο είναι άρτιος και ο άλλος περιττός.

$$\boxed{n(n+1) = 2\kappa, \quad \kappa \in \mathbb{Z}}$$

γ) Αν $\alpha \in \mathbb{Z}$ και $n \in \mathbb{N}^*$, τότε ισχύουν οι ισοδυναμίες:

> **i)** α άρτιος $\Leftrightarrow \alpha^n$ άρτιος
>
> **ii)** α περιττός $\Leftrightarrow \alpha^n$ περιττός

Απόδειξη

i) Αν $\alpha = 2\kappa$, $\kappa \in \mathbb{Z}$, τότε $\alpha^n = (2\kappa)^n = 2^n \cdot \kappa^n = 2\cdot(2^{n-1}\cdot\kappa^n) =$ άρτιος.

ii) Αν $\alpha = 2\kappa+1$, $\kappa \in \mathbb{Z}$, τότε $\alpha^n = (2k+1)(2\kappa+1)\ldots(2\kappa+1) = 2\mu+1 =$ περιττός $(\mu \in \mathbb{Z})$.

Αντιστρόφως:

i) Έστω $\alpha^n =$ άρτιος. Αν ο α ήταν περιττός, τότε ο α^n θα ήταν κι αυτός περιττός, άτοπο. Άρα, $\alpha =$ άρτιος.

ii) Ομοίως, αν ο α^n είναι περιττός, τότε και ο α είναι περιττός.

δ) Το τετράγωνο κάθε περιττού αριθμού παίρνει τη μορφή $8\kappa+1$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

$$\boxed{(2n+1)^2 = 8\kappa+1, \quad \kappa \in \mathbb{Z}.}$$

Πράγματι, $(2n+1)^2 = 4n^2+4n+1 = 4n(n+1)+1 = 4\cdot 2\kappa+1 = 8\kappa+1$.

ε) Το άθροισμα και η διαφορά δύο ακεραίων είναι και οι δύο άρτιοι ή και οι δύο περιττοί. Αν α, β ακέραιοι, τότε ισχύει:

> **i)** $\alpha+\beta =$ άρτιος $\Leftrightarrow \alpha-\beta =$ άρτιος
>
> **ii)** $\alpha+\beta =$ περιττός $\Leftrightarrow \alpha-\beta =$ περιττός

Οι ισοδυναμίες αυτές προκύπτουν από το γεγονός ότι ο αριθμός $(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)$ ισούται με 2β και είναι άρτιος, οπότε οι αριθμοί $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$ είναι και οι δύο άρτιοι ή και οι δύο περιττοί.

στ) Κάθε άρτιος φυσικός γράφεται ως γινόμενο μιας δύναμης του 2 και ενός περιττού.

Εφαρμογή 1.1

Αν διαιρεθούν n διαδοχικοί θετικοί ακέραιοι με τον n, τότε μόνον μία από τις διαιρέσεις αυτές είναι τέλεια.

Απόδειξη

Θεωρούμε τους n θετικούς ακέραιους $\alpha+1,\ \alpha+2,\ \ldots,\ \alpha+n$ και θα αποδείξουμε ότι μόνον μία από τις διαιρέσεις $(\alpha+1):n$, $(\alpha+2):n$, …, $(\alpha+n):n$ δίνει υπόλοιπο 0. Υποθέτουμε ότι τα πηλίκα των διαιρέσεων αυτών είναι οι φυσικοί αριθμοί $\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_n$ και τα υπόλοιπα είναι $\upsilon_1, \upsilon_2, \ldots, \upsilon_n$ αντίστοιχα. Τα υπόλοιπα ανήκουν στο σύνολο $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$.

Θεωρούμε δύο οποιεσδήποτε από τις διαιρέσεις αυτές, τις $(\alpha+\lambda):n$ και $(\alpha+\mu):n$ με $\lambda \neq \mu$. Ισχύουν οι ισότητες

$$\alpha+\lambda=\kappa_\lambda \cdot n+\upsilon_\lambda \quad (1) \qquad \text{και} \qquad \alpha+\mu=\kappa_\mu \cdot n+\upsilon_\mu \quad (2)$$

Αν $\upsilon_\lambda=\upsilon_\mu$, με αφαίρεση των (1), (2) κατά μέλη, έχουμε

$$\lambda-\mu=n(\kappa_\lambda-\kappa_\mu)$$

και αυτό σημαίνει ότι ο $\lambda-\mu$ είναι πολλαπλάσιο του n, που είναι άτοπο, αφού

$$0 \neq \lambda-\mu < n.$$

Έτσι, $\upsilon_\lambda \neq \upsilon_\mu$. Τα υπόλοιπα, λοιπόν $\upsilon_1, \upsilon_2, \ldots, \upsilon_n$ είναι ανά δύο διαφορετικά, έχουν πλήθος n και ανήκουν στο σύνολο $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$.

Άρα, πρόκειται για τους ακέραιους $0, 1, 2, \ldots, n-1$ κι επομένως μόνον μία από τις παραπάνω διαιρέσεις δίνει υπόλοιπο 0.

Εφαρμογή 1.2

Να αποδειχθεί ότι μια δύναμη του 2, με εκθέτη θετικό ακέραιο, δε γράφεται ως άθροισμα διαδοχικών φυσικών αριθμών.

Απόδειξη

Υποθέτουμε ότι ο αριθμός 2^n, $n \in \mathbb{N}^*$ γράφεται ως άθροισμα διαδοχικών φυσικών, δηλαδή

$$2^n=\lambda+(\lambda+1)+(\lambda+2)+\ \ldots\ +(\lambda+\kappa), \quad \lambda, \kappa \in \mathbb{N} \quad \text{και} \quad \kappa \neq 0. \qquad (1)$$

Το δεύτερο μέλος της (1) είναι άθροισμα $\kappa+1$ όρων αριθμητικής προόδου και ισούται με

$$\frac{\kappa+1}{2}\cdot[\lambda+(\lambda+\kappa)]=\frac{1}{2}(\kappa+1)(2\lambda+\kappa)$$

Έτσι, η (1) γράφεται

$$2^{n+1}=(\kappa+1)\cdot(2\lambda+\kappa) \quad \text{με} \quad \kappa+1>1 \quad \text{και} \quad 2\lambda+\kappa\geq 1 \qquad (2)$$

i) Αν $\kappa=1$, η (2) γράφεται $2\lambda+1=2^n$, που είναι άτοπο, επειδή ο $2\lambda+1$ είναι περιττός, ενώ ο 2^n άρτιος.

ii) Αν $\kappa>1$, τότε $2\lambda+\kappa>1$. Για να ισχύει η (2), πρέπει να υπάρχουν θετικοί ακέραιοι μ και ρ, για τους οποίους ισχύουν

$\kappa+1=2^{\mu}$ και $2\lambda+\kappa=2^{\rho}$.

Τότε ο κ θα είναι περιττός, οπότε ο $2\lambda+\kappa$ θα είναι κι αυτός περιττός, ενώ ο 2^{ρ} είναι άρτιος.

Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι ο αριθμός 2^n, $n\in\mathbb{N}^*$ δε γράφεται ως άθροισμα διαδοχικών φυσικών αριθμών.

(Σημειώνουμε ότι για $n=0$ ισχύει $2^0=1=0+1$).

Εφαρμογή 1.3

Αν $\alpha,\beta\in\mathbb{N}^*$ με $\alpha>\beta$, να αποδειχθεί ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του α με τον β είναι μικρότερο του $\dfrac{\alpha}{2}$.

Απόδειξη

Έστω ότι η διαίρεση του α με τον β δίνει πηλίκο κ και υπόλοιπο υ. Τότε ισχύει

$\alpha=\kappa\beta+\upsilon,\ \kappa\in\mathbb{Z} \quad \text{και} \quad 0\leq\upsilon<\beta$.

Θα αποδείξουμε ότι $\upsilon<\dfrac{\alpha}{2}$ ή $2\upsilon<\alpha$ ή $2\upsilon<\kappa\beta+\upsilon$ ή $\upsilon<\kappa\beta$.

Επειδή $\upsilon<\beta$, αρκεί να αποδειχθεί ότι $\beta\leq\kappa\beta$ ή $\kappa\geq 1$ (αφού $\beta>0$).

Πράγματι, επειδή $\alpha>\beta$ και $\alpha,\beta>0$ το πηλίκο της διαίρεσης $\alpha:\beta$ είναι $\kappa\geq 1$.

Σχόλια: **i)** Αν $\alpha=\beta$, τότε $\kappa=1$ και $\upsilon=0$.

ii) Αν $\alpha<\beta$, τότε $\kappa=0$ και $\upsilon=\alpha$.

Εφαρμογή 1.4

Αν οι α, β, γ είναι θετικοί περιττοί αριθμοί, να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $A=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$ δεν είναι τέλειο τετράγωνο.

Απόδειξη

Αν θέσουμε $\alpha=2\kappa+1$, $\beta=2\lambda+1$ και $\gamma=2\mu+1$, όπου $\kappa,\lambda,\mu\in\mathbb{N}$, τότε

$$A = 4(\kappa\lambda + \lambda\mu + \mu\kappa + \kappa + \lambda + \mu) + 3 = 4n + 3,$$

όπου $n = \kappa\lambda + \lambda\mu + \mu\kappa + \kappa + \lambda + \mu \in \mathbb{N}$.

Υποθέτουμε ότι ο αριθμός $A = 4n+3$ είναι τέλειο τετράγωνο, δηλαδή ότι υπάρχει θετικός ακέραιος ρ με $4n+3 = \rho^2$.

Επειδή ο $4n+3$ είναι περιττός, ο ρ θα είναι κι αυτός περιττός, οπότε ο ρ^2 παίρνει τη μορφή $8\alpha+1,\ \alpha \in \mathbb{N}$. Έτσι, η ισότητα $4n+3 = 8\alpha+1$ γράφεται $4\alpha - 2n = 1$ και είναι αδύνατη, αφού ο αριθμός $4\alpha - 2n$ είναι άρτιος.
Άρα, ο αριθμός $4n+3$ δεν είναι τέλειο τετράγωνο.

Σχόλια:

1) Ένα τέλειο τετράγωνο είναι φυσικός αριθμός που λήγει σε 0 ή 1 ή 4 ή 5 ή 6 ή 9.
Έτσι, π.χ. ο αριθμός $10^n + 2$, $n \in \mathbb{N}$ δεν είναι τέλειο τετράγωνο, επειδή λήγει σε 2.

2) Αν ένας φυσικός αριθμός βρίσκεται ανάμεσα στα τετράγωνα δύο διαδοχικών ακεραίων, τότε δεν είναι τέλειο τετράγωνο.
$\left(\kappa^2 < n < (\kappa+1)^2 \Rightarrow \kappa < \sqrt{n} < \kappa+1 \Rightarrow \sqrt{n} \notin \mathbb{N} \Rightarrow n\right.$ όχι τέλειο τετράγωνο$\left.\right)$.

3) Οι μόνοι διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί που είναι και οι δύο τέλεια τετράγωνα είναι το 0 και το 1.
Πράγματι, αν $n = \kappa^2$ και $n+1 = \lambda^2$ με $n, \kappa, \lambda \in \mathbb{N}$, τότε $\lambda^2 - \kappa^2 = 1$ ή $(\lambda-\kappa)(\lambda+\kappa) = 1$.
Επομένως, $\lambda - \kappa = 1$ και $\lambda + \kappa = 1$, δηλαδή $\lambda = 1$, $\kappa = 0$ και $n = 0$.

Εφαρμογή 1.5

Για ποιες τιμές του θετικού ακεραίου n, ο αριθμός $S_n = 1! + 2! + \ldots + n!$ είναι τέλειο τετράγωνο;

Λύση

Είναι: $S_1 = 1! = 1^2$, $S_2 = 1! + 2! = 3$, $S_3 = 1! + 2! + 3! = 9 = 3^2$ και $S_4 = 33$.

Για $n \geq 5$ ισχύει $S_n = 33 + (5! + 6! + \ldots + n!) = 33 + 10\kappa$, $\kappa \in \mathbb{N}^*$, αφού καθένας από τους αριθμούς $5!, 6!, \ldots, n!$ είναι πολλαπλάσιο του 10 ($5! = 120$ κ.λπ.).

Επειδή ο αριθμός 10κ λήγει σε 0, το άθροισμα $S_n = 33 + 10\kappa$ λήγει σε 3 και δεν μπορεί να είναι τέλειο τετράγωνο.

Άρα, ο αριθμός $1! + 2! + \ldots + n!$ είναι τέλειο τετράγωνο μόνον για $n = 1$ και $n = 3$.

Εφαρμογή 1.6

Αν η διαίρεση του ακεραίου α με το 3 δεν είναι τέλεια, να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του α^n με το 3, όπου $n \in \mathbb{N}^*$.

Λύση

Το υπόλοιπο της διαίρεσης του α με το 3 είναι 1 και 2, οπότε ο α παίρνει τη μορφή $3\kappa+1$ ή $3\kappa+2$, όπου κ ακέραιος.

i) Αν $\alpha = 3\kappa+1$, τότε

$$\alpha^n = 3\kappa+1)^n = (3\kappa)^n + \binom{n}{1}(3\kappa)^{n-1} + \ldots + \binom{n}{n-1}\cdot 3\kappa + 1 = 3\mu+1, \ \mu \in \mathbb{Z}$$

κι επομένως η διαίρεση του α^n με το 3 δίνει υπόλοιπο 1.

ii) Αν $\alpha = 3\kappa+2$, τότε $\alpha^n = (3\kappa+2)^n = 3\mu + 2^n$, $\mu \in \mathbb{Z}$.

- Αν $n = 2\rho$, $\rho \in \mathbb{N}^*$, τότε

  $2^n = 4^\rho = (3+1)^\rho = 3\lambda+1$, $\lambda \in \mathbb{Z}$ και $\alpha^n = 3(\mu+\lambda)+1$,

  οπότε η διαίρεση $\alpha^n : 3$ δίνει πάλι υπόλοιπο 1.

- Αν $n = 2\rho+1$, $\rho \in \mathbb{N}$, τότε $2^n = 2^{2\rho+1} = 2\cdot 4^\rho = 2(3+1)^\rho = 3\lambda+2$, $\lambda \in \mathbb{Z}$

  και η διαίρεση $\alpha^n : 3$ δίνει υπόλοιπο 2.

Σχόλιο: Το ανάπτυγμα του $(\alpha+\beta)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ δίνεται από τον τύπο

$$(\alpha+\beta)^n = \alpha^n + \binom{n}{1}\alpha^{n-1}\beta + \binom{n}{2}\alpha^{n-2}\beta^2 + \ldots + \binom{n}{\kappa}\alpha^{n-\kappa}\beta^\kappa + \ldots + \binom{n}{n-1}\alpha\beta^{n-1} + \beta^n \ ,$$

όπου το σύμβολο $\binom{n}{\kappa} = \dfrac{n!}{\kappa!\,(n-\kappa)!}$ είναι το πλήθος των συνδυασμών των n ανά κ.

Στην περίπτωση που οι α, β είναι ακέραιοι, από το παραπάνω ανάπτυγμα, έχουμε το συμπέρασμα:

$$(\alpha+\beta)^n = \kappa\alpha + \beta^n = \lambda\beta + \alpha^n \quad \text{με} \quad \kappa, \lambda \in \mathbb{Z}.$$

Για παράδειγμα, αν η διαίρεση του α με το β δίνει υπόλοιπο 1, τότε

$$\alpha = \kappa\beta+1, \ \kappa \in \mathbb{Z} \quad \text{και} \quad \alpha^n = (\kappa\beta+1)^n = \lambda\beta + 1^n = \lambda\beta+1, \ \ \lambda \in \mathbb{Z},$$

που σημαίνει ότι και η διαίρεση του α^n με το β δίνει υπόλοιπο 1.

Εφαρμογή 1.7

Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $\log 2$ είναι άρρητος.

Απόδειξη

Υποθέτουμε ότι ο αριθμός $\log 2$ είναι ρητός, δηλαδή είναι κάποιο ανάγωγο κλάσμα $\frac{\kappa}{\lambda}$ με $\kappa, \lambda \in \mathbb{Z}$ και $\lambda \neq 0$.

Επειδή $\log 1 < \log 2 < \log 10$, θα είναι $0 < \frac{\kappa}{\lambda} < 1$, οπότε μπορούμε να θεωρήσουμε θετικούς ακεραίους τους κ, λ και $\lambda > \kappa$.

Η ισότητα $\log 2 = \frac{\kappa}{\lambda}$ σημαίνει ότι $10^{\frac{\kappa}{\lambda}} = 2$ ή $10^{\kappa} = 2^{\lambda}$ ή $5^{\kappa} \cdot 2^{\kappa} = 2^{\lambda}$ ή $5^{\kappa} = 2^{\lambda-\kappa}$, που είναι αδύνατο, αφού ο 5^{κ} είναι περιττός και ο $2^{\lambda-\kappa}$ είναι άρτιος.
Άρα, λοιπόν, ο αριθμός $\log 2$ είναι άρρητος.

Εφαρμογή 1.8

Αν δοθούν δύο θετικοί ακέραιοι α και β, τότε υπάρχει θετικός ακέραιος n με $n\alpha > \beta$.

Απόδειξη

i) Αν $\alpha > \beta$, τότε για κάθε θετικό ακέραιο n ισχύει $n\alpha \geq \alpha > \beta$.

ii) Αν $\alpha \leq \beta$, τότε υπάρχουν φυσικοί αριθμοί κ και υ με

$\beta = \alpha\kappa + \upsilon, \quad 0 \leq \upsilon < \alpha$.

Επομένως, $\alpha\kappa + \alpha > \alpha\kappa + \upsilon$ δηλαδή $(\kappa+1)\alpha > \beta$.
Άρα, για $n = \kappa + 1$, όπου κ το πηλίκο της διαίρεσης $\beta : \alpha$, ισχύει $n\alpha > \beta$.

Σχόλια:

1) Η πρόταση που αποδείξαμε είναι μερική περίπτωση μιας γενικότερης ιδιότητας, που είναι γνωστή ως **Θεώρημα του Αρχιμήδη** και λέει ότι:
"Αν α, β είναι θετικοί αριθμοί, τότε υπάρχει φυσικός αριθμός n με $n\alpha > \beta$".

2) Σύμφωνα με τα παραπάνω, κατάλληλο πολλαπλάσιο ενός θετικού ακεραίου, είναι μεγαλύτερο από οποιονδήποτε θετικό ακέραιο.

3) Μια απλούστερη πρόταση από το Θεώρημα του Αρχιμήδη είναι η εξής:
"Αν δοθεί ένας πραγματικός αριθμός α, τότε υπάρχει φυσικός αριθμός $n > \alpha$", που δείχνει ότι το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών δεν είναι φραγμένο άνω.

Εφαρμογή 1.9

Να βρεθούν οι θετικοί ακέραιοι n για τους οποίους ο αριθμός $\alpha = 2n^3 - 3n^2$ είναι τέλειο τετράγωνο.

Λύση

Επειδή $\alpha = n^2 \cdot (2n-3)$, αρκεί ο αριθμός $2n-3$ να είναι τέλειο τετράγωνο, δηλαδή να υπάρχει θετικός ακέραιος κ με $2n-3=\kappa^2$.
Ο $2n-3$ είναι περιττός, οπότε και ο κ πρέπει να είναι περιττός. Έτσι, με $\kappa = 2\mu+1$, $\mu \in \mathbb{N}$, έχουμε $2n-3 = 4\mu^2+4\mu+1$, δηλαδή $n = 2(\mu^2+\mu+1)$, $\mu \in \mathbb{N}$.

Προτεινόμενες ασκήσεις στο 1ο Κεφάλαιο

1. Αν κ είναι ένας ακέραιος αριθμός, να βρεθεί το υπόλοιπο των διαιρέσεων
α) $(5\kappa-1):5$, **β)** $(3\kappa+1):6$ και **γ)** $(2\kappa-5):8$.

2. Αν η διαίρεση ενός ακεραίου α με το 5 δίνει υπόλοιπο 2, να βρεθεί το υπόλοιπο των διαιρέσεων
α) $\alpha^2:5$, **β)** $\alpha^3:5$ και **γ)** $\alpha^{10}:5$.

3. Να βρεθεί το υπόλοιπο των διαιρέσεων
α) $6^{2008}:5$, **β)** $2^{100}:7$ και **γ)** $(6^n+5^m):10$ με $n, m \in \mathbb{N}^*$.

4. Αν οι n, m είναι θετικοί ακέραιοι, να εξετασθεί αν ο αριθμός $2n+1$ γράφεται ως άθροισμα $2m$ περιττών αριθμών.

5. Να εξετασθεί αν υπάρχει ακέραιος αριθμός x, που επαληθεύει την εξίσωση $x^{2n}+x^n = (2m+1)^{2\kappa+1}$, όπου n, m, κ φυσικοί αριθμοί.

6. Να εξετασθεί αν έχει ακέραιη λύση η εξίσωση
$x(x-1)+(x-1)(x+1)+x(x+1)+3x^n = 10^{10}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

7. Αν ένας άρτιος αριθμός είναι άθροισμα τετραγώνων δύο ακεραίων, να αποδειχθεί ότι συμβαίνει το ίδιο και με το μισό του.

8. Δίνονται δύο θετικοί ακέραιοι α και β με $\alpha \neq \beta$. Να αποδειχθεί ότι οι ευκλείδειες διαιρέσεις $\alpha:(\alpha-\beta)$ και $\beta:(\alpha-\beta)$ δίνουν το ίδιο υπόλοιπο, ενώ τα πηλίκα τους διαφέρουν κατά 1.

9. Δίνονται οι ακέραιοι $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ και β με $\beta \neq 0$ και έστω υ_κ το υπόλοιπο της διαίρεσης $\alpha_\kappa : \beta$, για $\kappa = 1, 2, \ldots, n$.
Να αποδειχθεί ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$ με το β ισούται με το υπόλοιπο της διαίρεσης του $\upsilon_1 + \upsilon_2 + \ldots + \upsilon_n$ με το β.

10. Να βρεθούν όλοι οι ακέραιοι αριθμοί n, για τους οποίους ο αριθμός $\frac{1}{4}(n^3 + 2n + 1)$ είναι ακέραιος.

11. Να βρεθεί το πλήθος των στοιχείων του συνόλου $A = \{7, 7^2, 7^3, \ldots, 7^n\}$, που όταν διαιρεθούν με το 10 δίνουν υπόλοιπο 3.

12. Να εξετασθεί αν έχει ακέραιες λύσεις η εξίσωση $x^2 = 4y + 3$.

13. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $3x^2 - 1 = y^2$ δεν έχει ακέραιες λύσεις.

14. Αν οι αριθμοί α, β, γ είναι ακέραιοι με $\alpha\beta = 2\gamma + 1$, να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του αριθμού $\alpha^2 + \beta^2$ με το 2, το 4 και το 8.

15. Αν η διαίρεση του ακεραίου α με τον ακέραιο $\beta \neq 0$ δίνει πηλίκο κ και υπόλοιπο υ, να βρεθεί ο μεγαλύτερος ακέραιος x, για τον οποίο η διαίρεση του $(\alpha + x)$ με τον β δίνει το ίδιο πηλίκο.

16. Να αποδειχθεί ότι μόνο για ένα φυσικό αριθμό n, ο αριθμός $\alpha = \sqrt{n(n+2)}$ είναι ακέραιος.

17. Αν πάρουμε στην τύχη ένα από τα στοιχεία του συνόλου $A = \{1, 2, 3, \ldots, 10^n\}$, με $n \in \mathbb{N}^*$, ποια είναι η πιθανότητα να είναι τέλειο τετράγωνο;

18. Να αποδειχθεί ότι το γινόμενο τεσσάρων διαδοχικών θετικών ακεραίων είναι πολλαπλάσιο του 8 και δεν είναι τέλειο τετράγωνο.

19. Να βρεθεί τετραψήφιος αριθμός της μορφής $\overline{\alpha\alpha\beta\beta}$, που είναι τέλειο τετράγωνο.

20. Να βρεθεί η τετραγωνική ρίζα του αριθμού $\alpha = 111\ldots1222\ldots25$, όπου το ψηφίο 1 επαναλαμβάνεται n φορές, ενώ το ψηφίο 2 επαναλαμβάνεται $n+1$ φορές.

21. **α)** Αν $n \in \mathbb{N}^*$, να βρεθεί το τελευταίο ψηφίο του αριθμού $n^2 + n + 1$.
β) Να εξετασθεί αν έχει θετικές ακέραιες λύσεις η εξίσωση $x^2 + x + 1 = 2015y$.

22. Αν οι α, β, γ είναι περιττοί αριθμοί, να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ δεν έχει καμιά ρητή ρίζα.

23. Αν διαιρέσουμε 2000 διαδοχικούς ακεραίους με το 2000, να αποδειχθεί ότι μόνον ένας απ' αυτούς δίνει υπόλοιπο 1000.

24. **α)** Να αποδειχθεί ότι για κάθε ακέραιο α υπάρχει ακέραιος κ με $\alpha^4=16\kappa$ ή $16\kappa+1$.

β) Να εξετασθεί αν έχει ακέραιες λύσεις η εξίσωση $x^4+y^4+z^4+w^4=5^6$.

25. Αν α είναι ένας περιττός ακέραιος, να αποδειχθεί ότι η διαίρεση του α^2 με τον 2^n, όπου n ακέραιος με $n>2$, δίνει υπόλοιπο έναν από τους αριθμούς 1, 9, 17, 25, …, 2^n-7.

26. Αν η διαίρεση ενός άρτιου ακεραίου α με το 3 δίνει υπόλοιπο 1, να βρεθεί υπόλοιπο της διαίρεσης του α με το 6.

27. **α)** Να αποδειχθεί ότι το γινόμενο δύο διαδοχικών θετικών ακεραίων δεν είναι τέλειο τετράγωνο.

β) Να αποδειχθεί ότι το γινόμενο τριών διαδοχικών θετικών ακεραίων δεν είναι τέλειος κύβος.

28. Αν ο θετικός ακέραιος α γράφεται ως γινόμενο τεσσάρων διαδοχικών ακεραίων, να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $\sqrt[4]{\alpha}$ δεν είναι ακέραιος.